arXiv:2304.12590v1 [math.GT] 25 Apr 2023

¨洛贝尔多面体的几何与算术性质

NIKOLAY BOGACHEV 和 SAMI DOUBA

Abstract. L¨obell多面体构成了一个三维紧的直角双曲多面体无限族。我们通过初等方法和更具概念性的方法观察到，L¨obell多面体的“短周期”趋近于 0，因此这些多面体产生了一类特别直接的闭双曲三流形例子，其最短闭测地线长度可以任意小；即使按可交换性分类，它们仍构成一个无限族。通过计算这些多面体的数论不变量，我们细化了后一结论，并且精确确定了其中哪些 L¨obell多面体是拟算术的。

1. Introduction

对于每个 $n \geqslant 5$，考虑一个组合三维多面体，其“顶面”和“底面”是 n 边形，而其“侧面”由 $2n$ 个五边形组成（参见图 1 以及图 3 左图，其中给出了 $n = 6$ 情形的示意图）。根据安德烈耶夫定理 [3, 26], , 对于任意 $n \geqslant 5$，这个抽象多面体都可以在 $\mathbb{H}^3$ 中实现为一个紧的直角多面体 L_n。例如，多面体 L_5 就是直角双曲十二面体。

这些多面体 L_n 被称为*L ¨obell* 多面体，名称源自 F. R. L¨obell；他通过将该多面体 L_6的八个副本粘合起来，构造了第一个 [18]闭定向双曲三流形。由 L_n 各面上的反射生成的子群 $\Gamma_n < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$是一个余紧直角反射群；我们将其商空间 $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ 称为*L ¨obell* 轨形。这样的轨形 $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ 可以看作多面体 L_n 本身，其各个面上带有反射奇异性。L¨obell 的例子是直角反射三维轨形的八重流形覆盖这一一般构造的一个特例；参见 [29]或 [32, 第 3 节1]。

关于 L¨obell 多面体，人们已经了解了许多结果。特别是，Vesnin [31] 计算了它们的体积 $\mathrm{vol}(L_n)$，并证明 $\mathrm{vol}(L_n)$是 n的增函数。此外，Mednykh 和 Vesnin [21] 证明，L¨obell 多面体 L_n 的顶面与底部面之间的距离 δ_n 满足

$$\cosh \delta_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

以下是上述恒等式的一个初等推论。

观察 1.1。*L ¨obell 多面体的顶面与底部面之间的距离 δ_n L_n 在 $n \to \infty$ 时趋近于 0。*

由于紧的直角的反射轨形的最短闭测地线长度是两个不相邻壁之间最小距离的两倍（关于双曲轨形的最短闭测地线长度的定义，见第3.4节），并且通过对 [6] 的侧面应用领圈引理，

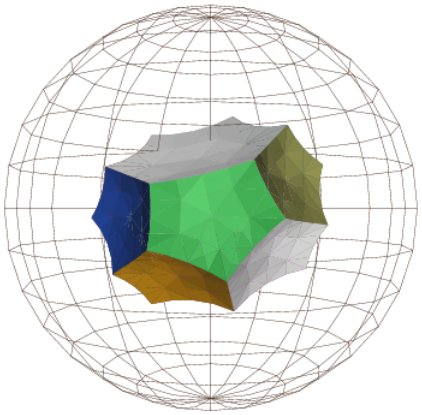


FIGURE 1. L¨obell 多面体 L_6，使用´Geomview $\mathbb{H}^3$ 显示于庞加莱球模型中。

其面积是固定的，由观察 1.1 可立即得到以下结论。

推论 1.1.1。 当 n 足够大时，*L ¨obell* 轨形 L_n 的最短闭测地线长度恰为 $2\delta_n$。

观察 1.1 还可得到以下结论。

推论 1.1.2。 设 M_n 是 *L ¨obell* 轨形 L_n 的次数一致有界的流形覆盖（例如上文讨论的八重 流形覆盖）。则 M_n 的最短闭测地线长度当 $n \to \infty$ 时趋于 0。

事实上，当 n 为 3 的倍数时，我们给出了一个 L_n 的显式八重定向流形覆盖；当 n 足够大时，其最短闭测地线长度恰为 $2\delta_n$，见图 2。由此，我们得到具有任意小最短闭测地线长度的闭双曲三流形的直接例子。根据 Thurston 双曲 Dehn 填充定理（例如参见 [8, 第 E.5 节和第 E.6] 节），已知这类流形存在于三维中。事实上，L¨obell 多面体 L_n 分解为 $2n$ 个多面体 T_n 的副本（见第 3.1 节），而该多面体可视为对带尖点多面体 T_∞ 进行 Dehn 填充所得，因此观察 1.1 最终也可由 Dehn 填充论证得到；见第 4 节。

Agol [1] 提出了另一种构造方法：给定一个输入的算术格 $\Gamma <$Isom($\mathbb{H}^3$) 和 $\varepsilon > 0$，即可输出一个最短闭测地线长度至多为 ε 的闭双曲 3-流形。Agol 最初在4维提出这一构造（当时这个问题尚未解决），但显然它也适用于更低维度；事实上，根据 Belolipetsky 和 Thomson [7] 的工作，它适用于所有维度（或者，也可依据 Bergeron、Haglund 和 Wise [9, 定理 1.4]）。对于固定的[1] Γ 和足够小的 ϵ，输出的格都是非算术格，但正如 Thomson [28]所指出的，它们仍然都是拟算术格。另一方面，反射格 Γ_n 最终不再是拟算术格。

