arXiv:2304.12651v1 [math.GN] 25 Apr 2023

Joyal-Tierney 定理的新证明

G. BEZHANISHVILI、L. CARAI 和 P. MORANDI

Abstract. 我们利用框架的 Priestley 对偶，给出了 locale 理论中著名的 Joyal-Tierney 定理的一种更具几何性的替代证明。

1. Introduction and Preliminaries

locale 理论中的一个著名结果，即 Joyal-Tierney 定理，指出：locale映射 $f\colon L \to M$ 是开映射，当且仅当其左伴随 f^* 是完备 Heyting 同态（例如参见 [8, 命题 III.7.2]）。此外，如果 L 是 subfit 的，那么 f 是开映射，当且仅当 f^* 是完备格同态（例如参见 [8, 命题 V.1.8]）。我们的目标是利用 Priestley 空间的语言，为这一结果给出另一种更具几何性的证明。

Priestley 对偶 [9, 10]在有界分配格范畴与 Priestley 空间范畴之间建立了对偶等价。我们回顾一下，Priestley 空间是一个 Stone 空间X，配备了偏序 $\leq$，使得 $x \not\leq y$ 蕴含存在一个既开又闭的上集U，满足 $x \in U$ 和 $y \notin U$。Priestley 态射是连续的保序映射。

Pultr 和 Sichler [12] 展示了如何将 Priestley 对偶限制到 frame 范畴。我们回顾一下（例如参见 [8, 第 10] 页），框架是一个完备格 L，满足无限分配律 $a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s\colon s \in S\}$ 对每个 $a \in L$ 和 $S \subseteq L$成立。映射 $h\colon L \to M$之间的框架态射是指满足 h 保持有限交和任意并的映射。令 Frm 表示框架及框架同态构成的范畴。

定义 1.1。

(1) 如果 Priestley 空间 X 的任一开上集的闭包都是既开又闭的上集，则称其为 locale 空间，或简称为 L-空间。(2) $f\colon X \to Y$ 之间的 Priestley 态射，如果满足对于 Y的每个开上集 U都有 $\mathrm{cl}f^{-1}U = f^{-1}\mathrm{cl}U$，则称其为 L-态射。(3) 令 LPries 为由 L-空间和 L-态射构成的范畴。

命题 1.2。 [12, p. 198] Frm 与 LPries 对偶等价。

注 1.3。由于框架恰好是完备 Heyting 代数（例如参见 [6, 命题 1.5。4]），每个 L-空间都是 Esakia 空间；这里回顾一下：如果对于每个既开又闭的 $U \subseteq X$，$\downarrow U$ 都是既开又闭的，则称 Priestley 空间 X 为 Esakia 空间。

注 1.4. 建立 Pultr-Sichler 对偶的逆变函子是建立 Priestley 对偶的逆变函子的限制。它们描述如下。

2020 年数学主题分类。18F70；06D22；06D20；06D50。关键词和短语。框架、locale映射、Joyal-Tierney 定理、Priestley 对偶。

对于一个 L-空间 X，令 ClopUp(X) 表示 X 的既开闭上集框架。函子 ClopUp : LPries $\to$Frm 将 $X \in$ LPries 映射为 ClopUp(X)，并将一个 LPries- 态射 $f\colon X \to Y$ 映射为 Frm- 态射 f^{-1} : ClopUp(Y) $\to$ ClopUp(X)。

对于 $L \in$ Frm，令 X_L 为 L 的素滤子集合，按包含关系排序，并赋予拓扑，其基为 $\{\phi(a) \setminus \phi(b) : a, b \in L\}$，其中 $\phi\colon L \to \wp(X_L)$ 是 Stone 映射 $\phi(a) = \{x \in X_L : a \in x\}$。那么 X_L 是一个 L- 空间，函子 pf : Frm $\to$ LPries 将$L \in$ Frm映射到 X_L，并将一个 Frm-态射 $h : L \to M$ 映射到 h^{-1} : $X_M \to X_L$。

设 L, M 为框架。每个框架同态 $h\colon L \to M$ 都有一个右伴随 $r = h_* : M \to L$，称为locale映射。它由 $r(b) = \bigvee\{a \in L : h(a) \leq b\}$给出。以下给出了 locale映射的刻画：

