arXiv:2304.12614v1 [math.AP] 25 Apr 2023

根据渐近边界谱数据确定双调和算子的一阶扰动

NESRINE AROUA 和 MOURAD BELLASSOUED

摘要。本文研究受扰动双调和算子的多维 Borg-Levinson 定理。具体而言，在 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑域 $n \geq 2$ 上，我们证明了可以根据相应双调和算子的边界谱数据的某些渐近行为，稳定地确定该双调和算子的一阶系数和零阶系数，即狄利克雷特征值以及相应特征函数在边界上的诺伊曼迹。

1. 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ 是一个有界单连通域，其边界为 $\mathcal{C}^2$ Ω，并考虑四阶算子

$$\mathcal{H}_{B,q} = (-\Delta)^2 - 2iB \cdot \nabla - i\text{div}B + q, \tag{1.1}$$

其中，∇ 表示梯度，Δ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的拉普拉斯算子，系数 $B = (b_1, \ldots, b_n)$ 和 q 均假设为实值。对于 Ω 和 Γ，我们有 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$ 和 $H^s(\Gamma)$，$s \in \mathbb{R}$。对于 $s, t > 0$，我们将空间记为

$$H^{s,t}(\Gamma) = H^s(\Gamma) \times H^t(\Gamma), \tag{1.2}$$

赋予范数

$$\|f\|_{H^{s,t}(\Gamma)} = \|f_0\|_{H^s(\Gamma)} + \|f_1\|_{H^t(\Gamma)}, \quad f = (f_0, f_1) \in H^{s,t}(\Gamma). \tag{1.3}$$

我们还将 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $(L^2(\Gamma))^2$ 中的内积标量记为 $\| \cdot \|$，其关联范数为 $\| \cdot \|$。令γ_D 和 γ_N 分别为狄利克雷迹算子和 Neumann迹算子，定义为

$$\begin{array}{rccc} \gamma_D & : & H^4(\Omega) & \longrightarrow & H^{7/2,5/2}(\Gamma) \\ & & u & \longmapsto & \gamma_D(u) = (u, \partial_\nu u), \end{array} \tag{1.4}$$

and

$$\begin{array}{rccc} \gamma_N & : & H^4(\Omega) & \longrightarrow & H^{1/2,3/2}(\Gamma) \\ & & u & \longmapsto & \gamma_N(u) = (\partial_\nu \Delta u - i(B \cdot \nu)u, -\Delta u), \end{array} \tag{1.5}$$

它们有界且满射，参见[19]。这里 ν 是边界Γ的单位外法向量。正如 [33] 所指出的，定义在 $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$上的算子$\mathcal{H}_{B,\,q}$ 的扩张仍记为$\mathcal{H}_{B,\,q}$，是一个下半有界的自伴算子，其定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_{B,q}) = \left\{ u \in H^4(\Omega),\ \gamma_D(u) = 0 \right\}. \tag{1.6}$$

2010 年数学主题分类。主要分类：35R30、35J30；次要分类：35P05。关键词和短语。多维 Borg-Levinson 定理、双调和算子、唯一性、稳定性估计。

因此，根据 Kato-Rellich定理 [21] ，算子$\mathcal{H}_{B,\ q}$ 的谱是离散的，在 $+\infty$处聚集，由实特征值 $\{\lambda_k$组成； $k \in \mathbb{N}^*\}$ 且每个特征值的重数有限

$$-\infty < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \to +\infty, \quad \text{as } k \to \infty.$$

下文中， $\{\lambda_k; \quad k \in \mathbb{N}^*\}$, $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{B,\ q})$ 表示由$L^2(\Omega)$的特征函数构成的一个相应标准正交基，这些特征函数属于$\mathcal{H}_{B,\ q}$，即 ϕ_k 满足

$$\mathcal{H}_{B,q}\phi_k = \lambda_k\phi_k \text{ in } \Omega, \quad \gamma_D(\phi_k) = 0 \text{ on } \Gamma. \tag{1.7}$$

回顾一下， $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{B,\ q})$连续嵌入 $H^4(\Omega)$，那么存在一个常数 C >0，使得

$$\|\phi_k\|_{H^4(\Omega)} \leq C(|\lambda_k| + 1). \tag{1.8}$$

因此，由迹定理可得

$$\|\gamma_N(\phi_k)\|_{H^{1/2,3/2}(\Gamma)} \leq C(|\lambda_k| + 1). \tag{1.9}$$

另一方面，由Weyl渐近公式（见[40], 第447页），存在一个正定常数 $C \geq 1$，使得

$$C^{-1}k^{4/n} \leq \lambda_k \leq Ck^{4/n}, \quad \text{as } k \to \infty. \tag{1.10}$$

因此我们有

$$\|\gamma_N(\phi_k)\|_{H^{1/2,3/2}(\Gamma)} \leq Ck^{4/n}. \tag{1.11}$$

本文所研究的问题是：能否根据算子 $\mathcal{H}_{B,\ q}$的边界谱数据 $\{(\lambda_k, \gamma_N(\phi_k))$ 的某些渐近知识，稳定地确定向量场 B 和电势 q。

1.1. 已知结果。涉及多调和算子 $(-\Delta)^m$, $m \geq 2$ 的方程出现在物理学和几何学的许多领域，例如梁的振动研究、弹性理论中的 Kirchhff-Love 薄板方程，以及共形几何中的 Paneitz-Branson 算子研究；有关更多细节，请参阅 [16] 和 [31]。因此，近年来许多作者一直关注这类算子的逆问题；这里我们举例提及 [8, 9, 11, 12, 18, 26, 27, 41]以及最近的工作 [3]。上述所有工作都致力于根据包含在 Dirichlet-to-Neumann 映射中的边界测量确定多调和算子的系数。本文研究的是逆谱问题，即根据算子的边界谱数据确定其系数。

对此类问题的研究可追溯至 Ambartsumian。1929 年，他证明了：当 $\mathcal{L}_q = \Delta + q$ 中出现的实值势 q定义在一维区域 $\Omega = (0, 1)$ 上，且 $\mathcal{L}_q$ 的 Neumann谱等于 $\{\pi^2k^2,\ k \in \mathbb{N}^*\}$时， [2] 势具有唯一性。后来，Borg [10] 证明，一般而言，仅凭 $\mathcal{L}_q$ 的特征值不足以确定势 q ；但如果再考虑一组额外的谱数据，那么 q 便可以被唯一确定。在 Borg 的结果之后，Levinson [29] 简化了 Borg 结果的证明，并证明可以根据谱数据 $\{(\lambda_k, \|\phi_k\|_{L^2(0,1)})\ k \in \mathbb{N}^*\}$唯一确定势 q ，其中 $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ 和 $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ 分别是 $\mathcal{L}_q$ 的特征值以及 $L^2(0, 1)$ 的正交基，并满足条件 $\phi_k'(0) = 1$。通过考虑相同的边界数据，Gel'fand 和 Levitan 给出了[17] 势 q的重构公式。1988 年，A. Nachman、Sylvester 和 Uhlmann [32] 以及 Novikov [34] 分别将 Gel'fand 和 Levitan 的结果推广到了多维区域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$，其中 $n \geq 2$。他们证明，仅根据边界谱

数据 $\{(\lambda_k, \partial_\nu \phi_k|_{\partial\Omega})\ k \in \mathbb{N}^*\}$，其中 (λ_k, ϕ_k) 是 $\mathcal{L}_q$的 k^{th} 特征对。如今，这一结果在文献中被称为多维 Borg-Levinson 型定理。对于有限多个边界谱特征对 (λ_k, ϕ_k) 未知的情形，Isozaki 在 [20] 证明，随后 Choulli 在 [13] 证明，唯一性仍然成立。此外，在 [24], , Kian、Oksanen 和 Morancey 证明，只知道部分边界谱数据时，唯一性仍然成立。由边界谱数据 $\mathcal{L}_q$确定势 q 的稳定性问题，始于 Alessandrini 和 Sylvester [1]。Choulli 和 Stefanov [15] 在谱数据渐近“接近”的情形下，Bellassoued、Choulli 和 Yamamoto [5] 在边界谱数据于边界的一部分上测量的情形下，以及 Choulli [14] 在 Ω 为可容许黎曼流形的情形下，分别给出了这一结果的其他变体。Kavian、Kian 和 Soccorsi [22] 改进了 Choulli 和 Stefanov 的结果，随后 Soccorsi [39], 通过对渐近谱数据施加较弱条件进一步改进了该结果。上述所有工作均是在势 q 足够光滑的情形下得到的。对于奇异势（即无界势），可参见相关工作[6, 25, 35, 36]。

在存在磁势的情况下，关于磁薛定谔算子的多维 Borg-Levinson 定理 $\mathcal{L}_{B,\ q} = (-i\nabla + B)^2 + q$ 由 Serov 进行了研究；他在 [37] 中证明了当 q 为奇异时，可由边界谱数据 $\{(\lambda_k, \partial_\nu \phi_k|_{\partial\Omega})\ k \in \mathbb{N}^*\}$唯一确定磁场旋度 B 和势 q。这里，curl B 是向量 $B = (B_1, \ldots, B_n)$ 的 $2-$形式，其定义为

$$\operatorname{curl} B = \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{b}_{jk} dx_j \wedge dx_k,$$

其中 $\mathrm{b}_{jk}(x) = \partial_{x_j} B_k - \partial_{x_k} B_j,\ j, k = 1, \ldots, n$。
对于有界势，Bellassoued 和 Mannoubi 在 [7] 中给出了相同的结果，证明了由部分边界谱数据得到的唯一性；Kian 则在 [23] 中证明，当 Ω 为有界域时，只需假设谱数据仅在渐近意义下已知，即可得到唯一性。随后，Bellassoued、Choulli、Dos Santos Ferreira、Kian 和 Stefanov 在 [4] 中将 Kian 的结果推广到了黎曼流形。

然而，据我们所知，关于高阶椭圆算子的逆谱问题的研究还很少。在 [28], Krupchyk 和 Päivärinta 建立了算子 $P + q$ 的多维 Borg-Levinson 定理，其中 P 是阶数为 $2m$ 的椭圆偏微分算子，并满足 $m \geq 1$。特别地，对于 $P = (-\Delta)^m$, 且满足 $m \geq 1$，他们证明了具有不完整谱数据的 Borg-Levinson 定理。随后，Serov 在 [38] 中证明，扰动双调和算子的边界谱数据 $\{(\lambda_k, \Delta\phi_k|_{\partial\Omega}, \partial_\nu \phi_k|_{\partial\Omega})\ k \in \mathbb{N}^*\}$，$\mathcal{H}_{a,B,q} = (-\Delta)^2 - \operatorname{div}(a\nabla) - 2iB\cdot\nabla - i\operatorname{div}B + q$，能够唯一确定二阶扰动 $a \in W^{2,p}(\Omega\ \mathbb{R})$、向量场 $B \in W^{1,p}(\Omega\ \mathbb{R})$ 以及势 $q \in L^p(\Omega\ \mathbb{R})$，其中 $p > n/2$ 和 $n \geq 3$。最近，在 $a = 0$ 且 $B = 0$ 的情形下，Li、Yao 和 Zhao 在 [30] 中为双调和算子的逆谱问题证明了 Hölder 稳定性估计。上述两篇论文仅研究了谱数据完整的情形。在本文中，我们将 Kian [23] 以及 Bellassoued 等人 [4]（在区域有界的情形下）的结果推广到双调和算子。更准确地说，当边界谱数据仅渐近已知时，我们证明了双调和算子的一阶扰动系数 (B, q) 的稳定性估计。