[1]据推测，这与 Γ 无关；参见 [1], 中的定理 4.3 之后的讨论以及 [7,第 5 节1]。

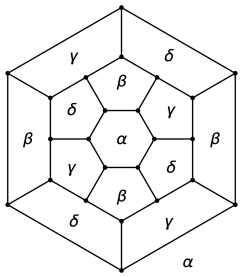


FIGURE 2. 上述对洛贝尔多面体 ¨的四色着色 L_6 及其对多面体 L_{3k}、$k \geq 2$的类似着色，确定了（可定向的）八重流形覆盖 M_{3k}，如 [32, 第 3 节1]所述。由于 L_{3k} 的顶面和底部面获得相同的颜色，该流形 M_{3k}包含一条长度为 $2\delta_{3k}$的闭测地线。对于充分大的 k，根据推论 1.1.1，M_{3k} 的最短闭测地线长度实际上恰好为 $2\delta_{3k}$。

定理 1.2。*L ¨obell* 多面体 L_n 是拟算术的，当且仅当 $n = 5$、6、8、12；且只有在 $n = 12$ 时才是严格拟算术的。

回顾一下，如果一个格是拟算术但不是算术的，就称其为 严格拟算术格。定义见第 2.2 节。我们指出，目前尚不清楚定理 1.2 是否体现了某种更普遍的现象。更准确地说，下面的问题似乎尚未解决。

问题 1.3。 完整有限体积非紧双曲3 -轨道是否只有有限多个拟算术 *Dehn* 填充？

如果将“拟算术”替换为“算术”，问题 1.3 的答案已知是肯定的；参见 Maclachlan 和 Reid [19, 推论 11.2。2]

回到关于 L¨obell 多面体的讨论，Vesnin [30] 观察到，当 $n \neq 5$、6、7、8、10、12、18 时，L¨obell 多面体 L_n 是非算术的。Antol´ın- Camarena、Maloney 和 Roeder [5]后来证明，L_n 是算术的当且仅当 $n = 5$、6、8。

我们对定理 1.2 的证明直接明了，仅使用了 Vinberg 理论中关于双曲反射群的经典工具。在此过程中，我们计算了格 Γ_n的伴随迹域。

定理 1.4。 k_n 的伴随迹域是 $\mathbb{Q}\left(\text{余弦}\,\frac{2\pi}{n}\right)$。特别是，如果$p$、$q \geq 5$ 是不同的素数，那么 *L ¨obell* 多面体 L_p 和 L_q 不可交换比。

在 [19, 第 4.7 节3] 中证明了，在 $\mathbb{H}^3$中存在无穷多个两两不可交换比的紧 Coxeter 多面体。然而，我们未能在文献中找到关于存在无穷多个两两不可交换比的直角的 此类多面体的论证。事实上，这正是我们最初考虑 L¨obell 多面体的动机。由于 $\deg(k_n) = {}^{\phi(n)}{}_2 \to \infty$ 当 $n \to \infty$时，其中 ϕ是欧拉函数，因此实际上可以由定理 1.4 得出，Γ_n 中不存在一个由两两可交换比的格构成的无限子列。事实上，观察 1.1 已经蕴含了这一结论；见备注 3.3。

值得一提的是，$\mathbb{H}^3$ 中存在无穷多个两两不可公度的非紧有限体积直角多面体，这一点早已为人所知。

例如，Meyer–Millichap–Trapp [22] 和 Kellerhals [16]证明，理想直角反棱柱 A_n 给出了一列两两不可公度的反射群，其迹域与 Γ_n的迹域相同。事实上，关于这两类直角多面体之间的关系，还有更多值得探讨之处：正如 Kolpakov [17, 第 5 节1], 所指出的，L¨obell 多面体 L_n可以看作是由反棱柱 A_n 经 Dehn 填充得到的；参见第 4 节。

致谢。 我们感谢 Sasha Kolpakov、Greg Kuperberg、Nico- las Tholozan 和 Andrei Vesnin 富有帮助的讨论。感谢科学研究院在 2022 年秋季接待第一作者，在此期间本工作的主要部分得以完成。第二作者获得了华为青年人才计划的资助。

2. Preliminaries

2.1. 双曲格。 令 $\mathbb{R}^{d,1}$ 为赋备标准二次型 f 且惯性指数为 $(d,1)$ 的实向量空间 $\mathbb{R}^{d+1}$，即

$$f(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_d^2.$$

双曲面 $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{d,1} \mid f(x) = -1\}$ 具有两个连通分支

$$\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathcal{H} \mid x_0 > 0\} \text{ and } \mathcal{H}^- = \{x \in \mathcal{H} \mid x_0 < 0\}.$$

d 维双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 是流形 $\mathcal{H}^+$，其黎曼度量 ρ 由将 f 限制到每个切空间 $T_p(\mathcal{H}^+)$ $p \in \mathcal{H}^+$而诱导得到。该双曲度量 ρ 满足 $\cosh \rho(x,y) = -(x,y)$，其中 (x,y) 是与 f 相关联的 $\mathbb{R}^{d,1}$ 中的标量积。已知 d 维双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 是具有常数截面曲率 -1的唯一单连通完备黎曼 d流形。超平面 是 $\mathbb{H}^d$ 与 $\mathbb{R}^{d,1}$ 中的线性超平面的交集，并且是 $\mathbb{H}^d$ 中余维为 1 的全测地子流形。

令 $\mathsf{O}_{d,1} = \mathbf{O}(f, \mathbb{R})$ 为形式 f 的正交群，$\mathsf{O}'_{d,1} < \mathsf{O}_{d,1}$ 为保持 $\mathcal{H}^+$ 的（指数为 2 的）子群。群 $\mathsf{O}'_{d,1}$ 保持 ρon $\mathbb{H}^d$ 上的度量，并且事实上是后者的完整等距变换群 $\mathsf{Isom}(\mathbb{H}^d)$。

如果 $\Gamma < \mathsf{O}'_{d,1}$ 是一个格，即 Γ 是 $\mathsf{O}'_{d,1}$ 的离散子群，并且在 $\mathbb{H}^d$ 中具有有限体积的基本域，那么商空间 $M = \mathbb{H}^d/\Gamma$ 是一个完备的有限体积双曲轨形。如果 Γ 是无挠的，那么 M 是一个完备的有限体积黎曼流形，称为双曲流形。