命题1.5。 [8, 命题 II.2。3] 框架之间的映射 $r : M \to L$ 是locale映射，当且仅当

(1) r 保持所有交（因此具有一个左伴随 $h = r^*$）；

(2) $r(a) = 1$ 蕴含 $a = 1$；(3) $r(h(a) \to b) = a \to r(b)$。

令 Loc 为框架与locale映射范畴。由命题1.2和1.5可直接得到以下结论：

命题 1.6。Loc 与 Frm 对偶同构，因而与 LPries 等价。

为定义开locale映射，我们先回顾子locale这一概念，它推广了子空间的概念。设 L 为一个框架。集合 S 是 L 的子locale，当且仅当 S 对任意交封闭，并且对于每个 $x \in L$ 和 $s \in S$ 都有 $x \to s \in S$。子locale与核相对应。我们回顾一下（例如参见 [8, 第 III.5 节3]），L 上的核是满足以下条件的映射 $\nu\colon L \to L$

(1) $a \leq \nu a$；(2)

$\nu\nu a \leq \nu a$；(3) $\nu($

$a \wedge b) = \nu a \wedge \nu b$。

我们可以如下在核与子locale之间来回转换。如果 ν 是 L上的一个核，那么 $S_\nu := \nu[L]$ 是 L的一个子locale。反之，如果 S 是 L的一个子locale，那么 $\nu_S\colon L \to L$是 L上的一个核，其中 $\nu_S(a) = \bigwedge\{s \in S : a \leq s\}$。这种对应是一一对应的（例如参见 [8,Prop. III.5.3.2]）。

如果 $a \in L$，那么 $\mathfrak{o}(a) := \{a \to x : x \in L\}$ 是 L的一个子locale，称为 L的一个开子局部，其对应的核 ν_a 由 $\nu_a(x) = a \to x$ 给出（例如参见 [8, pp. 33, 35]）。

定义 1.7。 [8, p. 37] 若 locale映射 $r : M \to L$ 对M的每个开子locale S，其像 $r[S]$ 都是 L的开子locale，则称其为开映射。

2. The Joyal-Tierney Theorem

Joyal-Tierney 定理给出了开 locale映射的刻画（参见，例如， [7,命题 7。3]或 [8, 第 37–38]页）：

定理 2.1（Joyal-Tierney）。设 $r : M \to L$ 是框架之间的一个 locale映射，其左伴随为 h。以下条件等价：

（1） r 是开映射。（2） h 是完备 Heyting 同态。（3） h 有一个左伴随 $\ell = h^*$，满足 Frobenius 条件 $\ell(a \wedge h(b)) = \ell(a) \wedge b$，对每个 $a \in M$ 和 $b \in L$ 均成立。

我们的目标是利用框架的 Priestley 对偶给出这一结果的另一种证明。为此，我们需要将定理 2.1 的代数条件转换为关于 Priestley 空间的几何条件。我们将直接使用下面这个众所周知的引理。关于第 (1) 和 (2) 部分，参见 [4, 引理 11.21、11.22]；关于第 (3) 部分，参见 [11, 命题 2.6]；第 (4) 部分则是 Esakia引理的推论（参见 [6, 引理 3.3.12]）。

引理 2.2。

(1) 对于 Priestley 空间 X，集合 $\{U \setminus V\colon\ U, V \in \mathsf{ClopUp}(X)\}$ 是 X的开集基。(2) 设 X 为 Priestley 空间。若 F, G 是 X的互不相交的闭子集，其中 F 为上集且 G 为下集，则存在 X的互不相交的既开又闭子集 U, V，其中 U 为上集且 V为下集，使得 $F \subseteq U$ 和 $G \subseteq V$。特别地，每个开上闭集都是既开又闭上集的并，每个闭上集都是既开又闭上集的交。(3) 若 F 是 Priestley 空间的闭子集，则 $\uparrow F$ 和 $\downarrow F$ 是闭的。(4) 设 $f : X \to Y$ 是 Priestley 空间之间的连续映射。对于每个 $x \in X$，我们有

$$f\left[\bigcap\{U \in \mathsf{ClopUp}(X) : x \in U\}\right] = \bigcap\{f[U] : x \in U \in \mathsf{ClopUp}(X)\}.$$