1.2. 主要结果的陈述。我们在此重新陈述本文的主要结果，即对于每个 $k \in \mathbb{N}$，利用边界谱数据 $\{(\lambda_k, \gamma_N(\phi_k))\}$ 的某些渐近知识，识别双调和算子的一阶扰动系数 (B, q)。

我们首先说明可容许系数 $(B、 q)$ 所需满足的条件。设 $\mathcal{O}$ 是 Ω 中 Γ 的一个固定开邻域。给定 $B_0 \in W^{1,\infty}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$、$M > 0$ 和 $\sigma_\ell > \frac{n}{2}$，对于 $\ell = 1,\ 2$。我们分别将可容许势 q 和向量场 B 定义为

$$\mathcal{Q}_{\sigma_1}(M) = \{q \in L^\infty(\Omega),\ \|q\|_{H^{\sigma_1}(\Omega)} \leq M\},$$

and

$$\mathcal{B}_{\sigma_2}(M, B_0) = \{B \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n),\ \|B\|_{H^{\sigma_2}(\Omega)} \leq M \quad \text{and} \quad B = B_0,\ \text{in } \mathcal{O}\},$$

我们将特征值 $(\lambda_{\ell,\ k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ 以及相应的特征函数标准正交基 $(\phi_{\ell,\ k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ 与算子 $\mathcal{H}_\ell := \mathcal{H}_{B_{\ell,\ q_\ell}}$ 相关联。
我们的主要结果表明，在边界谱数据渐近接近的假设下，可以稳定地确定向量场 B 和电势 q。更确切地说，我们将在第 5节证明以下定理。

定理 1.1。设 B_0、M 和 σ_ℓ 如上。设 $B_\ell \in \mathcal{B}_{\sigma_2}(M, B_0)$ 和 $q_\ell \in \mathcal{Q}_{\sigma_1}(M)$，对于 $\ell = 1,$ 2。则渐近谱条件

$$\sup_{k\geq 1} |\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}| < +\infty \ \textit{and} \ \sum_{k\geq 1} k^{4/n} \|\gamma_N(\phi_{1,k}) - \gamma_N(\phi_{2,k})\| < \infty, \tag{1.12}$$

意味着旋度 B_1 = 旋度 B_2。此外，存在 $C_\ell > 0$ 和 $\theta_\ell \in (0,1)$，对于$\ell = 1,2$，使得我们有

$$\|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 (\limsup_{k\to\infty} |\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}|)^{\theta_1} < +\infty, \tag{1.13}$$

and

$$\|B_1 - B_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2 \big(\limsup_{k\to\infty} |\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}|\big)^{\theta_2} < +\infty. \tag{1.14}$$

这里 C_ℓ 仅取决于 Ω、n 和 M，而 θ_ℓ 仅取决于 n。

由上述定理，可以很容易地从边界谱数据的某些渐近知识中推出向量场 B 和势 q 的以下唯一性结果。

推论 1.2。设 B_0、M和 σ_ℓ如上。设 $B_\ell \in \mathcal{B}_{\sigma_2}(M, B_0)$ 和 $q_\ell \in \mathcal{Q}_{\sigma_1}(M)$，对于$\ell = 1, 2$。则在渐近谱条件

$$\limsup_{k\to\infty} |\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}| = 0 \ \textit{and} \ \sum_{k\geq 1} k^{4/n} \|\gamma_N(\phi_{1,k}) - \gamma_N(\phi_{2,k})\| < \infty, \tag{1.15}$$

我们有 $B_1 = B_2$ 和 $q_1 = q_2$。

据我们所知，定理1.1 和推论1.2 是首批利用边界谱数据的渐近知识研究双调和算子逆谱问题的结果。还请注意，条件（1.12）是关于双调和算子边界谱数据的最弱条件。

下面说明定理1.1证明中的主要思路。在 [20], Isozaki 引入了一个简单的表示公式，将势之差 $q = q_1 - q_2$ 与薛定谔算子的边界谱数据联系起来。该结果基于 Born 近似方法，该方法通常用于散射理论。我们分析的主要思路是将这一策略推广到带有一阶扰动的双调和算子。为此，我们需要构造一个具有以下特殊形式的双调和算子解

$$\alpha(x,\lambda) = \alpha_0(x,\lambda) + \lambda^{-1}\alpha_1(x,\lambda), \tag{1.16}$$

其中 $\alpha_j(\cdot,\lambda) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$，对于 $j = 0$，1，待选，满足某些输运方程，且 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 Re$(\lambda) > 1$。更确切地说，通过选择合适的振幅 α_j，对于 $j = 0$，1，我们可以建立适当的表示公式，从而将磁场旋度 B 的傅里叶变换表示为与 Ω 中的 $\mathcal{H}_{B,q}u - \lambda u = 0$相关联的 Dirichlet到Neumann映射，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 不属于 $\mathcal{H}_{B,q}$的谱。其次，利用 Hodge分解，向量场 $B = B_1 - B_2$ 可表示为$B = \nabla\psi$，其中 $\psi \in W^{2,+\infty}(\Omega\ \mathbb{R})$ 满足边界 Γ上的边界条件 $\psi = 0$；随后，通过改变振幅的选择，我们可以建立另外两个表示公式，将势 q 和函数 ψ 的傅里叶变换与边界谱数据联系起来。

1.3. 概述。 本文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们引入一些记号，并给出方程 $\mathcal{H}_{B,q}u - \lambda u = 0$在 Ω 中的解的一些有用的初步性质，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 不属于 $\mathcal{H}_B$ 的谱，q。在第3 节中，我们给出 Dirichlet 到 Neumann 映射的一些渐近谱性质。在第 4节中，我们给出一个简单的表示公式，该公式将系数之差与双调和算子的边界谱数据联系起来。最后，第 5 节致力于证明定理1.1 。

2. 初步性质

本节中，我们引入一些记号，并给出方程 $\mathcal{H}_{B,q}u - \lambda u = 0$ 在 Ω 中的解的一些有用的初步性质，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 不属于 $\mathcal{H}_B$ 的谱，q。

对于 $B \in W^{1,\infty}(\Omega\ \mathbb{R}^n)$、$q \in L^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，我们考虑如下边界 y 值问题

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_{B,q} - \lambda)u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma_D(u) = f & \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $f = (f_0,\ f_1) \in H^{7/2,5/2}(\Gamma)$。然后可以验证，存在一个 $\lambda_0 > 0$ 使得对于 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\lambda_0,\ +\infty)$，问题（2.1）有唯一解 $u \in H^4(\Omega)$ 满足

$$\|u\|_{H^4(\Omega)} \le C_\lambda \|f\|_{H^{7/2,5/2}(\Gamma)}. \tag{2.2}$$

因此，我们可以证明 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{B,q})$ 连续嵌入 $H^4(\Omega)$。因此，$\mathcal{H}_{B,q}$ 的特征函数 $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $H^4(\Omega)$，且对于 $H^{1/2,3/2}(\Gamma)$ 中的每个 $k \ge 1$，都有 $\gamma_N(\phi_k)$。我们还可以定义与其相关的 Dirichlet到Neumann映射

(2.1) 通过

$$\begin{aligned} \Lambda_{B,q,\lambda} \quad : \quad & H^{7/2,5/2}(\Gamma) \quad \longrightarrow \quad H^{1/2,3/2}(\Gamma) \\ & f := (f_0, f_1) \quad \longmapsto \quad (\partial_\nu \Delta u - i(B\cdot\nu)u, -\Delta u)_{|\Gamma}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

根据估计（2.2）以及下述 Neumann迹算子 γ_N 的连续性，我们得出 Dirichlet到Neumann映射 $\Lambda_{B,\ q,\ \lambda}$ 是连续的。值得注意的是，在 [38] 中，作者考虑了问题（2.1），以及 Dirichlet到Neumann映射 $\Lambda_{B,\ q,\ \lambda}$（存在二阶扰动时）的定义，其中 Dirichlet数据属于某个 Besov空间。由于我们的分析不需要如此增强的结果，因此本文将问题（2.1）的研究限制在 Dirichlet数据属于 $H^{7/2,\ 5/2}(\Gamma)$ 的情形，这简化了主要结果证明中的若干方面。

对于非负整数 k 和 $\tau \geq 1$，我们分别通过以下范数定义 Sobolev 空间 $H^k_\tau(\Omega)$ 和 $H^{-k}_\tau(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u\|^2_{H^k_\tau(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} \tau^{2(k-j)} \|u\|^2_{H^j(\Omega)}, \quad u \in H^k_\tau(\Omega), \tag{2.4}$$

and

$$\|u\|^2_{H^{-k}_\tau(\mathbb{R}^n)} = \|\langle \xi, \tau\rangle^{-k} \hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in H^{-k}_\tau(\mathbb{R}^n), \tag{2.5}$$

其中 $\langle \xi, \tau\rangle = \sqrt{\tau^2 + |\xi|^2}$，对于 $\tau \geq \tau_0 > 0$和 $\xi \in \mathbb{R}^n$。我们可以直接验证

$$\|u\|_{H^{-2}_\tau(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{\tau} \|u\|_{H^{-1}_\tau(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.6}$$

我们将阶为 $m \in \mathbb{R}$ 的符号类定义为

$$S^m_\tau = \left\{ a(\cdot,\cdot,\tau) \in \mathcal{C}^\infty, \ \left| \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi a(x,\xi,\tau) \right| \leq C_{\alpha,\ \beta} \langle \xi, \tau\rangle^{m-|\beta|} \right\}.$$

对于 $a \in S^m_\tau$和 $b \in S^{m'}_\tau$，有

$$\|a(x,\ D, \tau)u\|_{H^{s-m}_\tau(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s_\tau(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.7}$$

and

$$\|[a(x,\ D,\tau),\ b(x,\ D,\tau)]u\|_{H^{s-m-m'+1}_\tau(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s_\tau(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.8}$$

对于 $m \in \mathbb{R}$和 $\tau > 0$，我们定义与符号相对应的 $(\Delta^2 + \tau^4)^{m/4}$

$$a(\xi, \tau) = (|\xi|^4 + \tau^4)^{m/4} \sim \langle \xi, \tau\rangle^m,$$

由此可得

$$C_1 \|u\|_{H^s_\tau(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\Delta^2 + \tau^4)^{m/4} u\|_{H^{s-m}_\tau(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{H^s_\tau(\mathbb{R}^n)} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

其中 C_1, C_2 是与 τ无关的正定常数。

接下来，我们需要以下 Green公式

引理 2.1. 设 $B \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 和 $q \in L^\infty(\Omega)$。那么，对于任意两个属于 $H^4(\Omega)$ 的函数 u 和 ϕ，下列等式成立

$$(\mathcal{H}_{B,q} u, \phi) - (u, \mathcal{H}_{B,q}\phi) = \langle \gamma_N(u), \gamma_D(\phi)\rangle - \langle \gamma_D(u), \gamma_N(\phi)\rangle, \tag{2.10}$$