现在令 $G = \mathsf{O}'_{d,1}$，并设$\mathbf{G}$ 是一个（对于 G）可容许的代数 k-群，即$\mathbf{G}(\mathbb{R})^o$ 同构于 G^o，且$\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R})$ 对任意非恒等嵌入 $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbb{R}$ 都是一个紧群。那么，与$\mathbf{G}(\mathcal{O}_k)$ 在 G 中的像可交换比的任意子群 $\Gamma < G$，都是一个（在 G 中的）算术格，其基域 为 k。

由于 G 也存在非算术格，我们将在 G中讨论格的几种较弱的算术性概念。沿用 Vinberg [33], 的术语，如果 $\Gamma < G$ 的某个有限指数子群包含于 $\mathbf{G}(k)$ 在 G 中的像，其中 $\mathbf{G}$ 是某个可容许的代数 k-群，且该子群以基域 k 定义，则称格 $\Gamma < G$ 拟算术；如果 Γ 是拟算术的，但严格来说并非算术的，则称其为严格拟算术。

值得强调的是，拟算术性的概念确实比算术性更广；正如引言中所提到的，Agol [1] 和 Belolipetsky–Thomson [7]构造的非算术闭双曲流形

存在于所有维数中，并且正如 Thomson [28], 所观察到的，它们是拟算术的。维数为 3、4 和 5 的严格拟算术格的首批例子由 Vinberg [33]通过反射群构造出来。

2.2. **凸多面体与双曲反射群的算术性质**。A（双曲）反射群是由超平面反射生成的 $\mathrm{O}'_{d,\,1}$ 的离散子群。有限余体积反射群 $\Gamma < \mathrm{O}'_{d,\,1}$ 中各反射的不动超平面将 $\mathbb{H}^d$ 划分为某个有限体积凸多面体 $P \subset \mathbb{H}^d$的等距副本。多面体 P 是一个***Coxeter*** 多面体，即一种有限面的凸多面体，其中任意两个相邻面的二面角都是 π的整数分之一。我们称 P 为 Γ的基本室。反过来，给定一个有限体积 Coxeter 多面体 $P \subset \mathbb{H}^d$，由其所有支撑超平面（即壁）上的反射生成的群 P是 $\mathrm{O}'_{d,\,1}$ 中的有限余体积反射群 $\Gamma <$，其基本室为 P。因此，我们经常将 $\mathbb{H}^d$ 中的有限体积 Coxeter 多面体与 $\mathrm{O}'_{d,\,1}$ 中的相应格（或相应的双曲轨形）视为同一对象。

令 $H_e = \{x \in \mathbb{H}^d \mid (x,\ e) = 0\}$ 为 $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{R}^{d,\,1}$ 中的一个超平面，其在线性张成空间 $\mathbb{R}^{d,\,1}$ 中的法向量为 $e \in \mathbb{R}^{d,\,1}$，且 $(e,\ e) = 1$，令 $H_e^- = \{x \in \mathbb{H}^d \mid (x,\ e) \le 0\}$为与之对应的半空间。如果

$$P = \bigcap_{j=1}^{N} H_{e_j}^-$$

是 $\mathbb{H}^d$ 中的考克斯特多面体，则矩阵 $G(P) = \{g_{ij}\}_i^N,\ _{j=1} = \{(e_i,\ e_j)\}_i^N,\ _{j=1}$ 是其格拉姆矩阵。记 $K(P) = \mathbb{Q}\left(\{g_{ij}\}_i^N,\ _{j=1}\right)$，并将由 $G(P)$ 的元素的所有可能循环乘积生成的域 $k(P)$ 称为 P 的基域。为方便起见，给定矩阵 $A = (a_{ij})_i^N$，$_{j=1}$ 的元素的所有循环乘积的集合，即所有形如 $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}$ 的乘积的集合，将记为 Cyc(A)。因此，有 $k(P) = \mathbb{Q}(\mathrm{Cyc}(G(P))) \subset K(P)$。

以下判据可以帮助我们确定给定的有限协体积双曲反射群 Γ （其基本室为 P ）是算术的、拟算术的，还是两者都不是。

定理 2.1 （Vinberg 算术性判据 [33]）。 设 $\Gamma < \mathrm{O}'_{d,1}$ 是一个具有有限体积基本室 $P \subset \mathbb{H}^d$ 的反射群。那么， Γ 是算术的，当且仅当以下每个条件都成立：

（**V1**） K（P）是一个全实代数数域；（**V2**）对于任意嵌入 σ： K（P）$\to \mathbb{R}$，满足 $\sigma|_{k(P)} \neq \mathrm{Id}$，矩阵 G^σ（P）是半正定的；（**V3**）Cyc（$2 \cdot G$（P））$\subset \mathcal{O}_{k(P)}$，

并且在此情况下， Γ 的基域为 k（P）。群 Γ 是拟算术的，当且仅当它满足条件（**V1**）–（**V2**），但不一定满足（**V3**）；在此情况下， Γ 的基域仍为 k（P）。

注 2.2： 注意，$2\cos\frac{\pi}{n}$ 始终是代数整数。因此，如果有限体积 Coxeter 多面体P 的考克斯特–维因伯格图中没有虚线边，那么上述条件 （**V3**） 自动成立，并且对于相关反射群 Γ而言，算术性与拟算术性之间没有区别。