我们回顾一下（例如参见 [4, p. 265]）：如果 $h\colon\ L \to M$ 是一个框架同态，且 $f : X_M \to X_L$ 是其 Priestley 对偶，那么

$$f^{-1}(\phi(a)) = \phi(h(a)). \tag{i}$$

我们还回顾一下：如果 $r\colon\ M \to L$ 是一个locale映射，且 S 是 M的子locale，那么 $r[S]$ 是 L 的子locale（例如参见 [8, Prop. III.4.1.]）。

引理 2.3。设 $r\colon\ M \to L$ 是一个左伴随为 h的locale映射。如果 S 是 M的子locale，那么 $\nu_{r[S]} = r\nu_S h$。

证明。设 $a \in L$。我们有

$$\begin{aligned}
\nu_{r[S]}(a) &= \bigwedge\{r(s) : s \in S,\, a \le r(s)\} \\
&= \bigwedge\{r(s) : s \in S,\, h(a) \le s\} \\
&= r\left(\bigwedge\{s \in S : h(a) \le s\}\right) \\
&= r\nu_S h(a).
\end{aligned}$$

因此， $\nu_{r[S]} = r\nu_S h$。 □

因此我们看到，对于具有左伴随 h 的 locale映射 $r\colon\ M \to L$，当且仅当对每个 $a \in M$，存在 $b \in L$ 使得 $r\nu_a h = \nu_b$ 时，该映射是开映射。我们将在以下引理的证明中使用这一观察。

引理 2.4。设 $r\colon M \to L$ 是一个 locale映射，h 是 r 的左伴随，且 $f\colon X_M \to X_L$ 是 h 的 Priestley 对偶。以下各项等价：

(1) r 是开集。(2) 若 U是 X_M的既开又闭的上集，则 $f[U]$是 X_L 的既开又闭的上集。

证明。我们首先证明，若 $a \in M$ 和 $b, c \in L$，则

$$b \le (r\nu_a h)(c) \iff \phi(b) \cap f[\phi(a)] \subseteq \phi(c). \tag{ii}$$

为说明这一点，

$$\begin{aligned} b \le (r\nu_a h)(c) &\iff b \le r(a \to h(c)) \iff h(b) \le a \to h(c) \\ &\iff h(b) \wedge a \le h(c). \end{aligned}$$

因此，由于对每个 A，$f[f^{-1}(B) \cap A] = B \cap f[A]$，$B$，根据 (i) 可得

$$\begin{aligned} b \le (r\nu_a h)(c) &\iff \phi(h(b)) \cap \phi(a) \subseteq \phi(h(c)) \iff f^{-1}(\phi(b)) \cap \phi(a) \subseteq f^{-1}(\phi(c)) \\ &\iff f[f^{-1}(\phi(b)) \cap \phi(a)] \subseteq \phi(c) \iff \phi(b) \cap f[\phi(a)] \subseteq \phi(c). \end{aligned}$$

(1)⇒(2)。设 $U \in \in \mathsf{ClopUp}(X_M)$。则对某个 $a \in M$，$U = \phi(a)$。根据 (1) 和引理 2.3，存在 $b \in L$，使得 $r\nu_a h = \nu_b$。由于 $1 = \nu_b(b)$，我们有 $1 \le (r\nu_a h)(b)$，因此根据 (ii)，$\phi(1) \cap f[U] \subseteq \phi(b)$。于是，$f[U] \subseteq \phi(b)$。反过来，设 $y \in \phi(b)$。若 $y \notin f[U]$，那么由于 $f[U]$在 X_L中是闭集，存在一个包含 y且不包含 $f[U]$的既开又闭集。根据引理 2.2(1)，存在 $c, d \in L$，使得 $y \in \phi(c) \setminus \phi(d)$ 且 $f[U] \cap (\phi(c) \setminus \phi(d)) = \varnothing$。因此，$f[U] \cap \phi(c) \subseteq \phi(d)$，所以根据 (ii)，$c \le (r\nu_a h)(d) = \nu_b(d) = b \to d$。由此得到 $b \wedge c \le d$，进而 $\phi(b) \cap \phi(c) \subseteq \phi(d)$，这与 $y \in \phi(b) \cap \phi(c)$ 但 $y \notin \phi(d)$ 矛盾。因此，$y \in f[U]$，所以 $\phi(b) \subseteq f[U]$。于是，$f[U] = \phi(b)$，因此 $f[U] \in \in \mathsf{ClopUp}(X_L)$。