其中，$(\cdot,\cdot)$ 和 $\langle \cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ 中的标量积，而 ds 表示 Γ 上的欧几里得曲面测度。

3. 渐近谱分析

在下文中，我们固定 $q_\ell \in L^\infty(\Omega)$ 和 $B_\ell \in W^{1,\infty}(\Omega)$，其中 $\ell = 1, 2$，使得 $B_1 = B_2$，在 $\mathcal{O}$ 中。与第一节一样，我们考虑算子 $\mathcal{H}_\ell$，当 $B = B_\ell$ 且 $q = q_\ell$，对于 $\ell = 1, 2$。记 $\rho(\mathcal{H}_\ell)$ 为 $\mathcal{H}_\ell$ 的预解集。

对于 $f = (f_0, f_1) \in H^{7/2,5/2}(\Gamma)$ 和 $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_\ell)$，$\ell = 1, 2$，我们考虑以下边值问题

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_\ell - \lambda)u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma_D(u) = f & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

为方便记号，与（3.1）相关联的狄利克雷到诺伊曼映射记为

$$\Lambda_\ell(\lambda) = \Lambda_{B_\ell, q_\ell, \lambda}, \quad \ell = 1, 2. \tag{3.2}$$

此外，对于 $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_\ell)$，我们将 $R_\ell(\lambda) := (\mathcal{H}_\ell - \lambda)^{-1}$ 记为 $\mathcal{H}_\ell$ 的预解算子，并回顾以下经典的预解估计（例如参见 [21]）

$$\|R_\ell(\lambda)\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}, \quad \ell = 1, 2. \tag{3.3}$$

本节的目标之一是考察差值 $(\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda))f$ 在谱参数 λ 趋于 $-\infty$时的变化。为此，我们先给出一个用谱数据表示 u_ℓ 的表示公式。

引理 3.1. 设 $f = (f_0, f_1) \in H^{7/2,5/2}(\Gamma)$ 和 $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_\ell)$。则边值问题 (3.1) 有唯一解 $u_\ell(\lambda) = u_\ell^f(\lambda) \in H^4(\Omega)$，由下列级数给出

$$u_\ell(\lambda) = \sum_{k \geq 1} \frac{\langle f, \gamma_N(\phi_{\ell,k}) \rangle}{\lambda_{\ell,k} - \lambda} \phi_{\ell,k}, \tag{3.4}$$

该级数在 $L^2(\Omega)$ 中收敛。此外，对于 Ω 中任意包含 Γ 的邻域 $\mathcal{O}$，有

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \left(\|u_\ell(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_\ell(\lambda)\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{O})} \right) = 0. \tag{3.5}$$

证明。我们先证明方程（3.1）的解存在且唯一。利用 $\gamma_D : H^4(\Omega) \longrightarrow H^{7/2,5/2}(\Gamma)$ 是满射这一事实，存在 $g \in H^4(\Omega)$ 使得$\gamma_D(g) = f$。因此，这表明 u_ℓ 是（3.1）的解，当且仅当 $v_\ell := u_\ell - g$ 是其解

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_\ell - \lambda)v = F & \text{in } \Omega, \\ \gamma_D(v) = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $F = (\mathcal{H}_\ell - \lambda)g \in L^2(\Omega)$。现在利用 $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_\ell)$ 这一事实，我们得出边值问题 (3.6) 存在唯一解 $v_\ell = (\mathcal{H}_\ell - \lambda)^{-1}F$。这意味着 (3.1) 存在唯一解 $u_\ell(\lambda) \in H^4(\Omega)$。此外，$u_\ell(\lambda)$ 可以在希尔伯特基 $(\phi_{\ell,k})_k$ 下写成

$$u_\ell(\lambda) = \sum_{k \geq 1} (u_\ell(\lambda), \phi_{\ell,k}) \phi_{\ell,k}. \tag{3.7}$$

另一方面，将 (3.1) 中的第一个方程乘以 $\overline{\phi_k}$ 并应用格林公式(2.10) 后，我们得到

$$\langle f, \gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle = (\lambda_{\ell,k} - \lambda)\big(u_\ell(\lambda), \phi_{\ell,k}\big). \tag{3.8}$$

因此，我们得到表达式（3.4）。现在证明

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \|u_\ell(\lambda)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

取 $\lambda_0 > 0$ 足够大但固定，使得零不属于算子 $(-\Delta)^2 + \lambda_0$ 的谱，并且对于 $\lambda < -\lambda_0$, 有 $|\lambda - \lambda_{\ell,\ k}|^2 \geq |\lambda_0 + \lambda_{\ell,\ k}|^2$ 对所有 $k \geq 1$ 均成立，则

$$\frac{|\langle f, \gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle|^2}{|\lambda - \lambda_{\ell,k}|^2} \leq \frac{|\langle f, \gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle|^2}{|\lambda_0 + \lambda_{\ell,k}|^2}, \tag{3.9}$$

因此，根据勒贝格控制收敛定理，当 $\lambda \to -\infty$ 时，可得所需结果。现在继续证明（3.5）。取 $\kappa \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$，使得 $\kappa = 1$ 在 $\Omega \setminus \mathcal{O}$ 上成立，并令$\tilde{u}_\ell(\lambda) = \kappa u_\ell(\lambda)$。则 $\tilde{u}_\ell(\lambda)$ 的支撑包含于 Ω 且满足

$$(\Delta^2 - \lambda)\tilde{u}_\ell(\lambda) = \big(2iB_\ell \cdot \nabla - V_\ell(x)\big)\tilde{u}_\ell(\lambda) + Q_3 u_\ell(\lambda), \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

其中，Q_3 是一个三阶偏微分算子，其系数的支撑包含于 Ω，且$V_\ell = -i$散度$B_\ell + q_\ell$, $\ell = 1,\ 2$。将 $(\Delta^2 - \lambda)^{-3/4}$ 作用于（3.10）等式的左右两端，得到以下恒等式

$$\begin{aligned}&(\Delta^2 - \lambda)^{1/4}\tilde{u}_\ell(\lambda)\\ &= (\Delta^2 - \lambda)^{-3/4}\big(2iB_\ell \cdot \nabla - V_\ell(x)\big)\tilde{u}_\ell(\lambda) + (\Delta^2 - \lambda)^{-3/4} \circ Q_3 u_\ell(\lambda).\end{aligned} \tag{3.11}$$

然后利用（2.9），对 $\tau = |\lambda|^{1/4}$，以及（2.6），我们推得

$$C_1\|\tilde{u}_\ell(\lambda)\|_{H^1_\tau(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/4}}\|\tilde{u}_\ell(\lambda)\|_{H^{-1}_\tau(\mathbb{R}^n)} + \|u_\ell(\lambda)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.12}$$

因此

$$\|\tilde{u}_\ell(\lambda)\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}}\|\tilde{u}_\ell(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(\lambda)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.13}$$

这意味着（3.5）。 □

现在我们可以证明，当谱参数 λ 趋于 $-\infty$时，边值问题（3.1）的两个解彼此接近。更确切地说，下面的引理表明，当 λ 趋于 $-\infty$时，向量场 B_ℓ 和势 q_ℓ, $\ell = 1,\ 2$的影响会减弱。

引理 3.2. 设 $B_\ell \in W^{1,\ \infty}(\Omega)$ 满足 $B_1 = B_2$，在 $\mathcal{O}$ 中，并设 $q_\ell \in L^\infty(\Omega)$，$\ell = 1,\ 2$。对于 $f \in H^{7/2,\ 5/2}(\Gamma)$ 和 $\mu \in \rho(\mathcal{H}_1) \cap \rho(\mathcal{H}_2)$，记作

$$w_{1,2}(\mu) = u_1(\mu) - u_2(\mu). \tag{3.14}$$

这里，$u_\ell(\mu)$ 表示将 λ 替换为 μ 后，方程（3.1）的 $H^4(\Omega)$–解。于是 $w_{1,\ 2}(\mu)$ 在 $H^4(\Omega)$ 中收敛于 0，当 μ 趋于 $-\infty$ 时。特别地，$\gamma_N(w_{1,\ 2}(\mu))$ 收敛于 0 在 $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ 中，当 μ 趋于 $-\infty$ 时。

证明。通过简单计算即可得出，$w_{1,2}(\mu)$ 满足以下边界问题

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_1 - \mu)\, w_{1,2}(\mu) = h(\mu) & \text{in } \Omega,\\ \gamma_D(w_{1,2}(\mu)) = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \tag{3.15}$$

其中 $h(\mu)$由下式给出

$$h(\mu) = -2i(B_2 - B_1)\cdot\nabla u_2(\mu) + (V_2 - V_1)\,u_2(\mu), \tag{3.16}$$

with

$$V_\ell = -i\mathrm{div}B_\ell + q_\ell, \quad \ell = 1, 2.$$

由于 $h(\mu) \in L^2(\Omega)$ 且 $\mu \in \rho(\mathcal{H}_1)$，因此 $w_{1,\,2}(\mu) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$，并且我们有

$$w_{1,2}(\mu) = R_1(\mu)\circ h(\mu) = \sum_{k\geq 0}\frac{(h(\mu),\phi_{1,k})}{(\lambda_{1,k}-\mu)}\phi_{1,k}. \tag{3.17}$$

回顾一下， $\mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$ 连续嵌入 $H^4(\Omega)$，因此存在一个常数$C > 0$使得

$$\|w_{1,2}(\mu)\|^2_{H^4(\Omega)} \leq C\sum_{k\geq 1}|\lambda_{1,k}-\mu|^2|(w_{1,2}(\mu),\phi_{1,k})|^2 \leq C\|h(\mu)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.18}$$

由于我们假设 $B_1 = B_2$ 属于 $\mathcal{O}$，可得

$$\|h(\mu)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla u_2(\mu)\|_{L^2(\Omega\setminus\mathcal{O})} + \|u_2(\mu)\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.19}$$

其中 C 与 无关。现在利用引理 3.1 可推得

$$\lim_{\mu\to-\infty}\|w_{1,2}(\mu)\|_{H^4(\Omega)} = 0. \tag{3.20}$$

此外，由于迹映射 γ_N： $H^4(\Omega) \longrightarrow H^{1/2,\,3/2}(\Gamma)$ 是连续的，我们得到第二个结果

$$\lim_{\mu\to-\infty}\|\gamma_N(w_{1,2}(\mu))\| = 0. \tag{3.21}$$

证明完成。 □

本节的第二个目标是将 $\Lambda_\ell(\lambda)f$ 表示为谱参数 λ和边界谱数据 $\{(\lambda_{\ell,k},\gamma_N(\phi_{\ell,k}))$ $k\in\mathbb{N}^*\}$（其中 $\ell = 1,\ 2$）的形式。注意，级数（3.4）仅在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，因此我们无法从（3.4）推导出关于 $\gamma_N(u_\ell(\lambda))$ 的表示公式，其中涉及 λ 和 $\mathcal{H}_\ell$ 的边界谱数据，且 $\ell = 1,\ 2$。为此，按照 [22], ，我们引入另一个谱参数 μ，并考虑 $w_\ell(\lambda,\mu) := u_\ell(\lambda) - u_\ell(\mu)$。于是得到下面的引理，该引理将在后文中发挥作用。