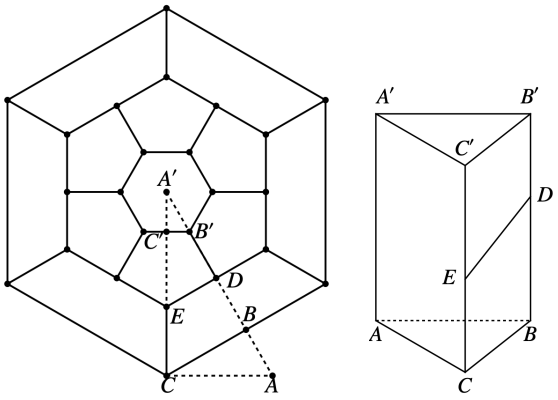


FIGURE 3. L¨obell 多面体 L_6 及其切片——截角四面体 T_6。我们对所有截角四面体 T_n采用类似的棱标记。

特别地，在 $\mathbb{H}^2$ 上作用的三角群是拟算术的，当且仅当它是算术的。

注 2.3：Vinberg [34, 的工作表明，有限余体积双曲反射群的基域与其伴随迹域一致，因此也是一个可公度不变量。

3. Geometry and arithmetic of Löbell orbifolds

3.1. 的分解 L_n。对于任意 $n \geqslant 5$，L¨obell 多面体 L_n 都可以分解为 $2n$ 个等距的“切片” T_n，其中每个切片都可视为一个经过两次截角的四面体；图 3 展示了 $n = 6$时的这一分解，其中双曲三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 正是这些截角所得的结果。

多面体 T_n 是一个考克斯特多面体，其棱的标记见图 3 右图。T_n 的考克斯特–维因伯格图见图 4。该图中的权重 d_n等于 $\cosh \delta_n$，因为 L_n 的顶面与底部面之间的距离和 T_n的相同；注意，δ_n 也等于棱 AA'的长度。

T_n 的格拉姆矩阵为

$$G_n := G(T_n) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_n & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & -d_n & 1 & -a_n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -a_n & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -a_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们知道，由于 $T_n \subset \mathbb{H}^3$ 是紧的，G_n 的惯性指数[2] 为（3，1，2）。因此，利用 $\det G_n$ 以及 G_n 的所有主子式 5×5 均为零这一事实，我们得到

[2]实对称矩阵 A的 *signature*是一个三元组 $(p,\ q,\ r)$，分别表示 A的正、负和零特征值的个数。

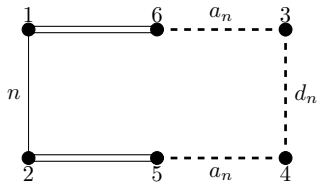


FIGURE 4. 多胞体 T_n 的考克斯特–维因伯格图

$d_n^2 = (2a_n^2 - 1)(a_n^2 - 1)$。由此可以计算出 d_n 和 a_n:

$$d_n = \cosh \delta_n = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{2\pi}{n}}; \quad a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{2\cos \frac{2\pi}{n}}}.$$

3.2. 定理 1.4 的证明。 根据注记 2.3，格 Γ_n 的伴随迹域 k_n 与多面体 T_n 的基域一致，适用于$n \geq 5$。第 3.1 节中的计算使我们能够利用图 4 所示的考克斯特–维因伯格图确定循环乘积C_n :=Cyc(G_n)。我们有

$$\mathbb{Q}(C_n) = \mathbb{Q}\left(\left\{\cos\frac{2\pi}{n}; \quad 1 + \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{n}}; \quad \frac{\cos^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{2\pi}{n}}; \quad \frac{\cos^2\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{2\pi}{n}}\left(1 + \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{n}}\right)\right\}\right).$$

Thus

$$k_n = \mathbb{Q}(C_n) = \mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right).$$

由于 deg(k_n) = $^{\phi}{}_{(n)}{}_{2}$ ，其中 ϕ 是欧拉函数，因此对于不同的素数 p 和 q，域 k_p 和 k_q 的次数不同，所以多面体L_p 和 L_q 不可交换比。■

3.3. 定理 1.2 的证明。 反射群 Γ_n 与由 T_n的壁上的反射生成的群 Λ_n 可交换比。因此，剩下的就是利用 Vinberg 算术性判据（参见定理 2.1）检查 Λ_n 的准算术性。

[11] 中的主要结果特别意味着，拟算术双曲考克斯特三维多面体的任一面，若其本身是考克斯特多边形，则也具有相同基域的拟算术性。注意，如果考克斯特三维多面体的某个面 F 与其相邻面所成的角均为偶角，即角度为 $\frac{\pi}{2m}$ 的某个 $m \geq 1$，那么 F 就是考克斯特多边形。 [11] 证明了，在后一种情况下，若此外 P 是算术的，那么 F 也具有算术性。

多面体 T_n 有一个与所有相邻面垂直的 (2，4，n) 三角形面。对于 (2，4，n) 三角群，算术性与拟算术性等价（见注 2.2）。Takeuchi [27] 证明，这些三角群仅在 $n = 5$，6，7，8，10，12，18 时具有算术性。因此，根据上一段可知，当 n 不属于这些取值时，Λ_n不具有拟算术性（因而 Γ_n也不具有拟算术性）。接下来只需在 n 取这些值时，检验考克斯特多面体 T_n 的格拉姆矩阵是否满足 Vinberg 判据。

将全实数域 $k_n = \mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)$的嵌入记为 σ_ℓ，排列如下:

$$\sigma_\ell\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi\ell}{n}, \quad (\ell, n) = 1, \quad 1 \leq \ell < n.$$

