有限可达树状伴随与 Hintikka 公式

Luca Reggio 与 Colin Riba

arXiv:2304.12709v2 [cs.LO] 4 Feb 2025

Abstract. 树状范畴提供了一个公理化框架，在其中可以定义互模拟和往返游戏等抽象概念。它们通过树状伴随作用于外延范畴，而外延范畴通常由关系结构组成。在许多情况下，无穷一阶逻辑片段中的结构等价可以通过沿伴随传递互模拟关系来刻画。

在大多数应用中，所涉及的范畴是局部有限可表示的，而伴随是有限可达的。我们的主要结果刻画了这类伴随的表达能力。我们证明，树状范畴中往返游戏的秩可以由 ` 类似 Hintikka 的公式定义，因此，由互模拟在外延对象之间诱导的关系总是比无穷一阶逻辑中的等价更粗。

我们的方法利用了局部有限可呈范畴的 Gabriel-Ulmer 对偶性以及 Hodges 的词构造。

Contents

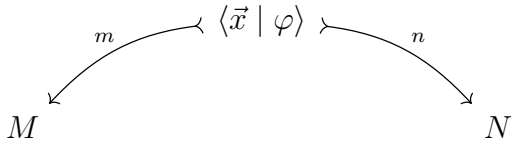
1 引言 .12 预备知识.43 来回等价 .104 树状范畴.235 Gabriel-Ulmer 对偶性 .276 笛卡尔理论的函子语义 .307 来回博弈的 Hintikka 公式 .378 关于嵌入的公式 .459 主要结果的证明.5210 分解性质 .6311 结论 .70参考文献 .71附录 A 局部有限可呈范畴作为结构范畴 .74附录 B 关于 §2（预备知识）的补充材料 75

1. Introduction

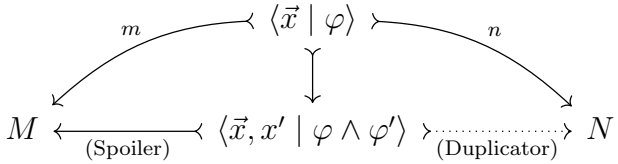
模型比较博弈，例如 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈和卵石博弈，是模型论中的重要工具，因为它们为给定逻辑片段中的模型等价性提供了语义刻画，参见例如 [31, 47]。它们是少数能够适用于有限结构的模型论方法之一，因此在有限模型论中居于核心地位；参见例如 [23, 43]。本文研究一类范畴（该类范畴扩展了 [5, 6] 的树状范畴类），在这些范畴中可以定义抽象博弈，从而推广上述博弈及许多其他博弈。

我们先对一个众所周知的例子稍作改写。设 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 是一个由生成元 $\vec{x} = x_1$、……、x_n 组成的有限结构，并满足条件 $\varphi = \varphi(\vec{x})$

该条件表示为等式约束 $x_i \doteq x_j$ 和序约束 $x_i \dot{<} x_j$ 的合取。考虑有序结构 M 和 N，以及同态 m、n，如下所示。



箭头 $\rightarrowtail$ 表示序嵌入。这种情形可以看作 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈中的一个位置；该博弈由 *Spoiler* 和**复制者** 在 M 和 N 上进行。下一轮中，Spoiler 通过选择嵌入 m 和 n 中的一个（例如 m）来行动，并按照下方实线箭头所示对其进行扩展。



复制者必须通过扩展另一个嵌入（本例中为 n）来回应，如上方虚线箭头所示。随后博弈从新的位置继续；如果复制者能够回应 Spoiler 的所有行动，则复制者获胜。例如，当 M 和 N 是没有端点的稠密线性序（如 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$）时，复制者获胜，参见例如 [55, §14.2]。Karp [39] 的一个著名结果随即表明，M 和 N 满足相同的无穷一阶逻辑公式 $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_{\infty,\omega}$ 其中允许使用任意元数的无穷合取和析取。

博弈视角的一个优势在于，Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈中的轮数，或卵石博弈中的卵石数量等参数，自然对应于公式的复杂性度量，例如量词秩或变量数量。根据所使用的逻辑资源数量对公式进行分层，在有限模型论中十分普遍，也是描述复杂性的核心，参见例如 [32]。

模型比较博弈的**余单子**方法的一个洞见是：给定关系结构中某个博弈的所有对局构成本身也是同类型的结构。这一方法由 [2]提出，并由 Abramsky、Dawar 及其合作者在 [8, 9] 中发展而来。此外，该赋值在结构及其同态构成的范畴上给出一个自函子；事实上，它是一个称为**博弈余单子**的余单子。这适用于多种博弈，例如 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈、卵石博弈和模态双模拟博弈。博弈余单子及其以树状范畴和树状伴随形式给出的公理化扩展 [5, 6], ，为许多模型比较博弈，以及结构所对应的逻辑资源和组合参数，提供了纯粹的范畴论视角。特别是，树状范畴允许定义博弈的抽象概念，而这些博弈中对象的等价性可以通过一种与 Joyal、Nielsen 和 Winskel 的开映射双模拟等价 [37, 38]密切相关的**互模拟**概念来刻画。关于博弈余单子和树状范畴的最新综述，参见 [7]。

一个树状范畴 $\mathcal{A}$ 配备了一个分解系统（由商 和嵌入组成），该系统诱导出对象 $\mathcal{A}$之间的往返游戏概念，从而得到来回等价概念。树状范畴 $\mathcal{A}$ 通常作用于一个范畴 $\mathcal{E}$, 称为**外延范畴** （例如关系结构范畴），其作用通过一个**树状伴随**实现，即形如以下形式的伴随

$$\mathcal{A} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\top}{\rightleftarrows}}} \mathcal{E}\,.$$

特别地，我们可以沿着伴随将来回等价关系传递到范畴 $\mathcal{E}$：当且仅当 RM 和 RN 在 $\mathcal{A}$ 中来回等价时，两个对象 M、$N \in \mathcal{E}$ 才在传递后的关系下等价。通过这种方式，我们恢复了若干逻辑片段中的结构等价。

在许多具体例子中，所涉及的逻辑是 $\mathcal{L}_\infty$ 的片段，并且树状伴随满足以下附加性质：

（i）范畴 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{A}$ 是局部有限可呈的（例如，在 [13] 的意义下），（ii）右伴随 R 具有有限性，即保持滤过余极限。

局部有限可呈范畴之间的、其右伴随保持滤过余极限的伴随通常称为**有限可达伴随**，因此我们将满足上述两个条件的树状伴随 $L\colon\ \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$ 称为**有限可达树状伴随**。例如，与 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 余单子相关联的树状伴随是有限可达的，并且所诱导的来回等价关系刻画了完整逻辑 $\mathcal{L}_\infty$中的结构等价。

我们的主要结果为有限可达树状伴随给出了这一命题的逆命题。在温和的附加假设下，我们证明，如果 $M,\ N \in \mathcal{E}$ 是 $\mathcal{L}_\infty$-等价的，那么RM 和 RN 在 $\mathcal{A}$ 中是来回等价的。因此，树状往返等价关系无法区分 $\mathcal{L}_\infty$-等价的模型。这为有限可达树状伴随的表达能力确定了一个紧上界。

我们的结果适用于我们称为***wooded*** 范畴的范畴，它们是通过弱化树状范畴的概念得到的。树状范畴的公理蕴含，在树状范畴中，来回等价 $\mathcal{A}$ 与通过开映射（某种合适的概念）定义的互模拟相一致。此外，还有一个函子 $\mathbb{P}\colon\ \mathcal{A} \to \mathbf{Tree}$，它映入由树和保高度单调映射构成的范畴 $\mathbf{Tree}$，使我们能够将许多 $\mathcal{A}$ 中的构造视为“具体地建立在树之上”。虽然这些性质支持树状范畴中的来回等价概念，但我们的主要结果并不需要它们。因此，在树状范畴的公理中，我们只采用定义来回等价所需的公理。这实质上相当于要求存在一个良好的分解系统；我们将由此得到的范畴称为$wooded$，因为与树状范畴相比，它们所包含的树可能稀疏得多。

主要结果的技术概述。 我们将从较高层次概述主要结果的证明结构及所用工具。

我们的主要结果中的一个重要假设基于这样一个观察：在大多数例子中，树状的（或更一般地说，wooded）范畴 $\mathcal{A}$ 中的嵌入类由 $\mathcal{E}$中的子结构嵌入类决定。为了精确表述这一点，我们借助 Gabriel-Ulmer 对偶性 [27]（另见 [13, 12]），它可视为局部有限可呈范畴与笛卡尔理论之间的语法-语义对偶。Coste 在 [20], 中引入的后者由公式之间的蕴含构成，这些公式仅使用（有限个）合取和可证唯一的存在量词构造而成（另见 [36, §§D1–2]）。因此，局部有限可呈范畴在等价意义下可与笛卡尔理论的模型范畴（其中态射均为同态）等同起来。

现在考虑一个**有限可达林地伴随** $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$，即局部有限可表示范畴之间的有限可达伴随，并且满足 $\mathcal{C}$ 是林地的。假设 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个（可能是多排序且无限的）签名，使得 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$中某个笛卡尔理论的模型范畴（或等价于该范畴）。当以下条件成立时，我们称 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$**在** $\mathbf{\Sigma}$ **中检测嵌入**：[1]

[1]我们的主要结果实际上只要求一个更弱的条件，即“检测路径嵌入”。

- 的一个态射是嵌入，当且仅当其在左伴随L 下的像是 $\mathbf{\Sigma}$-结构到 $\mathcal{E}$中的嵌入。

我们的主要结果表明

$$M, N \in \mathcal{E} \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}) \implies RM, RN \text{ back-and-forth equivalent in } \mathcal{C}.$$

证明策略如下。 $\mathcal{C}$ 中的往返游戏在通常意义下是闭的，并且配备了位置的通常序数秩概念；参见例如 [31,§3.4] 或 [41, §20B]。假设 $\mathcal{C}$中嵌入具有某种可定义性，并使用 Coste 的句法范畴，对于每个 $a \in \mathcal{C}$ ，我们构造定义 a中所进行博弈的位置序数秩的“Hintikka 公式”。在 Gabriel-Ulmer 对偶下，右伴随R 在反方向上诱导出理论的解释，因此 $\mathcal{C}$ 中的 RM 的 Hintikka 公式（这些公式写在签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中，使得 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{\Gamma}$中某个笛卡尔理论的模型范畴）可以被翻译为 $\mathcal{E}$中的 M 的公式。

为了获得所需结果，我们证明：如果 L，则我们关于 $\mathcal{C}$中嵌入可定义性的假设得到满足：$\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}$： R在 $\mathbf{\Sigma}$中检测嵌入。为此，我们利用 $\mathcal{E}$中子结构嵌入的某种可定义性，从而 $\mathcal{C}$ 中RM 的 Hintikka 公式依赖于 $\mathcal{E}$中 LRM 上的公式。这一次不存在由 Gabriel-Ulmer 对偶诱导的解释（因为我们考虑的是左伴随，而不是右伴随），因此，为了将 LRM 的无穷理论翻译为 RM 的无穷理论，我们使用 Hodges 的一个版本的 词构造 [29, 30] （另见 [31, §9.3]）。

不过需要注意的是，在局部有限呈示范畴中，子结构嵌入的概念 $\mathcal{E}$ 存在一定问题。如上所述，任何这样的 $\mathcal{E}$ 都等价于某个签名 $\mathbf{\Sigma}$下笛卡尔理论的模型范畴。但对于给定的 $\mathcal{E}$， $\mathbf{\Sigma}$ 有多种可能的选择，而 $\mathcal{E}$ 中的子结构嵌入概念取决于这种选择。即使 $\mathbf{\Sigma}$ 可以选为单排序、有限且纯关系的，相对于 $\mathcal{E}$ 的 Hintikka 公式也可能比相对于 $\mathbf{\Sigma}$-结构范畴的 Hintikka 公式复杂得多。如果有限可达伴随 L： $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}$:$R$具有分解性质，即它经由 $\mathcal{E}$ 到 $\mathbf{\Sigma}$-结构范畴的通常反射进行分解，情况就会大为简化。我们证明，在一些自然例子中，分解性质成立；但一般而言它并不成立（即使我们假设林地范畴 $\mathcal{C}$ 是树状的）。

论文结构。 在第 §2 节介绍一些预备知识后，我们在第 §3 节给出林地范畴以及有限可达林地伴随的来回等价。这引出了主要结果的陈述，即第 3.4 节中的定理 3.29。由于我们的许多林地范畴示例都属于树状范畴，我们在第 §4 节介绍一些关于树状范畴的背景知识。本文其余的大部分内容将致力于证明定理 3.29。在第 §§5–6 节，我们回顾局部有限可呈范畴和函子语义的相关材料。在第 §7 节，假设局部有限可呈林地范畴 $\mathcal{C}$中嵌入具有某种可定义性，我们构造用于序数秩的 Hintikka 公式，并得到定理 3.29 的一个较弱版本。在第 §8 节，我们讨论局部有限可呈范畴 $\mathcal{E}$中子结构嵌入的可定义性。随后，我们在第 §9 节完成定理 3.29 的证明：利用词构造，将定义 $\mathcal{E}$ 中子结构嵌入的公式转移到林地范畴 $\mathcal{C}$中。最后，我们在第 §10 节讨论分解性质。

2. Preliminaries

我们假定读者熟悉范畴论的基本概念；标准参考文献包括 [44, 10]。在全文中，**Set** 表示由（小）集合及函数构成的范畴。如果 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$ 是范畴，那么 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ 就是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的函子范畴，其态射为

$\widehat{}$自然变换。函子范畴 $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]$ 记作 $\mathcal{C}$，称为在 $\mathcal{C}$上的预层范畴。有限极限保持态射是有限完备范畴之间保持有限极限的函子。如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是有限完备的，那么 $\mathbf{lex}\ [\mathcal{C},\mathcal{D}]$ 就是由 $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ 中的有限极限保持态射构成的全子范畴。若函子保持滤过余极限，则称其具有有限性。

2.1. 结构与无穷一阶逻辑。 我们考虑多排序的、可能是无限的一阶签名。这样的签名 Σ 由一个类型的集合 Sort(Σ)，以及分别由函数 符号和关系符号组成的集合族 Fun(Σ) 和 Rel(Σ) 构成。我们用符号 $\boldsymbol{\sigma}$ 专指单类纯关系签名。

一个 Σ-结构 M是一个集合族 $(M(\tau)\ |\ \tau \in \mathbf{Sort}(\Sigma))$，并且对每个函数符号 $f \in \mathbf{Fun}(\Sigma)$，都有一个解释 f^M的函数；对每个关系符号$R \in \mathbf{Rel}(\Sigma)$，都有一个解释 R^M 的关系。 Σ-结构之间的同态 $h\colon\ M \to N$是一个函数族 $(h^\tau\colon\ M(\tau) \to N(\tau)\ |\ \tau \in \mathbf{Sort}(\Sigma))$，保持函数符号和关系符号的解释。我们将 Σ-结构及其同态所成的范畴记为$\mathbf{Str}(\Sigma)$。

{style id='1'>原子公式在 Σ 中是（分类型的）等式（$t \doteq_\tau u$）以及形如 $R(t_1, \ldots\ldots, t_n)$ 的公式，其中 $R \in \mathbf{Rel}(\Sigma)$，而 $t,\ u,\ t_1, \ldots\ldots,\ t_n$ 是 Σ 中的项。我们记作 $\mathcal{L}_\infty(\Sigma)$，或者在签名的语境明确时简记为 $\mathcal{L}_\infty$，表示由 Σ 中的原子公式通过任意（以集合为指标的）合取和析取，以及 $\neg,\ \exists,\ \forall$ 构成的（大）公式集。对于基数 κ，我们用 $\mathcal{L}_\kappa$ 表示其合取和析取的基数为 $< \kappa$ 的公式集。因此，$\mathcal{L}_\omega$ 由普通有限一阶公式组成。无论如何，我们只考虑其子公式具有有限多个自由变量的公式（因此，按照 [31, 23] 的记号，$\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_{\infty,\omega}$）。关于 $\mathcal{L}_\infty$ 的（非平凡）表达能力，已有丰富的文献。参见例如 [31]。

上下文中的一个公式 是一个二元组（$\varphi,\ \Gamma$），总记作 $\Gamma ::= \varphi$，由一个公式 φ 和一个上下文组成

$$\Gamma = x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n,$$

其中 x_i彼此互异。我们要求 Γ 声明 φ的所有自由变量及其适当的类型。给定一个结构 $M \in \mathbf{Str}(\Sigma)$，上下文中的公式 $\Gamma ::= \varphi$诱导出一个集合

$$[\![\Gamma \mid \varphi]\!]_M \ :=\ \{(a_1, \ldots, a_n) \in M(\tau_1) \times \cdots \times M(\tau_n) \mid M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

如果 $\Gamma ::= \varphi$ 在 M 中有效，则称其为

$$[\![\Gamma \mid \varphi]\!]_M \ =\ M(\tau_1) \times \cdots \times M(\tau_n).$$

当类型在记号上无关紧要时，我们简单地将 $\Gamma = x_1$ 记作 $\vec{x}\colon\ \tau_1$、……、$x_n\colon\ \tau_n$；对于同态和结构的载体集，也作类似记号。

我们用 $\emptyset$ 表示空上下文。注意，如果 φ 是一个句子，那么 $[\![\emptyset \mid \varphi]\!]_M$ 是单元素集**1**的子集。在这种情况下，当且仅当 $[\![\emptyset \mid \varphi]\!]_M = \mathbf{1}$时，我们有 $M \models \varphi$。

2.2. 笛卡尔理论。 笛卡尔理论由 $\wedge\exists$-公式之间的蕴含构成，其中只允许可证明唯一的存在量化。Coste [20] 将它们引入，作为局部有限表示范畴的一种纯逻辑刻画。我们将在 §2.3 中简要回顾后者；更多说明和细节见 §§5–6。我们主要遵循 [36, §D1] 中的表示。

设 Σ 为一个签名。Σ 中的序列式 是如下形式的三元组：

$$\psi \ \vdash_\Gamma \ \varphi$$

其中 $\Gamma ::= \psi$ 和 $\Gamma ::= \varphi$ 是 Σ 中的公式。A理论 $\mathbf{T}$ 在 Σ 中是由 Σ 中的序列式构成的集合。

定义 2.1（笛卡尔理论）。 设 $\mathbf{T}$ 是签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个理论。

(1) 上下文中的公式集 在 $\mathbf{T}$ 上是笛卡尔的，其归纳定义如下：

- 上下文中的原子公式在 $\mathbf{T}$ 上是笛卡尔的；
- 笛卡尔公式在有限合取下封闭；
- 给定一个上下文中的笛卡尔公式 $\Gamma,\ x\colon \tau ::= \varphi$，公式 $\Gamma ::= (\exists x\colon \tau)\varphi$ 在 $\mathbf{T}$ 上是笛卡尔的，当且仅当 $\mathbf{T}$ 证明序列式 $\varphi \wedge \varphi[y/x] \vdash_{\Gamma,\ x:\tau,\ y:\tau} x \doteq_\tau y$。

(2) 序列式 $\psi \vdash_\Gamma \varphi$ 在 $\mathbf{T}$ 上是笛卡尔的，当且仅当 $\psi,\ \varphi$ 二者都是笛卡尔的。**(3)** 如果 $\mathbf{T}$ 的公理可以进行良序化，使得每条公理都在其前驱集合上是笛卡尔的，则称 T 是一个笛卡尔理论。

令 $M \in \mathbf{Str(\Sigma)}$。如果序列式 $\psi \vdash_\Gamma \varphi$ 在 M 中有效，则称 $[\![\Gamma \mid \psi]\!]_M \subseteq [\![\Gamma \mid \varphi]\!]_M$，而如果理论 $\mathbf{T}$ 中的所有序列式在 M 中都有效，则称 M 是该理论的模型。我们记作

$$\mathbf{Mod(T)}$$

由 $\mathbf{T}$ 的模型所定义的 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 的全子范畴。

注记 2.2。 笛卡尔理论由（序列式） $\wedge\exists$-公式组成，因此它们是 正则 理论的特殊情形。此外，它们满足完备性定理，即任意笛卡尔理论在 $\mathbf{Set}$中都有足够多的模型，可以用来确定直觉主义可证性（例如参见 [36, 命题 D1.5。1]）。特别地，对于笛卡尔理论，经典可证性与直觉主义可证性一致。[2]

例 2.3（函子的笛卡尔理论）。 给定一个小范畴 $\mathcal{C}$，考虑签名 $\mathbf{\Sigma(\mathcal{C})}$：其类型为 $\mathcal{C}$ 的对象，函数符号为 $\mathcal{C}$ 的态射，且不含谓词符号。令 $\mathbf{T(\mathcal{C})}$ 为具有以下公理的方程理论

$$\top \vdash_{x:a} \mathrm{id}_a(x) \doteq_a x \qquad \top \vdash_{x:a} (g \circ f)(x) \doteq_c g(f(x))$$

其中 $f \in \mathcal{C}[a,b]$ 且 $g \in \mathcal{C}[b,c]$。那么，$\mathbf{Mod(T(\mathcal{C}))}$ 等价于函子范畴[$\mathcal{C}$,$\mathbf{Set}$]。此外，如果 $\mathcal{C}$ 具有有限极限，则 $\mathbf{T(\mathcal{C})}$ 可以扩展为一个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，使得 $\mathbf{Mod(T)} \cong$ 有限极限保持 [$\mathcal{C}$,$\mathbf{Set}$]。例如参见 [36, 例 D1.4。8]

例 2.4. *Horn* 理论 构成了一类重要的笛卡尔理论。例如，偏序集及单调映射构成的范畴 $\mathbf{Pos}$ 是以下 $\boldsymbol{\sigma} = \{\dot{\leq}\}$ 中 Horn 理论的模型范畴：

$$\top \vdash_x x \dot{\leq} x \qquad x \dot{\leq} y \ \wedge\ y \dot{\leq} z \ \vdash_{x,y,z}\ x \dot{\leq} z \qquad x \dot{\leq} y \ \wedge\ y \dot{\leq} x \ \vdash_{x,y}\ x \doteq y$$

注记 2.5. 笛卡尔理论严格扩展了 Horn 理论的范围。例如，小范畴构成的范畴 $\mathbf{Cat}$ 是某个笛卡尔理论的模型范畴，参见 [36, 例 D1.1.7(e)], ；但是，不存在签名 $\mathbf{\Sigma}$ 使得 $\mathbf{Cat}$ 成为 $\mathbf{\Sigma}$ 中某个 Horn 理论的模型范畴，参见 [36,例 D2.4.7]。

2.3. **局部有限可呈范畴**。 我们简要讨论局部有限可呈（lfp）范畴的一些方面，这些内容是介绍主要示例和结果所必需的。

回忆一下，局部小范畴 $\mathcal{E}$ 的对象 X 若函子$\mathcal{E}[X,-]\colon\ \mathcal{E} \to \mathbf{Set}$ 保留 $\mathcal{E}$ 中存在的所有滤过余极限，则称其为有限可呈 对象。

定义 2.6。 一个局部小范畴 $\mathcal{E}$ 称为局部有限可呈 （*lfp*），如果它满足以下条件：

（i） $\mathcal{E}$ 具有一个由有限可呈对象组成的（小）集合 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{E}$中的每个对象都是来自 $\mathcal{C}$中对象的滤余极限；（ii） $\mathcal{E}$ 是余完备的（因而也是完备的，参见 [13, 注记 1.56]）。

[2]这是 *Barr* 定理 的一个特例。另见例如 [49, §5]（另请参见 [45, §X]）。

A 态射 局部有限可呈范畴之间的函子 是局部有限可呈范畴之间保持极限的有限性函子 s.

