arXiv:2304.12638v1 [math.GR] 25 Apr 2023

$SL_5(\mathbb{Z})$非相干性见证

SAMI DOUBA

Abstract. 受 Stover 提出的问题启发，我们讨论 $SL_5(\mathbb{Z})$ 的一个 Zariski 稠密有限生成子群，该子群不是有限呈示的。

如果一个群 Γ 的所有有限生成子群都是有限呈示的，则称其具有相干性。否则，我们称 Γ 其具有非相干性。在本文中，我们关注 Γ 是非紧致单李群的离散子群这一情形。关于相干性的更广泛讨论，读者可参阅 Wise 的综述 [25]。

由于（可能是开）曲面的有限生成基本群都是有限呈示的，因此所有福克斯群都具有相干性。前述结论对三维流形同样成立，这一点分别归功于 Scott [19, 18] 和 Shalen（未发表）；特别地，所有克莱因群实际上都具有相干性。另一方面，乘积$F_2 \times F_2$（其中 F_2 是秩为二的自由群）存在一个映射到 $\mathbb{Z}$ 的满射，其核是有限生成的但不是有限呈示的 [25, 例 9.22]。由此可知，对于 $n \geq 4$，$SL_n(\mathbb{Z})$具有非相干性，因为后者包含$F_2 \times F_2$的一个分块对角副本。$SL_3(\mathbb{Z})$是否具有相干性是 Serre [24, 问题 F14]，至今仍悬而未决。

尽管实秩为一的单李群 G 不含$F_2 \times F_2$的离散副本，但 G 中的许多格（据推测是全部格）一旦 G 不局部同构于 $SL_2(\mathbb{R})$ 或 $SL_2(\mathbb{C})$，就会是不相容的；参见 Kapovich–Potyagailo–Vinberg [12] 和 Kapovich [10]。我们指出，当 $n \geq 5$时，证明 $SL_n(\mathbb{Z})$ 不相容的另一种方法是注意到 $SL_n(\mathbb{Z})$ 包含不相容群 $SO(4, 1; \mathbb{Z})$ 的一个副本；事实上，正如 [12], 中所指出的，由 Kapovich 和 Potyagailo [11], 首次构造 $SO(4, 1)$ 的几何有限不相容子群，可以在 $SO(4, 1; \mathbb{Z})$ 内完成。

我们将群 Γ 中一个有限生成但并非有限呈示的子群称为 Γ 的非相干性见证。Stover [20] 提出的一个上述讨论未涉及的问题是：是否存在 $SL_n(\mathbb{Z})$ 的 Zariski 稠密非相干性见证，$n \geq 4$。K. Tsouvalas 向作者指出，如果允许自由分解的例子，那么至少对于 $n \geq 5$，Stover 的问题有肯定答案。事实上，在射影空间 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ 中的一个乒乓论证表明，对于每个 $n \geq 5$，$SL_n(\mathbb{Z})$ 都包含一个可分解为$\Gamma_0 * F$的子群，其中 $\Gamma_0 < SO(4, 1; \mathbb{Z})$ 是一个源自 Kapovich–Potyagailo 构造的几何有限非相干群，而 F 是 $SL_n(\mathbb{Z})$ [7] 的一个 Zariski 稠密阿诺索夫自由子群。对于 Γ_0 的任意非相干性见证 $\Delta_0 < \Gamma_0$，子群$\langle \Delta_0, F \rangle < SL_n(\mathbb{Z})$ 随即成为 $SL_n(\mathbb{Z})$ 的 Zariski 稠密非相干性见证。本注记旨在描述一个性质不同的 $SL_5(\mathbb{Z})$ 的 Zariski 稠密非相干性见证；例如，该见证的上同调维数为 3，其在 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^5)$ 中、按 Guivarc'h [8] 的意义定义的极限集是连通的（事实上，是该域的边界



FIGURE 1. 该图 Σ。

，其中该域是一个奇异真凸射影域），而且我们猜测这个见证是单端的。

现在我们继续进行描述。设 W 为由图 1 中所示的图 Σ 给出的 Coxeter 群。Σ 的 Cartan 矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由于 A 的惯性指标为 (4, 1)，Coxeter 群 W 可以实现为 Isom($\mathbb{H}^4$) 中的反射群，并且该实现除共轭外是唯一的，因此我们可以将 W 与其在 Isom($\mathbb{H}^4$) 中的像等同起来；参见 Vinberg [22, 定理 2.1]。此外，由于 Σ 的所有真诱导子图都是椭圆型的，我们得到：$\mathbb{H}^4$ 中的 W 的每个基本室都是一个紧 Coxeter 单纯形 $P \subset \mathbb{H}^4$。

注 1。紧双曲 Coxeter 单纯形由 Lann´er[15]进行了枚举。单纯形 P 是这类单纯形中仅有的五个四维单纯形之一；四维是这类单纯形存在的最高维数。对我们而言至关重要的是，在这些单纯形中，只有它具有如下性质：对于其每个二面角 θ，数量 $4\cos^2\theta$ 都是整数。我们还指出，A 的 Galois 共轭 A^σ 是正定的，其中 $\sigma: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是唯一的非平凡自同构，因此 W 实际上是 Isom($\mathbb{H}^4$) 的一个算术子群。