$n=5$	$k_5=\mathbb{Q}\left(\text{余弦}\,\frac{2\pi}{5}\right)=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$d_5=2$	$G_5^{\sigma_\ell}\geqslant 0$ 对所有 $\ell\neq 1$
$n=6$	$k_6=\mathbb{Q}$	$d_6=1$	没有非恒等嵌入
$n=7$	$k_7=\mathbb{Q}\left(\text{余弦}\,\frac{2\pi}{7}\right)$	$d_7=3$	$G_7^{\sigma_2}$的惯性指数为 (3，1)
$n=8$	$k_8=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$d_8=2$	$G_8^{\sigma_\ell}\geqslant 0$ 对所有 $\ell\neq 1$
$n=10$	$k_{10}=\mathbb{Q}\left(\text{余弦}\,\frac{\pi}{5}\right)=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$d_{10}=2$	$G_{10}^{\sigma_3}$ 的惯性指数为 (3，1)
$n=12$	$k_{12}=\mathbb{Q}\left(\text{余弦}\,\frac{\pi}{6}\right)=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	$d_{12}=2$	$G_{12}^{\sigma_\ell}\geqslant 0$ 对所有 $\ell\neq 1$
$n=18$	$k_{18}=\mathbb{Q}\left(\text{余弦}\,\frac{2\pi}{18}\right)$	$d_{18}=3$	$G_{18}^{\sigma_5}$ 的惯性指数为 (3，1)

TABLE 1. 域 k_n 在 $n=5$、6、7、8、10、12、18 的非恒等嵌入 σ_ℓ 下的格拉姆矩阵的性质。

注意，$\sigma_\ell(k_n)=\mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi\ell}{n}\right)$。

由表 1 可知，表 1 是使用 Sage 进行计算得到的结果，Λ_n仅在 $n=5$、6、8、12 时是拟算术的。为了证明 Λ_n 是严格拟算术的当且仅当 $n=12$，需要检验定理 2.1 的条件 **(V3)**，也就是说，$\mathrm{Cyc}(2G_n)\subset\mathcal{O}_{k_n}$ 当且仅当 $n=5$、6、8。这一点即使不使用计算机也很容易验证。为避免赘述，这里仅记录 $n=12$ 这一（最有趣的）情形。事实上，其他情形已在 [5] 中得到验证。

引理 3.1。该反射群 Λ_{12} 是严格拟算术的。

证明。注意到 $\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。$T_{12}$ 的格拉姆矩阵 G_{12} 为

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6} & 0 & -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6} & 1 & -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们有 $k_{12}=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$，并且

$$K_{12}:=K(T_{12})=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}}\right)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3+\sqrt{3}}\right).$$

后一个域的次数为 8，其所有嵌入为

$$\sqrt{2}\to\pm\sqrt{2},\quad \sqrt{3+\sqrt{3}}\to\pm\sqrt{3\pm\sqrt{3}}.$$

我们通过 Sage 验证，对于每个[3] 嵌入 σ：满足 $\sigma\,|_{k_{12}}\neq 1$的 $K_{12}\to\mathbb{R}$，矩阵 G_{12}^{σ} 的惯性指数为 (4，0，2)。

最后，我们注意到，并非所有 $2\cdot G_{12}$ 的循环乘积都是代数整数。例如，我们有 $\left(2\frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4(3+\sqrt{3})}{3}\notin\mathbb{Z}[\sqrt{3}]=\mathcal{O}_{k_{12}}$。 ∎

[3]事实上，由于半定性可以通过主子式进行检验（并且这些子式是使用包含于 $k_{12}=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中的循环乘积计算得到的），因此只需考虑单个嵌入 σ：$K_{12}\to\mathbb{R}$ 将 $\sqrt{3}$ 映射到 $-\sqrt{3}$。

3.4. **Lobell 轨形的最短闭测地线长度¨**。对于格 $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$，其最短闭测地线长度sys(Γ)是 Γ 的双曲型元素 Γ 的最小平移长度。完备有限体积双曲轨形 $M = \mathbb{H}^d/\Gamma$ 的最短闭测地线长度sys(M)就是格 Γ 的最短闭测地线长度。本节记录一些关于双曲反射轨形最短闭测地线长度的备注。

注 3.2. 设有一列反射群 $\Gamma_n < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$,$d \geq 2$，满足性质 $\mathrm{sys}(\Gamma_n) \to 0$。那么，$\Gamma_n$ 至多对有限多个 n是算术的。事实上，反设并非如此，则可假设这些 Γ_n 全都是算术的。由于极大算术反射群只有有限多个（见 [24], [2], 和 [13]），进一步抽取子列后，还可假设这些Γ_n 全都包含于同一个格 $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ 中，因此 $\mathrm{sys}(\Gamma_n) \geq \mathrm{sys}(\Gamma)$，矛盾。

注 3.3. 由注 3.2 可知，若 $\Gamma_n < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$, $d \geq 2$是一列满足 $\mathrm{sys}(\Gamma_n) \to 0$ 的有限余体积反射群，则对每个 $m \in \mathbb{N}$， Γ_m 至多对有限多个 n与 Γ_n 可交换比。事实上，反设并非如此。于是，取一个子列后，可假设这些Γ_n 彼此均可交换比。由注 3.2 可知，这些 Γ_n 都是非算术的。根据 Margulis 的一项结果（见 [20, 定理 1, 第 2] 页），其可交换子群 $\Lambda <$Isom($\mathbb{H}^d$) 将每个 Γ_n 都包含为有限指数子群，因此 sys(Γ_n) ≥sys(Λ)，矛盾。

正如 [7, 第 5.2 节和第 5.3], 节所指出的，上述结论事实上对满足 $\mathrm{sys}(\Gamma_n) \to 0$ 的任意格序列 $\Gamma_n <$Isom($\mathbb{H}^d$) 都成立。确实，假设存在这样一个序列 Γ_n ，其中 Γ_n 均可交换比。若 Γ_n 是非算术的，则可如前一段所述得到矛盾。若 Γ_n 是算术的，那么由于它们可交换比，Lehmer猜想保证了 sys(Γ_n) 存在一个一致的下界；这里所涉及的是有界次数的整系数多项式 [10] （参见 Gelander[14]中紧接在猜想 10.2 后面的讨论）。我们指出，Lehmer猜想的最强形式将意味着任意算术局部对称轨形的最短闭测地线长度都有一个一致的下界。