引理 3.3. 对于 $f = (f_0, f_1) \in H^{7/2,5/2}(\Gamma)$ 和 $\lambda,\mu\in\rho(\mathcal{H}_\ell)$。记 $w_\ell(\lambda,\mu) := u_\ell(\lambda) - u_\ell(\mu)$，其中 $u_\ell(\lambda)$ 和 $u_\ell(\mu)$ 分别是与 λ和 μ相关联的 (3.1) 的 $H^4(\Omega)$–解。则下列恒等式成立

$$\gamma_N(w_\ell(\lambda,\mu)) = \sum_{k\geq 1}\frac{(\lambda-\mu)\langle f,\gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle}{(\lambda-\lambda_{\ell,k})(\mu-\lambda_{\ell,k})}\gamma_N(\phi_{\ell,k}). \tag{3.22}$$

此外，级数 (3.22) 在 $H^{1/2,\,3/2}(\Gamma)$ 中收敛。

证明。通过简单计算，很容易看出 $w_\ell(\lambda,\mu)$ 满足

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_\ell - \lambda)w_\ell(\lambda,\mu) = (\lambda-\mu)u_\ell(\mu) & \text{in } \Omega,\\ \gamma_D(w_\ell(\lambda,\mu)) = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{3.23}$$

然后，利用 $u_\ell \in H^4(\Omega)$ 和 $\lambda \in \rho(\mathcal{H}_\ell)$ 这一事实，我们可以将 $w_\ell(\lambda,\mu)$ 写成

$$w_\ell(\lambda,\mu) = (\lambda-\mu)R_\ell(\lambda)\circ u_\ell(\mu) = (\lambda-\mu)\sum_{k\geq 1}\frac{\big(u_\ell(\mu),\phi_{\ell,k}\big)}{\lambda_{\ell,k}-\lambda}\phi_{\ell,k}, \tag{3.24}$$

其中，收敛发生在 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_\ell)$ 中。此外，由于算子 $u\to\gamma_N(u)$ 是从 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_\ell)$ 到 $H^{1/2,\,3/2}(\Gamma)$ 的连续算子，因此级数

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\big(u_\ell(\mu),\phi_{\ell,k}\big)}{\lambda_{\ell,k}-\lambda}\gamma_N(\phi_{\ell,k}), \tag{3.25}$$

收敛于 $H^{1/2,\,3/2}(\Gamma)$，并由（3.24）得到

$$\gamma_N\big(w_\ell(\lambda,\mu)\big) = (\lambda-\mu)\sum_{k\geq 1}\frac{\big(u_\ell(\mu),\phi_{\ell,k}\big)}{\lambda_{\ell,k}-\lambda}\gamma_N(\phi_{\ell,k}). \tag{3.26}$$

这与（3.8）一起，在用 μ替换 λ 后，证明完毕。 □

4. Isozaki's asymptotic representation formula

在 [20], Isozaki 中，引入了一个简单的表示公式，将势 $q=q_1-q_2$ 的差与薛定谔算子的边界谱数据联系起来。本节将这一策略推广到带一阶扰动的双调和算子。

4.1. 表示公式。对于固定的 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\tau\geq\langle\xi\rangle$，令 $\lambda_\tau := (\tau+i)$。设 $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$ 使得 $\xi\cdot\omega=0$，我们定义

$$\beta_\tau := \sqrt{1-\frac{|\xi|^2}{4\tau^2}},\quad \omega_{\ell,\tau} := \beta_\tau\omega + (-1)^\ell\frac{\xi}{2\tau}\quad\text{and}\quad \varrho_{\ell,\tau}=\lambda_\tau\omega_{\ell,\tau}, \tag{4.1}$$

以这种方式

$$|\omega_{\ell,\tau}|=1,\ \varrho_{\ell,\tau}\cdot\varrho_{\ell,\tau}=\lambda_\tau^2,\ \text{for}\ \ell=1,2,\quad\text{and}\quad \lim_{\tau\to+\infty}(\varrho_{1,\tau}-\varrho_{2,\tau})=-\xi.$$

我们还定义以下两个函数

$$\varphi^*_{1,\tau}(x) = e^{i\varrho_{1,\tau}\cdot x}, \tag{4.2}$$

$$\varphi^*_{2,\tau}(x) = e^{i\overline{\varrho_{2,\tau}}\cdot x}a_2(x,\tau), \tag{4.3}$$

其中选择 $a_2\in\overline{\mathcal{C}}^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$，使得

$$\big((-\Delta)^2-\overline{\lambda_\tau^4}\big)\varphi^*_{2,\tau}=0. \tag{4.4}$$

容易看出，$\varphi^*_{\ell,\,\tau}$ 满足

$$\|\varphi^*_{1,\tau}\|_{L^2(\Omega)}\leq C\qquad\text{and}\quad \|\varphi^*_{2,\tau}\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|a_2(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.5}$$

这里 C 是与 τ 无关的正定常数。记 $T_\tau(D) := 2i\omega_{2,\,\tau}\cdot\nabla$，通过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&e^{-i\overline{\varrho_{2,\tau}}\cdot x}\big[\big((-\Delta)^2-\overline{\lambda_\tau^4}\big)\varphi^*_{2,\tau}\big]\\
&=\Big((\Delta+\overline{\lambda_\tau}T_\tau)^2-2\overline{\lambda_\tau^2}(\Delta+\overline{\lambda_\tau}T_\tau)\Big)a_2\\
&=(-\Delta)^2a_2+2\overline{\lambda_\tau}(T_\tau\circ\Delta a_2)+\overline{\lambda_\tau}^2\big(-2\Delta a_2+T_\tau^2a_2\big)-2\overline{\lambda_\tau}^3T_\tau a_2.
\end{aligned}\tag{4.6}$$

为了得到（4.4），我们选择函数 a_2 具有以下特殊形式

$$a_2(x,\tau)=\alpha_0(x,\tau)+(\overline{\lambda_\tau})^{-1}\alpha_1(x,\tau), \tag{4.7}$$

其中 α_j 稍后选取，属于 $\mathcal{C}^\infty(\Omega\ \mathbb{R})$, $\overline{\ }$满足 $\limsup_{\tau\to+\infty}|D^\alpha\alpha_j(\cdot,\tau)|<C|\xi|$，对于 $\alpha\in\mathbb{N}^n$、$|\alpha|\le 4$ 和 $j=0$，1，并满足以下输运方程组：

$$\begin{cases} T_\tau(D)\alpha_0 & =0,\\ T_\tau(D)\alpha_1 & =-\Delta\alpha_0,\\ \Delta\alpha_1 & =0. \end{cases} \tag{4.8}$$

按此方式选取 a_2 后，由式（4.6）可得以下恒等式

$$\begin{aligned} &e^{-i\overline{\varrho_{2,\tau}}\cdot x}\left[\left((-\Delta)^2-\overline{\lambda_\tau^4}\right)\varphi_{2,\tau}^*\right]\\ &=(-\Delta)^2\alpha_0+2T_\tau\circ\Delta\alpha_1+\overline{\lambda_\tau}\left(2T_\tau\circ\Delta\alpha_0-2\Delta\alpha_1+T_\tau^2\alpha_1\right)\\ &\quad+\overline{\lambda_\tau}^2\left(-2\Delta\alpha_0+T_\tau^2\alpha_0-2T_\tau\alpha_1\right)+\overline{\lambda_\tau}^3(-2T_\tau\alpha_0)+(\overline{\lambda_\tau})^{-1}(-\Delta)^2\alpha_1\\ &=0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

最后，我们引入

$$S_\ell(\tau,a_2)=\langle\Lambda_\ell(\lambda_\tau^4)\gamma_D(\varphi_{1,\tau}^*),\gamma_D(\varphi_{2,\tau}^*)\rangle, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\ell,\tau}(x)&=(\mathcal{H}_\ell-\lambda_\tau^4)\varphi_{1,\tau}^*(x)\\ &=e^{i\varrho_{1,\tau}\cdot x}\Big(2\varrho_{1,\tau}\cdot B_\ell-i\mathrm{div}B_\ell+q_\ell\Big), \end{aligned} \tag{4.11}$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\ell,\tau}(x,a_2)&=(\mathcal{H}_\ell-\overline{\lambda_\tau}^4)\varphi_{2,\tau}^*(x)\\ &=e^{i\overline{\varrho_{2,\tau}}\cdot x}(-2iB_\ell\cdot\nabla+2\overline{\varrho_{2,\tau}}\cdot B_\ell-i\mathrm{div}B_\ell+q_\ell)a_2(x,\tau), \end{aligned} \tag{4.12}$$

对于 $\ell=1$，2。容易看出

$$\|\Phi_{\ell,\tau}\|_{L^2(\Omega)}\le C\tau, \tag{4.13}$$

$$\|\tilde{\Phi}_{\ell,\tau}(\cdot,a_2)\|_{L^2(\Omega)}\le C\tau\|a_2(\cdot,\tau)\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.14}$$

这里，C 是一个与 τ 无关的正定常数。

我们有以下恒等式，它是证明主要结果的关键工具。

引理 4.1. 设 $B_\ell\in W^{1,\infty}(\Omega)$、$q_\ell\in L^\infty(\Omega)$ 和 $\varphi_{\ell,\tau}$如上，$\ell=1$，2。则有

$$\begin{aligned} S_\ell(\tau,a_2)=&-\left(\varphi_{1,\tau}^*,(-2iB_\ell\cdot\nabla-idivB_\ell+q_\ell)\,\varphi_{2,\tau}^*\right)+\langle\gamma_D(\varphi_{1,\tau}^*),\gamma_N(\varphi_{2,\tau}^*)\rangle\\ &+\left(R_\ell(\lambda_\tau^4)\,(\Phi_{\ell,\tau})\,,\tilde{\Phi}_{\ell,\tau}(\cdot,a_2)\right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

这里，我们将 $R_\ell(\lambda_\tau^4)$ 记为 $(\mathcal{H}_\ell-\lambda_\tau^4)$ 的预解算子。

证明. 设 u_ℓ 是以下边界值问题的解

$$\begin{cases} \left(\mathcal{H}_\ell-\lambda_\tau^4\right)u_\ell=0 & \text{in }\Omega,\\ \gamma_D(u_\ell)=\gamma_D(\varphi_{1,\tau}^*) & \text{on }\Gamma. \end{cases} \tag{4.16}$$

我们将 u_ℓ 写作 $u_\ell=\varphi_{1,\tau}^*+v_\ell$，其中 v_ℓ 是该边值问题的解

$$\begin{cases} \left(\mathcal{H}_\ell-\lambda_\tau^4\right)v_\ell=-\Phi_{\ell,\tau}(x) & \text{in }\Omega,\\ \gamma_D(v_\ell)=0 & \text{on }\Gamma. \end{cases} \tag{4.17}$$