尽管我们尚不清楚单形 P 是否能铺砌 $\mathbb{H}^4$ 中的紧直角多面体，但事实仍然是，W 的某个有限指数子群可抽象嵌入一个直角 Coxeter 群中。事实上，根据 Haglund 和 Wise [9] 的工作，当用任意有限生成 Coxeter 群替换 W 时，后一个结论仍然成立；或者，也可以利用 W 的算术性（见注 1），并应用 Bergeron、Haglund 和 Wise [4] 的一个结果。特别地，群 W 是 Agol [1]，意义下虚拟剩余有限有理可解（RFRS）的，因此根据 Kielak [14]，的一个定理，它拥有一个无挠有限指数子群 $\Lambda < W$；我们可以假设该子群保持定向，并映射到 $\mathbb{Z}$，其核 $\Delta \lhd \Lambda$ 为有限生成核。将以下引理应用于 $M = \Lambda\backslash\mathbb{H}^4$ 和 $\tilde{M} = \Delta\backslash\mathbb{H}^4$，即可得到 Δ 不是有限呈示的；关于更一般的陈述，参见 Llosa Isenrich、Martelli 和 Py [16，的命题 14]。注意，根据 Chern–Gauss–Bonnet 定理，$\chi(\Lambda\backslash\mathbb{H}^4) > 0$。

引理 2. 设 M 是一个闭连通定向非球面 4-流形，且 $\chi(M) \neq 0$。那么，对于 M 的任意无限循环覆盖 $\tilde{M}$，$\pi_1(M)$ 都不是有限呈示的。

证明。根据 Milnor 的一个结果 [17]，，存在某个 $i \in \mathbb{N}$，使得 $H_i(M; \mathbb{Q})$ 的维数为无穷。由于 M 是一个开4-流形，因此对于 $i > 3$，有 $b_i(M) = 0$。现在，如果 $\pi_1(M)$ 不是有限生成的，那么结论成立。否则，$H_1(M; \mathbb{Q})$ 的维数有限，因此根据 Kawauchi 的部分对偶定理 [13]，

~ ~我们有 $H_3(M;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$。这迫使 $H_2(M;\mathbb{Q})$ 的维数为无穷，因此 $\pi_1(M)$ 不可能是有限呈示的。□

现在令 $\rho\colon W \to \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ 为如下给出的表示

$$\rho(s_i)(v) = v - (v^T A' e_i)e_i$$

对每个 $v \in \mathbb{R}^5$，其中 s_1、.....、$s_5 \in W$ 是 W 的标准生成元，并且

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意到由于 A' 的条目均为整数，实际上 $\rho(W) \subset \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$。表示 ρ 是 W 的 Vinberg 表示，其 Cartan 矩阵为 A'；由于 A' 属于负型，我们特别得到 ρ 是忠实的，并保持一个适当凸域 $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^5)$；参见 Vinberg [21]。与双曲情形一样，由于 Σ 的所有真诱导子图都是椭圆型的，我们有 $\rho(W)$ 在 Ω 上余紧作用（用 Benz´ecri [3], 的术语来说，群 $\rho(W)$ 整除 Ω）。对 $\rho(\Lambda)$ 也同样如此。由于矩阵 A' 不是对称的，域 Ω 不是椭球。[1] Benoist 的一个定理 [2] 随即断言， $\rho(\Lambda)$ 在 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})$ 中是 Zariski 稠密的。由于后者是单群，无限正规子群 $\rho(\Delta) \lhd \rho(\Lambda)$ 仍然在 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})$ 中 Zariski 稠密。我们得出结论： $\rho(\Delta)$ 是 $\mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ 的一个 Zariski 稠密的非相干性见证。

注 3。 ρ 的表示也出现在 Choi 和 Choi [5, 命题 11],中，并且类似于 Kac 和 Vinberg [23] 发现的映入 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ 的三角群表示。

注 4。上述策略无法产生 $\mathrm{SL}_4(\mathbb{Z})$ 不相干性的 Zariski 稠密见证，因为 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ 的任何在 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ 中保持某个域并在其上适当作用的有限生成子群——例如 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ 中的任何 Vinberg 反射群，因此也包括任何至多具有 4 个顶点的 Coxeter 群[2]——在有限扩张意义下都是某个三维流形基本群，因而具有相干性。然而，看起来合理的是，适当的不相干 Coxeter 群的 Vinberg 表示可能产生 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 不相干性的一端 Zariski 稠密见证，其中 n 可以任意大。在这方面，最有希望的方法似乎是考虑递增秩的有限指数反射子群 $W_n < W$ 的 Vinberg 表示，其中 W 是一个固定的 Coxeter 群，它在有限扩张意义下映 onto $\mathbb{Z}$，且其核是有限生成但非有限呈示的。然而，这类表示不会在高维空间中划分射影域，因此需要采用不同的方法来证明 Zariski 稠密性。