例 2.7. 每个范畴 **Str(Σ)** 都是局部有限可呈现的。**Str(Σ)** 的有限可呈对象（记为 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$）由有限多个生成元 $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ 及条件 $\varphi = \varphi(\vec{x})$ 给出；该条件由来自 $\mathbf{\Sigma}$ 的原子公式的有限合取表示（因此，$\vec{x}.\varphi$ 是上下文中的公式）。

事实 2.8. 考虑 $M \in \mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})$ 以及例 *2.7* 中的 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$。给定 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$，存在唯一的同态 $h\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$，它将每个生成元 x_i 映到 a_i。由此得到一个双射

$$\mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})\,[\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle, M] \;\cong\; [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M .$$

关于例 2.7 和事实 2.8 的参考文献包括 [13, 注记 5.1 和 5.5]，以及 [36,引理 D2.4.1 和引理 D1.4.4(ii)]。我们将在下文 §6 中给出一些细节。

注 2.9。推广例 2.7，若 **T** 是 **Σ**中的笛卡尔理论，则**Mod(T)** 是局部有限可呈现的，而且它是反射的，并且在**Str(Σ)**中对滤过余极限封闭。事实上，范畴 $\mathcal{E}$ 是局部有限可呈现的，当且仅当存在一个定义在（可能是无限的、多排序的）签名 $\mathbf{\Sigma}$ 上的笛卡尔理论**T**，使得 $\mathcal{E}$ 等价于**Mod(T)**。见下文推论 6.5和引理 6.6，以及 [13, 定理 5.9]。

最后，我们给出一个众所周知的充分判据，用以证明一个范畴是局部有限可呈现的（参见例如 [13, 定理 1.11 和注记 1.23]）。为此，回顾一下，子范畴$I\colon \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{E}$ 是稠密 的，当且仅当每个 $X \in \mathcal{E}$ 都是图表（I/X）$\to \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{E}$的典范余极限；也就是说，余锥 γ 满足 $\gamma_{(k,g\colon Ik \to X)} := g$ 是余极限。

引理 2.10. 设 $\mathcal{E}$ 是一个余完备局部小范畴。如果 $\mathcal{E}$ 有一个由有限可呈对象组成的（本质上）小的满稠密子范畴 $\mathcal{K}$，那么 $\mathcal{E}$ 是局部有限可呈现的。

例 2.11. 对于任意小范畴 $\mathcal{C}$，预层范畴 $\mathcal{C}\widehat{\ }$ 是局部有限可呈现的。根据引理 2.10 可得此结论，因为可表函子构成了 $\mathcal{C}$的一个满稠密子范畴，且其中的对象都是有限可呈的。

例 2.12. 回忆一下，偏序集 $(\mathbf{F}, \trianglelefteq)$ 是一个森林，如果对于所有 $x \in \mathbf{F}$，集合

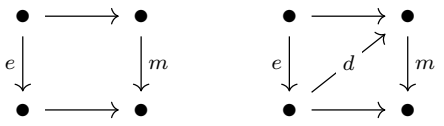
$$\downarrow x \;:=\; \{y \in \mathcal{F} \mid y \trianglelefteq x\}$$

是一个有限链。森林 $(\mathbf{F}, \trianglelefteq)$ 的根是极小元素。与偏序 $\trianglelefteq$ 相关的覆盖关系 $\prec$ 定义为：$x \prec y$ 当且仅当 $x < y$，且不存在满足 $x < z < y$的 z。树是至多有一个根的森林。

一个森林态射是森林之间保持根和覆盖关系的函数。森林及森林态射构成的范畴记为**Forest**，而非空树构成的全子范畴记为**Tree**。

范畴**Forest** 和**Tree** 是等价的（通过函子**Forest** $\to$**Tree** 实现，该函子添加一个最小元素；其拟逆**Tree** $\to$ **Forest** 则移除根），并且它们$\widehat{\ }$与预层范畴 $\mathbb{N}$等价。特别地，**Forest** 和**Tree** 都是局部有限可呈范畴。

2.4. 分解系统。给定范畴 $\mathcal{C}$中的箭头 e 和 m，如果 e 相对于 m具有左提升性质，或者说 m 相对于 e具有右提升性质，则记作 $e \pitchfork m$；当下方左侧所示的每个交换方形



a有一个对角填充，即一个箭头 d 使最右侧的图表可交换 e.

定义 2.13. 范畴 $\mathcal{C}$ 中的一对态射类 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是一个**弱分解系统**，如果它满足以下条件：

(i) 每个 f 中的态射都可以分解为 $f = m \circ e$，其中 $e \in \mathcal{Q}$ 且 $m \in \mathcal{M}$。(ii) $\mathcal{Q} = \{e \mid \forall m \in \mathcal{M}, e \pitchfork m\}$ 且 $\mathcal{M} = \{m \mid \forall e \in \mathcal{Q}, e \pitchfork m\}$。

此外，若 $\mathcal{Q}$ 中的所有箭头都是满态射，且 $\mathcal{M}$ 中的所有箭头都是单态射，则 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是一个**适当分解系统**。

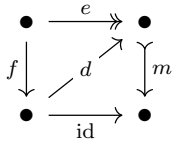
注记 2.14. 注意，弱分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 完全由两个类 $\mathcal{Q}$ 或 $\mathcal{M}$中的任意一个决定。

回顾一下，若单态射相对于所有满态射都具有右提升性质，则称其为强；强满态射则对偶地定义。若 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是一个适当分解系统，则立即可知，每个强单态射都属于 $\mathcal{M}$，每个强满态射都属于 $\mathcal{Q}$。

注记 2.15。 在任意范畴中，满态射与强单态射构成适当分解系统的充要条件是：每个态射都可以分解为一个满态射后接一个强单态射。对偶地，强满态射与单态射构成分解系统时也同样如此。

证明。 令 $\mathcal{Q}$ 由满态射组成，并令 $\mathcal{M}$ 由 $\mathcal{C}$ 中的强单态射组成。显然， $\mathcal{M} = \{m \mid \forall e \in \mathcal{Q}, e \pitchfork m\}$。我们证明 $\mathcal{Q} = \{e \mid \forall m \in \mathcal{M}, e \pitchfork m\}$。当然有 $\mathcal{Q} \subseteq \{e \mid \forall m \in \mathcal{M}, e \pitchfork m\}$。

令 f 使得对于每个强单态射 m 都有 $f \pitchfork m$。将 f 分解为 $f = m \circ e$，其中 $e \in \mathcal{Q}$ 且 $m \in \mathcal{M}$。因此，我们得到一个如图所示的对角填充 d



但由于 m 既是单态射又是分裂满态射，所以它是同构。因此 d 是同构，而 f是满态射。□

例 2.16。 每个局部有限呈现范畴都有两个适当分解系统：其中一个取 $\mathcal{M}$ 强单态射类作为，另一个取 $\mathcal{Q}$ 强满态射类作为（结合 [13, 命题 1.61、第 §1D] 节与注记 2.15）。

例 2.17。 对于预层范畴，例 2.16 中的两个分解系统与（满态射，单态射）分解系统一致；参见例如 [16, 4.3.10.g]。[3] 特别地，在本文余下部分中，我们考虑带有（满态射，单态射）分解系统的 **Tree** 和 **Forest** 范畴。

例 2.18。 在 **Str(Σ)** 中，例 2.16 中的适当分解系统可以具体描述如下。单态射（分别地，满态射）是按类单射（分别地，满射）的态射。强单态射是结构的嵌入，即能够反映（同时保持）关系符号的解释的单态射。只需回顾一下，在 **Str(Σ)** 中，嵌入与正则单态射一致，而在存在（满态射，正则单态射）分解的情况下，正则单态射与强单态射一致；参见例如 [13, 0.5 以及注记 5.1]

一般而言，**Str(Σ)** 上的（强满态射，单态射）分解系统和（满态射，强单态射）分解系统是不同的。例如，若 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个单排序纯关系签名，且

[3]事实上，任意初等托普斯恰好具有一个适当分解系统，即（满态射，单态射）分解系统。

$h\colon\ M \to N$ 是 **Str(σ)** 中的一个态射，考虑通过其集合论像 $h[M]$ 对 h 进行的通常分解：

$$M \to h[M] \to N.$$

于是，通过将任意关系符号 $R \in$ **Rel(σ)** 在 $h[M]$ 中的解释定义为 $R^{h[M]} := h[R^M]$，即可得到 h 的（强满态射，单态射）分解；而要得到 h 的（满态射，强单态射）分解，我们令 $R^{h[M]}$ 为 R^N 在（适当幂次的）$h[M]$ 上的限制。

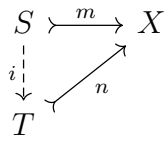
下　　列出的是弱分解系统的众所周知的性质，参见 [26] 或 [54　　].

引理 2.19。设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的弱分解系统。

（*1*）$\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{M}$ 在复合下封闭。（*2*）$\mathcal{Q} \cap \mathcal{M} = \{$同构$\}$。（*3*）任意态射沿一个 $\mathcal{M}$-态射的拉回（如果存在）仍属于 $\mathcal{M}$。此外，如果 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是真分解系统，则对于 $\mathcal{C}$ 的所有可复合态射 f、g，以下性质成立。（*4*）$g \circ f \in \mathcal{Q}$ 蕴含 $g \in \mathcal{Q}$。（*5*）$g \circ f \in \mathcal{M}$ 蕴含 $f \in \mathcal{M}$。

设 $\mathcal{C}$ 是一个配备了适当分解系统 $(\mathcal{Q},\ \mathcal{M})$ 的范畴。我们将 $\mathcal{M}$-态射称为嵌入，并用 $\rightarrowtail$ 表示。$\mathcal{Q}$-态射将称为商，并用 $\twoheadrightarrow$ 表示。

与通常定义给定对象 $X \in \mathcal{C}$ 的子对象偏序集的方式相同，我们可以定义 X 的 $\mathcal{M}$-子对象的偏序集 $\mathbb{S}X$。给定嵌入 $m\colon\ S \rightarrowtail X$ 和 $n\colon\ T \rightarrowtail X$，若存在一个态射 $i\colon\ S \to T$ 使得 $m = n \circ i$，如下面所示，我们就称 $m \trianglelefteq n$。



（注意，若 i 存在，则根据引理 2.19.(5)，它必然是一个嵌入。）这在所有以 X 为陪域的嵌入类上诱导出一个预序。$\trianglelefteq$ 的对称化 $\sim$ 可如下刻画：当且仅当存在一个同构 $i\colon\ S \to T$ 使得 $m = n \circ i$ 时，$m \sim n$。令 $\mathbb{S}X$ 为以 X 为陪域的嵌入的 $\sim$-等价类所成的类，并赋予由 $\trianglelefteq$ 诱导的自然偏序 $\leq$。注意，当 $\mathcal{C}$ 是良幂的时，偏序集 $\mathbb{S}X$ 是小的。我们系统地用任意一个代表元表示一个 $\sim$- 等价类的嵌入。

例 2.20。考虑**Str(Σ)**及其（满态射，强单态射）分解系统。对于所有 $M \in$ **Str(Σ)**，$\mathbb{S}M$ 同构于 M 的子结构的偏序集（即，赋予 M 所诱导的关系的 M 的子集），其中序由集合包含给出。

对于任意态射 $f\colon\ X \to Y$ 属于 $\mathcal{C}$ 以及嵌入 $m\colon\ S \rightarrowtail X$，我们可以考虑 $f \circ m$ 的（$\mathcal{Q}$，$\mathcal{M}$）分解 $S \twoheadrightarrow \exists_f S \rightarrowtail Y$。这给出了一个单调映射 $\exists_f\colon\ \mathbb{S}X \to \mathbb{S}Y$，将 m 映射到嵌入 $\exists_f S \rightarrowtail Y$。（注意，该映射 $\exists_f$ 定义良好，因为分解在同构意义下唯一。）特别地，如果 f 是一个嵌入，则对于所有 $m \in \mathbb{S}X$，有 $\exists_f(m) = f \circ m$。

关于下面的观察，可参见例如 [6,引理 2.7(a)]。

引理 2.21。设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个适当分解系统。给定 $\mathcal{C}$ 中的一个嵌入 $f\colon\ X \rightarrowtail Y$，函数 $\exists_f\colon\ \mathbb{S}X \to \mathbb{S}Y$ 是一个序嵌入。

在本文中，我们主要讨论满足以下附加稳定性条件的分解系统：

定义 2.22（稳定分解系统）。若适当分解系统（$\mathcal{Q}$，$\mathcal{M}$）满足：对于任意具有公共余域的 $e \in \mathcal{Q}$ 和 $m \in \mathcal{M}$，e 沿 m 的拉回存在且为商，则称其为**稳定的**。[4]

例 2.23。在预层范畴中，（满态射，单态射）构成一个稳定分解系统。只需注意，相应的性质在 **Set** 中成立，而预层范畴中的极限和余极限都是逐点计算的。特别地，**Tree** 和 **Forest** 上的（满态射，单态射）分解系统是稳定的。

例 2.24。在**Str(Σ)**上，（满态射，强单态射）分解系统是稳定的。与例 2.23 类似，这源于**Str(Σ)**中的极限和满态射是在**Set**中计算的，参见例如 [13,注记 5.1]。

如果 $(\mathcal{Q},\ \mathcal{M})$ 是一个稳定分解系统，那么每个商 $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ 都诱导出一个单调函数 $f^*\colon \mathbb{S}Y \to \mathbb{S}X$，该函数将 $n\colon S \rightarrowtail Y$ 映射为沿 f 的拉回。映射 f^* 是 $\exists_f\colon \mathbb{S}X \to \mathbb{S}Y$ 的右伴随（证明参见例如 $[6,$引理 2.6$]$）。此外，我们有如下观察（参见例如 $[6,$引理 2.7(b)$]$）：

引理 2.25。令$(\mathcal{Q},\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{C}$上的稳定分解系统。对于 $\mathcal{C}$中的任意商$f\colon$ ，映射 $f^*\colon\ \mathbb{S}Y \to \mathbb{S}X$ 是序嵌入。

顺便指出，引理 2.25 依赖于分解系统的两个类（$\mathcal{Q},\mathcal{M}$），而引理 2.21 只要求一类单态射 $\mathcal{M}$，该类在复合下封闭，并满足引理 2.19.(5) 中的条件。

3. Back-and-forth equivalence

在本节中，我们从 $[5, 6]$ 回顾往返游戏的一般概念，这是本文的主要主题。这些博弈抽象了模型比较博弈的通常概念，例如经典的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈。它们的定义适用于所有配备稳定分解系统并满足一些温和附加假设的范畴，这些假设体现在树状范畴这一概念中。

我们在 §3.1 中从一种非常适合我们公理化范畴处理的方法出发，重新审视经典的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈。

然后，在 §3.2 中，我们引入林地范畴，并讨论林地范畴 $\mathcal{C}$ 中的往返等价概念。在许多值得关注的情形下，各种逻辑片段中的结构等价，可以通过右伴随函子 $R\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$（例如参见 $[2, 9]$）将 $\mathcal{C}$ 上的这一等价关系传递到另一个范畴 $\mathcal{E}$（通常形如**Str(σ)**) 来刻画。由此在 $\mathcal{E}$ 上得到的关系称为 R（-往返）等价，我们将在 §3.3 中介绍这一关系，并且它将在全文中发挥核心作用。

最后，在§3.4 中，我们陈述主要结果（定理 3.29），该结果确定了在有限可达林地伴随情形下 R-等价的表达能力。

3.1. 从具体到抽象的模型比较博弈。设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为一个（单类型的）纯关系签名。我们回顾在 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M和 N [24]上进行的经典 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈 $\mathrm{EF}_\omega(M,\ N)$。博弈由两名玩家进行：$\vec{}Spoiler$和复制者。博弈中的位置形如（$\vec{a}$；$b$），其中 $\vec{a} = a_1, \ldots\ldots, a_n\vec{}$和 $b = b_1, \ldots\ldots, b_n$分别是来自 M和 N的元素有限序列。若赋值

$$a_i \mapsto b_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

[4]我们的术语遵循 [6], ，但不同于通常的术语；后者要求沿着任意态射的 $e \in \mathcal{Q}$拉回存在，并且属于 $\mathcal{Q}$。

是一个部分同构，则该位置（对复制者而言）是获胜的；也就是说，当该赋值是 M和 N的诱导子结构之间的同构，且这两个诱导子结构的宇宙分别为 $\{a_1,\dots,a_n\}$和 $\{b_1,\dots,b_n\}$时，位置是获胜的。注意，对于 $\boldsymbol{\sigma}$中的每个原子公式x_1，……，$x_n ::= \alpha$，(1) 恰好在以下条件成立时定义了一个部分同构：

$$\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \alpha]\!]_M \iff \vec{b} \in [\![\vec{x} \mid \alpha]\!]_N.$$

从一个获胜位置（$\vec{a};\vec{b}$）开始，博弈的一回合进行如下：

- Spoiler 从两个结构中的一个（设为 $a' \in M$）中选择一个元素；
- 复制者从另一个结构（设为 $b' \in N$）中选择一个元素作为回应。

如果新位置（$\vec{a},a';\vec{b},b'$）不是获胜位置，则博弈结束，由 Spoiler 获胜。否则，该回合由复制者获胜，博弈从新位置（$\vec{a},a';\vec{b},b'$）继续。如果对于所有整数 $t \geq 0$，复制者从（$\vec{a};b$）开始都具有一种在 t 回合后获胜的策略，则复制者以初始位置（$\vec{a};\vec{b}$）赢得博弈 EF_ω（M,N）。

对于任意整数 $k \geq 0$，k-回合 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈 EF_k（M,N）是 EF_ω（M,N）在长度为 $\leq k$ 的对局上的限制。[5]

例 3.1。假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 仅由二元关系 $\lessdot$ 构成。设 $M = (M,\ <_M)$ 和 $N = (N,\ <_N)$ 是没有端点的稠密线性序（例如 $(\mathbb{Q},\ <)$ 和 $(\mathbb{R},\ <)$）。那么，对于 $\mathrm{EF}_\omega(M,\ N)$ 中的任意获胜位置 $(\vec{a};\vec{b})$，复制者都可以应对 Spoiler 的走法，使新位置 $(\vec{a},\ a';\vec{b},\ b')$ 再次成为获胜位置。因此，复制者以空序列给出的初始位置赢得博弈 $\mathrm{EF}_\omega(M,\ N)$（例如参见 [55, §14.2]）。

我们的公理化范畴论方法建立在关于来回等价的以下两个观察之上。首先，只要 $\boldsymbol{\sigma}$ 是有限的，部分同构就可以看作一对嵌入，其公共定义域是一个有限可呈的 $\boldsymbol{\sigma}$-结构。[2] 提出的、并在 [8, 9], 中阐述的另一个洞见是，博弈中的对局集合本身构成 $\boldsymbol{\sigma}$-结构。现在我们详细阐述这两个思想。

3.1.1. 将位置视为嵌入对。 假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是有限的，并令 $\vec{x} ::= \varphi$ 为原子公式的（有限）合取。根据事实 2.8，元组 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$ 与同态一一对应

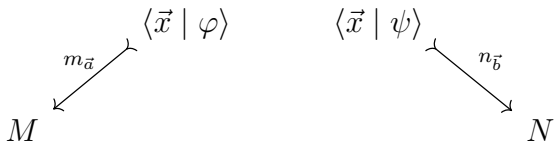
$$h_{\vec{a}} \ :\ \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \longrightarrow M$$

此外，当且仅当 $\vec{x} ::= \varphi$ 是满足 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \alpha]\!]_M$ 的所有原子公式 $\vec{x} ::= \alpha$ 的合取时，$h_{\vec{a}}$ 才是 $\boldsymbol{\sigma}$-结构的嵌入。因此，由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 是有限的，元组 $\vec{a} \in M$ 与子结构 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \in \mathbb{S}\, M$ 一一对应（即嵌入 m：$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \rightarrowtail M$ 的同构类，见 §2.4），其中 φ 遍历原子公式的（有限）合取。