(2)⇒(1)。令 $a \in M$并设 $U = \phi(a)$。则 $U \in \mathsf{ClopUp}(X_M)$，因此由 (2) 可得 $f[U] \in \mathsf{ClopUp}(X_L)$。所以，存在 $b \in L$，使得 $\phi(b) = f[U]$。若 $c, d \in L$，则根据 (ii)，

$$\begin{aligned} c \le (r\nu_a h)(d) &\iff \phi(c) \cap f[U] \subseteq \phi(d) \\ &\iff \phi(c) \cap \phi(b) \subseteq \phi(d) \\ &\iff c \wedge b \le d \\ &\iff c \le b \to d \\ &\iff c \le \nu_b(d). \end{aligned}$$

因此，$r\nu_a h = \nu_b$，从而 r 是开集。 □

接下来，我们给出框架同态存在左伴随的条件的对偶刻画。设 X 是一个 Priestley 空间。那么我们在 X上还有两种拓扑，即开上集拓扑和开下集拓扑。若 int_i 和 cl_i 是相应的内部算子和闭包算子（$i = 1, 2$），那么众所周知（例如参见 [3, 引理 6.5]），对于 $A \subseteq X$，有：

$$\begin{aligned} &\mathsf{int}_1(A) = X \setminus {\downarrow}(X \setminus \mathsf{int}A) \quad \text{and} \quad \mathsf{cl}_1 A = {\downarrow}\mathsf{cl}A; \\ &\mathsf{int}_2(A) = X \setminus {\uparrow}(X \setminus \mathsf{int}A) \quad \text{and} \quad \mathsf{cl}_2 A = {\uparrow}\mathsf{cl}A. \end{aligned}$$

设 L 是一个框架，且 $a = \bigwedge S$ 对 $a \in L$ 和 $S \subseteq L$成立。那么 $\phi(a) = \mathsf{int}_1 \bigcap\{\phi(s) : s \in S\}$（例如参见 [2, 引理 2.3]）。这将在下面的引理中用到。

引理 2.5. 设 $h\colon L \to M$ 是一个框架同态，$f : X_M \to X_L$ 是其 Priestley 对偶。以下各条件等价：

(1) h 有左伴随。(2) h 保持所有交。(3) 对每个闭上集 $F \subseteq X_L$，$f^{-1}\mathsf{int}_1 F = \mathsf{int}_1 f^{-1}F$。(4) 对每个既开又闭的上集 $U \subseteq X_M$，$\uparrow f[U]$ 是既开又闭的。

证明。(1)⇔(2)。这是众所周知的（例如参见 [4, 命题 7.34]）。

(2)⇒(3)。设 F 是 X_L 的一个闭上集。我们可以写成 $F = \bigcap\{\phi(s) : s \in S\}$，其中某个$S \subseteq L$ （见引理 2.2(2)）。由 (i),

$$f^{-1}(F) = f^{-1}\left(\bigcap\{\phi(s) : s \in S\}\right) = \bigcap\{f^{-1}(\phi(s)) : s \in S\} = \bigcap\{\phi(h(s)) : s \in S\},$$

so

$$\mathsf{int}_1 f^{-1}(F) = \mathsf{int}_1 \bigcap\{\phi(h(s)) : s \in S\} = \phi\left(\bigwedge h[S]\right).$$

另一方面，由于

$$\mathsf{int}_1 F = \mathsf{int}_1 \bigcap\{\phi(s) : s \in S\} = \phi\left(\bigwedge S\right),$$

再次使用 (i) 可得

$$f^{-1}(\mathsf{int}_1 F) = f^{-1}\left(\phi\left(\bigwedge S\right)\right) = \phi\left(h\left(\bigwedge S\right)\right).$$

因此，由 (2) 可得

$$\mathsf{int}_1 f^{-1}(F) = \phi\left(\bigwedge h[S]\right) = \phi\left(h\left(\bigwedge S\right)\right) = f^{-1}(\mathsf{int}_1 F).$$

(3)⇒(4)。令 $U \in \mathsf{ClopUp}(X_M)$，并设 $F = \uparrow f[U]$。根据引理 2.2(3)，F是 Y 的闭上集。由 (3) 可得，

$$U \subseteq \mathsf{int}_1 f^{-1}(f[U]) \subseteq \mathsf{int}_1 f^{-1}F = f^{-1}\mathsf{int}_1 F,$$