于是，我们得到

$$u_\ell = \varphi^*_{1,\tau} - \left(\mathcal{H}_\ell - \lambda_\tau^4\right)^{-1}\left(\Phi_{\ell,\tau}\right) = \varphi^*_{1,\tau} - R_\ell(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{\ell,\tau}\right). \tag{4.18}$$

此外，由于

$$S_\ell(\tau, a_2) = \langle \gamma_N(u_\ell), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle, \tag{4.19}$$

因此应用 Green公式（2.10）可得

$$\begin{aligned} S_\ell(\tau, a_2) &= \left(\mathcal{H}_\ell u_\ell, \varphi^*_{2,\tau}\right) - \left(u_\ell, \mathcal{H}_\ell\varphi^*_{2,\tau}\right) + \langle \gamma_D(u_\ell), \gamma_N(\varphi^*_{2,\tau})\rangle \\ &= -\left(u_\ell, (\mathcal{H}_\ell - \overline{\lambda}_\tau^4)\varphi^*_{2,\tau}\right) + \langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\varphi^*_{2,\tau})\rangle. \end{aligned} \tag{4.20}$$

将（4.12）和（4.18）代入（4.20）即可得到所需的恒等式。 □

4.2. 边界表示公式的渐近行为。 本节的目标是确定 $\tau^\beta\big(S_1(\tau, a_2) - S_2(\tau, a_2)\big)$ 在参数 τ 趋于 $+\infty$时的渐近行为，其中 $\beta = -1, 0$。下文中，我们沿用第 3 节中的相同记号，并记

$$B = B_2 - B_1, \quad \text{and} \quad q = q_2 - q_1.$$

我们将向量场 B 和势 q 在 Ω 外延拓为零。这些延拓仍分别记为 B 和 q。

利用引理4.1，可得以下恒等式。

$$\begin{aligned} S_1(\tau, a_2) - S_2(\tau, a_2) = &\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\Big(2iB\cdot\nabla a_2 + (2\varrho_{2,\tau}\cdot B + i\mathrm{div}B + q)a_2\Big)dx \\ &+\big(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right), \tilde{\Phi}_{1,\tau}(\cdot, a_2)\big) - \big(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right), \tilde{\Phi}_{2,\tau}(\cdot, a_2)\big), \end{aligned} \tag{4.21}$$

对所有 $a_2 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$由（4.7）给出。

引理4.2. 设 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\xi\cdot\omega = 0$，且 $a_2 = 1$。则有以下恒等式

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{-1}\big(S_1(\tau, 1) - S_2(\tau, 1)\big) = 2\int_\Omega e^{-ix\cdot\xi}\omega\cdot B(x)\, dx. \tag{4.22}$$

证明。注意到 $Im(\lambda_\tau^4) = 4\tau(\tau^2 - 1)$，由预解估计（3.3）可得

$$\|R_\ell(\lambda_\tau^4)\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega))} \le \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda_\tau^4)|} \le \frac{C}{\tau^3}, \quad \ell = 1, 2. \tag{4.23}$$

此处 C 是一个与 τ无关的正定常数。（4.13）和（4.14）可推出

$$|\big(R_\ell(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{\ell,\tau}\right), \tilde{\Phi}_{\ell,\tau}(\cdot, a_2)\big)| \le \frac{C}{\tau}\|a_2(\cdot,\tau)\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.24}$$

这里 C是一个与 τ无关的正定常数。令 $a_2(x,\tau) = 1$，对于 $x\in\Omega$。显然， a_2 满足输运方程组（4.8）。然后将（4.21）乘以 τ^{-1} 可得

$$\begin{aligned} &\tau^{-1}\big(S_1(\tau, 1) - S_2(\tau, 1)\big) \\ &= 2\tau^{-1}\lambda_\tau\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}(\omega_{2,\tau}\cdot B)\, dx + \tau^{-1}\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}(i\mathrm{div}B + q)dx \\ &\quad + \tau^{-1}\big(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right), \tilde{\Phi}_{1,\tau}(\cdot, 1)\big) - \tau^{-1}\big(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right), \tilde{\Phi}_{2,\tau}(\cdot, 1)\big). \end{aligned} \tag{4.25}$$

由于 B，$\mathrm{div}(B)$ 和 q 属于 $L^1(\Omega)$，因此利用控制收敛定理，当 $\tau \to +\infty$时，结合（4.24）即可得到所需的恒等式。□

引理4.3. 设 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$、$\xi \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\xi \cdot \omega = 0$，且 $a_2 = 1$。假设 $B = \nabla\psi$，其中 $\psi \in W^{2,+\infty}(\Omega\ \mathbb{R})$ 满足 $\psi = |\nabla\psi| = 0$，在 Γ 上成立。则我们有如下恒等式

$$\lim_{\tau\to+\infty}\left(S_1(\tau,1) - S_2(\tau,1)\right) = \int_\Omega e^{-ix\cdot\xi}q(x)dx. \tag{4.26}$$

由前述引理给出的函数 ψ 在 Ω 外的零延拓仍记作同一个字母。

证明。将 B 和 a_2 代入（4.21）可得如下恒等式

$$\begin{aligned} S_1(\tau,1) - S_2(\tau,1) =& 2\lambda_\tau\beta_\tau\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\omega\cdot\nabla\psi dx + \lambda_\tau\tau^{-1}\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\xi\cdot\nabla\psi dx \\ &+ i\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\Delta\psi dx + \int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}q(x)dx \\ &+\left(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right),\tilde{\Phi}_{1,\tau}(\cdot,1)\right)-\left(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right),\tilde{\Phi}_{2,\tau}(\cdot,1)\right). \end{aligned}$$

对上述等式右侧的第一项和第三项应用分部积分，并利用 $\omega\cdot\xi = 0$ 和 $\psi = |\nabla\psi| = 0$ 在 Γ 上这一事实，我们推得

$$\begin{aligned} S_1(\tau,1) - S_2(\tau,1) = &\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}q(x)dx+\left(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right),\tilde{\Phi}_{1,\tau}(\cdot,1)\right) \\ &-\left(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right),\tilde{\Phi}_{2,\tau}(\cdot,1)\right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

然后，将 τ 趋于 $+\infty$，代入（4.27），并使用估计（4.24），我们推得引理 4.3 已完全证明。□

对于固定的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\tau \geq \langle\xi\rangle$，我们令

$$\tilde{\omega}_{2,\tau} := \beta_\tau\xi - \frac{|\xi|^2}{2\tau}\omega, \tag{4.28}$$

其中 β_τ 由式（4.1）给出。显然，$\tilde{\omega}_{2,\ \tau}\cdot\omega_{2,\ \tau} = 0$，此处 $\omega_{2,\ \tau}$ 由式（4.1）给出。取

$$\begin{cases} \alpha_0(x,\tau) = (\tilde{\omega}_{2,\tau}\cdot x)^2, \\ \alpha_1(x,\tau) = i\frac{|\xi|^2}{\beta_\tau}(\omega\cdot x). \end{cases} \tag{4.29}$$

容易看出，α_j对于 $j = 0$，1满足系统（4.8）。记

$$a_2(x,\tau) = (\tilde{\omega}_{2,\tau}\cdot x)^2 + i\frac{|\xi|^2}{\beta_\tau\lambda_\tau}(\omega\cdot x), \tag{4.30}$$

于是我们有

$$\lim_{\tau\to+\infty} a_2(x,\tau) = (\xi\cdot x)^2 \quad \text{and} \quad \lim_{\tau\to+\infty}\|a_2(\cdot,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C|\xi|^4, \tag{4.31}$$

其中 C 是一个与 τ和 ξ无关的正定常数。

引理 4.4. 设 $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\xi \cdot \omega = 0$, 且 a_2 由 (4.30) 给出。假设 $B = \nabla\psi$, 其中 $\psi \in W^{2,+\infty}(\Omega\ \mathbb{R})$ 满足 $\psi = |\nabla\psi| = 0$, 在 Γ 上成立。那么我们有以下恒等式

$$\lim_{\tau\to+\infty}\big(S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)\big) = -4i|\xi|^2\int_\Omega e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)dx + \int_\Omega e^{-ix\cdot\xi}q(x)(\xi\cdot x)^2dx. \tag{4.32}$$

证明。 代入 B 到（4.21）中，我们得到以下恒等式

$$\begin{aligned}
&S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)\\
&= 2\lambda_\tau\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}(\omega_{2,\tau}\cdot\nabla\psi)a_2\,dx + 2i\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\nabla\psi\cdot\nabla a_2\,dx\\
&\quad + i\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\Delta\psi a_2\,dx + \int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}q(x)a_2dx\\
&\quad +\big(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right),\tilde\Phi_{1,\tau}(\cdot,a_2)\big)-\big(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right),\tilde\Phi_{2,\tau}(\cdot,a_2)\big).
\end{aligned}\tag{4.33}$$

因此，对上述恒等式右侧的第三项进行分部积分，并利用 $|\nabla\psi| = \psi = 0$ 在 Γ 上这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)\\
&= 2\lambda_\tau\beta_\tau\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}(\omega\cdot\nabla\psi)a_2\,dx + i\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\nabla\psi\cdot\nabla a_2\,dx\\
&\quad + \int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}q(x)a_2dx+\big(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right),\tilde\Phi_{1,\tau}(\cdot,a_2)\big)\\
&\quad -\big(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right),\tilde\Phi_{2,\tau}(\cdot,a_2)\big).
\end{aligned}\tag{4.34}$$

再次对上述恒等式右侧的前两项进行分部积分，并利用 $\omega\cdot\xi = 0$ 和 $\psi = 0$ 在 Γ 上这一事实，可得

$$\begin{aligned}
&S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)\\
&= -i\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\psi(x)(\Delta a_2 - 2i\lambda_\tau\omega_{2,\tau}\cdot\nabla a_2)dx + \int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}q(x)a_2(x,\tau)dx\\
&\quad +\big(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right),\tilde\Phi_{1,\tau}(\cdot,a_2)\big)-\big(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right),\tilde\Phi_{2,\tau}(\cdot,a_2)\big).
\end{aligned}\tag{4.35}$$

现在代入 a_2，最终得到以下恒等式

$$\begin{aligned}
&S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)\\
&= -i\int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}\psi(x)(2|\xi|^2 + 2\lambda_\tau(\overline{\lambda_\tau})^{-1}|\xi|^2)dx + \int_\Omega e^{-i\frac{\lambda_\tau}{\tau}\xi\cdot x}q(x)a_2(x,\tau)dx\\
&\quad +\big(R_1(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{1,\tau}\right),\tilde\Phi_{1,\tau}(\cdot,a_2)\big)-\big(R_2(\lambda_\tau^4)\left(\Phi_{2,\tau}\right),\tilde\Phi_{2,\tau}(\cdot,a_2)\big).
\end{aligned}\tag{4.36}$$

然后，在上述恒等式中令 τ 趋于 $+\infty$，并结合不等式（4.24）和（4.31），我们推得引理4.4 得以完全证明。 □

5. 主要结果的证明

本节旨在证明定理 1.1。为此，我们首先需要考察 $\{(\lambda_{\ell,k},\gamma_N(\phi_{\ell,k}))\ \ k\in\mathbb{N}^*\}$ 的边界谱数据的渐近行为。在下文中，我们使用与上一节相同的记号。