注 3.2。当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为无限时，给定 $\vec{a} \in M$，可能不存在有限的 φ 嵌入 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \rightarrowtail M$，将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{a}$。例如，假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 对每个正整数 i 都包含一个一元关系符号 R_i，并令 M 为任意一个 $\boldsymbol{\sigma}$ 结构，其中包含一个元素 a，使得对所有 i 都有 $a \in R_i^M$。那么不存在将 x 映射到 a 的嵌入 $\langle x \mid \varphi \rangle \rightarrowtail M$，因为这样的 φ 只能涵盖 a 所满足的有限多个关系。

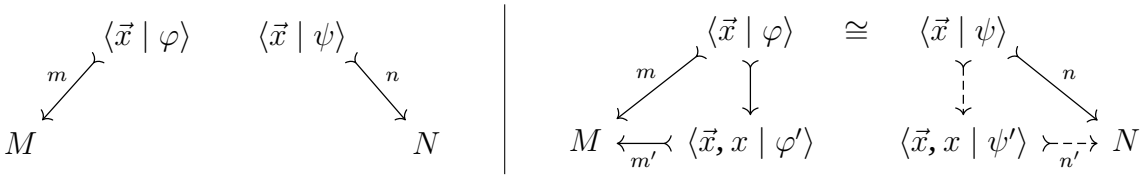
[5] 描述 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈（中的获胜策略）的另一种等价方式，是借助部分同构的来回系统；例如参见 [25], [23,§2.3] 或 [31, 第 98–99] 页。

我们将博弈 $\mathrm{EF}_\omega(M,\ N)$ 中的位置 $(\vec{a},\ \vec{b})$ 表示为相应的嵌入对 $(m_{\vec{a}},\ n_{\vec{b}})$，如下所示。



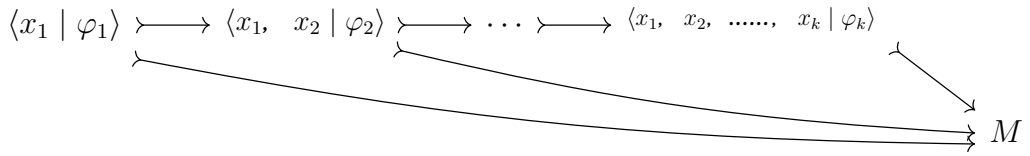
注意，当且仅当嵌入 $m_{\vec{a}}$ 和 $n_{\vec{a}}$ 的定义域作为 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 中的对象同构时，$(\vec{a},\vec{b})$ 才是获胜位置。

由此可将博弈 $\mathrm{EF}_\omega(M,N)$ 重新表述为：位置是嵌入对 (m,n)，如下图左侧所示。



当 $\mathrm{dom}(m)\ \cong\ \mathrm{dom}(n)$ 时，这样的位置 (m,n) 是获胜位置。如果 (m,n) 不是获胜位置，那么博弈就会停止，由 Spoiler 获胜。否则，Spoiler 可以选择某个m'：$\langle\vec{x},x'\mid\varphi'\rangle\rightarrowtail M$，使得 m 可经由它分解；Duplicator 则选择某个n'：$\langle\vec{x},x'\mid\psi'\rangle\rightarrowtail N$，使得 n 可经由它分解（见上方右侧图表）；也可以反过来，由另一方先选择。随后，博弈从新位置 (m',n') 继续。

3.1.2. 将对局视为结构。现在考虑博弈 $\mathrm{EF}_\omega(M,\ N)$ 中一场有限对局的第一投影，记为



非空有限序列集合 M^+ 可以视为一个 M -结构（更多细节请参见例 3.19），并赋予自然的森林序，即前缀序。上方第一行中的嵌入序列可以识别为 M^+ 的一个子结构，其底层集合由有限序列 x_1、x_1x_2、.....、$x_1x_2\cdots x_k$ 在 M 中的像组成；该子结构在 M^+ 的森林序中形成一条路径，即一个线性序。

将博弈中的对局集合视为 $\boldsymbol{\sigma}$-结构，这一思想源自 [2], ，是一个关键洞见；它通过 [8, 9], 引出了 [5, 6]的树状框架。树状范畴基于公理化的路径概念，对来回博弈进行了描述；这一概念抽象了有限 $\boldsymbol{\sigma}$-结构按线性排列的思想。正如我们将在 §3.2.1 中回顾的那样，路径可以定义在任何配备适当分解系统的（良幂）范畴中。

在继续之前，我们先指出，树状的路径概念能够刻画对局比 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈更复杂或受更多限制的博弈，例如卵石博弈和模态双模拟博弈。[6] 更多示例请见 [7] 。

3.2. 树状范畴与来回等价。

[6]实际上，上面对 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´é 博弈的重新表述掩盖了相等方面的一些细微问题，这些问题将在下面的例 3.19 中讨论。

3.2.1. 路径与树状范畴。 我们固定一个任意的良幂范畴 $\mathcal{C}$，它配备了一个适当分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$。

定义 3.3（路径和路径嵌入）。 对象 P of $\mathcal{C}$ 若 $\mathbb{S}P$ 是有限链，则称其为一条路径 。路径将记作 P, Q 及其变体。

$\mathcal{C}$ 中的路径嵌入 是一个嵌入 $P \rightarrowtail X$，其定义域是一条路径。我们记 $\mathbb{P}X$为由路径嵌入组成的 $\mathbb{S}X$ 的子偏序集。

例 3.4。 范畴 **Tree** 中的路径是（非空）有限链。因此，对于每个 $X \in \mathbf{Tree}$，偏序集 $\mathbb{P}X$ 是一个与 X同构的树。

将例 3.4 一般化，下面的引理表明， $\mathbb{P}X$ 总是一个森林；事实上，在附加一些温和的假设下，它还是一棵非空的树。

引理 3.5 （[6, 引理 3.5and 3.12]）。 对于 $\mathcal{C}$的所有对象 X和路径 P，以下陈述成立。

（*1*）如果 $f\colon\ X \rightarrowtail P$ 是一个嵌入，则 X 是一条路径。（*2*） $\mathbb{P}X$ 是一个森林。

假设 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是稳定的。

(3) 如果 $f\colon\ P \twoheadrightarrow X$ 是一个商，则 X 是一条路径。

进一步假设 $\mathcal{C}$ 具有一个始对象 $\mathbf{0}$。

(4) $\mathbf{0}$是一条路径。*(5)* $\mathbb{P}X$ 是一棵非空 *Tree*，其根 $\mathbf{0}_X \rightarrowtail X$ 通过对唯一态射 $\mathbf{0} \to X$取 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$分解 $\mathbf{0} \twoheadrightarrow \mathbf{0}_X \rightarrowtail X$ 得到。

注记 3.6。 引理 3.5 的第 (1) 和 (3) 项分别直接由引理 2.21 和引理 2.25 得出。第 (2)、(4) 和 (5) 项是 [6, 引理 3.12] 的内容。

注意，如果分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 不稳定，那么偏序集 $\mathbb{P}X$ 仍然是一棵 Tree，但可能为空。

受引理 3.5 的启发，我们现在将引入 wooded 范畴的概念，它弱化了 [5, 6] 中树状范畴的概念。

定义 3.7. 配备分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 的范畴 $\mathcal{C}$，若满足以下条件，则称为 林地范畴：

(i) $\mathcal{C}$ 是局部小且良好幂范的。(ii) $\mathcal{C}$ 有一个始对象 $\mathbf{0}$。

(iii) 分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 是稳定的（因而是适当的）。

下面的引理可由对 [6, 命题 3.13] 的直接改编，并结合 [6, 引理 3.15(c)]，得出；后者的证明无需修改即可适用（事实上，并不要求适当分解系统稳定）。

引理 3.8. 以下陈述在任意林地范畴 $\mathcal{C}$ 中成立：

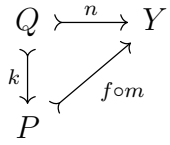
(1) 对于 $\mathcal{C}$ 中任意两条路径 P、Q，至多存在一个嵌入 $P \rightarrowtail Q$。*(2)* 由路径及其间的嵌入构成的 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_p$ 等价于一个小森林。

证明。 我们断言，对于任意逐路径嵌入 $f\colon\ X \to Y$ in $\mathcal{C}$，映射

$$\mathbb{P}f\colon\ \mathbb{P}X \to \mathbb{P}Y,\quad [m] \mapsto [f \circ m]$$

是一个森林态射。由于 $\mathbb{P}f$ 是单调的，只需证明它保持元素的高度。换言之，这等价于说明，对于任意路径嵌入$m\colon\ P \rightarrowtail X$，诱导映射 $\mathbb{P}f\colon \downarrow m \to \downarrow \mathbb{P}f(m)$ 是一个双射。

我们首先证明满射性，即 $\downarrow \mathbb{P}\, f(m) \subseteq \mathbb{P}\, f(\downarrow m)$。如果 $n\colon Q \rightarrowtail Y$是一个路径嵌入，且 $n \leq \mathbb{P}\, f(m) = f \circ m$于 $\mathbb{P}Y$中，则存在一个嵌入 $k\colon Q \rightarrowtail P$，使得下图交换：



于是 $m \circ k\colon\ Q \rightarrowtail X$是一个低于 m的路径嵌入，位于 $\mathbb{P}X$中，并且 $\mathbb{P}\, f(m \circ k) = n$.

对于单射性，设 $m_1\colon\ P_1 \rightarrowtail X$ 和 $m_2\colon\ P_2 \rightarrowtail X$ 是 $\downarrow m$ 中的路径嵌入。由于 P 是一条路径， m_1 和 m_2 在 $\mathbb{P}\, X$ 的序中是可比较的。不妨设 $m_1 \leq m_2$，即存在一个嵌入 $k\colon\ P_1 \rightarrowtail P_2$，使得 $m_1 = m_2 \circ k$。如果 $\mathbb{P}\, f(m_1) = \mathbb{P}\, f(m_2)$，则存在一个同构 $k'\colon\ P_1 \to P_2$，使得 $f \circ m_1 = f \circ m_2 \circ k'$。于是得到

$$f \circ m_2 \circ k = f \circ m_1 = f \circ m_2 \circ k'$$

因此，由于 $f \circ m_2$ 是一个嵌入（因而是一个单态射）， $k = k'$。这表明 k 是一个同构，从而 $m_1 = m_2 \circ k$ 意味着 $m_1 = m_2$ 作为 $\mathbb{P}\, X$ 的元素相等。

这给出了一个函子 $\mathbb{P}\colon\ \mathcal{C}_{\mathrm{p}} \to \mathbf{Tree}$。现在，设 $m,\ n\colon\ P \rightarrowtail Q$ 是路径之间的嵌入。由于任意两个有限链之间至多存在一个森林态射，我们得到 $\mathbb{P}\, m = \mathbb{P}\, n$。特别地， $[m] = \mathbb{P}\, m(\mathrm{id}_P) = \mathbb{P}\, n(\mathrm{id}_P) = [n]$，因此存在一个同构 $i\colon\ P \to P$，使得 $m = n \circ i$。由于 i 是一个满态射， $m = n$。

这证明了条目 1。条目 2 由条目 1、路径的定义以及 $\mathcal{C}$ 是良幂的这一假设推出。□

例 3.9。**Tree** 是一个林地范畴。始对象是恰好具有一个节点（即其根）的树。

例 3.10。 带有（满态射，单态射）分解系统的范畴 **Set** 是一个林地范畴。另一个例子是例 2.4 中带有（满态射，强单态射）分解系统的范畴**Pos** 。由注 2.9 可知，**Pos** 是局部有限可呈现的，因此它是（余）完备的，并且上述分解系统是真分解系统（参见例 2.16）。我们证明该分解系统是稳定的。

注意到，**Pos** 中的满态射恰好是满射态射。只需观察：若 $f\colon\ X \to Y$是 **Pos** 中的一个态射，且 $b \in Y$是集合 $\uparrow b = \{y \mid b \leq_Y y\}$ 和 $\uparrow b \setminus \{b\}$ 的特征函数，则它们给出不同的态射 $Y \rightrightarrows 2 = \{0 \leq 1\}$。但是，如果 $b \notin \mathrm{Img}(f)$，那么与 f 的两个复合得到相等的态射 $X \to Y \rightrightarrows 2$。因此，满态射是满射；逆命题是显然的。现在，遗忘函子$U\colon\ \mathbf{Pos} \to \mathbf{Set}$ 具有一个左伴随，它将集合 S 映到偏序集 $(S,\ =)$；特别地， U 保持极限。利用 U 保持拉回且保持并反映满态射这一事实，**Set** 中满态射在拉回下的稳定性立即推出 **Pos**中也具有同样的性质。

此外，注意到 **Pos** 中的强单态射恰好是序嵌入（通过简单的图表推理可知，序嵌入是强单态射；逆命题由下文的注记 8.6 给出）。

在 **Set** 和 **Pos**中，路径既是始对象，也是终对象。

注记 3.11。 将例 3.10 中的论证推广可知，在适当的假设下，**Set** 上的稳定分解系统可以“提升”到其他范畴。例如，考虑一个局部有限呈现范畴 $\mathcal{C}$、一个对象 $X \in \mathcal{C}$，以及函子 $\mathcal{C}(X,\ -)\colon\ \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$。如果 X 是 $\mathcal{C}$中的一个射影分离子，那么 $\mathcal{C}$ 上的（满态射，强单态射）分解系统是稳定的，因此 $\mathcal{C}$ 是一个树状范畴。对于**Pos**，我们可以取终对象作为 X 。类似地，**Str(Σ)** 相对于（满态射，

强单态射）分解系统也是一个树状范畴，这一点可通过取 X 为次终对象看出：每种类型恰好有一个元素，关系为空，并且函数符号采用唯一可能的解释。（不过请注意，本文中最重要的树状范畴例子来自博弈余单子的余代数范畴，而$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\Sigma})$并不属于这些范畴。）

现在我们转向由博弈余单子产生的树状范畴的例子。其中大多数是在 [8, 9] 中引入的，并在 [5, 6]中证明其为树状的，因而也是树状范畴。

例 3.12（范畴 $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$）。设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为一个（单排序）关系签名。一个森林序 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 是一个二元组（M, $\leq$），其中 M 是一个 $\boldsymbol{\sigma}$-结构，而 $\leq$ 是 M上的森林序。森林序 $\boldsymbol{\sigma}$-结构之间的态射是 $\boldsymbol{\sigma}$-结构的同态，同时也是森林态射。这给出了一个范畴 $\mathcal{R}_\omega(\boldsymbol{\sigma})$。给定 $0 < k < \omega$， $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$ 是 $\mathcal{R}_\omega(\boldsymbol{\sigma})$ 的全子范畴，它由满足以下条件的森林序 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 组成：对于每个$a \in M$，有限链 $\downarrow a$ 的基数至多为 k （参见例 2.12）。

设 $0 < k \leq \omega$。我们在 $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$ 上赋予分解系统（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$），其中 $\mathcal{Q}$ 由满射态射组成，而 $\mathcal{M}$ 由作为 $\boldsymbol{\sigma}$-结构嵌入的态射组成（见例 2.18）。注意，（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$）是稳定的；这由例 2.23以及以下事实推出：$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 中的拉回是在 $\mathbf{Set}$ [13,注 5.1(2)]中计算的。

如以下示例所示，各种博弈余单子的余代数范畴在同构意义下可以表示为某个 $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$ 的子范畴，或其轻微变体。回忆一下， $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 的 ***Gaifman*** 图以 M 的元素为顶点，并以如下顶点对作为边：对于某个关系符号 $R \in \boldsymbol{\sigma}$，这两个不同顶点都出现在某个元组 $\vec{a} \in R^M$ 中。

例 3.13。给定 $0 < k \leq \omega$，我们令 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 表示 $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$ 的全子范畴，该全子范畴由满足以下条件的对象 $(M, \trianglelefteq)$ 所确定：

(E) 如果 $a, b \in M$ 在 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 的 Gaifman 图中相邻，则它们在森林序中是可比的。

我们赋予 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 从 $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$ 上继承的分解系统。$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 的路径是其中的序为有限链的对象。

假设 $k < \omega$。$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 的路径是基数为 $\leq k$ 的有限链。当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为有限时，由 [9, 定理 9.1] 可知， $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 同构于关于 $Ehrenfeucht\text{-}Fra\ddot{}\imath ss\acute{}e$ 余单子 $\mathbb{E}_k$ 在 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 上的余代数范畴。$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 的对象 $(M, \trianglelefteq)$ 是 M 的森林覆盖，见证其树深度 至多为 k [50]。范畴 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 在 [8, 9] 中被引入，并在 [5, 6] 中证明是树状的，因而是 wooded 的。

例 3.14。与例 3.13 类似，可以考虑其他博弈余单子的余代数范畴，例如 $pebble$ 余单子和$modal$ 余单子 [2, 8]（分别编码 pebble 博弈和双模拟博弈），以及$hybrid$ 余单子 [4]（为 hybrid logic 编码双模拟博弈）。

（1）对于卵石化余单子，对于每个整数 $k > 0$，这是范畴 $\mathcal{R}_k^P(\boldsymbol{\sigma})$，其对象具有 $(M, \trianglelefteq, p)$ 的形式，其中 $(M, \trianglelefteq) \in \mathcal{R}_\omega(\boldsymbol{\sigma})$，且 $p\colon M \to \{1, \ldots, k\}$ 是一个“卵石化”函数。除了条件（E）之外，这些结构还必须满足条件（P）：如果 a 与 b 在 M 的 Gaifman 图中相邻，且 $a < b$ 在森林序中，那么对于所有满足 $a < x \leq b$ 的 x， $p(a) \neq p(x)$。

当 $\boldsymbol{\sigma}$ 有限时，文献 [9] 证明，这些结构等价于用于定义树宽的更为熟悉的树分解形式 [42]。态射必须保持卵石化函数。

(2) 假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是模态词汇，即它只包含一元和二元关系符号。对于模态余单子，范畴 $\mathcal{R}_k^M(\boldsymbol{\sigma})$ 的对象是满足条件 (M) 的非空树序 Kripke 结构 $M \in \mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$：

对于 $x,\ y \in M$, $x \prec y$ 当且仅当在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中存在唯一的二元关系 α（“转移关系”），使得 $\alpha^M(x,\ y)$。

（3）对于混合余单子，再次考虑一个模态词汇 $\boldsymbol{\sigma}$，以及由非空树序 Kripke 结构 $\mathcal{R}_k^H(\boldsymbol{\sigma})$组成的范畴 $M \in \mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$，但将条件（M）弱化为 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 情形下的条件（E）。

这些范畴已在 [5, 6] 和 [4]中证明是树状的。每个范畴中的路径是序为有限链的那些结构。请注意，在模态情形下，忽略命题变量的解释（即一元关系）后，它们对应于由单个分支组成的同步树，即迹。

关于基于博弈余单子的更多示例，参见例如综述 [1, 7]。

3.2.2. 树状范畴中的往返游戏。设 $\mathcal{C}$ 为一个配备了适当分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 的范畴，且 a, b为 $\mathcal{C}$中的对象。我们定义如下在 a 和 b上进行的往返游戏 $\mathcal{G}(a, b)$。

定义 3.15 （博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$）。 博弈中的位置是形如（$m,\ n$） $\in \mathbb{P}a \times \mathbb{P}b$的有序对；初始位置记为（$m_0,\ n_0$）。获胜关系 $\mathcal{W}(a,\ b)$ 由满足 $\mathrm{dom}(m) \cong \mathrm{dom}(n)$ 的有序对（$m,\ n$）组成。

- 如果（$m_0,\ n_0$） $\notin \mathcal{W}$（$a,\ b$），则复制者输掉博弈。否则，博弈按如下方式进行：
- 每个回合开始时，位置由有序对（$m,\ n$） $\in \mathbb{P}a \times \mathbb{P}b$指定，该回合按如下方式进行。Spoiler 选择某个 $m' \succ m$ ，复制者必须以某个 $n' \succ n$作出回应；或者 Spoiler 选择某个 $n'' \succ n$ ，复制者必须以 $m'' \succ m$作出回应。
- 如果复制者能够作出回应，且新位置属于$\mathcal{W}(a,\ b)$，则复制者赢得该回合。如果对于所有整数 $t \geq 0$，复制者都有一个在 t 回合后获胜的策略，则复制者以初始位置（ $m_0,\ n_0$ ）赢得博弈。

注 3.16。 博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 不一定具有有限长度；然而，根据路径的定义，其长度至多为 ω。此外，当 $\mathcal{C}$ 是良幂的时， $\mathcal{G}(a,\ b)$ 的位置构成一个集合 （而非真类）（特别地，当 $\mathcal{C}$ 是 wooded 时就是如此）。

当 $\mathcal{C}$ 是一个林地范畴时，我们记作 $\perp_a$: $\mathbf{0}_a \rightarrowtail a$ 表示树 $\mathbb{P}a$ 的根，对于 b 也同样如此。

定义 3.17 （来回等价）。 设 a 和 b 是一个林地范畴中的对象。当复制者在初始位置 $(\perp_a,\ \perp_b)$ 下赢得博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 时，我们称 a 和 b 来回等价，并记作 $a \leftrightarrow b$。

例如，正如我们将在 §4 中看到的，两个对象 $a,\ b \in \mathbf{Tree}$ 来回等价，当且仅当它们互模拟（将其视为 Kripke 框架时）。更一般地，我们将看到，如果 $\mathcal{C}$ 是一个树状范畴，则由 $\mathcal{C}$ 中的博弈诱导的来回等价，与 [37] 意义下的开放映射互模拟 相一致。此外，在此情形下，如果 $a,\ b \in \mathcal{C}$ 来回等价，则树 $\mathbb{P}a$ 和 $\mathbb{P}b$ 互模拟。