因此 $f[U] \subseteq \mathsf{int}_1 F$，从而 $\uparrow f[U] \subseteq \mathsf{int}_1 F = \mathsf{int}_1 \uparrow f[U]$。于是，$\uparrow f[U]$ 是既开又闭的。

(4)⇒(1)。令 $a \in M$。由 (4)，$\uparrow f[\phi(a)] \in \mathsf{ClopUp}(X_L)$。因此，存在唯一的 $b \in L$，使得 $\phi(b) = \uparrow f[\phi(a)]$。令 $\ell(a) = b$，定义函数 $\ell : M \to L$，使得

$$\phi(\ell(a)) = \uparrow f[\phi(a)]. \tag{iii}$$

为证明 ℓ 是 h 的左伴随，令 $c \in L$。由于 $\phi(c)$ 是一个上集，根据 (i) 可得

$$\ell(a) \le c \iff \phi(\ell(a)) \subseteq \phi(c) \iff \uparrow f[\phi(a)] \subseteq \phi(c) \iff f[\phi(a)] \subseteq \phi(c)$$
$$\iff \phi(a) \subseteq f^{-1}(\phi(c)) \iff \phi(a) \subseteq \phi(h(c)) \iff a \le h(c). \qquad \square$$

我们回顾一下（例如参见 [6, 第 9] 页）：如果映射 $f : X \to Y$ 是偏序集之间的映射，并且对于每个 $y \in Y$都有 $\downarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(\downarrow y)$，则称其为有界态射或 p-态射。设 $h\colon L \to M$是框架之间的框架同态，且 $f : X_M \to X_L$ 是其 Priestley 对偶。则 f 是一个L-态射。由 Heyting 代数的 Esakia 对偶 [5, 6] 可知，h 保 $\to$当且仅当 f 是一个 p- 态射。结合引理 2.5，我们得到：

引理 2.6. 设 $h\colon L\to M$ 是一个框架同态，其 Priestley 对偶为 $f\colon X_M\to X_L$。则 h 是完备 Heyting 同态，当且仅当 f 是一个 p-态射，并且对于 X_M 的每个既开又闭的上集 U，$\uparrow f[U]$ 都是既开又闭的。

接下来，我们给出 Frobenius 条件 $\ell(a\wedge h(b))=\ell(a)\wedge b$ 对每个 $a\in M$ 和 $b\in L$ 的一个对偶刻画。

引理 2.7. 设 $h\colon L\to M$ 是一个具有 Priestley 对偶 $f\colon X_M\to X_L$ 的框架同态。以下条件等价：

(1) h 具有左伴随 ℓ，并且对每个 $a\in M$ 和 $b\in L$，有 $\ell(a\wedge h(b))=\ell(a)\wedge b$。(2) $\uparrow f[U]$ 是既开又闭的，并且对每个 $U\in\mathsf{ClopUp}(X_M)$ 和 $V\in\mathsf{ClopUp}(X_L)$，有 $\uparrow(f[U]\cap V)=\uparrow f[U]\cap V$。

证明。由引理 2.5，h 具有左伴随 ℓ 当且仅当对每个 $U\in\mathsf{ClopUp}(X_M)$，$\uparrow f[U]$ 是既开又闭的。只需证明：对每个 $a\in M$ 和 $b\in L$，$\ell(a\wedge h(b))=\ell(a)\wedge b$ 当且仅当对每个 $U\in\mathsf{ClopUp}(X_M)$ 和 $V\in\mathsf{ClopUp}(X_L)$，有 $\uparrow(f[U]\cap V)=\uparrow f[U]\cap V$。令 $U=\phi(b)$ 和 $V=\phi(a)$，由于由 (iii) 得 $\uparrow f[U]=\phi(\ell(a))$，我们有

$$\phi(\ell(a)\wedge b)=\phi(\ell(a))\cap\phi(b)=\uparrow f[U]\cap V.$$

另一方面，由于 $f[U\cap f^{-1}(V)]=f[U]\cap V$，根据 (i) 我们有

$$\begin{aligned}\phi(\ell(a\wedge h(b)))&=\uparrow f[\phi(a\wedge h(b))]=\uparrow f[\phi(a)\cap f^{-1}(\phi(b))]\\&=\uparrow f[U\cap f^{-1}(V)]=\uparrow(f[U]\cap V).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\ell(a\wedge h(b))=\ell(a)\wedge b&\iff\phi(\ell(a\wedge h(b)))=\phi(\ell(a)\wedge b)\\&\iff\uparrow(f[U]\cap V)=\uparrow f[U]\cap V.\end{aligned}$$