5.1. 边界谱数据的渐近行为。

引理 5.1. 设 $\varphi^*_{\ell,\tau}$，其中 $\ell=1$、2 如上。则有以下两个不等式

$$\sum_{k\geq 1}\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle}{\lambda_{\ell,k}-\lambda_\tau^4}\right|^2\leq C_\ell, \tag{5.1}$$

and

$$\sum_{k\geq 1}\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau}),\gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle}{\lambda_{\ell,k}-\lambda_\tau^4}\right|^2\leq C_\ell\|a_2(\cdot,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{5.2}$$

其中 C_ℓ 是一个与 k 和 τ 无关的正定常数。

证明。令 $u_\ell(\lambda_\tau^4)$ 为边值问题（3.1）的解，其中 $f=\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau})$，并且 λ 被 λ_τ^4代替。由引理 3.1 $u_\ell(\lambda_\tau^4)$ 可表示为级数

$$u_\ell(\lambda_\tau^4)=\sum_{k\geq 1}\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle}{\lambda_{\ell,k}-\lambda_\tau^4}\phi_{\ell,k}. \tag{5.3}$$

因此，应用 Parseval 定理，由（4.18）可得

$$\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{\ell,k})\rangle}{\lambda_\tau^4-\lambda_{\ell,k}}\right|^2\leq\|\varphi^*_{1,\tau}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|R_\ell(\lambda_\tau^4)(\Phi_{\ell,\tau})\|^2_{L^2(\Omega)},\quad\forall\tau>1. \tag{5.4}$$

因此，利用（4.5）和（4.23），再结合（4.13），可得第一个估计。通过考虑 $u_\ell(\overline{\lambda_\tau^4})$ 为边值问题（3.1）的解，其中 $f=\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})$，且 λ 被 $\overline{\lambda_\tau^4}$ 代替，可类似地证明第二个不等式（5.2）。□

如第3节所述，对于固定的 $f=(f_0,f_1)\in H^{7/2,5/2}(\Gamma)$ 以及 $\lambda,\mu\in\rho(\mathcal{H}_1)\cap\rho(\mathcal{H}_2)$，我们将 $u_\ell(\lambda)$（分别为 $u_\ell(\mu)$）视为边值问题 (3.1) 的解（分别将λ 替换为 μ），其中 $\ell=1$、2，并令

$$\begin{aligned}w_\ell(\lambda,\mu)&=u_\ell(\lambda)-u_\ell(\mu),\\ w_{1,2}(\mu)&=u_1(\mu)-u_2(\mu).\end{aligned} \tag{5.5}$$

记

$$\mathcal{K}(\tau,\mu,f)=\gamma_N(w_1(\lambda_\tau^4,\mu))-\gamma_N(w_2(\lambda_\tau^4,\mu))\quad\text{on }\Gamma. \tag{5.6}$$

那么，简单应用引理 3.3 可得

$$\mathcal{K}(\tau,\mu,f)=\sum_{k\geq 1}\left[\frac{(\lambda_\tau^4-\mu)\langle f,\gamma_N(\phi_{1,k})\rangle}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k})(\mu-\lambda_{1,k})}\gamma_N(\phi_{1,k})-\frac{(\lambda_\tau^4-\mu)\langle f,\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k})(\mu-\lambda_{2,k})}\gamma_N(\phi_{2,k})\right]. \tag{5.7}$$

我们还令

$$\mathcal{L}(\tau,\mu,a_2)=\langle\mathcal{K}(\tau,\mu,\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau})),\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle. \tag{5.8}$$

然后，利用（5.7），我们得到以下恒等式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tau,\mu,a_2)=\sum_{k\geq 1}(\lambda_\tau^4-\mu)\Big[&\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{1,k})\rangle\langle\gamma_N(\phi_{1,k}),\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k})(\mu-\lambda_{1,k})}\\ &-\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle\langle\gamma_N(\phi_{2,k}),\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k})(\mu-\lambda_{2,k})}\Big].\end{aligned} \tag{5.9}$$

对于 $\tau > 1$，我们引入

$$\mathcal{L}^*(\tau, a_2) = \sum_{k\geq 1} \big(\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau, a_2) + \mathcal{L}^*_{2,k}(\tau, a_2) + \mathcal{L}^*_{3,k}(\tau, a_2)\big), \tag{5.10}$$

其中$\mathcal{L}^*_{1,\ k}$、 $\mathcal{L}^*_{2,\ k}$ 和 $\mathcal{L}^*_{3,\ k}$ 由下式给出

$$\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau, a_2) = \frac{-\left\langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\phi_{1,k} - \phi_{2,k})\right\rangle \left\langle \gamma_N(\phi_{1,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\right\rangle}{\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k}},$$

$$\mathcal{L}^*_{2,k}(\tau, a_2) = \frac{-\left\langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\phi_{2,k})\right\rangle \left\langle \gamma_N(\phi_{1,k} - \phi_{2,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\right\rangle}{\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k}},$$

$$\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau, a_2) = \left\langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\phi_{2,k})\right\rangle \left\langle \gamma_N(\phi_{2,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\right\rangle \left(\frac{1}{\lambda^4_\tau - \lambda_{2,k}} - \frac{1}{\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k}}\right).$$

引理 5.2。 假设条件 （1.12）成立。则 $\mathcal{L}$（τ， μ， a_2）收敛到 $\mathcal{L}^*$（τ， a_2）当 $\mu \to -\infty$时。此外，我们有

$$\lim_{\tau\to+\infty} |\mathcal{L}^*(\tau, a_2)| \leq C(\lim_{\tau\to+\infty} \|a_2(\cdot, \tau)\|^2_{H^1(\Omega)} + 1) \limsup_{k\to\infty} |\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}|. \tag{5.11}$$

这里 C 是一个与 k 和 τ无关的正定常数，而 $a_2 \in \mathcal{C}^\infty$（$\Omega$）满足假设 （4.7）

证明。我们将 $\mathcal{L}(\tau, \mu, a_2)$ 写成

$$\mathcal{L}(\tau, \mu, a_2) = \sum_{k\geq 1} \big(\mathcal{L}_{1,k}(\mu, \tau, a_2) + \mathcal{L}_{2,k}(\mu, \tau, a_2) + \mathcal{L}_{3,k}(\mu, \tau, a_2)\big),$$

其中 $\mathcal{L}_{1,\ k}$、$\mathcal{L}_{2,\ k}$ 和 $\mathcal{L}_{3,\ k}$ 由下式给出

$$\mathcal{L}_{1,k}(\tau, \mu, a_2) = (\lambda^4_\tau - \mu)\frac{\langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\phi_{1,k} - \phi_{2,k})\rangle\langle \gamma_N(\phi_{1,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle}{(\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k})(\mu - \lambda_{1,k})},$$

$$\mathcal{L}_{2,k}(\tau, \mu, a_2) = (\lambda^4_\tau - \mu)\frac{\langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\phi_{2,k})\rangle\langle \gamma_N(\phi_{1,k} - \phi_{2,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle}{(\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k})(\mu - \lambda_{1,k})},$$

$$\mathcal{L}_{3,k}(\tau, \mu, a_2) = (\lambda^4_\tau - \mu)\langle \gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}), \gamma_N(\phi_{2,k})\rangle\langle \gamma_N(\phi_{2,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle \times \left(\frac{1}{(\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k})(\mu - \lambda_{1,k})} - \frac{1}{(\lambda^4_\tau - \lambda_{2,k})(\mu - \lambda_{2,k})}\right).$$

我们首先考察$\mathcal{L}_{1,\ k}$（τ， μ， a_2）。令 $\mu \in (-\infty, -\lambda_0 - 1)$，其中 $\lambda_0 > 0$ 足够大，并令 $\tau > 1$。利用 Weyl 渐近公式（1.10），我们得到

$$\left|\frac{\mu - \lambda^4_\tau}{\mu - \lambda_{\ell,k}}\right| \leq 1 + \left|\frac{\lambda_{\ell,k} - \lambda^4_\tau}{\mu - \lambda_{\ell,k}}\right| \leq C(\tau)k^{4/n}, \tag{5.12}$$

这里 C 仅取决于 τ。将其与条件（1.12）以及引理5.1 结合，我们得到 n

$$\sum_{k\geq 1} |\mathcal{L}_{1,k}(\tau, \mu, a_2)| \leq C(\tau)\Big(\sum_{k\geq 1} \left|\frac{\langle \gamma_N(\phi_{1,k}), \gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle}{\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k}}\right|^2\Big)^{1/2} \times \Big(\sum_{k\geq 1} k^{4/n}\|\gamma_N(\phi_{1,k} - \phi_{2,k})\|\Big) < +\infty. \tag{5.13}$$

接下来，我们考察 $\mathcal{L}_{2,\ k}(\tau,\ \mu,\ a_2)$。由于条件（1.12）成立，因此得到

$$|\lambda^4_\tau - \lambda_{2,k}| \leq (C + 1)|\lambda^4_\tau - \lambda_{1,k}|, \qquad k \geq 1. \tag{5.14}$$

然后，通过进行与之前相同的分析，我们得到

$$\sum_{k\geq 1}|\mathcal{L}_{2,k}(\tau,\mu,a_2)|\leq C(\tau)\Big(\sum_{k\geq 1}\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle}{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}\right|^2\Big)^{1/2}$$
$$\times\Big(\sum_{k\geq 1}k^{4/n}\|\gamma_N(\phi_{1,k}-\phi_{2,k})\|\Big)<+\infty. \quad (5.15)$$

现在我们转而考察 $\mathcal{L}_{3,\ k}(\tau,\mu,a_2)$。首先改写

$$\frac{\lambda_\tau^4-\mu}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k})(\mu-\lambda_{1,k})}-\frac{\lambda_\tau^4-\mu}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k})(\mu-\lambda_{2,k})}$$
$$=\frac{\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}}{(\mu-\lambda_{1,k})(\mu-\lambda_{2,k})}-\frac{\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k})(\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k})}.$$

这与（5.14）意味着

$$|\mathcal{L}_{3,k}(\tau,\mu,a_2)|\leq\sup_{k\geq 1}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|\Big(\sup_{k\geq 1}\left|\frac{\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k}}{\mu-\lambda_{1,k}}\right|\left|\frac{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}{\mu-\lambda_{2,k}}\right|+C\Big)$$
$$\times\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle}{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}\right|\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau}),\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle}{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}\right| \quad (5.16)$$

这里，C 是一个与 τ 和 k 无关的正定常数。注意，对于 $-\lambda_0<x\leq 0$，函数 $g(x)=\frac{|x|}{x-\mu}$ 是单调递减的，并且有 $0\leq g(x)<\frac{-\lambda_0}{\mu+\lambda_0}$。此外，对于 $x>0$，g 是单调递增的，并且有 $g(x)<1$。于是我们得到以下估计

$$\sup_{k\geq 1}\left|\frac{\lambda_\tau^4-\lambda_{\ell,k}}{\mu-\lambda_{\ell,k}}\right|\leq C(\tau),\quad \text{for } \ell=1,2. \quad (5.17)$$