4. Löbell orbifolds and hyperbolic Dehn fillings of ideal right-angled antiprisms

设 $P \subset \mathbb{H}^3$ 是一个具有紧边 e 的有限体积 Coxeter 多面体，并称 e 处的二面角为 $\frac{\pi}{m}$。沿用 Kolpakov [17], 的术语，若 $Q \subset \mathbb{H}^3$ 是一个与 P 具有相同组合类型和相同二面角的有限体积 Coxeter 多面体，唯一区别是将 Q 中 e 处的二面角减小为某个 $\frac{\pi}{n}$ （其中 $n \geq m$），则称 Q 是由 P 在 e 处经过一次 $\frac{\pi}{n}$ -压缩得到的。例如，对于 $n \geq 5$ 和 $k \geq 2$，其考克斯特–维因伯格图如图5所示的多面体 $P_{n,\,k} \subset \mathbb{H}^3$ 是由截角四面体 T_n 在边 $B'D$ 和 EC（及其对应边）处经过 $\frac{\pi}{2k}$ 次压缩得到的，而 T_n 又是由 T_5 在边 AA' 处经过一次 $\frac{\pi}{n}$ -压缩得到的；见图3和图4。

如果相反， Q 和 P 作为带标记多面体仅有如下差异：在 Q中，边 e被理想顶点 $v \in \partial\mathbb{H}^3$所替代，那么我们称 Q 是由 P 通过收缩 e 为理想顶点得到的。注意，如果这种收缩存在，则 P 中与 e 相邻的每条边（以及 Q中与 v 关联的每条边）的二面角均为 $\frac{\pi}{2}$，且 P 中共享 e 的面至少有4条边。

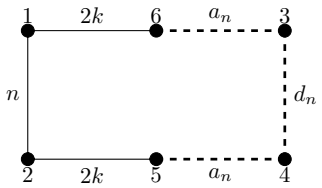


FIGURE 5. 该多面体的考克斯特–维因伯格图 $P_{n,\ k}$

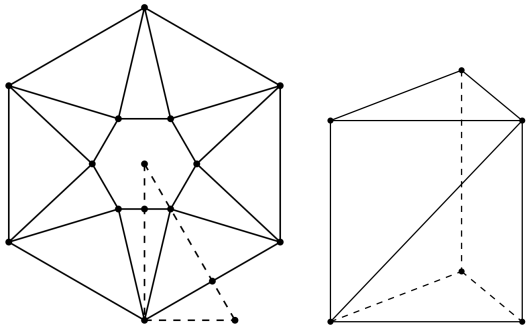


FIGURE 6. 反棱柱 A_6 及其切片 R_6。

在 [16], 中，Kellerhals研究了一族称为反棱柱的理想直角多面体 $A_n \subset \mathbb{H}^3$、$n \geq 3$，其中她利用了将每个此类多面体 A_n 分解为 $2n$ 个多面体 R_n副本的方法，这类似于将L¨obell多面体 L_n 分解为 $2n$ 个 T_n的副本；见图6。用上述术语，对于 $n \geq 5$，多面体 R_n 实际上是通过将 T_n 的边$B'D$ 和 EC 收缩为理想顶点而由 T_n 得到的。特别地，对于这样的 n，反棱柱 A_n可以通过一系列将边收缩为理想顶点的操作，由L¨obell多面体 L_n 得到。Kolpakov在 [17, 第5节1]中已经注意到这一点。事实上，多面体$P_{n,\ k}$ 以及 R_n、 $n \geq 5$、 $k \geq 2$的存在性由Kolpakov的以下结果预言，该结果的证明基于安德烈耶夫定理 [3, 26]。

定理4.1 （参见 [17]中的命题1的证明）。 设 $P \subset \mathbb{H}^3$ 是一个有限体积 *Coxeter* 多面体，至少有5 个面，并具有一条紧边 e，使得与 e 相邻的每条边的二面角均为 $\frac{\pi}{2}$，且在 P 中与 e 共享面的面至少为4边形。若在 P中 e处的二面角为 $\frac{\pi}{m}$, $m \geq 2$, 则对于每个 $n \geq m$, P都在 e 处具有一个 $\frac{\pi}{n}$-收缩P_n，并且还具有一个将 e 收缩为理想顶点的收缩 P_∞ 。

由于我们也可以将 P_n 视为经由 Dehn 填充[4], 从 P_∞ 得到的，因此根据 Dunbar 和 Meyerhoff 的研究 [12]，边 $e \subset P_n$ （或其对应边）的长度会在 $n \to \infty$时趋近于 0。取 P_n 为截角四面体 T_n，并取 e 为边 AA'，便可得到对观察 1.1 的另一种论证。对 R_n 而非 T_n应用类似论证，可得反棱柱“顶部”面与“底部”面之间的距离

[4]更确切地说，Dunbar 和 Meyerhoff 将 Thurston 的双曲 Dehn 填充理论推广到 *oriented* 双曲三维轨形的情形。将该理论应用于 P_n的定向覆盖，其中将 P_n 视为反射轨形，可以得出结论：当 $n \to \infty$时， P_n 中边 e 的长度趋近于 0。