3.3. **wooded 伴随与 R-等价**。现在我们考虑通过右伴随函子 R沿着 wooded 范畴 $\mathcal{C}$ 转移来回等价所得到的关系。

定义 3.18. A林地伴随是一个伴随对

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$$

其中 $\mathcal{C}$ 是林地范畴。由于左伴随在自然同构意义下唯一，我们将林地伴随简记为 $R\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$。

我们将 $\mathcal{E}$ 视为一个“外延”范畴；它通常是一个关系结构范畴，但一般而言不一定如此，见下文例 3.28 和 4.11。林地伴随 $R\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 使我们能够将 $\leftrightarrow$ 上的往返等价关系转移到 $\mathcal{E}$上。这就给出了 $\mathcal{E}$上的（-往返）等价关系，记作 $\leftrightarrow_R$，其定义如下：对所有 $d, e \in \mathcal{E}$,

$$d \leftrightarrow_R e \iff Rd \leftrightarrow Re.$$

以适当的方式选取林地伴随 $R\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$，我们便能通过 R-等价来刻画一阶逻辑各个片段中的结构等价性，如下列例子所示。

例 3.19. 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个（单排序）关系签名。对每个 $0 < k \leq \omega$，考虑例 3.13 中的林地范畴 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$。遗忘函子 $L_k\colon \mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 有一个右伴随 R_k，因此它给出了一个林地伴随

$$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}) \underset{R_k}{\overset{L_k}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{2}$$

（事实上，这个伴随是余单子的。）函子 R_k 将 $M \in \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 送到由 M 中元素构成的所有有限非空序列 $a_0, \dots, a_i\, (i < k)$ 的集合，并赋予其前缀序以及对 M 的关系进行适当提升所得的结构（参见 [9, §3.1]）。例如，若 S 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的一个二元关系符号，则其在 $R_k M$ 中的解释由满足以下条件的序列对组成:

$$(s, t) = ((a_0, \dots, a_i), (b_0, \dots, b_j)) \in R_k M \times R_k M$$

满足：（i） s 是 t 的前缀，或 t 是 s 的前缀；并且（ii）$(a_i, b_j) \in S^M$，也就是说，s 和 t 的最后一个元素通过 M 中的 S 相关。

在 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 上由 R_k-等价诱导的关系，仅能刻画相对于逻辑的 无等号片段的等价性，参见 [9, 注记 10.6] 和 [18]。为了刻画等号，我们采用 [21, 6] 中的方法，引入一个新的二元关系符号 I，以及扩展签名 $\boldsymbol{\sigma}^I := \boldsymbol{\sigma} \cup \{I\}$。将 I 解释为恒等关系的全忠实函子$J\colon \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}^I)$ 具有一个左伴随 H，它将 $M \in \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}^I)$ 送到 M（的 $\boldsymbol{\sigma}$-约化结构）关于由 I^M [21, 引理生成的等价关系所得的商。复合伴随

$$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}^I) \underset{R_k}{\overset{L_k}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}^I) \underset{J}{\overset{H}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}), \tag{3}$$

是 wooded 的（尽管不是余单子的）。在上面的式 (3) 中，$L_k \dashv R_k$ 表示式 (2) 中定义的伴随，但这次针对签名 $\boldsymbol{\sigma}^I$。

设 $R_k^I := R_k J$，并令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为有限的。如果 $k < \omega$，则由 [9, 定理 10.4] 可知，对于任意两个 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M，N，往返游戏 $\mathcal{G}(R_k^I(M)\ R_k^I(N))$ 恰好对应于 k轮 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈 $\mathrm{EF}_k(M,\ N)$。因此，根据经典的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 定理 [24, 25], ，由此诱导的 R_k^I-等价关系与 $\boldsymbol{\sigma}$-结构在 $\mathcal{L}_\omega$ 片段中量词秩至多为 k时的等价性相一致。

当 $k = \omega$, $R_\omega(M)$ 由来自 M 的所有有限序列组成时，博弈$\mathcal{G}(R_\omega^I(M)\ R_\omega^I(N))$ 就对应于无限 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈 $\mathrm{EF}_\omega(M,\ N)$。根据 Karp 定理（例如参见 [31, 推论 3.5。3]），R_ω^I-等价关系与 $\mathcal{L}_\infty$ 中 $\boldsymbol{\sigma}$-结构之间的等价相重合。

结合例 3.1 和例 3.19 可得到 Karp 定理的以下众所周知的推论。

例 3.20。 在仅由二元关系 $\dot{<}$ 构成的签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，任意两个无端点的稠密线性序都是 R^I_ω 等价的，因而也是 $\mathcal{L}_\infty$ 等价的。例如，这适用于 $(\mathbb{Q},\ <)$ 和 $(\mathbb{R},\ <)$，参见例如 [55, 定理 14.20]。

例 3.21。 例 3.14 中的树状范畴导出树状伴随，分别刻画了 $\mathcal{L}_\infty$ [2] 的有限变量片段、具有有界模态深度 [8] 的模态逻辑，以及具有有界混合模态深度 [4], 的混合逻辑中的等价。（事实上，这些是树状的 伴随，参见 §4.1。）

（1）对于 k-棋子余单子，存在一个树状伴随 $R^P_k\colon \mathsf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{R}^P_k(\boldsymbol{\sigma})$，它将一个 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 发送到一个结构，其论域是所有形如 (p, a) 的有序对的有限序列的集合，其中 $p \in \{1, \dots, k\}$ 是棋子索引，并且 $a \in M$。更多细节请参见 [9, §3.2] 。为了恢复 k 变量片段中的 $\mathcal{L}_\infty$ 等价，相等的处理方式与例 3.19 中相同。事实上，当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为有限时，[9, 定理 10.9] 表明，在 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 和 N 上进行的通常 k-棋子博弈，与在 $R^P_k JM$ 和 $R^P_k JN$ 上进行的往返游戏相对应。（2）对于模态余单子，模态深度至多为 k 的模态逻辑中的等价，可由针对适当右伴随 $R^M_k\colon \mathsf{Str}_\bullet(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{R}^M_k(\boldsymbol{\sigma})$ 的 R^M_k-等价刻画，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是模态词汇，而 $\mathsf{Str}_\bullet(\boldsymbol{\sigma})$ 是由带指定元素且保持指定元素的同态构成的带指结构 $\boldsymbol{\sigma}$ 的范畴；详细说明请参见 [9, §3.3] 。（注意，这里不涉及相等。）（3）为了通过由混合余单子诱导的树状伴随，刻画具有有界混合模态深度的混合逻辑中的逻辑等价，需要像处理 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 余单子和棋子余单子时那样处理等号；更多细节请参见 [4] 。

与有限 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈以及模态逻辑和混合逻辑的有限博弈相对应的林地伴随，可以通过在两侧都取有限结构加以限制。然而，这并非总是可行：例如，在卵石博弈的情形下，还必须考虑无限结构 [2, 推论 8]。

还应注意，除了来回等价之外，林地伴随还可用于将其他关系转移到外延范畴，例如同构关系或同态预序。这些也会给出重要逻辑片段中等价的刻画；对于树状伴随的情形，参见 [6, §7] 。

3.3.1. 有限可达林地伴随。 无限 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈提供了一个林地伴随的例子，其来回关系恰好对应于无穷一阶逻辑中的等价 $\mathcal{L}_\infty$ （参见例 3.19）。我们的主要结果给出了这一结论的部分逆命题：我们证明，对于一大类林地伴随

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{E},$$

R-等价所诱导的关系总是比无穷一阶逻辑中的等价更粗（精确表述见 §3.4）。我们所关注的 wooded 伴随类由有限可达的 wooded 伴随构成：

定义 3.22。 一个 wooded 伴随 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 在满足以下条件时称为有限可达

(i) 范畴 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{C}$ 是局部有限可呈范畴，

并且 (ii) $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 是 lfp 范畴的态射。

回顾定义 2.6，lfp 范畴的态射是保持极限的有限型函子。事实上，局部有限可呈范畴之间的函子当且仅当它是有限保持右伴随时，才是 lfp 范畴的态射（见下文注 5.8）。

我们在例 2.7 中已经指出，形如 $\mathbf{Str}(\Sigma)$ 的范畴（特别是形如 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 的范畴）总是局部有限可呈现的。因此，在 §3.3 的所有例子中，“外延”范畴 $\mathcal{E}$ 都是局部有限可呈现的。为了证明我们所关注的树状范畴也是局部有限可呈现的，我们将采用以下判据，该判据是引理 2.10 的直接推论。

引理 3.23。 若满足以下条件，则林地范畴 $\mathcal{C}$ 是局部有限可呈现的：*(i)* $\mathcal{C}$ 是余完备的；*(ii)* $\mathcal{C}$ 中的每条路径都是有限可呈对象；*(iii)* $\mathcal{C}$ 拥有一个由路径组成的小稠密全子范畴。

例 3.24。 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是有限的（单排序、关系型）签名。对于所有 $0 < k \leq \omega$，例 3.19 中的（余单子）林地伴随 $L_k\colon\ \mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}) \rightleftarrows \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) : R_k$ 是有限可达的。为说明这一点，注意余单子 L_kR_k 是有限性的（例如可利用 [11, 定理 3.4]中的判据推出）。因此，R_k 是有限性的，并且 L_k 保持并反映有限可呈对象，参见例如 [22, 第 45] 页或 [53, 引理 B.2]。由于 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 中任意路径的底层 $\boldsymbol{\sigma}$-结构都是有限的，因而在$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$中是有限可呈的，我们看到 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 中的路径都是有限可呈的。根据引理 3.23，后一个范畴是局部有限可呈现的；只需注意到 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 是余完备的，因为$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$具有这一性质，而余单子函子生成余极限。

将式 (3) 中的伴随与 $H \dashv J$ 结构和 $\boldsymbol{\sigma}^I$结构之间的伴随复合，所得的伴随也是有限可达林地伴随，因为 J（它将 I 解释为恒等关系）显然是有限性的。

注 3.25. 在前一个例子中，$\boldsymbol{\sigma}$ 是有限的这一假设对于应用引理 3.23 是必要的；例如，若 $\boldsymbol{\sigma}$ 是注 3.2 中的无限签名，则存在一些路径 P，它们在 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 中不是有限可呈的，因为 L_kP 在 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 中不是有限可呈的。

另一方面，如果签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 是无限的，我们仍然可以通过引用 Diers 的一个结果证明范畴$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 是局部有限可呈现的。该结果为余单子的余代数范畴局部有限可呈现提供了充分条件（参见 [22, 命题 1.12.1] 以及 [53,定理 B.5]）。

通过与例 3.24 中完全类似的推理，可以看出，例 3.21 中的右伴随（对于有限的 $\boldsymbol{\sigma}$）是 lfp 范畴的态射，并产生有限可达的树状伴随。

3.3.2. *D* 路径嵌入的检测。 考虑一个有限可达的树状伴随 on

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathcal{E}\,.$$

在 §3.3.1 的例子中，引理 3.23 对于证明树状范畴 $\mathcal{C}$ 是 lfp 的起到了关键作用。特别地，在例 3.24 中，树状范畴 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 中的路径是有限可呈对象（对于有限的 $\boldsymbol{\sigma}$，例 3.21 也同样如此）。此外，前述例子中的伴随具有如下性质：树状范畴 $\mathcal{C}$ 的一个态射 f 是嵌入（即 $f \in \mathcal{M}$）当且仅当 Lf（即左伴随 $L\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 作用于 f 所得的像）是 $\mathcal{E}$ 中的结构嵌入。这促成了以下定义：

定义 3.26 （路径嵌入的检测）。 设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为一个签名。当满足以下条件时，有限可达林地伴随 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$检测 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中的路径嵌入：

（i）存在一个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，其位于 $\mathbf{\Sigma}$ 中，使得 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(T)}$；（ii） $\mathcal{C}$ 中的所有路径都是有限可呈的；（iii） $\mathcal{C}$ 中的一个态射 $f\colon\ P \to a$，其中 P 是一条路径，当且仅当 Lf 是 $\mathcal{E}$ 中 $\mathbf{\Sigma}$ 结构的嵌入时，它才是嵌入。

注 3.27。 定义 3.26 需要做几点说明。

(1) 注意，定义 3.26 的条件 (i) 保证 $\mathcal{E}$ 是局部有限呈现范畴，同时也是 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 的一个关于滤过余极限封闭的反射子范畴（参见注 2.9）。

反过来，$\mathbf{Str(\Sigma)}$ 的一个关于滤过余极限封闭的反射全子范畴 $\mathcal{E}$ 是局部有限呈现范畴 [13, 推论 1。47], ，因此存在一个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，使得 $\mathcal{E}$ 等价于 $\mathbf{Mod(T)}$（再次参见注 2.9）。然而，我们不能假设 $\mathbf{T}$ 是签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中的理论；这可由 [51] 中给出的一个例子的轻微改编得到，该例子也用于 [57]。[7] 这就是为什么在定义 3.26 中我们必须明确要求存在一个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，使得在 $\mathbf{\Sigma}$ 中有 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(T)}$。

(2) 给定一个局部有限呈现范畴 $\mathcal{E}$，存在多个签名 $\mathbf{\Sigma}$，使得 $\mathcal{E}$ 等价于 $\mathbf{Mod(T)}$，其中 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个笛卡尔理论；参见 [36, 引理 D1.4。9]。

对于给定的 $\mathbf{\Sigma}$，由完备性（即注记 2.2 中的意义）可知，选择满足 $\mathcal{E} \cong \mathbf{Mod(T)}$ 的笛卡尔理论 $\mathbf{T}$ 并不重要。

另一方面，签名 $\mathbf{\Sigma}$ 是定义 3.26 中的一个重要参数。例如，在一个没有关系符号的签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中，总是存在一个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，使得 $\mathcal{E} \cong \mathbf{Mod(T)}$（见同上引文）。由例 2.18 可知，结构的嵌入恰好是 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中的单态射，因此也是 $\mathcal{E}$ 中的单态射，因为反射 $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathbf{Str(\Sigma)}$ 保持并反映单态射。

（3）正如我们将在注记 8.6 中看到的，给定一个如定义 3.26 中的范畴 $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathbf{Str(\Sigma)}$，$\mathcal{E}$ 中的每个强单态射都是结构的嵌入。

我们在例 2.18 中已经看到，在 $\mathcal{E} = \mathbf{Str(\Sigma)}$ 的情形下，逆命题成立，即 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中的强单态射恰好是结构的嵌入。在 $\mathbf{Pos} \hookrightarrow \mathbf{Str(\sigma)}$ 的情形下这同样成立（其中有 $\boldsymbol{\sigma} = \{\dot{\leq}\}$），见例 3.10。

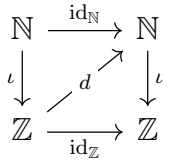
然而，在某个签名 $\mathbf{\Sigma}$ 下存在笛卡尔理论$\mathbf{T}$，使得 $\mathbf{\Sigma}$-结构的嵌入未必是 $\mathbf{Mod(T)}$中的强单态射，即使其定义域是有限可呈的。例如，在幺半群的签名中，幺半群包含$\iota\colon (\mathbb{N}, +, 0) \rightarrowtail (\mathbb{Z}, +, 0)$ 是一个结构嵌入，其定义域是有限可呈的，但 ι 在幺半群范畴中不是强单态射。

证明。 注意以下内容。

(a) 幺半群 $(\mathbb{N}, +, 0)$ 在 $\mathbf{Mod(M)}$ 中是有限可呈的，因为它是由一个生成元生成的自由幺半群。(b) ι 是 $\mathbf{Mod(M)}$ 中的结构嵌入，因为 $\mathbf{M}$ 是代数理论，而 ι 反映相等。(c) ι 是满态射。事实上，考虑幺半群态射 $h, k\colon (\mathbb{Z}, +, 0) \to (M, \cdot, 1)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$h(n) = k(n)$。那么给定 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $k(n) \cdot h(-n) = h(n) \cdot h(-n) = h(0) = 1$，因此 $k(-n) = h(-n)$，因为在幺半群中，只要逆元存在，它就是唯一的。

[7] 另请参见 [28], ，其中明确说明了在局部有限可呈范畴的情形下，[13, 定理 1.39] 为何失效。附录 A 提供了一些细节。

(d) ι 不是强态射，因为不存在如图所示的对角填充 d

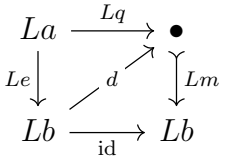


□

(4) 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有稳定分解系统（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$）的林地范畴。假设存在一个余单子伴随 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$，其中 $\mathcal{E} = \mathbf{Str(\Sigma)}$ 对某个 $\mathbf{\Sigma}$ 成立，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 f，有 $f \in \mathcal{M}$ 当且仅当 Lf 是 $\mathcal{E}$ 中的结构嵌入。那么， $L \dashv R$ 显然能够检测 $\mathbf{\Sigma}$ 中的路径嵌入。此外，不难看出， $\mathcal{Q} =$ { 是满态射， $\mathcal{M} =$ { 是强单态射}。

证明。根据（对偶的）[10, 命题 20.12], ，如果伴随 $L \dashv R$ 是余单子的，那么函子 L 是保守的（即反映同构）。此外，注意到 L 保持满态射，因为它是一个左伴随。

考虑 $\mathcal{C}$ 中的一个满态射 $e\colon a \to b$，并取 e 的一个（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$）分解，记为 $e = m \circ q$。由于 Lm 是强单态射，而 Le 在 $\mathcal{E}$ 中是满态射，我们得到对角填充 d，如图所示

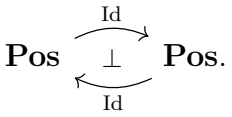


由此可知，单态射 Lm 同时也是分裂满态射，因而是同构。但由于 L 是保守的， m 也是同构，所以根据引理 2.19， $e \in \mathcal{Q}$ 。特别地， $e \in \mathcal{Q}$ 当且仅当e 是 $\mathcal{C}$的满态射。

接着，由 $\mathcal{M} = \{m \mid \forall e \in \mathcal{Q}, e \pitchfork m\}$ （定义 2.13）这一事实可知， $\mathcal{M}$ 恰好由强单态射组成。□

在我们迄今给出的所有林地伴随的例子中，“外延”范畴 $\mathcal{E}$ 仅仅是一个结构范畴，而定义 3.26 只要求 $\mathcal{E}$是某个笛卡尔理论的模型范畴。下面的例 3.28 是定义 3.26 的一个（平凡）实例，其中外延范畴是某个非空 Horn 理论的模型范畴。

例 3.28。考虑自伴随



我们在例 3.10 中已经看到，局部有限呈现范畴$\mathbf{Pos}$ 配备分解系统（$\mathcal{Q}$, $\mathcal{M}$）后是林地的，其中 $\mathcal{Q}$ 是满射态射类，而 $\mathcal{M}$ 是序嵌入类。因此，$\mathbf{Id} : \mathbf{Pos} \rightleftarrows \mathbf{Pos} : \mathbf{Id}$ 是一个能够检测路径嵌入的有限可达林地伴随。

我们将在下文 §10 中回到例 3.28，并讨论形如 $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Mod(T)}$ 的（有限可达）林地伴随是否经过反射 $\mathbf{Mod(T)} \hookrightarrow \mathbf{Str(\Sigma)}$ 分解，其中 $\mathbf{\Sigma}$ 是 $\mathbf{T}$ 的签名（见注 2.9）。

3.4. **主要结果**。有了定义 3.26，我们便可以陈述我们的主要结果 :

定理 3.29。 设 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个签名，并假设 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon\ R$ 是一个有限可达的、能够检测 $\mathbf{\Sigma}$ 中路径嵌入的 *wooded* 伴随。对于所有 M、$N \in \mathcal{E}$,

$$M, N \ \textit{equivalent in}\ \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}) \implies M \leftrightarrow_R N.$$

现在我们对前面的结果及其一些应用作一番说明。首先，让我们说明 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈如何与定理 3.29 的框架相适应。

例 3.30。 设 $k \leq \omega$，并考虑例 3.19 中的伴随:

$$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}^I) \underset{R_k}{\overset{L_k}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}^I) \underset{J}{\overset{H}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$$

复合伴随不能检测 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的路径嵌入，但余单子伴随 $L_k \dashv R_k$ 能检测 $\boldsymbol{\sigma}^I$ 中的路径嵌入。

因此，给定 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 和 N，定理 3.29 蕴含：只要 JM 和 JN 是 $\mathcal{L}_\infty(\boldsymbol{\sigma}^I)$-等价的，就有 $JM \leftrightarrow_{R_k} JN$。由于 $J\colon \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}^I)$ 将关系 I 解释为恒等关系，因此可推出：只要 M 和 N 是 $\mathcal{L}_\infty(\boldsymbol{\sigma})$-等价的，它们就是 R_k^I-等价的。（事实上，正如我们在例 3.19 中所见，R_k^I-等价与 $\mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma})$ 的量词秩至多为 k 的片段中的等价相一致。）

在定理 3.29 的假设下，R-等价关系无法区分满足 $\mathcal{L}_\infty$ 中相同句子的 $\mathcal{E}$ 对象。一般而言，这阻止了关系 $\leftrightarrow_R$ 退化为同构关系。

例 3.31。 回顾例 3.20，签名 $\boldsymbol{\sigma} = \{\dot{<}\}$ 中的线性序 $(\mathbb{Q}, <)$ 和 $(\mathbb{R}, <)$ 是 $\mathcal{L}_\infty$-等价的。由定理 3.29 可知，对于任意 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$，$(\mathbb{Q}, <) \leftrightarrow_R (\mathbb{R}, <)$，其中 $\boldsymbol{\sigma} = \{\dot{<}\}$ 检测路径嵌入。