□

因此，我们已经将定理 2.1 的三个条件转化为了 Priestley 空间语言中的对偶条件。接下来我们证明这些转化后的条件是等价的。

定理 2.8. 设 $f\colon X\to Y$ 是 L-空间之间的 Priestley 态射。以下条件等价：

(1) 若 $U\in\mathsf{ClopUp}(X)$，则 $f[U]\in\mathsf{ClopUp}(Y)$。(2) f 是 p-态射，并且对于每个 $U\in\mathsf{ClopUp}(X)$，$\uparrow f[U]$ 是既开又闭的。(3) $\uparrow f[U]$ 是既开又闭的，并且对于每个 $U\in\mathsf{ClopUp}(X)$ 和 $V\in\mathsf{ClopUp}(Y)$，$\uparrow(f[U]\cap V)=\uparrow f[U]\cap V$。

证明。(1)⇒(2)。令 $U\in\mathsf{ClopUp}(X)$。由 (1)，$f[U]$ 是 Y 的上集，因此 $\uparrow f[U]=f[U]$。因此，由 (1)，$\uparrow f[U]$ 在 Y 中既开又闭。剩下只需证明 f 是一个 p-态射。为此，只需证明对每个 $x\in X$，$f(\uparrow x)$ 都是一个上集（例如参见 [6, 命题 1.4.12]）。由引理 2.2(2)，$\uparrow x=\bigcap\{U\in\mathsf{ClopUp}(X):x\in U\}$，因此由引理 2.2(4)，

$$f[\uparrow x]=f\left[\bigcap\{U\in\mathsf{ClopUp}(X):x\in U\}\right]=\bigcap\{f[U]:x\in U\in\mathsf{ClopUp}(X)\}.$$

因此，根据 (1)，$f[\uparrow x]$ 是一个上集。

(2)⇒(3)。只需证明，对于每个 $U \in \mathbf{ClopUp}(X)$ 和 $V \in \mathbf{ClopUp}(Y)$，$\uparrow(f[U] \cap V) = \uparrow f[U] \cap V$。但由于 f是一个 p-态射，$\uparrow f[U] = f[U]$，因此 $\uparrow f[U] \cap V = f[U] \cap V = \uparrow(f[U] \cap V)$，因为 $f[U] \cap V$是一个上集。

(3)⇒(1)。只需证明 $f[U]$是一个上集。否则，存在 $x \in U$和$y \in Y$，使得 $f(x) \leq y$，但 $y \notin f[U]$。由此可得 $y \notin \downarrow(\downarrow y \cap f[U])$，因此存在 Y的一个既开又闭的上集 V，使得 $y \in V$且 $V \cap \downarrow y \cap f[U] = \varnothing$（见引理 2.2(2)）。因此，$y \notin \uparrow(f[U] \cap V)$，但 $y \in \uparrow f[U] \cap V$，这与(3)矛盾。故 $f[U]$是一个上集。□

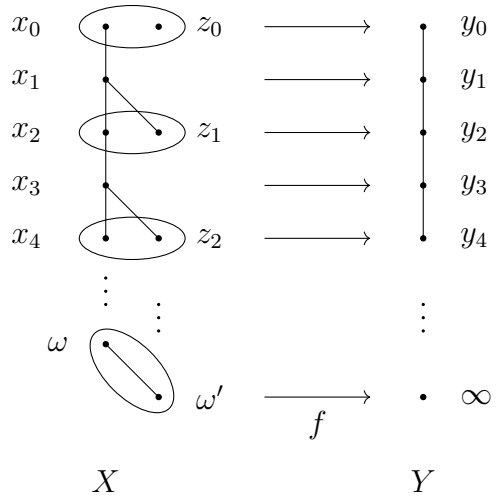
根据引理 2.4、2.6 和 2.7，定理 2.8 的三个条件分别等价于定理 2.1 中对应的三个条件。因此，Joyal-Tierney 定理是定理 2.8 的推论。本节最后给出以下观察。