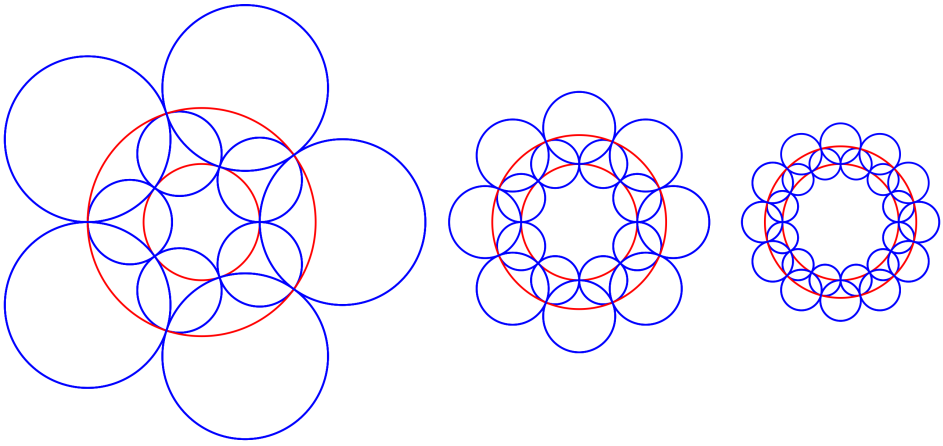


FIGURE 7. 一项视觉证明表明，反棱柱的“顶部”面与“底部”面之间的距离 A_n 趋近于 0。上图从左到右分别展示了 A_n 在 $n = 5$、8 和 12 情形下各壁的理想边界：从 $\mathbb{H}^3$ 的理想边界通过立体投影投射到页面上，使得对应于顶部面和底部面的圆（此处以红色标示）同心。固定内侧红色圆的欧几里得直径，我们可知，当 n趋近于 ∞时，内侧蓝色圆的直径趋近于 0，因此内侧与外侧红色圆的直径之比趋近于 1。事实上，欧几里得几何中的一项初等练习表明，该比值恰好为 $^{1+}_{\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})}$，这印证了 Kellerhals [16, 中的例 1 和 2]中的计算结果。

A_n 也会在 $n \to \infty$时趋近于 0；关于后者的一种仅使用初等欧几里得几何的论证，见图7。

我们指出，对于有限体积直角的多面体 $P \subset \mathbb{H}^3$的任意紧边 e，定理4.1的条件都得到满足。这启发了一种从多面体 P出发构造一族新的有限体积直角多面体的方法。具体而言，对于 $n \geq 2$，令 $P_n \subset \mathbb{H}^3$ 表示从 P 在 e处进行 $\frac{\pi}{n}$ -收缩后得到的多面体，令 $\Lambda_n <$ 等距变换群$(\mathbb{H}^3)$表示相应的反射群，并令 Δ_n 表示 Λ_n中 e 的稳定子。则有限体积多面体$Q_n = \bigcup_{\gamma \in \Delta_n} \gamma P_n$ 是直角的，并且当且仅当 P 为紧的时，它才是紧的。此外，对于每个 $m \geq 2$， Λ_m 至多与有限多个$n \geq 2$可交换比于 Λ_n，例如，这是因为sys$(\Lambda_n) \to 0$ 为 $n \to \infty$ （见注3.3）。最后，我们指出，这种构造一族两两不可交换的有限体积直角双曲多面体的策略在4维中失效，因为此类一族是否存在似乎仍是一个开放问题。

定理 4.2。 设 n、$m \geq 3$ 具有相同的奇偶性，且 $d \geq 4$。假设 $P_n \subset \mathbb{H}^d$是一个有限体积 *Coxeter* 多面体，其所有二面角均为直角，只有一个二面角 $\frac{\pi}{n}$ 例外。另假设存在一个有限体积 *Coxeter* 多面体 $P_m \subset \mathbb{H}^d$，它与 P_n 具有相同的组合结构和二面角，但 P_m 的例外二面角为 $\frac{\pi}{m}$。那么 $n = m$。

我们将用到以下引理。

引理 4.3. 设 P 是 $\mathbb{H}^d$ 中的一个有限体积 *Coxeter* 多面体，并假设 P 的所有二面角均为直角，但由 P 的壁 H_1 和 H_2 构成的一个二面角除外。由 $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ 中除 H_1 和 H_2 之外所有壁上的反射生成的群，在 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^d)$ 中扎里斯基稠密。

引理 *4.3* 的证明. 设 $P' \subset \mathbb{H}^d$ 是从 P 中删去壁 H_1 和 H_2 后得到的（无限体积）多面体，并设 P_i 是 P' 与 $\mathbb{H}^d$ 中 $i = 1,2$ 对应的超平面 H_i 的交集。于是，$(d-1)$ 维直角双曲多面体 P_i 可由一个有限体积的此类多面体——即多面体 $P \cap H_i$——删去一面壁得到；这面壁即交集 $H_1 \cap H_2$。由于 $d - 1 \geq 3$，可知由 P_i 的壁上的反射生成的 Isom(H_i) 子群在 Isom(H_i) 中扎里斯基稠密；例如参见 [15, 第 1 节。7]。引理得证。■

定理 *4.2* 的证明。对于 $k = n,\ m$，令 H_k 和 H'_k 为 P_k 的壁，它们构成 π_k 的特殊二面角；令 R_k 为 P_k 在由关于 H_k 和 H'_k 的反射生成的反射群 D_k 作用下的像的并集。由于 n 和 m 具有同奇偶性，我们可以选择反射 $r_k \in D_k$，使得 $(d-1)$ 维多面体 Fix(r_n)$\cap R_n$ 和 Fix(r_m)$\cap R_m$ 具有相同的组合结构和二面角，因此根据 Mostow–Prasad 刚性 [23, 25]（另见 Andreev [3, 4]），二者等距。

现在沿 Fix(r_k)$\cap R_k$ 将 R_k 交错拼接，并令 R 为所得的 $\mathbb{H}^d$ 中的有限体积多面体。于是存在一个显然的二面体群 $D_{\frac{n+m}{2}}$，它由保持二面角的 R 的组合对称性组成。根据 Mostow–Prasad 刚性，这些组合对称性中的每一个都是双曲等距变换。然而，根据引理 4.3，存在一个（除逆变换外）唯一的双曲等距变换 γ_k，它将任意给定的 R_k 切片的曲面旋转两个切片，即关于 H_k 和 H'_k 的反射的复合，因此 γ_k 的阶为 k。由于 γ_n 和 γ_m 各自生成 $D_{\frac{n+m}{2}}$ 的交换子子群，因此可得 $n = m$。■