请注意，虽然有限结构的同构类型可在有限性一阶逻辑 $\mathcal{L}_\omega$ 中定义，但对于有限变量片段而言不再如此（例如参见 [23,3.3.6(a)]）。此外，关于有限变量逻辑中的卵石博弈的推论 8 [2] 一般迫使 $\mathcal{E}$ 包含无限对象，在这些对象上，$\mathcal{L}_\infty$ 的表达能力严格强于 $\mathcal{L}_\omega$。[8]

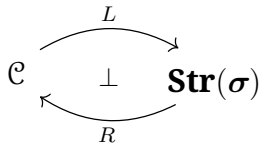
例 3.31 对单子二阶逻辑（MSO）的博弈余单子给出了如下推论。

例 3.32。 回忆一下，在给定签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 下，MSO 是带有单子（即一元）集合变量并允许对其进行量化的一阶逻辑在 $\boldsymbol{\sigma}$ 上的扩展。特别地，每个 $M \in \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 都可以扩展为一个 $\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$ 的模型，其中集合变量允许取遍 M 的所有子集（这样的模型称为标准模型）。

通过将签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的MSO 视为扩展 $\mathbf{\Sigma}$ 中的双排序一阶逻辑，$\boldsymbol{\sigma}$ 中一个类型用于（单子）集合变量，两个类型之间设有隶属关系，文献 [33], 提出了一种用于 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈的余单子方法。特别地，标准模型的$\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$-理论包含于其$\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$-理论中，因此，$\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$-等价的标准模型也$\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$-等价。

[8]此外，与 $\mathcal{L}_\infty$不同，并非每个有限结构的同构类都能在带有无穷命题联结词的有限变量逻辑中定义，参见例如 [23, 例 3.3。13]。

另一方面，定理 3.29 刻画了$\mathcal{L}_\infty(\boldsymbol{\sigma})$中的等价与$\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$中的等价之间已知的差异：它意味着，对于 $\boldsymbol{\sigma} = \{\lessdot\}$，不存在伴随



能够检测 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的路径嵌入，并且对于给定的 M，$N \in \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$，当且仅当 M 与 N 是 R-等价的时，M 和 N 上的标准模型才是 $\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$-等价的。

事实上，考虑线性序（$\mathbb{Q}$，$<$）和（$\mathbb{R}$，$<$）。根据例 3.31，我们知道（$\mathbb{Q}$，$<$）$\leftrightarrow_R$（$\mathbb{R}$，$<$）。另一方面，众所周知（从 [55, §2.4] 很容易看出），$\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$ 可以表达戴德金分割，因而可以表达序完备性。因此，（$\mathbb{Q}$，$<$）和（$\mathbb{R}$，$<$）并不 $\mathbf{MSO}(\boldsymbol{\sigma})$-等价。[9]

3.4.1. 以下各节概述。 定理 3.29 的证明将占据本文余下大部分篇幅。在下一节中，我们将介绍有关树状范畴的一些背景知识，因为我们的许多树状范畴例子都属于这一类。在 §5–6 中，我们回顾局部有限可呈范畴和函子语义方面的一些技术材料。在 §7 中，我们得到定理 3.29 的一个较弱版本，其中将路径嵌入的检测这一假设替换为：在树状的局部有限可呈范畴 $\mathcal{C}$ 中，路径嵌入具有“可定义性”。然后在 §8 中，我们为局部有限可呈范畴 $\mathcal{E}$ 中的子结构嵌入构造公式。在 §9 中，我们证明这些公式可以沿左伴随反向翻译，从而只要 L 检测到路径嵌入，路径嵌入就在 $\mathcal{C}$ 中可定义：$\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$。这最后一步依赖于 Hodges 的词构造 [29, 30]。

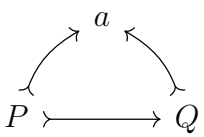
4. Arboreal categories

本节回顾树状范畴这一概念。树状范畴是 wooded 范畴中的一个特殊类别，在其中，来回等价关系可以用开放映射互模拟来描述。接着，我们给出一类并非源自博弈余单子的树状范畴作为例子，即森林序上的预层范畴。

4.1. 树状范畴的公理。 我们回顾 [5, 6] 中有关树状范畴理论的主要定义和事实。

定义 4.1。 设 $\mathcal{C}$ 是一个配备了适当分解系统 $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$ 的良幂范畴，并设 a 是 $\mathcal{C}$的一个对象。

（1）我们称 a 是连通的，是指对于所有在 $\mathcal{C}$ 中承认余积 b 的非空路径集合 $\{P_i \mid i \in I\}$，任意箭头 $a \to b$ 都经过某个余积映射 $P_i \to b$ 分解。[10]（2）考虑顶点为 a 的图表，该图表由所有嵌入到 a 中的路径嵌入组成。路径之间的态射是使显然的三角形交换的那些态射：



[9]此外，$(\mathbb{Q}, <)$ 的 **单子二阶逻辑($\boldsymbol{\sigma}$)**-理论是可判定的（[52, 定理 2.1], 的证明），而 $(\mathbb{R}, <)$ 的 **单子二阶逻辑($\boldsymbol{\sigma}$)**-理论是不可判定的（[56, 定理 7]）。[10]这与通常的概念不同；通常的概念要求 $\mathcal{C}[a, -]$ 保留所有已有的余积。请注意，始对象通常不具备这种意义上的连通性，而在我们的意义下，它们始终是连通的。

以适当的方式选取代表元，可得到一个顶点为 a 、位于小图表 $\mathbb{P}\,a$ 上的余锥。我们称 a 是由路径生成的，条件是这是 $\mathcal{C}$ 中的一个余极限余锥。

定义 4.2。 树状范畴是一个局部小且良好幂范的范畴 $\mathcal{A}$，配备一个稳定分解系统，并满足以下条件：

(i) 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意路径 P， Q， Q'，如果复合 $P \to Q \to Q'$ 是一个商，那么 $P \to Q$ 也是一个商（“二出三条件”）。(ii) $\mathcal{A}$ 具有所有路径集合的余积。(iii) $\mathcal{A}$ 中的每条路径都是连通的。(iv) $\mathcal{A}$ 的每个对象都是由路径生成的。

由路径定义的 $\mathcal{A}$ 的全子范畴记为 $\mathcal{A}_{\mathrm{p}}$。

下文中，我们假设对于任意树状范畴 $\mathcal{A}$，其子范畴 $\mathcal{A}_{\mathrm{p}}$ 是本质小的（即等价于一个小范畴）。特别注意，由于定义 4.2 中的第 (ii) 项蕴含始对象0的存在，每个树状范畴都是 wooded 的。类似于林地伴随的情形，树状伴随是一个伴随 $L\colon\ \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon R$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个树状范畴。如果一个树状伴随作为林地伴随是有限可达的，则称其为有限可达。

例 4.3。 范畴**Tree** （因而**Forest**也一样）在赋予（满态射，单态射）分解系统后是树状的。这已在 [6,例 5.4] 中得到证明，并且是下述定理 4.9 的特例；参见注记 4.10。

§3 中给出的所有由博弈余单子产生的林地范畴的例子都是树状的（参见例 3.12、3.13 和 3.14）。一个并非树状范畴的林地范畴例子是**Pos**，因为后者不是由路径生成的，参见例 2.4 和 3.10。

树状范畴的一个重要性质是，对于任意此类范畴 $\mathcal{A}$，赋值 $a \mapsto \mathbb{P}\,a$ 延拓为一个函子 $\mathbb{P}\colon\ \mathcal{A} \to \mathbf{Tree}$ [6, 定理 3.11]。$\mathbb{P}$ 在态射上的作用定义如下：对于 $\mathcal{A}$ 中的任意箭头 $f\colon\ a \to b$， $\mathbb{P}\,f\colon\ \mathbb{P}\,a \to \mathbb{P}\,b$ 是将路径嵌入 $m\colon\ P \rightarrowtail a$ 发送到路径嵌入 $\exists_f P \rightarrowtail b$ 的森林态射，后者通过对 $f \circ m\colon\ P \twoheadrightarrow \exists_f P \rightarrowtail b$ 取（商，嵌入）分解而得到。由于分解在同构意义下唯一，且路径的商仍然是路径（引理 3.5），这个赋值是良定义的。

当 $\mathcal{A}$ 是第 3 节中引入的森林序 $\boldsymbol{\sigma}$-结构范畴之一时，例如 $\mathcal{R}_k(\boldsymbol{\sigma})$、 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 或 $\mathcal{R}_k^P(\boldsymbol{\sigma})$，函子 $\mathbb{P}$ 自然同构于显然的遗忘函子 $\mathcal{A} \to$**Forest** 与等价 **Forest** $\to$**Tree** 的复合；后者添加一个根，这对应于空子结构的嵌入。如果 $\mathcal{A}$是范畴**Tree**，那么 $\mathbb{P}$ 自然同构于恒等函子 **Tree** $\to$**Tree**。

注 4.4. 假设定义 4.2 的条件（i）–（iii），则条件（iv）等价于包含函子 $I\colon\ \mathcal{A}_{\mathrm{p}} \hookrightarrow \mathcal{A}$ 是稠密的这一事实 [6, 引理 5.1]。特别地，引理 3.23 的条件（iii）对于树状范畴总是成立，因此，当一个余完备树状范畴中的路径是有限可呈时，它就是局部有限可呈现的。

4.2. **互模拟与开映射**。与 wooded 范畴相比，树状范畴的一个关键性质是，在温和的假设下，来回等价关系与 [38] 中引入的通过开映射实现的互模拟概念相吻合。

定义 4.5。树状范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个箭头 $f\colon a \to b$ 若满足以下路径提升性质，则称为开：给定任意交换方形

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & a \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ Q & \longrightarrow & b \end{array}$$

对于 P, Q 路径，存在一个对角填充 $Q \to a$。[11] 若两个对象 $c, d \in \mathcal{A}$ 之间存在连接它们的开态射张量 $c \leftarrow \cdot \to d$，则称它们是树状互模拟的。

例 4.6。根据 [6, 命题 4.2]，**Tree** 中的开态射与有界态射一致。此外，众所周知，对于任意两棵树 a 和 b，当且仅当 a 和 b 在通常意义上互模拟（即作为 Kripke 框架互模拟，其中可达关系由覆盖关系给出）时，存在一个由有界态射组成的张量 $a \leftarrow \cdot \to b$。因此，**Tree** 中的树状互模拟与通常的互模拟概念一致。

定理 4.7 ([6, 定理 6。12])。设 a, b 是一个允许取积的树状范畴中的对象。那么，当且仅当 a 和 b 树状互模拟时，它们来回等价（定义 *3.17* 所述意义下）。

回忆例 4.3，范畴 **Tree** 是树状的，并且由于$\widehat{\ }$它等价于预层范畴 $\mathbb{N}$，所以它是完备的。由例 4.6 和定理 4.7 可知，当且仅当两棵树按通常意义下互模拟时，它们才是来回等价的。一般而言，由于函子 $\mathbb{P}\colon \mathcal{A} \to \mathbf{Tree}$ 将开态射映射为有界态射，根据 [6, 命题 4.2], 如果 $a, b \in \mathcal{A}$ 是具有二元积的树状范畴中的来回等价对象，那么树 $\mathbb{P}a$ 和 $\mathbb{P}b$ 是互模拟的，但逆命题未必成立。

注 4.8。定义 4.5 中的树状互模拟概念可以更一般地在林地范畴中定义。事实上，对 [6, 命题 6.6]进行直接改写可知，林地范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意两个树状互模拟对象都是来回等价的。然而，除非 $\mathcal{C}$ 是树状的，否则逆命题未必成立。

4.3. **森林上的预层**。回顾一下，预层范畴具有唯一的适当分解系统，即（满态射，单态射）分解系统，并且后者是稳定的（参见例 2.23 和脚注 3）。本节致力于以下结果：

定理 4.9$\widehat{\ }$。设 $\mathcal{F}$ 为一个森林，将其视为一个（偏序）范畴。预层范畴 $\mathcal{F}\widehat{\ }$是树状的，并且 $\mathcal{F}$ 中的路径恰好是可表函子以及始对象。

注记 4.10。令定理 4.9 中的 F 为可数链 $\mathbb{N}$，我们看到范畴 **Tree** 和 **Forest** 是树状的。

定理 4.9 为我们提供了不同于 §3 中所讨论类型的（有限可达）树状伴随实例。例如，下面的例子受到托扑斯的 *Diaconescu* 覆盖 的启发，正如 [45, §IX.9] 中所述。

例 4.11。给定一个小范畴 $\mathcal{D}$，令 F($\mathcal{D}$) 为其节点是可复合箭头的有限序列 s 所构成的森林

$$a_0 \xrightarrow{k_1} a_1 \dashrightarrow a_{n-1} \xrightarrow{k_n} a_n$$

[11] 这个开态射的定义与 [6] 中使用的定义不同，但两者等价；参见同上中的引理 4.1

在 $\mathcal{D}$ 中，且当且仅当 s 是 t 的前缀时， $s \leq t$ ，即

$$a_0 \xrightarrow{s} a_n \xrightarrow{k_{n+1}} a_{n+1} \dashrightarrow a_{n+m-1} \xrightarrow{k_{n+m}} a_{n+m}.$$

令 π 为函子 F($\mathcal{D}$) $\to \mathcal{D}$ ，使得对于上述的 $s \leq t$ ， $\pi(s \leq t)$： $a_n \to a_{n+m}$ 是复合 $k_{n+m} \circ \cdots \circ k_{n+1}$。函子 π^*： $\mathcal{D} \to$ F($\mathcal{D}$)，其定义为与 π进行前复合，在两侧都有伴随函子（参见例如 [36, 例 A4.14]）。鉴于例 2.11和定理 4.9，这在 $\mathcal{D}$ 与树状范畴 F($\mathcal{D}$)之间给出了一个有限可达树状伴随。

我们将在下文的例 7.18（§7.3）和例 10.3（§10）中详细阐述例 4.11。在本节的其余部分，我们给出定理 4.9 的证明。为此，固定一个任意森林 F（视为偏序范畴），并考虑预层范畴 F。回顾一下，如果 F 中的对象与以下形式的某个对象自然同构，则称其为 可表 对象：$\mathbf{y}a$ ，其中 $a \in$F，且

$$\mathbf{y} \ : \ \mathcal{F} \ \longrightarrow \ \widehat{\mathcal{F}}$$

是 Yoneda嵌入。

我们首先刻画 F 中的路径：

引理 4.12。 $\mathcal{F}$ 中的一个对象是路径，当且仅当它是始对象或可表对象。

证明。 *</style}显然，F 的始对象0* （即空预层）是路径。为了说明可表函子是路径，只需证明：当 $a \in$F 时，$\mathbf{y}a$ 是路径。令

$$a_1 \prec \cdots \prec a_n = a$$

为 F 中 a 的前驱所成的有限链。直接检查可知，$\mathbf{y}a$ 的子对象偏序集可以识别为有限链

$$\mathbf{0} \prec \mathbf{y}a_1 \prec \cdots \prec \mathbf{y}a.$$

（回顾一下，在托扑斯中，从始对象**0** 出发的唯一箭头是单态射。）因此，$\mathbf{y}a$ 是路径。

逆命题是，假设 P 是 F 中的一条非初始路径。由于 Yoneda嵌入 $\mathbf{y}$: F $\to$ F 是稠密的， P 是典范图的余极限

$$D \ : \ \mathbf{y}/P \ \xrightarrow{\pi} \ \mathcal{F} \ \xrightarrow{\mathbf{y}} \ \widehat{\mathcal{F}}.$$

该图表非空，因为 P 不是初始的。暂时假设每个态射 $\mathbf{y}a \to P$（其中 $a \in$ F）都是单态射。那么，由于 P 是一条路径，存在对象 i ，使得对于 $\mathbf{y}/P$ 中的任意其他 j ，余极限映射 $D(j) \to P$ 都经由余极限映射 $D(i) \to P$分解。由此可得 $P \cong \mathbf{y}a$ ，其中 $a := \pi(i)$，因此 P 是可表的。

剩下要证明的是，每个态射 $\mathbf{y}a \to P$ 都是单态射。反过来，这立即由 F 是偏序范畴这一事实推出：自然变换f: $\mathbf{y}a \to P$ 的任一分量都是单射，因为其定义域至多包含一个元素，因此 f 是单态射。□

要完成定理 4.9 的证明，还需证明 F 满足定义 4.2 中的条件 (i)–(iv)。

引理 4.13 （条件 (i)）。 $\mathcal{F}$ 满足二出三条件。

证明。 考虑 F 中的路径 P， Q， Q' ，并假设其复合

$$P \ \xrightarrow{\alpha} \ Q \ \xrightarrow{\beta} \ Q'$$

是一个满态射。只需证明，对于任意 $a \in$F，分量 α_a: $P(a) \to Q(a)$ 是满射。根据引理 4.12，集合 $P(a)$ 和 $Q(a)$ 至多含有一个元素。

因此，我们必须证明，对于任意 $a \in \mathrm{F}$， $Q(a) \neq \emptyset$ 蕴含 $P(a) \neq \emptyset$。我们证明其逆否命题。若 $P(a) = \emptyset$，那么由于 $(\beta \circ \alpha)_a$ 是一个满态射， $Q'(a) = \emptyset$ 也成立。由于不存在从非空集合到空集的函数，因此必有 $Q(a) = \emptyset$。□

^定义 4.2 的条件 (ii)（指出 F 存在路径集的余积）显然^由 F 的余完备性推出。

^**引理 4.14** (条件（iii）)。 *F* 中的每条路径都是连通的。

^^^证明。F 的始对象显然是连通的。若 P 是 F 中的非始路径，根据引理 4.12，我们可以假设 P 具有如下形式：$\mathbf{y}a$ ，其中 $a \in$ 属于 F。对于任意非空路径集 $\{P_i \mid i \in I\}$，我们有：

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{F}}\left[\mathbf{y}a, \coprod_{i\in I} P_i\right] &\cong \big(\coprod_{i\in I} P_i\big)(a) && \text{(Yoneda Lemma)}\\
&\cong \coprod_{i\in I} P_i(a) && \text{(colimits computed in } \mathbf{Set})\\
&\cong \coprod_{i\in I} \widehat{\mathcal{F}}\,[\mathbf{y}a, P_i]. && \text{(Yoneda Lemma)}
\end{aligned}$$

直接检查可知，下面的双射

$$\coprod_{i\in I} \widehat{\mathcal{F}}\,[\mathbf{y}a, P_i] \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}}\left[\mathbf{y}a, \coprod_{i\in I} P_i\right]$$

^是典范映射；它在直和项 $\mathrm{F}\,[\mathbf{y}a, P_j]$ 上将箭头 $\mathbf{y}a \to P_j$ 映到它与余积映射 $P_j \to \coprod_{i\in I} P_i$ 的复合。因此，$\mathbf{y}a$ 是连通的。□

^**引理 4.15** （条件（iv））。 $\mathcal{F}$ 中的每个对象都是由路径生成的。

^^^证明。 根据注 4.4，只需证明由^^路径定义的 F_P 的全子范畴是稠密的。F 中的可表对象构成一个稠密子范畴；由于根据引理 4.12，F_P 可与由可表对象连同始对象构成的子范畴等同，因此它也是稠密的。□

5. Gabriel-Ulmer duality

在本文中，我们关键性地依赖于局部有限可呈范畴（lfp 范畴）的 Gabriel-Ulmer 对偶性，该对偶性有两种可能的解读：代数解读和逻辑解读。在代数解读下，Gabriel-Ulmer 对偶性是局部有限可呈范畴与有限完备小范畴之间的对偶双等价。将该对偶性应用两次，会将一个局部有限可呈范畴变为一个等价范畴，该范畴由所有保持有限极限的函子组成

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

其中 $\mathcal{C}$ 是小范畴且有限完备。在其逻辑解读中，Gabriel-Ulmer 对偶是一种语法-语义对偶，其中有限完备小范畴表示某些一阶理论，即 §2.2 中的笛卡尔理论，而局部有限可呈范畴则是笛卡尔理论的模型范畴。本节聚焦于代数视角，将逻辑视角的讨论留到 §6。

我们先在第5.1节回顾 Gabriel-Ulmer 对偶性的偏序限制，即（交）半格与代数格之间的对偶性 [48]。局部有限可呈现范畴与小完备范畴之间的完整对偶性将在第5.2节介绍。[12]

[12]在其原始形式中， [27], 这一对偶涉及小的 κ-完备范畴和局部 κ-可呈范畴，其中 κ 为正则基数。我们将聚焦于 $\kappa = \aleph_0$ 的情形。

5.1. **半格与代数格。** （交）半格是指每个有限子集都有下确界的偏序集，而半格态射是保持有限下确界的映射。我们将由此得到的范畴记为 **SL**。

正如布尔代数通过Lindenbaum-Tarski构造对应于经典命题理论一样，半格对应于命题逻辑的 $\{\top, \wedge\}$ 片段中的理论。从这一观点来看，半格 L 的模型是一个半格态射 h：从 $L \to 2$ 到二元素半格。所有 L 的模型构成的集合 $\mathbf{SL}[L, 2]$ 关于逐点序构成一个偏序集，并且通过映射 $h \mapsto h^{-1}(1)$ 与偏序集 $\mathfrak{F}L$ 同构，其中 L 上的滤子按集合包含排序；这里的 1 表示空集的下确界（即半格的最大元素）。

注 5.1。 将半格 L 视为一个范畴时，函子范畴 $[L, 2]$ 可以与 L 的上闭子集所成的偏序集 $\mathfrak{U}L$ 等同。逆变的 Yoneda嵌入 $L^{\mathrm{op}} \to [L, \mathbf{Set}]$ 分解为经过嵌入 $L^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{U}L$，该嵌入将 a 发送到 $\uparrow a$。进一步地，后者又分解为经过包含 $\mathfrak{F}L \hookrightarrow \mathfrak{U}L$。事实上，Yoneda嵌入的像由 L 上的主滤子组成。