致谢。我们衷心感谢 Balthazar Fl´echelles、Gye-Seon Lee、Pierre Py 和 Konstantinos Tsouvalas 进行的有益讨论。作者获得了华为青年人才计划的资助。

[1]事实上，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的任何子群都不会在 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ 中划分椭球， $n \geq 5$ 除外。确实，这样的子群 $\Gamma < \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 必须是某个有理二次型 Q in $n \geq 5$ 个变量所对应的 $\mathrm{SO}(Q;\mathbb{Z})$ 的有限指数子群，但根据梅耶定理，这样的 Q 是各向同性的，因此 Γ 不可能在 $\mathrm{SO}(Q;\mathbb{R})$ 中余紧。[2]至多含有 4 个顶点的 Coxeter 群是虚三维流形群这一点，也可以沿着 [6, 例 12], 的思路，从以下事实推导出来：任何至多含有 4 个顶点的非椭圆考克斯特系统都具有平面神经。

References

[1] I. Agol, *Criteria for virtual fibering*, J. Topol., 1 (2008), pp. 269–284. [2] Y. Benoist, *Convexes divisibles. II*, Duke Math. J., 120 (2003), pp. 97–120. [3] J.-P. Benzécri, *Sur les variétés localement affines et localement projectives*, Bull. Soc. Math. France, 88 (1960), pp. 229–332. [4] N. Bergeron, F. Haglund, and D. T. Wise, *Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds* 2 83 2011 431 448 , J. Lond. Math. Soc. ( ), ( ), pp. – . [5] K. Choi and S. Choi, *The definability criteria for convex projective polyhedral reflection groups* 175 2015 323 346 , Geom. Dedicata, ( ), pp. – . [6] P. Dani, M. Haulmark, and G. Walsh, *Right-angled Coxeter groups with non-planar boundary* 17 2023 127 155 , Groups Geom. Dyn., ( ), pp. – . [7] S. Douba and K. Tsouvalas, *On regular subgroups of* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. 编写中。 [8] Y. Guivarc'h, *Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire* 10 1990 483 512 , Ergodic Theory Dynam. Systems, ( ), pp. – . [9] F. Haglund and D. T. Wise, *Coxeter groups are virtually special*, Adv. Math., 224 (2010), pp. 1890–1903. [10] M. Kapovich, *Noncoherence of arithmetic hyperbolic lattices*, Geom. Topol., 17 (2013), pp. 39–71. [11] M. Kapovich and L. Potyagailo, *On the absence of Ahlfors' finiteness theorem for Kleinian groups in dimension three* 40 1991 83 91 , Topology Appl., ( ), pp. – . [12] M. Kapovich, L. Potyagailo, and E. Vinberg, *Noncoherence of some lattices in* $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, 收录于《Zieschang 纪念文集》, Geom. Topol. Monogr. 第14卷, Geom. Topol. Publ., 考文垂, 2008年, 第335–351页。 [13] A. Kawauchi, *A partial Poincaré duality theorem for infinite cyclic coverings*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 26 (1975), pp. 437–458. [14] D. Kielak, *Residually finite rationally solvable groups and virtual fibring*, J. Amer. Math. Soc., 33 (2020), pp. 451–486. [15] F. Lannér, *On complexes with transitive groups of automorphisms*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.], 11 (1950), p. 71. [16] C. Llosa Isenrich, B. Martelli, and P. Py, *Hyperbolic groups containing subgroups of type* $\mathscr{F}_3$ *not* $\mathscr{F}_4$ 2112 06531, 2021 , arXiv 预印本 arXiv: . ( ). [17] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, 收录于《流形拓扑会议论文集》(密歇根州立大学, 密歇根州东兰辛, 1967年), Prindle, Weber & Schmidt, 马萨诸塞州波士顿, 1968年, 第115–133页。 [18] G. P. Scott, *Compact submanifolds of 3-manifolds*, J. London Math. Soc. (2), 7 (1973), pp. 246–250. [19] , *Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented*, J. London Math. Soc. (2), 6 (1973), pp. 437–440. [20] M. Stover, *Coherence and lattices*.《相干性与拟凸子群新兴主题》, 2019年。 [21] E. B. Vinberg, *Discrete linear groups that are generated by reflections*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 35 (1971), pp. 1072–1112. [22] E. B. Vinberg, *Hyperbolic groups of reflections* 40 1985 29 66, , Uspekhi Mat. Nauk, ( ), pp. – . 255 [23] E. B. Vinberg and V. G. Kac, *Quasi-homogeneous cones*, Mat. Zametki, 1 (1967), pp. 347–354。 [24] C. T. C. Wall, 编者, *Homological group theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series 第36卷, 剑桥大学出版社, 剑桥—纽约, 1979年。 [25] D. T. Wise, *An invitation to coherent groups*, 收录于《接下来是什么? ——威廉·P·瑟斯顿的数学遗产》, Ann. of Math. Stud. 第205卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 2020年, 第326–414页。

Institut des Hautes Études Scientifiques, Université Paris-Saclay, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France