——

References

[1] I. Agol, *Systoles of hyperbolic 4-manifolds*, arXiv预印本 math/0612290, （2006）。[2] I. Agol, M. Belolipetsky, P. Storm, and K. Whyte, *Finiteness of arithmetic hyperbolic reflection groups* 2 2008 481 498 , 《群、几何与动力学》, （）, 第–页。[3] E. M. Andreev, *Convex polyhedra in Lobačevskiĭ spaces*, 《数学文集》（新丛刊）, 81（123）（1970）, 第445–478页。[4] , *Convex polyhedra of finite volume in Lobačevskiĭ space*, 《数学文集》（新丛刊）, 83（125）（1970）, 第256–260页。[5] O. Antolín-Camarena, G. R. Maloney, and R. K. W. Roeder, *Computing arithmeticinvariants for hyperbolic reflection groups*, 载于《复动力系统》, A K Peters, 马萨诸塞州韦尔斯利, 2009年, 第597–631页。[6] A. Basmajian, *Tubular neighborhoods of totally geodesic hypersurfaces in hyperbolic manifolds* 117 1994 207 225 , 《数学发明》, （）, 第–页。[7] M. V. Belolipetsky and S. A. Thomson, *Systoles of hyperbolic manifolds*, 《代数、几何与拓扑》, 11（2011）, 第1455–1469页。[8] R. Benedetti and C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext丛书, 施普林格出版社, 柏林, 1992年。[9] N. Bergeron, F. Haglund, and D. T. Wise, *Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds* 2 83 2011 431 448 , 《伦敦数学学会杂志》（）, （）, 第–页。[10] P. E. Blanksby and H. L. Montgomery, *Algebraic integers near the unit circle*, 《算术学报》, 18（1971）, 第355–369页。

[11] N. Bogachev and A. Kolpakov, *On faces of quasi-arithmetic Coxeter polytopes*, 《国际数学研究通知》IMRN, （2021），第3078–3096页。[12] W. D. Dunbar and G. R. Meyerhoff, *Volumes of hyperbolic 3-orbifolds*, 《印第安纳大学数学杂志》，43（1994），第611–637页。[13] D. Fisher and S. Hurtado, *A new proof of finiteness of maximal arithmetic reflection groups* 2207 00258, 2022 ，arXiv预印本 arXiv:。（）。[14] T. Gelander, *Homotopy type and volume of locally symmetric manifolds*, 《杜克数学杂志》，124（2004），第459–515页。[15] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro, *Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces*, 高等科学研究院出版物，´Etudes Sci. Publ. Math.，（1988），第93–103页。[16] R. Kellerhals, *A polyhedral approach to the arithmetic and geometry of hyperbolic link complements* 2022 ，（）。[17] A. Kolpakov, *Deformation of finite-volume hyperbolic Coxeter polyhedra limiting growth rates and Pisot numbers* 33 2012 1709 1724 ，《欧洲组合学杂志》，（），第 – 页。[18] F. Löbell, *Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford–Kleinscher Räume negativer Krümmung* ¨ 83 1931 167 174 ，《萨克森科学院莱比锡分院报告》，（），第 – 页。[19] C. Maclachlan and A. W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, 数学研究生教材第219卷，施普林格出版社，纽约，2003年。[20] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, 数学及其边缘领域成果（第3辑）第17卷 [数学及相关领域成果（第3辑）], 施普林格出版社，柏林，1991年。[21] A. D. Mednykh and A. Y. Vesnin, *Löbell manifolds revised*, 《西伯利亚电子数学通讯》，`，4（2007），第605–609页。[22] J. S. Meyer, C. Millichap, and R. Trapp, *Arithmeticity and hidden symmetries of fully augmented pretzel link complements* 26 2020 149 183 ，《纽约数学杂志》，（），第 – 页。[23] G. D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms*, 高等科学研究院出版物，´Etudes Sci. Publ. Math.，（1968），第53–104页。[24] V. V. Nikulin, *Finiteness of the number of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevskiĭ spaces* 71 2007 55 60 ，《俄罗斯科学院数学系列消息》，（），第 – 页。[25] G. Prasad, *Strong rigidity of* Q*-rank* 1 *lattices*, 《数学发明》，21（1973），第255–286页。[26] R. K. W. Roeder, J. H. Hubbard, and W. D. Dunbar, *Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra* 57 2007 825 882 ，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），（），第 – 页。[27] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, 《日本数学学会杂志》，29（1977），第91–106页。[28] S. Thomson, *Quasi-arithmeticity of lattices in* PO(n, 1), 《几何学杂志》，180（2016），第85–94页。[29] A. Y. Vesnin, *Three-dimensional hyperbolic manifolds of Löbell type*, 《西伯利亚数学杂志》，28（1987），第50–53页。[30] , *Three-dimensional hyperbolic manifolds with general fundamental polyhedron*, 《数学札记》，49（1991），第575–577页。[31] , *Volumes of Löbell 3-manifolds*, 《数学札记》，64（1998），第17–23页。[32] , *Right-angled polytopes and three-dimensional hyperbolic manifolds*, 《数学科学进展》，72（2017），第147–190页。[33] E. B. Vinberg, *Discrete groups generated by reflections in Lobačevskiĭ spaces*, 《数学文集》（新丛刊），72（114）（1967），第471–488页；勘误，同上，73（115）（1967），第303页。[34] E. B. Vinberg, *Rings of definition of dense subgroups of semisimple linear groups*, 《苏联数学学报》，5（1）（1971），第45–55页。

Department of Mathematics, University of Toronto, 40 St George Street, TorontoON, M5S 2E4, Canada

Institute for Information Transmission Problems, Moscow, Russia

Email address: nvbogach@mail.ru

Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

Email address: douba@ihes.fr