注 2.9. 定理 2.8 的条件 (1) 等价于:

(1′) 如果 U是 X的开上闭集，那么 $f[U]$是 Y的开上闭集。

显然，(1′) 蕴含 (1)，因为如果 U是既开又闭的，那么 $f[U]$是闭的，因此根据 (1′)，它是 Y 的既开又闭的上集。反过来，如果 U 是一个开上闭集，那么根据引理 2.2(2)，$U = \bigcup\{V \in \mathbf{ClopUp}(X) : V \subseteq U\}$ 。因此，根据 (1)，$f[U] = \bigcup\{f[V] : V \in \mathbf{ClopUp}(X)\ V \subseteq U\}$ 是 Y 的既开又闭上集的并。于是，$f[U]$是 Y的开上闭集。因此，(1) 等价于 f关于开上集拓扑是一个开映射。

另一方面，这并不意味着 f 关于 Stone 拓扑是一个开映射。为说明这一点，我们使用 [1, 第 32]页中定义的空间。令 X 为离散空间 $\{x_n, z_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的二点紧化，其中 ω 是 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$的极限点，而 ω' 是 $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$的极限点。此外，令 Y 为离散空间 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$的一点紧化。我们对 X 和 Y进行排序，并按照下面的图示定义映射 $f : X \to Y$。



不难看出，X 和 Y 是 L-空间，并且 f 是一个 L-态射，使得对于 X的每个既开又闭的上集 U，$f[U]$都是 Y的既开又闭的上集。然而，f不是开映射，因为 $U := \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega'\}$ 是 X 的一个开子集，而其像 $\{y_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$ 不是 Y的开子集。

3. The subfit case

正如 [8, 命题 V.1.8], 中所示，如果在 Joyal-Tierney 定理中假设 L 是 subfit 的，那么 locale映射 $r\colon M \to L$ 是开映射，当且仅当其左伴随 $h\colon L \to M$ 是完备格同态（因此，h是 Heyting 同态这一条件变得多余）。我们将用 Priestley 空间的语言给出这一结果的另一种证明。

我们回顾一下，框架 L 是 subfit 的，当且仅当对于所有 a、$b \in L$，都有

$$a \not\leq b \Longrightarrow (\exists c \in L)(a \vee c = 1 \text{ but } b \vee c \neq 1).$$

接下来我们给出 L 为 subfit 的一个对偶刻画。按照惯例，对于偏序集 X，我们写作 $\min X$，表示 X的极小元集合。

引理 3.1. 设 L 为一个框架，X_L 为其 Priestley 空间。那么，L 为 subfit，当且仅当 $\min X_L$ 在 X_L中稠密。

证明。首先假设 $\min X_L$在 X_L中稠密。设 a、$b \in L$ 满足 $a \not\leq b$。则 $\phi(a) \not\subseteq \phi(b)$，因此 $\phi(a)\setminus\phi(b)$ 是 X 的一个非空既开又闭子集。因此，存在 $x \in (\phi(a)\setminus\phi(b))\cap \min X_L$。令 $U = X_L \setminus \{x\}$。则 U是 X_L的一个开上闭集。由于 $\phi(a) \cup U = X_L$，且 U是既开又闭上集的并（见引理 2.2(2)），X_L 的紧致性蕴含存在一个既开又闭上集$U' \subseteq U$，满足 $\phi(a) \cup U' = X_L$。因为对于某个 $c \in L$有 $U' = \phi(c)$，所以我们有 $a \vee c = 1$。另一方面，由于 $\phi(b) \cup U' \neq X_L$，可推出 $b \vee c \neq 1$。因此，L 是 subfit 的。

反之，假设 $\min X_L$ 在 X_L 中不是稠密的。于是存在 X_L 的一个非空闭开子集 A，使得 $A \cap \min X_L = \varnothing$。不妨设 $A = U \setminus V$，其中$U \not\subseteq V$ 是 X_L 的既开又闭上集（见引理 2.2(1)）。由 $A \cap \min X_L = \varnothing$ 可知，$U \cap \min X_L \subseteq V$。令 a、$b \in L$ 满足 $U = \phi(a)$ 和 $V = \phi(b)$。由于 $U \not\subseteq V$，我们有 $a \not\leq b$。假设 $c \in L$ 满足 $a \vee c = 1$。令 $W = \phi(c)$。于是 $U \cup W = X_L$，所以 $\min X_L \subseteq U \cup W$。由于 $U \cap \min X_L \subseteq V$，这就得到 $\min X_L \subseteq V \cup W$，而这迫使$V \cup W = X_L$，因为 $\uparrow \min X_L = X_L$（例如参见 [6, 定理 3.2.1]）。因此，$b \vee c = 1$，从而 L 不是 subfit 的。□