结合条件（1.12）和引理 5.1 使用这一点可以证明

$$\sum_{k\geq 1}|\mathcal{L}_{3,k}(\tau,\mu,a_2)|<+\infty. \quad (5.18)$$

由（5.13）、（5.15）和（5.18），可知 $\mathcal{L}(\tau,\ \mu,\ a_2)$ 中的级数关于 $\mu<-\lambda_0-1$ 一致收敛。因此，根据勒贝格控制收敛定理，很容易看出，当 $\mathcal{L}(\tau,\ \mu,\ a_2)$ 收敛到 $\mathcal{L}^*(\tau,\ a_2)$ 时，$\mu\to-\infty$。

现在我们来证明（5.11）。根据（4.2）、（4.3）和（4.7），很容易看出

$$\|\gamma_D(\varphi^*_{\ell,k})\|\leq C\tau\qquad \ell=1,2, \quad (5.19)$$

对于某个与 τ 无关的正定常数 C。结合 $Im(\lambda_\tau^4)=4\tau(\tau^2-1)$ 这一事实，我们得到

$$|\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau,a_2)|+|\mathcal{L}^*_{2,k}(\tau,a_2)|$$
$$\leq C\tau^{-1}\|\gamma_N(\phi_{1,k}-\phi_{2,k})\|\big(\|\gamma_N(\phi_{1,k})\|+\|\gamma_N(\phi_{2,k})\|\big). \quad (5.20)$$

以类似的方式，重写后

$$\frac{1}{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}-\frac{1}{\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k}}=\frac{\lambda_{2,k}-\lambda_{1,k}}{(\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k})(\lambda_\tau^4-\lambda_{1,k})}, \quad (5.21)$$

我们可以证明

$$|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|\leq C\tau^{-4}|\lambda_{2,k}-\lambda_{1,k}|\|\gamma_N(\phi_{2,k})\|^2. \quad (5.22)$$

这与（5.20）立即表明

$$\lim_{\tau\to+\infty}\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau,a_2)=\lim_{\tau\to+\infty}\mathcal{L}^*_{2,k}(\tau,a_2)=\lim_{\tau\to+\infty}\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)=0,\quad\forall k\geq 1. \tag{5.23}$$

因此，由（5.10）可推出，对于任意自然数 $n_0>1$，都有

$$\lim_{\tau\to+\infty}|\mathcal{L}^*(\tau,a_2)|\leq\limsup_{\tau\to+\infty}\sum_{k\geq n_0}\big(|\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau,a_2)|+|\mathcal{L}^*_{2,k}(\tau,a_2)|+|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|\big). \tag{5.24}$$

由于 $\|\gamma_N(\phi_{\ell,\ k})\|\leq Ck^{4/n}$，因此由（5.20）可得

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\sum_{k\geq n_0}\big(|\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau,a_2)|+|\mathcal{L}^*_{2,k}(\tau,a_2)|\big)\leq C\sum_{k\geq n_0}k^{4/n}\|\gamma_N(\phi_{1,k}-\phi_{2,k})\|. \tag{5.25}$$

现在，将 n_0 趋于 $+\infty$，由上述不等式以及条件（1.12）可推出

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\sum_{k\geq 1}\big(|\mathcal{L}^*_{1,k}(\tau,a_2)|+|\mathcal{L}^*_{2,k}(\tau,a_2)|\big)=0. \tag{5.26}$$

此外，利用（5.21）以及（5.14）可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq n_0}|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|\leq C\sup_{k\geq n_0}|\lambda_{2,k}-\lambda_{1,k}|\Big(&\sum_{k\geq 1}\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}),\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle}{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}\right|^2\\&+\sum_{k\geq 1}\left|\frac{\langle\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau}),\gamma_N(\phi_{2,k})\rangle}{\lambda_\tau^4-\lambda_{2,k}}\right|^2\Big).\end{aligned} \tag{5.27}$$

现在利用引理5.1 可得

$$\sum_{k\geq n_0}|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|\leq C\sup_{k\geq n_0}|\lambda_{2,k}-\lambda_{1,k}|\Big(\|a_2(\cdot,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}+1\Big). \tag{5.28}$$

由于我们有

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\sum_{k\geq n_0}|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|=\limsup_{\tau\to+\infty}\sum_{k\geq 1}|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|,$$

对所有 $n_0>1$，由式（5.23）可得。然后在式（5.28）中令 n_0 为 $+\infty$，得到

$$\limsup_{\tau\to+\infty}\sum_{k\geq 1}|\mathcal{L}^*_{3,k}(\tau,a_2)|\leq C(\lim_{\tau\to+\infty}\|a_2(\cdot,\tau)\|^2_{H^1(\Omega)}+1)\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{2,k}-\lambda_{1,k}|,$$

这里 $C>0$ 与 τ 和 k 无关。因此，将此结果与式（5.26）合并，即可得到预期结果。□

5.2. 完成主要结果的证明。现在我们可以完成主要结果的证明了。

定理 *1.1*的证明。 我们先证明旋度 $B=0$。回顾一下，我们有

$$\mathcal{K}(\tau,\mu,\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau}))=\gamma_N(u_1(\lambda_\tau^4))-\gamma_N(u_2(\lambda_\tau^4))-\gamma_N(w_{1,2}(\mu))\quad\text{on }\Gamma. \tag{5.29}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tau,\mu,a_2)&=\langle\mathcal{K}(\tau,\mu,\gamma_D(\varphi^*_{1,\tau})),\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle\\&=S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)-\langle\gamma_N(w_{1,2}(\mu)),\gamma_D(\varphi^*_{2,\tau})\rangle.\end{aligned} \tag{5.30}$$

将 μ 代入 $-\infty$ 上述恒等式，并利用引理 3.2 和 5.2 可得

$$S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)=\mathcal{L}^*(\tau,a_2), \tag{5.31}$$

对于所有 $a_2 \in \overline{\mathcal{C}^\infty}(\Omega)$ 满足假设（4.7）的情形。此外，（5.11）意味着（S_1（τ，a_2）$-S_2$（τ，a_2））关于 $\tau>1$有界。因此得到

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^{-1}\left(S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)\right)=0. \tag{5.32}$$

对于 $a_2=1$，以及引理4.2 可得

$$\int_\Omega e^{-ix\cdot\xi}\omega\cdot B(x)dx=0. \tag{5.33}$$

上述等式对所有满足 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 的 $\omega\cdot\xi=0$均成立。于是，对于固定的 $\xi\in\mathbb{R}^n$，我们取 $\omega=\frac{\xi_j e_k-\xi_k e_j}{|\xi_j e_k-\xi_k e_j|}$，$j\neq k$，其中 $(e_j)^j$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。然后将式 (5.33) 乘以 $|\xi_j e_k-\xi_k e_j|$，得到

$$\mathcal{F}(\operatorname{curl}B_2-\operatorname{curl}B_1)(\xi)=0\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换。由于 旋度 $B_\ell\in L^1(\Omega)$，$\ell=1$，2，因此由傅里叶变换的单射性可推出 旋度 $B_2=$ 旋度 B_1。现在我们来证明式(1.13)。由恒等式(5.31)可得

$$\limsup_{\tau\to+\infty}|S_1(\tau,a_2)-S_2(\tau,a_2)|=\limsup_{\tau\to+\infty}|\mathcal{L}^*(\tau,a_2)|, \tag{5.34}$$

对于所有满足假设($a_2\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 的 4.7，利用引理 5.2，对于 $a_2=1$，结合引理 4.3 可得

$$|\widehat{q}(\xi)|\le C\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|, \tag{5.35}$$

这里 $C>0$ 独立于 τ 以及 ξ。记 $\delta=$ 上极限$_{k\to+\infty}|\lambda_{1,\ k}-\lambda_{2,\ k}|$。令$R>1$，其取值将在稍后确定，则应用不等式（5.35）可得

$$\begin{aligned}\|q\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\le\|q\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)}&=\int_{\langle\xi\rangle\le R}|\widehat{q}(\xi)|^2\langle\xi\rangle^{-2}d\xi+\int_{\langle\xi\rangle>R}|\widehat{q}(\xi)|^2\langle\xi\rangle^{-2}d\xi\\&\le C(\delta^2R^{n-2}+M^2R^{-2}),\end{aligned}$$

这里 $C>0$ 仅依赖于 Ω 和 n。对于 $\delta\le1$，我们选择 $R>1$ 使得$\delta^2R^{n-2}=R^{-2}$，即 $R=\delta^{-2/n}$。然后由上述估计可得

$$\|q\|_{H^{-1}(\Omega)}\le C(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2}{n}}, \tag{5.36}$$

这里 $C>0$ 仅依赖于 Ω、n 和 M。现在对于 $\delta>1$，我们注意到所得估计与上面相同，因为在这种情况下我们立即得到

$$\|q\|_{H^{-1}(\Omega)}\le CM\le CM(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2}{n}}. \tag{5.37}$$

为了完成对（1.13）的证明，令 $\eta_1=\frac{1}{2}$（$\sigma_1-\frac{n}{2}$）>0。然后结合应用 Sobolev 嵌入定理和插值定理，并取 $\kappa_1\in$（0，1），最终得到以下不等式

$$\begin{aligned}\|q\|_{L^\infty(\Omega)}&\le\|q\|_{H^{n/2+\eta_1}(\Omega)}\\&\le\|q\|^{\kappa_1}_{H^{-1}(\Omega)}\|q\|^{1-\kappa_1}_{H^{n/2+2\eta_1}(\Omega)}\\&\le CM^{1-\kappa_1}(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2\kappa_1}{n}}.\end{aligned}$$

至此，我们完成了第一个稳定性估计（1.13），其中 $\theta_1=\frac{2\kappa_1}{n}$。

现在我们来证明（1.14）。由于我们有旋度 $B=0$ 根据Hodge分解

向量场 B可以表示为 $B=\nabla\psi$，其中 $\psi\in W^{2,+\infty}(\Omega\ \mathbb{R})$满足以下边值问题

$$\begin{cases}\Delta\psi=\operatorname{div}B & \text{in }\Omega,\\ \psi=0 & \text{on }\Gamma.\end{cases}\tag{5.38}$$

利用引理4.4 以及恒等式（5.34），可得

$$|\xi|^2|\widehat{\psi}(\xi)|\le C\big(\limsup_{\tau\to+\infty}|\mathcal{L}^*(\tau,a_2)|+|\xi|^2\|q\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

其中 a_2 由（4.30）给出，且 C 是与 τ 和 ξ无关的正定常数。然后利用（1.13）和引理5.2 以及（4.31），我们最终得到关于 $\delta\le 1$的以下估计

$$\begin{aligned}|\xi|^2|\widehat{\psi}(\xi)|&\le C(1+|\xi|^4+|\xi|^2)\delta^{\theta_1}\\&\le C(1+|\xi|^2)^2\delta^{\theta_1},\end{aligned}\tag{5.39}$$