滤子集合的交集仍然是滤子，因此偏序集 $\mathfrak{F}L$ 是完备格。此外，$\mathfrak{F}L$ 中的有向上确界由集合论意义下的并集给出。因此，对于半格 k 的所有态射 $L \to M$，由 $F \mapsto k^{-1}(F)$ 定义的映射 $\mathfrak{F}k\colon \mathfrak{F}M \to \mathfrak{F}L$ 保持任意下确界和有向上确界。

为了刻画形如 $\mathfrak{F}L$ 的格，回忆一下，偏序集 X 中的元素 x 是紧的，如果对于所有具有上确界的有向子集 $S \subseteq X$，$x \leq \bigvee S$ 都蕴含对于某个 $y \in S$ 有 $x \leq y$。将偏序集 X 视为范畴时，元素 $x \in X$ 是紧的，当且仅当它是有限可呈的。主滤子正是 $\mathfrak{F}L$ 的紧元，因此 $\mathfrak{F}L$ 中的每个元素都是紧元的有向上确界。也就是说，$\mathfrak{F}L$ 是代数格：

定义 5.2。 偏序集 X 若满足以下条件，则称为<同代数格 :
(i) X 是完备格。(ii) X 中的每个元素都是由一个紧元有向集的上确界给出的。
我们用 **AlgL** 表示代数格及保持有向上确界和所有下确界的映射所构成的范畴。

注记 5.3。 偏序集（视为小范畴）是局部有限呈现的，当且仅当它是代数格 [13, 例 1.10(5)]。此外，**AlgL** 的态射恰好对应于局部有限呈现范畴的态射。事实上，由于余完备小范畴是具有所有上确界的预序 [44, 命题 V.2.3]，，因而等价于一个完备格（作为范畴），所以每个小的局部有限呈现范畴都等价于一个代数格。

给定代数格 X，令 KX 为 X 的紧元集合，并赋予其诱导序。注意，KX 具有有限上确界（在 X 中计算），因此 $(KX)^{\mathrm{op}}$ 是一个（交）半格。现在，考虑 **AlgL** 中的态射 $f\colon X \to Y$。由于 f 保持所有下确界，它有一个左伴随 f^*。进而，f^* 保持紧元，因为 f 保持有向上确界。若 $Kf\colon KY \to KX$ 表示 f^* 在紧元上的限制，则其序对偶 $(Kf)^{\mathrm{op}}\colon (KY)^{\mathrm{op}} \to (KX)^{\mathrm{op}}$ 是一个半格态射。由此我们得到一对函子

$$\mathfrak{F}(-)\colon \mathbf{SL}^{\mathrm{op}} \leftrightarrows \mathbf{AlgL} : K(-)^{\mathrm{op}}.$$

这些函子互为拟逆，从而在 **SL** 和 **AlgL** 之间给出对偶等价，见 [48]。特别地，对于每个半格 L 和代数格 X，都有自然同构 $L \cong (K(\mathfrak{F}L))^{\mathrm{op}}$ 以及 $X \cong \mathfrak{F}(K(X)^{\mathrm{op}})$。

注记 5.4。 对于任意代数格 X，集合 $\mathbf{AlgL}[X,2]$ 配备逐点序后，同构于 $(KX)^{\mathrm{op}}$。事实上， $K(-)^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{AlgL} \to \mathbf{SL}^{\mathrm{op}}$ 自然同构于函子 $\mathbf{AlgL}[-,2]$（适当余限制后的函子）。换言之，半格与代数格之间的对偶性由对偶对象 2 诱导，其中 2 可视为半格，也可视为代数格。

5.2. **有限完备且局部有限可呈范畴**。 设 $\mathcal{D}$是一个有限完备小范畴。回想一下，我们用 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 表示函子范畴 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 的全子范畴，其中由 lex- 态射组成，即由保持有限极限的函子$\mathcal{D}\to\mathbf{Set}$ 组成。

注 5.5。 将偏序集视为一个（小）范畴时，它是有限完备的，当且仅当它是半格。半格之间的映射是半格态射，当且仅当它是有限极限保持态射。

推广注 5.1，由于可表函子保持极限，逆变 Yoneda嵌入分解为

$$\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \mathbf{y}\ } \mathrm{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}] \xhookrightarrow{\ \iota\ } [\mathcal{D},\mathbf{Set}]\,.$$

在 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中，极限和余极限存在且按逐点计算；由于极限与（有限）极限交换，$\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 在 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中对极限封闭。同样，由于 Set 中的滤过余极限与有限极限交换，若 $f\in[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 是由保持有限极限的函子构成的滤过余极限，则 f自身也保持有限极限。由于 $\iota\colon \mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]\hookrightarrow[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 是满包含，我们可知 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中的滤过余极限存在，并且由 ι保持。换言之，$\mathbf{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 在 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中对滤过余极限封闭。此外，$\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 也有有限余极限，不过它们并非按逐点计算（例如参见 [35, 定理 VI.1.6], , 其中也证明了 $\mathbf{y}:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 保持有限余极限）。因此，$\mathbf{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 是一个余完备范畴。

回顾一下，紧元的范畴论类比是有限可呈对象。根据米田引理，所有可表函子在 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$, 中都是有限可呈的，因此在有限极限保持 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中也是如此，因为包含 ι 保持滤过余极限。[13] 由于每个对象 F 在 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中都是可表函子典范图的余极限

$$(\mathbf{y}/F) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \mathbf{y}\ } \mathrm{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}] \xhookrightarrow{\ \iota\ } [\mathcal{D},\mathbf{Set}]\,,$$

而当 F 是有限极限保持态射时，后者是滤子的（例如参见 [35, 命题 VI.1.3]），因此，有限极限保持 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 中的每个对象都是可表对象（因而也是有限可呈对象）的滤过余极限。由此，有限极限保持 $[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 是一个局部有限呈现范畴。

反过来，给定一个局部有限可呈范畴 $\mathcal{E}$，其由有限可呈对象构成的全子范畴 $\mathcal{E}_{\mathrm{fp}}$ 是本质小的，并且对有限余极限封闭，例如参见 [13, 命题 1.3 和注记 1.9]。如有必要，用一个小骨架替换 $\mathcal{E}_{\mathrm{fp}}$， $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}}$ 是一个小的有限完备范畴，并且存在一个范畴等价

$$\mathcal{E} \ \simeq\ \mathrm{lex}\left[\mathcal{E}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}\right],$$

例如参见 [13, 定理 1.46]。特别地，一个范畴是局部有限呈现范畴，当且仅当它等价于对某个有限完备小范畴 $\mathcal{D}$ 取 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 所得到的范畴。因此，每个局部有限呈现范畴都是完备且良幂的。

现在我们转向 lfp 范畴的态射。回顾定义 2.6，它们是 lfp 范畴之间保持极限的有限型函子。每个有限极限保持态射

[13]事实上，由于幂等元在 $\mathcal{D}$ 中分裂，$\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 的有限可呈对象恰好是可表对象，参见 [16, 命题 6.5.4 和引理 6.5.6]。

$f\colon\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ 诱导出一个函子

$$f^{*}\colon \operatorname{lex}[\mathcal{D}',\mathbf{Set}]\to\operatorname{lex}[\mathcal{D},\mathbf{Set}],\ f^{*}G\coloneqq G\circ f. \tag{4}$$

函子 $-\circ f\colon\ [\mathcal{D}',\mathbf{Set}]\to[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 保持所有极限和余极限，因为它既是右伴随又是左伴随（参见例如 [36, 例 A4.1。4]）。因此， f^{*} 保持极限和滤过余极限，因为 $\mathbf{lex}[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 和 $\mathbf{lex}\ [\mathcal{D}',\mathbf{Set}]$ 在相应的函子范畴中对极限和滤过余极限封闭。也就是说， f^{*} 是 lfp 范畴的态射。

现在我们将看到，每个 lfp 范畴的态射 $F\colon\ \mathcal{E}\to\mathcal{F}$ 都源自如下形式的一个态射： f^{*}，其中 $f\colon\ \mathcal{F}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}}\to\mathcal{E}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}}$ 是一个有限极限保持态射。为此，我们回顾 lfp 范畴的态射的以下已知刻画：

命题 5.6。 *lfp 范畴之间的函子是 lfp 范畴的态射，当且仅当它具有一个保持有限可呈对象的左伴随。*

证明。根据局部有限可呈范畴的伴随函子定理（参见 [13, 1.66]），局部有限可呈范畴之间任何保持极限的有限元函子都是右伴随。此外，局部有限可呈范畴之间的右伴随是有限元函子，当且仅当其左伴随保持有限可呈对象（参见同上中的证明）。□

注 5.7。 令 $f\in\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathcal{D}']$。由于 $\mathbf{lex}[\mathcal{D}',\mathbf{Set}]$ 是余完备的，函子 $-\circ f$ 在 $\mathbf{lex}\ [\mathcal{D}',\mathbf{Set}]\to[\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 上的限制有一个左伴随 $f_{!}$，它将 F 映为左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_{\mathbf{y}f}(\mathbf{y}f)(F)=\mathrm{Lan}_{f}F$ [45, 定理 I.5.2]。于是， f^{*} 的左伴随由 $f_{!}$ 在 $\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 上的限制给出。

若 $F\colon\ \mathcal{E}\to\mathcal{F}$ 是局部有限可呈范畴的态射，则根据命题 5.6，它有一个左伴随，该左伴随限制为一个有限极限保持态射 $f\colon\ \mathcal{F}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}}\to\mathcal{E}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}}$。于是， F 通过等价 $\mathcal{E}\cong\mathbf{lex}\left[\mathcal{E}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}},\mathbf{Set}\right]$ 和 $\mathcal{F}\cong\mathbf{lex}\left[\mathcal{F}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}},\mathbf{Set}\right]$ 对应于 f^{*}。特别地，局部有限可呈范畴的每个态射 $\mathbf{lex}\ [\mathcal{D}',\mathbf{Set}]\to\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$ 都自然同构于某个形如 f^{*} 的态射，其中 $f\colon\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ 是有限极限保持态射。

注 5.8。 在定义 3.22 中，当其为有限性时，我们将 lfp 范畴之间的伴随 $L\dashv R$ 称为 R *有限可达* 。根据命题 5.6，lfp 范畴的态射可以刻画为有限可达伴随（中的右伴随）。

记 $\mathbf{LFP}$ 为如下 2-范畴：其 0-胞腔（对象）是局部有限可呈范畴，其 1-胞腔（态射）是 lfp 范畴的态射，其 2-胞腔是自然变换。此外，记 $\mathbf{Lex}$ 为由小有限完备范畴、lex-态射和自然变换构成的 2-范畴。鉴于上述内容，存在一个从 $\mathbf{Lex}^{\mathrm{op}}$（反转 1-胞腔）到 $\mathbf{LFP}$ 的 2-函子，将 $\mathcal{D}$ 送至 $\mathbf{lex}\ [\mathcal{D},\mathbf{Set}]$。*Gabriel-Ulmer* 对偶 断言，后者是一个双等价 $\mathbf{Lex}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{LFP}$ （左双伴随为 $\mathcal{E}\mapsto\mathcal{E}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{fp}}$）。Gabriel 和 Ulmer 在 [27] 通过对象层面的论证建立了这一点，随后又将其扩展为完整对偶性，参见 [46, 12]。

6. Functorial semantics for cartesian theories

在函子语义思想的基础上，人们提出了局部有限可呈范畴的逻辑刻画，参见例如 [13]。我们回顾 Coste [20], 提出的方法：局部有限可呈范畴恰好对应于笛卡尔理论的模型范畴（§2.2 中的意义）。我们主要遵循 [36, §D1] 中的表示。

6.1. 句法范畴与函子语义。 范畴逻辑的一个基本思想是，应将理论 $\mathbf{T}$ 视为一个范畴，即它的句法范畴，而将$\mathbf{T}$的模型视为定义在该范畴上的某些函子。下文的定理 6.3 和推论 6.5 将确立笛卡尔理论及其基于$\mathbf{Set}$的模型之间的这些等价关系。

定义 6.1（句法范畴）。 笛卡尔理论 **T**的句法范畴 $\mathcal{T}$ 定义如下。

对象： 是上下文中的公式 $\Gamma ::= \varphi$，其中变量按重命名视为相同（即 α等价），记作 $\{\Gamma \mid \varphi\}$。

态射： 从 $\{\vec{x} \mid \varphi\}$ 到 $\{\vec{y} \mid \psi\}$ 的态射是从 $\{\vec{x} \mid \varphi\}$ 到 $\{\vec{y} \mid \psi\}$的、可由**T**证明的函数关系的**T**可证等价类，也就是说，是上下文中的公式 $\vec{x}, \vec{y} ::= \theta$ 的**T**可证等价类；这些公式在**T** 上是笛卡尔的，并且**T** 证明以下序列式：

$$\begin{array}{rll} \theta & \vdash_{\vec{x},\vec{y}} & \varphi \wedge \psi \\ \theta \wedge \theta[\vec{z}/\vec{y}] & \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} & \vec{z} \doteq \vec{y} \\ \varphi & \vdash_{\vec{x}} & (\exists \vec{y})\theta \end{array}$$

我们用 $[\vec{x}, \vec{y} \mid \theta]$ 表示 $\vec{x}, \vec{y}::= \theta$的等价类。

注意，上面的最后一个序列式相对于倒数第二个序列式是笛卡尔的。显然， $\mathcal{T}$是一个范畴。此外:

引理 6.2. 笛卡尔理论的句法范畴是有限完备的。

证明概要。 终对象由空上下文中的公式 $\top$ 给出，二元积由二元合取给出。等化子通过二元合取和（可证唯一的）存在量词构造。参见 [36, 引理 D1.4.2]。□

设 **T** 为一个笛卡尔理论。给定一个模型 $M \in$ **Mod(T)**，我们可以为句法范畴 $\mathcal{T}$ 的每个对象 $\{\vec{x} \mid \varphi\}$ 关联一个集合 $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \in$ **Set**。进一步地，每个态射 $[\vec{x}, \vec{y} \mid \theta]$: $\{\vec{x} \mid \varphi\} \to \{\vec{y} \mid \psi\}$ 都会诱导出一个函数关系

$$[\![\vec{x}, \vec{y} \mid \theta]\!]_M \longhookrightarrow [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \times [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_M \tag{5}$$

因此也是某个函数 $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \to [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_M$的图。这些赋值确定了一个函子 F_M: $\mathcal{T} \to$ **Set** ，其定义在 **T**的句法范畴上。不难看出， F_M 是一个有限极限保持态射。事实上,

定理 6.3 ([36,定理 D1.4。7])。 对于每个笛卡尔理论 **T**，赋值

$$\mathbf{Mod}(\mathbf{T}) \to \mathrm{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]\,, \quad M \mapsto F_M$$

是范畴等价的一部分。

在上述对定理 6.3 的讨论中，我们没有提及态射。在下面的引理中，我们归纳了一些基本事实，说明 **Mod(T)** 中的同态与 **lex** $[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]$ 中的自然变换之间的关系。

引理 6.4. 设 $\ell\colon N \to M$ 是 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 中的一个态射，并设 $\lambda\colon F_N \to F_M$ 是在定理 *6.3* 中的等价下所对应的自然变换。那么

(1) $M(\tau) = [\![y : \tau \mid \top]\!]_M = F_M\{y : \tau \mid \top\}$ *and* $\ell^\tau = \lambda_{\{y:\tau \mid \top\}}$ *for each sort* $\tau \in \mathrm{Sort}(\mathbf{\Sigma}$

此外，给定 $\vec{y} = y_1\colon \tau_1, \ldots, y_n\colon \tau_n$,

(2) $F_M\{\vec{y} \mid \top\} = \prod_{i=1}^n F_M\{y_i : \tau_i \mid \top\}$,

(3) $\lambda_{\{\vec{y} \mid \top\}} = \prod_{i=1}^n \lambda_{\{y_i:\tau_i \mid \top\}}$.

特别地，假设 $\vec{a} \in [\![\vec{y} \mid \top]\!]_N$，我们有

$$(\ell^{\tau_1}(a_1), \ldots, \ell^{\tau_n}(a_n)) \;=\; \lambda_{\{\vec{y} \mid \top\}}(\vec{a}) \;\in\; [\![\vec{y} \mid \top]\!]_M.$$

证明。 第 **(1)** 项由 M 和 ℓ 中 F_M 与 λ 的定义可得。

(2) 根据引理 6.2，在 $\mathcal{T}$ 中我们有

$$\{\vec{y} \mid \top\} \;\cong\; \{y_1 : \tau_1 \mid \top\} \times \cdots \times \{y_n : \tau_n \mid \top\}$$

因此

$$F_N\{\vec{y} \mid \top\} \;\cong\; F_N\{y_1 : \tau_1 \mid \top\} \times \cdots \times F_N\{y_n : \tau_n \mid \top\}$$

因为 F_N 保持有限极限。

(3) 由 $\lambda\colon\ F_N \to F_M$ 的自然性，对于 $i = 1$，....., n 我们有

$$\begin{array}{ccc} F_N\{\vec{y} \mid \top\} & \xrightarrow{F_N(\pi_i)} & F_N\{y_i : \tau_i \mid \top\} \\ {\scriptstyle \lambda_{\{\vec{y}\mid\top\}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{\{y_i:\tau_i\mid\top\}}} \\ F_M\{\vec{y} \mid \top\} & \xrightarrow{F_M(\pi_i)} & F_M\{y_i : \tau_i \mid \top\} \end{array}$$

其中 $\pi_i\colon\ \{\vec{y} \mid \top\} \to \{y_i :\ \tau_i \mid \top\}$ 是 $\mathcal{T}$ 中的第 i 个投影。但由于 F_N 和 F_M 保持有限极限，箭头 $F_N(\pi_i)$ 和 $F_M(\pi_i)$ 也都是投影，结论得证。□

定理 6.3 与例 2.3 以及 Gabriel-Ulmer 对偶性（第5.2节）结合起来，得到以下结果；该结果可以看作是对 Gabriel-Ulmer 对偶性的逻辑解读。

推论 6.5。 以下陈述成立：

(1) 一个小范畴是有限完备的，当且仅当它等价于某个笛卡尔理论的句法范畴。*(2)* 一个范畴是局部有限可呈现的，当且仅当它等价于某个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$ 的 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 。

证明。 (1) 一个方向由引理 6.2 得出。反之，若 $\mathcal{C}$ 是小范畴且有限完备的，则根据例 2.3，存在一个理论 $\mathbf{T}$，使得 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{C},\mathbf{Set}] \cong \mathbf{Mod(T)}$。应用定理 6.3 可得 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{C},\mathbf{Set}] \cong \mathbf{lex}\,[\mathcal{T},\mathbf{Set}]$，因此根据 Gabriel-Ulmer 对偶性，$\mathcal{C} \cong \mathcal{T}$。（或者注意到，等价 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{C},\mathbf{Set}] \cong \mathbf{lex}\,[\mathcal{T},\mathbf{Set}]$ 限制为有限可呈对象上的满子范畴之间的等价，而这反过来给出 $\mathcal{C} \cong \mathcal{T}$。）

(2) 这由例 2.3 和定理 6.3 推出，并结合如下事实：根据 Gabriel-Ulmer 对偶性，一个范畴是局部有限可呈的，当且仅当它等价于形如 $\mathbf{lex}\,[\mathcal{C},\mathbf{Set}]$ 的范畴，其中 $\mathcal{C}$ 是某个小的有限完备范畴。□

特别地，对于任意签名 $\mathbf{\Sigma}$，定理 6.3 蕴含 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 是局部有限可呈的，因为

$$\mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma}) \;\cong\; \mathrm{lex}\,[\mathcal{T}(\mathbf{\Sigma}), \mathbf{Set}]\,, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{T}\mathbf{(\Sigma)}$ 是没有公理的笛卡尔理论 $\mathbf{T(\Sigma)}$ 在 $\mathbf{\Sigma}$ 中的句法范畴。$\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中的极限和滤过余极限都很简单：它们在 $\mathbf{Set}$ 中计算；例如参见 [13,注记 5.1]。笛卡尔理论的模型范畴也具有相同性质：如果 $\mathbf{T}$ 是签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中的任意笛卡尔理论，那么对象上恒等函子 $\boldsymbol{t}\colon\ \mathcal{T}\mathbf{(\Sigma)} \to \mathcal{T}$ 是一个有限极限保持态射，而相应的 lfp 范畴的态射

$$\boldsymbol{t}^*\colon \mathrm{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}] \to \mathrm{lex}\,[\mathcal{T}(\mathbf{\Sigma}), \mathbf{Set}]$$

与包含函子 $\mathbf{Mod(T)} \hookrightarrow \mathbf{Str(\Sigma)}$ 重合（依据定理 6.3）。因此，

引理 6.6。 对于任意笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，包含函子 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}) \hookrightarrow \mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})$ 是 *lfp* 范畴的态射。特别地，$\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 在 $\mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})$ 中关于极限和滤过余极限是闭的。[14]

[14]事实上，对于任意一阶理论 $\mathbf{T}$，$\mathbf{Mod(T)}$ 在 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中对滤过余极限封闭；若它在 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中对有限极限封闭，则也对任意极限封闭。然而，这些事实的证明远比笛卡尔理论的情形困难；参见 [13, 定理 5.20 和定理 5.23]。

6.2. **有限可呈模型**。 句法范畴结合米田引理，使我们能够将 lfp 范畴中的有限可呈对象视为由“生成元与关系”所呈示的对象。这将例 2.7 和事实 2.8 扩展到了笛卡尔理论的模型范畴。

固定任意的笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，并记 $\mathcal{T}$ 为其句法范畴。

记号 6.7。 给定 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathcal{T}$，我们将 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \in \mathbf{Mod(T)}$ 记作与可表函子 $\mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathsf{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]$ 相对应的模型（根据定理 6.3）。

回顾第5.2节，$\mathsf{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]$ 的有限可呈对象恰好是可表函子。因此，$\mathbf{Mod(T)}$ 的有限可呈对象在同构意义下恰好是形如 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 的对象。