引理 3.2. 设 $f\colon X \to Y$是 L-空间之间的 Priestley 态射。若 $\min Y$在 Y中稠密，并且对于每个 $U \in \mathrm{ClopUp}(X)$，$\uparrow f[U]$是既开又闭的，则 f是一个 p-态射。

证明。根据定理 2.8 的 (1)⇒(2) 的证明中所用的同样论证，只需证明对于每个 $U \in \mathrm{ClopUp}(X)$，$f[U]$是一个上集。若不然，则对于某个$U \in \mathrm{ClopUp}(X)$，有 $\uparrow f[U] \setminus f[U] \neq \varnothing$。令 $V = \uparrow f[U]\setminus f[U]$。由于 $f[U]$是闭集，根据引理 2.2(3)，$\uparrow f[U]$是闭集。因此，V是 Y的非空开子集。于是，$V \cap \min Y \neq \varnothing$。另一方面，

$$V \cap \min Y \subseteq \uparrow f[U] \cap \min Y \subseteq f[U] \cap \min Y.$$

这是矛盾的，因为 $V \cap f[U] = \varnothing$。因此，$f[U]$是一个上集 t. □

由引理 3.2 可立即得到：

定理 3.3. 设 $f\colon X \to Y$是 L-空间之间的 Priestley 态射。若 $\min Y$在 Y中稠密，则定理 2.8 中的条件（2）等价于

(2′) 对于每个 $U \in \mathrm{ClopUp}(X)$，$\uparrow f[U]$都是既开又闭的。

定理2.8和3.3以及引理2.4和2.5共同得到以下版本的 Joyal-Tierney 定理：

推论3.4。 [8, 命题 V.1。8] 设 $r\colon\ M \to L$ 是一个带左伴随 h的locale映射。若 L 是subfit的，则 r 是开映射，当且仅当 h 是完备格同态。

References

[1] G. Bezhanishvili，单子Heyting代数的簇。II. 对偶理论，Studia Logica 62（1999），第1期，21–48。[2] G. Bezhanishvili 和 N. Bezhanishvili，仿有限Heyting代数，Order 25（2008），第3期，211–227。[3] G. Bezhanishvili、N. Bezhanishvili、D. Gabelaia 和 A. Kurz，分配格与Heyting代数的双拓扑对偶，Math. Structures Comput. Sci. 20（2010），第3期，359–393。[4] B. A. Davey 和 H. A. Priestley，《格与序导论》，第二版，剑桥大学出版社，纽约，2002。[5] L. L. Esakia，拓扑Kripke模型，Soviet Math. Dokl. 15（1974），147–151。[6] _____，《Heyting代数：对偶理论》，A. Evseev 由俄文译出。G. Bezhanishvili 和 W. Holliday 编。Trends in Logic，第50卷，施普林格，2019。[7] J. Picado 和 A. Pultr，《主要以协变方式处理的locale》，Textos de Matem´atica。S´erie B，第41卷，科英布拉大学数学系，科英布拉，2008。[8] _____，《框架与locale：无点拓扑》，Frontiers in Mathematics，Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012。[9] H. A. Priestley，利用有序Stone空间表示分配格，Bull. London Math. Soc. 2（1970），186–190。[10] _____，有序拓扑空间与分配格的表示，Proc. London Math. Soc.（3）24（1972），507–530。[11] _____，有序集与分配格的对偶，Orders: description and roles（L'Arbresle，1982），North-Holland Math. Stud.，第99卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1984，第39–60页。[12] A. Pultr 和 J. Sichler，Priestley对偶中的框架，Cahiers Topologie G´eom. Diff´erentielle Cat´eg. 29（1988），第3期，193–202。

New Mexico State University电子邮件地址：guram@nmsu.edu

Universitat de Barcelona电子邮件地址：luca.carai.uni@gmail.com

New Mexico State University电子邮件地址：pmorandi@nmsu.edu