其中 $\theta_1=\frac{2\kappa_1}{n}$和 C是与 ξ无关的正定常数。现在令 $R>1$，其取值稍后确定，然后利用 Parseval 定理可得

$$\begin{aligned}\|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|\widehat{\Delta\psi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}&=\int_{\langle\xi\rangle\le R}|\widehat{\Delta\psi}(\xi)|^2d\xi+\int_{\langle\xi\rangle>R}|\widehat{\Delta\psi}(\xi)|^2d\xi\\&\le C\Big(\int_{\langle\xi\rangle\le R}|\xi|^4|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi+\int_{\langle\xi\rangle>R}|\xi|^2|\widehat{\nabla\psi}(\xi)|^2d\xi\Big).\end{aligned}$$

因此，利用估计（5.39），可得

$$\begin{aligned}\|\Delta\psi\|^2_{L^2(\Omega)}&\le C\Big(\delta^{2\theta_1}\int_{\langle\xi\rangle\le R}(1+|\xi|^2)^4d\xi+\int_{\langle\xi\rangle>R}\langle\xi\rangle^2|\widehat{B}(\xi)|^2d\xi\Big)\\&\le C\Big(\delta^{2\theta_1}R^8\int_{\langle\xi\rangle\le R}d\xi+R^{2(1-\sigma_2)}\int_{\langle\xi\rangle>R}\langle\xi\rangle^{2\sigma_2}|\widehat{B}(\xi)|^2d\xi\Big)\\&\le C\Big(\delta^{2\theta_1}R^{n+8}+R^{2(1-\sigma_2)}\|B\|^2_{H^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)}\Big)\\&\le C\Big(\delta^{2\theta_1}R^{n+8}+R^{2(1-\sigma_2)}M^2\Big),\end{aligned}\tag{5.40}$$

其中 $C>0$ 仅取决于 Ω 和 n。选择 $R>1$ 使得 $\delta^{2\theta_1}R^{n+8}=R^{2(1-\sigma_2)}$，即 $R=\delta^{-2\theta_1/(2\sigma_2+n+6)}$。然后由上述估计可推出

$$\|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}\le C(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2\theta_1(\sigma_2-1)}{2\sigma_2+n+6}},\tag{5.41}$$

这里 $C>0$ 仅取决于 Ω、n 和 M。现在，对于 $\delta>1$，我们立即得到

$$\|\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)}\le CM\le CM(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2\theta_1(\sigma_2-1)}{2\sigma_2+n+6}}.\tag{5.42}$$

利用上述两个估计，我们最终得到以下稳定性估计

$$\|\operatorname{div}B\|_{L^2(\Omega)}\le C(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2\theta_1(\sigma_2-1)}{2\sigma_2+n+6}}.\tag{5.43}$$

由于 ψ 满足边值问题（5.38），根据椭圆正则性定理可得

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)}\le C\|\operatorname{div}B\|_{L^2(\Omega)}\le C(\limsup_{k\to+\infty}|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|)^{\frac{2\theta_1(\sigma_2-1)}{2\sigma_2+n+6}}.\tag{5.44}$$

为完成该定理的证明，令 $\eta_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \frac{n}{2}) > 0$。然后利用 Sobolev 嵌入定理以及插值定理，对于$\kappa_2 \in (0, 1)$，可得

$$\begin{aligned}\|B\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\nabla\psi\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C\|\nabla\psi\|_{H^{\frac{n}{2}+\eta_2}(\Omega)} \\ &\le C\|\nabla\psi\|^{\kappa_2}_{H^1(\Omega)}\|\nabla\psi\|^{1-\kappa_2}_{H^{\frac{n}{2}+2\eta_2}(\Omega)} \\ &\le CM^{1-\kappa_2}\|\psi\|^{\kappa_2}_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

这与估计式（5.44）共同给出我们的第二个稳定性估计（1.14），其中 $\theta_2 = \frac{2\theta_1\kappa_2}{(\sigma_2-1)\ 2\sigma_2+n+6}$，且 $\theta_2 \in$ （0，1）。这就完成了定理 1.2 的证明。□

参考文献

[1] G. Alessandrini 和 J. Sylvester。多维逆谱定理的稳定性。偏微分方程通讯，15 711 736, 1990 3 : - 。V. A. Ambartsumian。《关于特征值理论的一个问题》。物理学杂志，[2] 53 690 695, 1929 2 : - 。N. Aroua 和 [3] M. Bellassoued。通过边界测量稳定确定多调和算子的二阶扰动。《数学分析与应用杂志》，522 126965, 2023 2 2 ( ): 。[4] M. Bellassoued、M. Choulli、D. Dos Santos Ferreira、Y. Kian 和 P. Stefanov。黎曼流形上磁薛定谔算子的 Borg-Levinson 定理。《傅里叶研究所年刊》，71 2517，2021 6 2471 3 ( ): - 。[5] M. Bellassoued、M. Choulli 和 M. Yamamoto。具有部分数据的多维逆谱问题的稳定性估计。《数学分析与应用杂志》，378 1 184 197, 2011 3 ( ): - 。M. [6] Bellassoued、Y. Kian、Y. Mannoubi 和 E. Soccorsi。通过渐近边界谱数据识别无界电势。arXiv, 01 2022 3 。M. Bellassoued 和 Y. Mannoubi。电磁波方 [7] 程的部分数据逆问题及其在相关 Borg-Levinson 定理中的应用。《逆问题》，36 19 2020 3 : 页，。S. [8] Bhattacharyya 和 T. Ghosh。确定多调和算子低阶扰动中出现的二阶张量的逆边值问题。《傅里叶分析与应用杂志》，25 683，2019 661 2 : - 。[9] S. Bhattacharyya、V.P. Krishnan 和 S.K. Sahoo。从部分边界数据唯一确定多调和算子的各向异性扰动。arXiv: 2111 07610, 2021 2 。[10] 78 1 96, 1946 2 G. Borg。《Sturm-Liouville 特征值问题 [11] 的逆问题：通过特征值确定微分方程》。《数学学报》，25, 03 2016 2 : - 。A.P. Choudhury 和 [12] H. Heck。双调和算子逆边值问题的稳定性：对数估计。《逆问题与病态问题杂志》，[13] 。A.P Choudhury 和 V.P. Krishnan。具有有界势的双调和算子逆边值问题的稳定性估计。《数学分析与应用杂志》，431 316，02 2015 300 2 : - 。2009 3 M. Choulli。《椭圆型与抛物型逆问题导论》。Springer-Verlag [14]（数学与应用），柏林，[15] 。M. Choulli。多维 Borg-Levinson 型定理的一个简单证明。《半群论坛》，102(2):575-582，2021。3 38 455 476, 2013 3 F. Gazzola、H.C. Grunau 和 G. Sweers。《多调和边 [16] 值问题：有界域中的保正性与非线性高阶椭圆方程》。数学讲义（1991）。施普林格柏林、海德堡，2010 2 。I.M. Gel'fand 和 B.M. Levitan。由谱函数确定微分方程。 [17] 《苏联科学院院报·数学系列》，15 (4):309-360，1951。2[18] T. Ghosh 和 V.P. Krishnan。从部分边界数据确定多调和算子的低阶扰动。《应用分析》，2015 2 。G. Grubb。《分布与算子》，研究生数学丛书，[19] 第252卷。施普林格，纽约，2009。1

[20] H. Isozaki。关于多维 Borg-Levinson 定理的几点说明。《京都大学数学杂志》，
31 743 753, 1989 3, 5, 10 : - 。T. Kato。《线性算子扰动理论》。载于《数学科学基础
[21]
丛书》，第 132, 592 1966 2, 7 卷，页码 XIX, 。施普林格柏
林、海德堡，[22]。O. Kavian、Y. Kian 和 E. Soccorsi。周期波导中逆谱问题的唯一性与稳定性结果。《纯粹与应用数学杂志》，104(6):1160-1189，2015。3，9[23] Y. Kian。具有部分谱数据的磁薛定谔算子的多维 Borg-Levinson 定理。《谱理论杂志》，
8 235 269, 2018 3 : - 。Y. Kian、
[24]
L. Oksanen 和 M. Morancey。边界控制方法在部分数据 Borg-Levinson 逆谱问题中的应用。《数学控制及相关领域》，9:289-312，2019。3[25] Y. Kian 和 E. Soccorsi。通过渐近边界谱数据稳定确定无界势。arXiv，03 2022。3[26] K. Krupchyk、M. Lassas 和 G. Uhlmann。通过部分边界测量确定双调和算子的一阶扰动。《泛函分析杂志》，
262, 03 2011 2 。K. Krupchyk、
[27]
M. Lassas 和 G. Uhlmann。扰动多重调和算子的逆边值问题。《美国数学学会汇刊》，
366, 02 2011 2 。K. Krupchyk 和 P.
[28]
Päivärinta。高阶椭圆算子的 Borg-Levinson 定理。《国际数学研究通报》，6:1321-1351，2012。3[29] N. Levinson。《逆 Sturm-Liouville 问题》。《数学时报 B辑》，第25-30页，1949。2[30] P. Li、X. Yao 和 Y. Zhao。双调和算子多维 Borg-Levinson 定理的稳定性。arXiv，2021。3[31] V.V. Meleshko。二维双调和问题史上的若干专题。《应用力学评论》，56:33-85，2003。2[32] A. Nachman、J. Sylvester 和 G. Uhlmann。一个 n 维 Borg-Levinson 定理。《数学物理通讯》，115:595-605，1988。2[33] M.I. Neiman-zade 和 A.A. Shkalikov。具有奇异系数的强椭圆算子。《俄罗斯数学物理杂志》，
13 1 70 78, 2006 1 ( ): - 。R. Novikov。方程 $\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ 的
[34]
多维逆谱问题。《泛函分析及其应用》，
22 4 263 272, 1988 2 ( ): - 。L. Päivärinta 和 V. Serov。奇异势的 n 维 Borg-Levinson 定理。《应用数学进展》，
[35]
29 4 509 520, 2002 3 ( ): - 。V. Pohjola。无界势的多维 Borg-Levinson 定理。
[36]
《渐近分析》，110 (3- 4):203-226，2018。3[37] V. Serov。磁薛定谔算子的 Borg-Levinson 定理。《希腊数学学会公报》，57:321-332，2010。3[38] V. Serov。双调和算子扰动的 Borg-Levinson 定理。《逆问题》，32:19页，
2016 3, 6 。E. Soccorsi。多维 Borg-Levinson 逆谱理论。《当代数学》，
[39]
757 19 50, 2020 3 : - 。
[40]
H. Weyl。《线性偏微分方程特征值的渐近分布定律（及其在空腔辐射理论中的应用）》（德文）。《数学年刊》，71:441-479，1912。2[41] Y. Yang。从部分数据确定有界域和无界域上双调和算子的一阶扰动。《微分方程杂志》，257，11 2013。2

N. AROUA. 突尼斯马纳尔大学、突尼斯国立工程师学校、ENIT-LAMSIN、37号邮政信箱、突尼斯 1002、突尼斯

电子邮箱：nesrine.aroua@enit.utm.tn

M. BELLASSOUED. 突尼斯马纳尔大学、突尼斯国立工程师学校、ENIT-LAMSIN、37号邮政信箱、突尼斯 1002、突尼斯

电子邮箱：mourad.bellassoued@enit.utm.tn