注记 6.8。 在同构意义下，我们总可以假设有限可呈模型具有 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 的形式，其中 φ 是无量词的 （即有限个原子公式的合取）。见 [36,引理 D1.4.4(ii)]。

备注 6.9。 鉴于注记 2.2，如果对于某个位于 $\mathbf{\Sigma}$ 中的其他笛卡尔理论 $\mathbf{U}$ ，$\mathbf{Mod(T)} = \mathbf{Mod(U)}$，那么 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{U}$ 证明相同的序列式。特别地，一个语境中的公式 $\vec{x} ::= \varphi$ 在 $\mathbf{T}$ 上是笛卡尔的，当且仅当它在 $\mathbf{U}$上是笛卡尔的，并且 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{U}$ 各自的句法范畴相同。

由此可知，给定 $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathbf{Str(\Sigma)}$，使得 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(U)}$ 对某个 $\mathbf{U}$成立，则有限可表示模型 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \in \mathcal{E}$ 与满足 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(U)}$ 的理论 $\mathbf{U}$ 的选择无关。

6.2.1. 米田引理。 考虑一个模型 $M \in \mathbf{Mod(T)}$，并回顾定理 6.3：与 M相关联的函子 $F_M \in$有限极限保持 $[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]$将 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathcal{T}$映射到 $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$。米田引理给出一个双射

$$[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \;=\; F_M(\{\vec{x} \mid \varphi\}) \;\cong\; \mathsf{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]\,[\mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\},\, F_M]\,. \tag{7}$$

在一个方向上，给定 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$，唯一的自然变换

$$F_M(-)(\vec{a}) \;:\; \mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\} \;\longrightarrow\; F_M \tag{8}$$

对应于 $\vec{a}$，其在 $\{\vec{y} \mid \psi\} \in \mathcal{T}$ 处的分量定义为

$$\mathcal{T}\,[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{\vec{y} \mid \psi\}] \to F_M(\{\vec{y} \mid \psi\}), \quad \theta \mapsto F_M(\theta)(\vec{a}).$$

反之，给定任意 $\lambda\colon \mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\} \to F_M$，令 $\vec{a} := \lambda_{\{\vec{x}\mid\varphi\}}(\mathrm{id}) \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$。于是我们有 $\lambda = F_M(-)(\vec{a})$。

将等式 (7) 与

$$\mathsf{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]\,[\mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\},\, F_M] \;\cong\; \mathbf{Mod}(\mathbf{T})\,[\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle,\, M] \tag{9}$$

定理 6.3 中的双射结合起来，可得到事实 2.8 的以下推广。

引理 6.10。 存在一个双射

$$[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \;\cong\; \mathbf{Mod}(\mathbf{T})\,[\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle, M]\,.$$

由于我们经常在集合 $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$、同态集 $\mathbf{Mod(T)}\,[\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle, M]$以及有限极限保持 $[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]\,[\{\vec{x} \mid \varphi\}, F_M]$之间切换，因此引入以下术语会很方便：

定义 6.11。 给定态射 $h\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$ in $\mathbf{Mod(T)}$，以及与 $\vec{x}$ 具有相同类型的 $\vec{a} \in M$，当 h 是式 (8) 中的自然变换 $F_M(-)(\vec{a})$ 在式 (9) 的双射下的像时，我们称 h 将 $\vec{x}$ 映到 $\vec{a}$，或称 h 由 $\vec{a}$诱导。

6.2.2. 生成元。 定义 6.11 中的术语表明，模型 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 是由变量 $\vec{x} = x_1$、.....、x_n“生成的”。现在我们将使这一直觉变得精确。

式 (7) 中的双射给出了有限可呈模型的如下描述：对于每个类型 τ,

$$\begin{array}{rcl} \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\tau) & = & [\![y : \tau \mid \top]\!]_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle} \\ & \cong & \mathrm{lex}\,[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]\left[\mathbf{y}\{y : \tau \mid \top\}, F_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}\right] \\ & \cong & \mathcal{T}\,[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{y : \tau \mid \top\}]\,. \end{array}$$

假设 $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$，下一个引理表明，我们可以将 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$视为由元素 $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 生成的对象，这些元素分别对应于投影ϖ_i: $\{\vec{x} \mid \varphi\} \to \{x_i \mid \top\}$ 中的 $\mathcal{T}$，这类似于在范畴代数中，自由代数的生成元通过投影来建模的方式。这意味着，定义域为 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 的同态完全由其在 $\dot{x}_i$'s 上的取值确定，而这对于我们在第 §9 节中使用词构造至关重要。

引理 6.12。 设 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathcal{T}$满足 $\vec{x} = x_1$、...、x_n。存在 $\dot{x}_1$、...、$\dot{x}_n \in \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$，使得对于任意 $M \in \mathbf{Mod}(\mathbf{T})$、任意同态 h: $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$以及任意 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$,

$$h \text{ takes } \vec{x} \text{ to } \vec{a} \iff h(\dot{x}_i) = a_i \text{ for all } i = 1, \ldots, n.$$

证明。 固定任意的 $i \in \{1, \ldots, n\}$。假设 y是类型为 τ_i的变量，并考虑由公式给出的$\mathcal{T}$-态射 ϖ_i: $\{\vec{x} \mid \varphi\} \to \{y\colon \tau_i \mid \top\}$

$$\vec{x}, y \ ::= \ \varphi \wedge x_i \doteq y\ .$$

我们将 $\dot{x}_i \in \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\tau_i)$（类型为 τ_i）定义为 ϖ_i 在该双射下的像

$$\mathcal{T}\,[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{y : \tau_i \mid \top\}] \ \cong \ \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\tau_i).$$

现在，令 h: $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$和 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$满足：对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$， $h(\dot{x}_i) = a_i$，并假设 h 将 $\vec{x}$映射到 $\vec{b} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$。函数

$$F_M(\varpi_i) \ : \ [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \longrightarrow M(\tau_i) = [\![y : \tau_i \mid \top]\!]_M$$

的图为 $[\![\vec{x}, \ y \mid \varphi \ \wedge \ x_i \doteq y]\!]_M$，因此它是第 i个投影。因此，自然变换 $F_M(-)(\vec{b})$: $\mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\} \to F_M$ 将 $\varpi_i \in \mathcal{T}\,[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{y\colon \tau_i \mid \top\}]$ 映射到

$$F_M(\varpi_i)(\vec{b}) \ = \ b_i \ \in \ M(\tau_i)\ .$$

由引理 6.4 和 $\dot{x}_i$ 的定义可得， $h(\dot{x}_i) = F_M(\varpi_i)(\vec{b}) = b_i$。该陈述随即成立，因为 $h(\dot{x}_i) = a_i$ 当且仅当 $a_i = b_i$。 □

注记 6.13。设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个（单排序的）纯关系签名。那么可以证明，在$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$中，结构 $\langle \vec{x} \mid \top \rangle$（其 $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$）的载体为 $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$（其中各个 $\dot{x}_i$两两不同）。现在，对于任意上下文中的公式 $\{\vec{x} \mid \varphi\}$，在$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$中都存在一个满态射 $\langle \vec{x} \mid \top \rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$，参见下文注记 8.4。这在载体层面诱导出一个满射，因此 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 的载体为 $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$（但这次各个 $\dot{x}_i$不必两两不同）。这一结论可推广到多类关系签名，但对于非纯关系签名，或者考虑非空（笛卡尔的）理论时，通常不再成立。

证明。 我们首先证明， $\langle \vec{x} \mid \top \rangle$ 的载体是 $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$。

由引理 6.12 可知， $\langle \vec{x} \mid \top \rangle$ 的载体包含 $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$。对于逆命题的包含关系，令 $\mathcal{T}$ 为$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$的句法范畴，即 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的空理论（见§6.1中的公式（6））。回忆一下， $\langle \vec{x} \mid \top \rangle$ 的载体为

$$\mathcal{T}\,[\{\vec{x} \mid \top\}\,, \{y \mid \top\}]$$

令 $[\vec{x}, y \mid \theta]$ 为从 $\{\vec{x} \mid \top\}$ 到 $\{y \mid \top\}$的一个 $\mathcal{T}$-态射。因此**T(σ)**证明

$$\theta \wedge \theta[z/y] \vdash_{\vec{x},y,z} y \doteq z \qquad \text{and} \qquad \vdash_{\vec{x}} (\exists y)\theta$$

我们将证明存在某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $(\vec{x},\ y ::= \theta)$ 与 **T(σ)**-等价于 o

$$\vec{x}, y \ \ ::= \ \ y \doteq x_j \tag{10}$$

鉴于引理 6.12（的证明），这将给出所需结果。我们依赖完备性（注记 2.2）。

我们首先确定 $j \in \{1, \ldots, n\}$。令 N 为 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$，并且不对 $\dot{x}_i$'s 假设任何关系。[15] 由于 **T(σ)** 证明了 $(\exists y)\theta$，因此存在某个$j \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $N \models \theta(\dot{x}_1, \ldots\ldots, \dot{x}_n, \dot{x}_j)$。

现在我们证明 θ 的每个模型都是 (10) 的模型。令 M 为一个 $\boldsymbol{\sigma}$-结构，并令 $(\vec{a},\ b) \in [\![\vec{x},\ y \mid \theta]\!]_M$。由上文 N 的定义可知，将 $\dot{x}_i$ 映射到 a_i 的函数 $N \to M$ 是一个同态。由于 θ 是一个正存在公式，我们得到 $M \models \theta(\vec{a},\ a_j)$（参见例如 [31, 定理 2.4.3(a)]）。因此 $b = a_j$，因为 $(\exists y)\theta$ 是笛卡尔的。

反过来，我们证明 (10) 的每个模型都是 θ 的模型。设 M 是一个 $\boldsymbol{\sigma}$-结构，并设 $\vec{a} \in M$。由于 **T(σ)** 证明了 $(\exists y)\theta$，我们得到 $(\vec{a}, b) \in [\![\vec{x}, y \mid \theta]\!]_M$，其中某个 $b \in M$。然后，按照上面的类似推理可得 $b = a_j$。

因此，$\langle \vec{x} \mid \top \rangle$ 的载体是 $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$。接下来需要证明这些 $\dot{x}_i$ 两两不同。根据（引理 6.12 的证明），这等价于证明：对于如上所述的给定 θ，存在一个如 (10) 中的 唯一的 j。但由于 $(\exists y)\theta$ 是笛卡尔的，j 是唯一的。□

6.2.3. 同态。固定一个模型 $M \in$**Mod(T)**。我们讨论逗号范畴 $\mathbf{Mod(T)}_{\mathrm{fp}}/M$ 中箭头的逻辑描述，后文将反复使用这一描述。设 h: $\langle \vec{y} \mid \psi \rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 是 **Mod(T)** 中的一个同态，对应的 $\mathcal{T}$-态射为 $[\vec{x}, \vec{y} \mid \theta(\vec{x}, \vec{y})]$，并设 k: $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$ 是 **Mod(T)** 中的一个箭头：

$$\{\vec{y} \mid \psi\} \xleftarrow{[\vec{x},\vec{y} \mid \theta(\vec{x},\vec{y})]} \{\vec{x} \mid \varphi\}$$

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{y} \mid \psi \rangle & \xrightarrow{\quad h \quad} & \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \\ & {\scriptstyle k \circ h} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle k} & \\ & M & \end{array}$$

下面的引理 6.14 表明，若 k 将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$，那么复合 $k \circ h$会将 $\vec{y}$ 映射到唯一的 $\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_M$，使得 $M \models \theta(\vec{a}, \vec{b})$。

引理 6.14。给定上述的 h、θ，令 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$和 $\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_M$。那么 $M \models \theta(\vec{a}, \vec{b})^{\rightarrow}$ 当且仅当下方的三角形交换，其中 k 将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{a}$，而 ℓ 将 $\vec{y}$ 映射到 b。

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{y} \mid \psi \rangle & \xrightarrow{\quad h \quad} & \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \\ & {\scriptstyle \ell} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle k} & \\ & M & \end{array}$$

[15] 这个结构应当是 $\langle \vec{x} \mid \top \rangle$，但我们不必如此精确。

证明。 我们应用定理 6.3。采用公式 (8) 中的记号，当且仅当下图表交换时，有 $\ell = k \circ h$ 。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \psi\} & \xrightarrow{\mathbf{y}[\vec{x},\vec{y}|\theta(\vec{x},\vec{y})]} & \mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\} \\ & {\scriptstyle F_M(-)(\vec{b})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle F_M(-)(\vec{a})} & \\ & F_M & \end{array} \tag{11}$$

由 F_M 的函子性，式 (11) 中最右侧的路径为

$$F_M((-) \circ [\vec{x}, \vec{y} \mid \theta(\vec{x}, \vec{y})])(\vec{a}) \quad = \quad F_M(-)(F_M([\vec{x}, \vec{y} \mid \theta(\vec{x}, \vec{y})])(\vec{a})).$$

因此，当且仅当以下条件成立时，式 (11) 中的三角形交换

$$\vec{b} \quad = \quad F_M([\vec{x}, \vec{y} \mid \theta(\vec{x}, \vec{y})])(\vec{a}),$$

这又等价于 $(\vec{a},\ \vec{b}) \in [\![\vec{x},\ \vec{y} \mid \theta(\vec{x},\ \vec{y})]\!]_M$ （回忆上面的等式 (5)，$F_M([\vec{x}, \vec{y} \mid \theta(\vec{x},\ \vec{y})])$ 是图 $[\![\vec{x},\ \vec{y} \mid \theta(\vec{x},\ \vec{y})]\!]_M$ 的函数 $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M \to [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_M$）。□

以下简单且意料之中的事实是引理 6.14 的直接推论。

注记 6.15。 设 $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$，其中 x_j 的类型为 τ_j。那么 $\langle \vec{x} \mid \top \rangle$ 是以下对象的余积：$\langle x_1 :\ \tau_1 \mid \top \rangle, \ldots, \langle x_n :\ \tau_n \mid \top \rangle$，其所在范畴为 **Mod(T)**。

证明。 我们证明，$\langle \vec{x} \mid \top \rangle$ 是 $\langle x_j$ 的余积：$\tau_j \mid \top \rangle$，其余积注入 ι_j由 $\mathfrak{T}$-态射 ϖ_j：$\{\vec{x} \mid \top\} \to \{x_j :\ \tau_j \mid \top\}$ 诱导而来，正如引理 6.12 的证明中所述。

令 $M \in \mathbf{Mod(T)}$，并对每个 $j = 1, \ldots, n$给定态射 $h_j\colon\ \langle x_j \mid \tau_j \rangle \to M$。根据引理 6.12，令 $c_j := h_j(\dot{x}_j) \in M(\tau_j)$。令 $k\colon\ \langle \vec{x} \mid \top \rangle \to M$将 x_j映射到 c_j。由引理 6.14 可知，对每个 $j = 1, \ldots, n$都有 $k \circ \iota_j = h_j$。此外，给定$k'\colon\ \langle \vec{x} \mid \top \rangle \to M$，使得对于每个 $j = 1, \ldots, n$都有 $k' \circ \iota_j = h_j$，我们有 $k'(\dot{x}_j) = (k' \circ \iota_j)(\dot{x}_j) = c_j = k(\dot{x}_j)$。因此，根据引理 6.12，有 $k' = k$ 。□

引理 6.14 将经常以下列形式使用：

推论 6.16。 设 $\{\vec{x} \mid \varphi\}$、$\{\vec{y} \mid \psi\} \in \mathfrak{T}$ 与 $\vec{x}$ 具有相同的类型，且 $\vec{a}$、$\vec{b} \in M$ 分别与 $\vec{y}$ 具有相同的类型。以下陈述等价：

(i) 存在一个同态 h 使下面的三角形交换，

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{y} \mid \psi \rangle & \xrightarrow{\quad h \quad} & \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \\ & {\scriptstyle \ell} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle k} & \\ & M & \end{array}$$

其中 k 将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{a}$，而 ℓ 将 $\vec{y}$ 映射到 $\vec{b}$。

(ii) $M \vDash \theta(\vec{a}, \vec{b})$，$\theta \in \mathfrak{T}[\vec{x}, \vec{y}]$ 且 $\forall [\theta(\vec{x}, \vec{y}) \mid \psi]$。（注意，后一个公式可能是无限的。）

6.3. **解释与一个传递结果**。 回想推论 6.5，Gabriel-Ulmer 对偶性可视为语法-语义对偶。因此，lfp 范畴的态射会诱导出公式的解释，下面我们将对此作出说明。

考虑分别具有句法范畴 $\mathfrak{T}$ 和 $\mathcal{U}$的笛卡尔理论**T** 和**U** 。根据 Gabriel-Ulmer 对偶性，对于每个 lfp 范畴的态射 $R\colon$ **Mod(U)** $\to$ **Mod(T)**，存在一个有限极限保持态射 $\boldsymbol{t}\colon$ $\mathfrak{T} \to \mathcal{U}$ ，使得 R 通过定理 6.3 对应于函子 $\boldsymbol{t}^*\colon$ 有限极限保持 $[\mathcal{U}, \mathbf{Set}] \to$ 有限极限保持 $[\mathfrak{T}, \mathbf{Set}]$。给定一个模型 $M \in$ **Mod(U)**和 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathfrak{T}$，公式 $\vec{x} ::= \varphi$ 在 RM 中的解释为

$$[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_{RM} \quad = \quad F_{RM}\{\vec{x} \mid \varphi\} \quad \cong \quad F_M \boldsymbol{t}\{\vec{x} \mid \varphi\} \quad = \quad [\![\boldsymbol{t}\{\vec{x} \mid \varphi\}]\!]_M.$$

特别地，对于签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中**T**的每个类型 τ，

$$(RM)(\tau) \;\cong\; [\![\boldsymbol{t}\{y:\tau \mid \top\}]\!]_M. \tag{12}$$

由此可知，R 诱导出一个解释 $(-)^{\boldsymbol{t}}$：将 $\mathbf{\Sigma}$ 中的（可能是无限性的）一阶公式解释为签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中 $\mathbf{U}$ 的公式。设 $\psi\,(\vec{y})$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个公式，其中$\vec{y} = y_1, \ldots, y_n$。我们通过对 ψ 进行归纳法，定义 $\mathbf{\Gamma}$ 中的公式 $\psi^{\boldsymbol{t}}\,(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$，如下所述。如果 ψ 是原子的，则 $\psi^{\boldsymbol{t}}$ 为 φ，其中 $\boldsymbol{t}\{\vec{y} \mid \psi\} = \{\vec{x} \mid \varphi\}$，并且 $(-)^{\boldsymbol{t}}$ 与命题联结词交换。如果 $\psi = (\exists y{:}\, \tau)\ \psi'\,(\vec{y}, y)$，记 $\{\vec{x} \mid \varphi\}$ 为 $\boldsymbol{t}\{y{:}\ \tau \mid \top\}$，并将 $\psi^{\boldsymbol{t}}\,(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ 定义为

$$(\exists \vec{x})\left(\varphi(\vec{x}) \;\wedge\; (\psi')^{\boldsymbol{t}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x})\right).$$

$\psi = (\forall y)\ \psi'\,(\vec{y}, y)$ 的情形类似。

对于下一个结果，给定 $\mathbf{\Sigma}$ 中的公式 $\psi(y_1, \ldots, y_n)$，其中 y_i 的类型为 τ_i，对于每个 $i = 1, \ldots, n$，我们令 $\{\vec{x}_i \mid \varphi_i\} := \boldsymbol{t}\{y_i{:}\ \tau_i \mid \top\}$。此外，对于 $\mathbf{U}$ 的任意模型 M 以及 $\mathbf{\Sigma}$ 中类型为 τ 的任意对象，令 $\chi^{\tau}_M{:}\ [\![\boldsymbol{t}\{y{:}\ \tau \mid \top\}]\!]_M \to (RM)(\tau)$ 为等式 (12) 中双射的逆。

定理 6.17。在上述情形下，对于所有元组 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in M$，对于每个 $i = 1, \ldots, n$ 均有 $\vec{a}_i \in [\![\vec{x}_i \mid \varphi_i]\!]_M$，

$$RM \models \psi\left(\chi^{\tau_1}_M(\vec{a}_1), \ldots, \chi^{\tau_n}_M(\vec{a}_n)\right) \iff M \models \psi^{\boldsymbol{t}}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

注记 6.18。注意，对于每个正则基数 κ，$(-)^{\boldsymbol{t}}$ 在 $\mathcal{L}_\kappa(\mathbf{\Gamma})$ 中解释 $\mathcal{L}_\kappa(\mathbf{\Sigma})$。特别地，它在 $\mathcal{L}_\omega(\mathbf{\Gamma})$ 中解释 $\mathcal{L}_\omega(\mathbf{\Sigma})$。这是解释与词构造（§9.1）之间的一个关键区别。

7. Hintikka formulae for back-and-forth games

现在我们回到本文的主要目标：证明在适度的附加假设下，给定一个有限可达林地伴随 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$，在外延范畴 $\mathcal{E}$ 上诱导的 R-来回等价关系可由无穷一阶逻辑 $\mathcal{L}_\infty$ 定义（见定理 3.29）。

这分两步完成。首先，我们给出林地范畴 $\mathcal{C}$中博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 的逻辑描述。然后，借助 §6.3 中的工具，我们沿着（R 的加布里埃尔-乌尔默对偶）传递这一描述，从而得到 $\mathcal{E}$ 的签名中的刻画。本节假设存在定义 $\mathcal{C}$ 中路径嵌入的公式；我们将在 §§8–9 中看到，如何在定理 3.29 的假设下满足这一条件。

为了说明对博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 采用逻辑视角的动机，回想一下，在有限 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈的经典情形中，回合数对应于 $\mathcal{L}_\omega$ 中公式的量词秩。这种对应关系可通过*m-Hintikka* 公式建立，参见例如 [23, §2.2]。给定一个关系结构 M 以及来自 M 的元素元组 $\vec{a}$，0-Hintikka 公式 $\varphi^0_{\vec{a}}$ 描述了 $\vec{a}$ 的同构类型。对于$m > 0$，m-Hintikka 公式 $\varphi^m_{\vec{a}}$ 编码了 $\vec{a}$ 经历 m 步扩展（每步添加一个元素）后可达到的同构类型。

在无限 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈中，Hintikka 公式（的无穷变体）在 $\mathcal{L}_\infty$ 中公式的量词秩与博弈中的位置秩 之间建立了对应关系；例如参见 [31, §3.5]。我们在 §7.1 回顾后一个概念，并针对博弈 $\mathcal{G}(a, b)$ 进行调整。接着，我们在 §7.2 为这些博弈构造“Hintikka 公式”。由此得到定理 7.11，即本文的第一个主要结果。该定理指出，给定一个 lfp wooded 范畴 $\mathcal{C}$，如果 $\mathcal{C}$ 中的路径嵌入可由与 $\mathcal{C}$ 相关联的某个签名 $\mathbf{\Gamma}$ 定义，那么

$$a, b \in \mathcal{C} \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma}) \implies \text{Duplicator wins } \mathcal{G}(a, b).$$

最后，在 §7.3 中，我们沿着有限可达林地伴随 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 所诱导的解释，推广这一结果。

7.1. 位置的秩。下面的论述仿照 [31, §3.4]（另见 [41,20.2]）。设 $\mathcal{C}$ 是一个林地范畴。给定定义 3.15 中的博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$，我们为每个序数 α 定义集合 $\mathrm{Rk}(\alpha)$，它由 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 中秩为 $\geq \alpha$ 的位置组成。该定义通过对 α 作归纳给出：

- $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(0)$，当 $(m,\ n) \in \mathcal{W}(a,\ b)$；
- $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha+1)$，当 $(m,\ n) \in \mathcal{W}(a,\ b)$，并且对于从位置 $(m,\ n)$ 出发的每一个 Spoiler 着法，都存在一个 Duplicator 着法，使其到达 $\mathrm{Rk}(\alpha)$ 中的某个位置；
- $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$，对于 α 一个极限序数，如果 $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\beta)$ 对所有 $\beta < \alpha$ 都成立。

注意，对于所有序数 α，$\mathrm{Rk}(\alpha) \subseteq \mathcal{W}(a,\ b)$（这必须在后继序数的条款中加以强制，因为从位置 $(m,\ n)$ 可能不存在可行的 Spoiler 着法）。此外，

引理 7.1。$\mathrm{Rk}(\alpha) \subseteq \mathrm{Rk}(\beta)$ 对于所有 $\beta < \alpha$。

证明。通过对 α 作归纳法，我们证明：对于所有位置 $(m,\ n)$，如果 $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$，那么对于所有 $\beta < \alpha$，$(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\beta)$。0 和极限序数的情形是平凡的。因此我们只考虑后继序数 $\alpha+1$ 的情形。设 $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha+1)$。我们根据 α 分情况讨论。

情形 $\alpha = 0$： 根据定义，这是显然的，因为 $\mathrm{Rk}(0) = \mathcal{W}(a,\ b)$。

情形 $\alpha = \beta + 1$： 由于 $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha+1)$，在 Spoiler 的每一步行动之后，都存在一步复制者行动到达位置 $(m',\ n') \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。根据归纳假设，所有这样的 $(m',\ n')$ 都属于 $\mathrm{Rk}(\beta)$。因此，根据定义，$(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\beta+1)$，结论由归纳假设得出。

情形 α 极限序数：由于 $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha+1)$，在 Spoiler 的每一步行动之后，都存在一步复制者行动到达位置 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。根据定义，对于所有 $\beta < \alpha$，都有 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\beta)$。由此可知，对于所有 $\beta < \alpha$，在从位置 (m,n) 进行 Spoiler 的所有行动之后，都存在一步复制者行动到达位置 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\beta)$。因此，对于所有 $\beta < \alpha$，都有 $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\beta+1)$。由于 α 是极限序数，当 $\beta < \alpha$时，我们有 $\beta + 1 < \alpha$，因此归纳假设意味着，对于所有 $\beta < \alpha$，$(m,n) \in \mathrm{Rk}(\beta)$。所以，根据定义，$(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。□

因此，我们得到一个递减的集合序列 $(\mathrm{Rk}(\alpha))_\alpha \subseteq \mathbb{P}\,a \times \mathbb{P}\,b$，并且该序列最终会稳定下来。这依赖于以下观察：

引理 7.2. 设 α_0 是一个序数，使得 $\mathrm{Rk}(\alpha_0) \subseteq \mathrm{Rk}(\alpha_0+1)$。那么，对于所有 $\alpha \geq \alpha_0$，都有 $\mathrm{Rk}(\alpha) = \mathrm{Rk}(\alpha_0)$。

证明。用 $\alpha \geq \alpha_0$ 作归纳法。若 $\alpha = \alpha_0$，结论显然成立。我们考虑 $\alpha > \alpha_0$ 的两种可能情形。注意，根据引理 7.1，$\mathrm{Rk}(\alpha_0) = \mathrm{Rk}(\alpha_0+1)$。

$\alpha = \beta + 1$ 情形：设 $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha_0)$。我们需要证明 $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\beta+1)$，也就是说，对于 Spoiler 从位置 (m,n) 出发的每一步，复制者都能走一步，到达一个位置 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\beta)$。但是，由于 $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha_0+1)$，对于 Spoiler 从位置 (m,n) 出发的每一步，复制者都能走一步，到达一个位置 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\alpha_0)$。因此，根据归纳假设，对于 Spoiler 从位置 (m,n) 出发的每一步，复制者都能走一步，到达一个位置 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\beta)$，证毕。

极限序数的情形： α **给定** $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha_0)$，根据归纳假设，对于所有 $\beta < \alpha$，我们都有 $(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\beta)$。因此，根据定义，$(m,\ n) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$，证明完毕。□

$\mathcal{G}(a,\ b)$ 的秩 记为 $\alpha_{a,\ b}$，是满足 $\mathrm{Rk}(\alpha) \subseteq \mathrm{Rk}(\alpha+1)$ 的最小序数 α。下一个结果是 [31, 引理 3.4.1], 的一个变体，它表明秩为 $\geq \alpha_{a,\ b}$ 的位置是获胜的。

引理 7.3。 设 α 是一个序数，满足 $\mathrm{Rk}(\alpha) \subseteq \mathrm{Rk}(\alpha{+}1)$。对于每个 $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$，复制者从位置 (m,n) 开始拥有获胜策略。

证明。 固定某个 $(m,\ n) \in \mathbf{Rk}(\alpha)$。由于 $(m,\ n) \in \mathbf{Rk}(\alpha+1)$，对于 Spoiler 从位置 $(m,\ n)$ 进行的每一步，复制者都可以到达位置 $(m',\ n') \in \mathbf{Rk}(\alpha)$。重复这一过程便为复制者诱导出一个获胜策略，因为 $\mathbf{Rk}(\alpha) \subseteq \mathcal{W}(a,\ b)$。□

注记 7.4。 在完全一般的情形下，引理 7.3 要求依赖选择公理[16]但如果 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 至多有可数多个位置，则无需任何选择公理（相对于 **ZF**）。

顺带指出，对于每个博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$，我们都可以展示一个如引理 7.3 中的序数。这可以通过改写 [31, 定理 3.4.2]（的证明）看出：令 S为 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 的位置 $(m,\ n)$ 的集合，其中对于某个序数 β，有 $(m,\ n) \notin \mathbf{Rk}(\beta)$。由于 S 是一个集合，

$$\alpha_0 \ :=\ \bigvee\{\bigwedge\{\beta \text{ ordinal} \mid (m,n) \notin \mathrm{Rk}(\beta)\} \mid (m,n) \in S\}$$

是一个定义良好的序数。

引理 7.5. 如上所述， α_0 我们有 $\mathrm{Rk}(\alpha_0) \subseteq \mathrm{Rk}(\alpha_0+1)$。

证明。 若 $(m,n) \in \mathbf{Rk}(\alpha_0)$，则 $(m,n) \notin S$，因为 $(m,n) \in S$ 将意味着对于某个 $\beta \leq \alpha_0$，有 $(m,n) \notin \mathbf{Rk}(\beta)$，这与引理 7.1 矛盾。因此，$(m,n) \in \mathbf{Rk}(\alpha_0)$ 意味着不存在序数 β 使得 $(m,n) \notin \mathbf{Rk}(\beta)$；特别是 $(m,n) \in \mathbf{Rk}(\alpha_0+1)$。□

接下来，我们基于 [31, 定理 3.4 得到以下刻画。 2].

定理 7.6. 设 (m,n) 是博弈 $\mathcal{G}(a,b)$中的任意位置。以下陈述等价：

(i) $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$ 对所有序数 α均成立。*(ii)* $(m,n) \in \mathrm{Rk}(\alpha_{a,b})$。*(iii)* 复制者从位置 (m,n)开始具有获胜策略。

证明。 蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii) 由引理 7.5 得出，而 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 由引理 7.3 给出。剩下需要证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)。我们通过对 α 进行归纳法证明：对于 $\mathcal{G}(a,b)$ 中的所有位置 (m,n)，如果复制者从位置 (m,n) 开始具有获胜策略，那么 $(m,n) \in \mathbf{Rk}(\alpha)$。

情形 $\alpha = 0$**：** 如果复制者从位置 (m,n) 开始具有获胜策略，那么根据定义，我们有 $(m,n) \in \mathcal{W}(a,b)$。

情形 $\alpha = \beta + 1$**：** 假设复制者从位置 (m,n) 开始具有获胜策略。那么根据归纳假设，我们有 $(m,n) \in \mathbf{Rk}(\beta) \subseteq \mathcal{W}(a,b)$。此外，对于 Spoiler 的每一步行动，该策略都会导向一个获胜位置 (m',n')，根据归纳假设，我们有 $(m',n') \in \mathbf{Rk}(\beta)$。因此，根据定义，$(m,n) \in \mathbf{Rk}(\alpha)$。

极限的情形 α **：** 根据归纳假设。 □

注 7.7。 定理 7.6 值得作几点说明：

（1）从秩为 $\geq k$ 的位置出发，在 $\mathcal{G}(a,b)$ 中，借助 $k \in \mathbb{N}$，复制者拥有一项在 k 个回合中获胜的策略。因此，如果 $\mathcal{G}(a,b)$ 的对局具有有界长度，则 $\mathcal{G}(a,b)$ 的秩是有限的（参见注 3.16）。例如，当 $k < \omega$ 时，树状范畴 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 中进行的博弈（例 3.13 和 3.19）具有有限秩，因为所有对局的长度至多为 k。只需注意，每条路径的基数至多为 k。

[16]这个公理的强度介于可数选择公理 与完整的选择公理 之间，参见例如 [34, §5] 和 [41,§20B]。

（2）从秩为 ω 的位置出发，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，复制者都有一项在 k 个回合中获胜的策略。但他们未必拥有一项对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 都能在 k 个回合中获胜的统一策略。

7.2. 树状范畴的 Hintikka 公式。设 $\mathcal{C}$ 是一个 lfp wooded 范畴。我们将为 $\mathcal{C}$ 设计充分条件，从而为任意 $a,\ b \in \mathcal{C}$获得博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 的 Hintikka 公式。主要的技术要素是 §7.1 中讨论的序数秩，以及 §6.2 中关于笛卡尔理论的有限可呈模型的材料。最终，我们旨在证明定理 7.11，其形式为

$$a, b \in \mathcal{C} \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty \implies \text{Duplicator wins } \mathcal{G}(a, b).$$

如 §3.4 中所述，我们假设 $\mathcal{C}$ 中的路径是有限可呈的。然而，与 §3.4 不同的是，目前还不存在外延范畴 $\mathcal{E}$，因此我们无法强制采用定理 3.29 中的“路径嵌入的检测”假设（见定义 3.26）。相反，我们将假设 $\mathcal{C}$ 中的路径嵌入在适当意义下是“可定义的”。与 §3.4 中的做法类似，我们将相关签名作为参数，并假设路径嵌入相对于该签名是可定义的。

定义 7.8。设 $\mathbf{\Gamma}$ 为一个签名。若林地范畴 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入满足以下条件，我们称其为在 $\mathbf{\Gamma}$ 中可定义。

(i) 存在一个 $\mathbf{\Gamma}$ 中的笛卡尔理论$\mathbf{U}$，使得 $\mathcal{C} =$**Mod(U)**。[17](ii) $\mathcal{C}$ 中的每条路径都是有限可呈的（在 $\mathcal{C}$中）。(iii) 对于 $\mathcal{C}$ 的每条路径 $\langle \vec{y} \mid \psi \rangle$，存在 $\mathbf{\Gamma}$ 中的一个（可能是无限的）公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \vec{y} | \psi \rangle(\vec{y})$，使得对于所有 $a \in \mathcal{C}$ 和所有 $h\colon\ \langle \vec{y} \mid \psi \rangle \to a$ 将 $\vec{y}$ 取为 $\vec{c} \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_a$，

$$h \text{ is an embedding} \qquad \text{if, and only if,} \qquad a \models \mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \vec{y} \mid \psi \rangle(\vec{c}).$$

我们将在 §9 中看到，如果一个有限可达林地伴随 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 能够检测路径嵌入，那么 $\mathcal{C}$ 就具有可定义的路径嵌入。例如，例 3.24 中的有限可达树状伴随 $L_k\colon\ \mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}) \rightleftarrows \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) : R_k$ 能够检测路径嵌入；类似地，例 3.21 中的树状伴随 $R_k^P\colon \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{R}_k^P(\boldsymbol{\sigma})$ 和 $R_k^M\colon \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{R}_k^M(\boldsymbol{\sigma})$ 也能够检测路径嵌入。

固定一个签名 $\mathbf{\Gamma}$ 和一个林地范畴 $\mathcal{C}$，其路径嵌入在 $\mathbf{\Gamma}$ 中是可定义的。我们将为任意 $a,\ b \in \mathcal{C}$设计博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 的 Hintikka 公式。令$\mathcal{U}$ 为 $\mathbf{U}$ 的句法范畴。根据定义 7.8 中的条件 (ii)，对于 $\mathcal{C}$ 的每条路径 Q，都存在某个 $\{\vec{z}_Q \mid \varpi_Q\} \in \mathcal{U}$ 使得 $Q \cong \langle \vec{z}_Q \mid \varpi_Q \rangle$。我们为每个 Q 固定选择一个这样的 $\{\vec{z}_Q \mid \varpi_Q\}$。这样，我们可以通过写作 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[Q](\vec{z}_Q) = \mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \vec{z}_Q \mid \varpi_Q \rangle(\vec{z}_Q)$ 来扩展定义 7.8 中条件（iii）的约定。在方便时，我们省略 $\vec{z}_Q$中的下标 Q。

固定一个对象 $a \in \mathcal{C}$。对于每个序数 α、每个路径嵌入 $m\colon\ P \rightarrowtail a$ 以及每条路径 Q，我们定义一个公式

$$\Theta[m, Q, \alpha](\vec{z}) \ = \ \Theta_{\mathcal{C}}[a, m, Q, \alpha](\vec{z}_Q)$$

在签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中。定义通过对 α 进行归纳法给出，具体见图 1，其中使用以下记号。首先，给定路径之间的嵌入 $\ell\colon\ Q \rightarrowtail Q'$，我们将经由 Yoneda嵌入 $\mathbf{y}\colon\ \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to$有限极限保持 $[\mathcal{U}, \mathbf{Set}]$，对应于 ℓ 的 $\mathcal{U}$-态射记作 $[\vec{z}', \vec{z} \mid \vartheta_\ell]\colon\ \{\vec{z}' \mid \varpi_{Q'}\} \to \{\vec{z} \mid \varpi_Q\}$。此外，$\mathrm{Iso}[P, Q]$ 是公式 $\top$（如果 $P \cong Q$），否则为 $\bot$。最后，为了记号简洁起见，我们省略了对 $\mathcal{C}$ 和 a 的引用，因为它们在整个关于 α 的归纳法中保持不变。但请注意，定义确实依赖于 a：参见 $\mathrm{Forth}[-,-,-]$ 和 $\mathrm{Back}[-,-,-]$的条款。

[17]请回顾备注 6.9，$\mathbf{U}$ 的选择无关紧要。

$$\begin{aligned}
\Theta[m,Q,0](\vec{z}) &:= \mathrm{Iso}[P,Q] \\
\Theta[m,Q,\alpha](\vec{z}) &:= \textstyle\bigwedge_{\beta<\alpha}\Theta[m,Q,\beta](\vec{z}) && (\alpha \text{ limit ordinal}) \\
\Theta[m,Q,\alpha+1](\vec{z}) &:= \mathrm{Iso}[P,Q] \wedge \mathrm{Forth}[m,Q,\alpha+1](\vec{z}) \wedge \mathrm{Back}[m,Q,\alpha+1](\vec{z})
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Forth}[m,Q,\alpha+1](\vec{z}) := \bigwedge_{\substack{m'\colon P'\rightarrowtail a\\ m\prec m'}} \bigvee_{\substack{\ell\colon Q\rightarrowtail Q'\\ \ell\prec \mathrm{id}_{Q'}}} (\exists \vec{z}')\Big(\varpi_{Q'}(\vec{z}') \wedge \vartheta_\ell(\vec{z}',\vec{z}) \wedge \mathrm{Emb}[Q'](\vec{z}') \wedge \Theta[m',Q',\alpha](\vec{z}')\Big)$$

$$\mathrm{Back}[m,Q,\alpha+1](\vec{z}) := \bigwedge_{\substack{\ell\colon Q\rightarrowtail Q'\\ \ell\prec \mathrm{id}_{Q'}}} (\forall \vec{z}')\Big(\big(\varpi_{Q'}(\vec{z}') \wedge \vartheta_\ell(\vec{z}',\vec{z}) \wedge \mathrm{Emb}[Q'](\vec{z}')\big) \to \bigvee_{\substack{m'\colon P'\rightarrowtail a\\ m\prec m'}} \Theta[m',Q',\alpha](\vec{z}')\Big)$$

FIGURE 1. 林地范畴的 Hintikka 公式 $\mathcal{C}$ (§7.2)。

下一个结果表明，公式 $\Theta_{\mathcal{C}}[a,-,-,\alpha](\vec{z})$ 表示博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 中秩至少为 α 的位置，其中 b 遍历 $\mathcal{C}$ 的对象。证明采用关于 α 的归纳法，思路与例如 [31, 定理 3.5.1]相同。

命题 7.9. 假设 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入在 $\mathbf{\Gamma}$ 中可定义。设 a、$b \in \mathcal{C}$ 和 $m\colon\ P \rightarrowtail a$。此外，设 $n\colon\ Q \rightarrowtail b$ 由 $\vec{c} \in [\![\vec{z} \mid \varpi_Q]\!]_b$ 诱导。对于所有序数 α，以下陈述等价：

(i) $b \models \Theta_{\mathcal{C}}[a,m,Q,\alpha](\vec{c})$。*(ii)* (m,n) 是博弈 $\mathcal{G}(a,b)$ 中秩为 $\geq \alpha$ 的位置。

证明。我们对 α 进行归纳。α 极限序数的情形可由归纳假设直接得出。对于 $\alpha = 0$，根据定义 3.15，$(m,n) \in \mathcal{W}(a,b)$ 当且仅当 $\mathrm{dom}(m) \cong \mathrm{dom}(n)$。这等价于 $b \models \mathrm{Iso}[P,Q]$。

现在考虑后继序数的情形，设为 $\alpha+1$。同样有 $(m,n) \in \mathcal{W}(a,b)$ 当且仅当 $b \models \mathrm{Iso}[P,Q]$。接下来，我们按 Spoiler 的下一步走法分类讨论。

断言 7.10。以下各项等价：

- $b \models \mathrm{Forth}[m,Q,\alpha+1](\vec{c})$。
- 对于所有 $m' \succ m$，都存在某个 $n' \succ n$ 使得 $(m',n') \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。

断言 *7.10* 的证明。假设 $b \models \mathrm{Forth}[m,Q,\alpha+1](\vec{c})$，并取任意一个 $m' \succ m$。那么存在某个 $\ell\colon\ Q \rightarrowtail Q'$ 且 $\vec{c}' \in b$，使得 $\ell \prec \mathrm{id}_{Q'}$ 并且

$$b \models \varpi_{Q'}(\vec{c}') \wedge \vartheta_\ell(\vec{c}',\vec{c}) \wedge \mathrm{Emb}[Q'](\vec{c}') \wedge \Theta[m',Q',\alpha](\vec{c}').$$

由于元组 $\vec{c}'$ 属于 $[\![\vec{z} \mid \varpi_{Q'}]\!]_b$，它诱导出一个（唯一的）态射 $n'\colon\ Q' \to b$。由于 $b \models \mathrm{Emb}[Q'](\vec{c}')$，该态射是一个嵌入。此外，由于 $b \models \Theta[m',Q',\alpha](\vec{c}')$，归纳假设推出 $(m',\ n') \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。

还需证明 $n' \succ n$。引理 6.14 给出 $n = n' \circ \ell$，即 $n \leq n'$。如果 $n = n'$属于 $\mathbb{P}\,b$，那么对于某个同构 i，有 $n = n' \circ i$。由于 n' 是一个单态射，我们得到 $\ell = i$ 也是一个同构，这与 $\ell \prec \mathrm{id}_{Q'}$ 矛盾。因此 $n < n'$。此外，如果 n'' 是 $\mathbb{P}\,b$ 中满足$n \leq n''$ 且 $n'' \leq n'$的元素，那么对于某些嵌入 $k,\ k'$，有 $n = n'' \circ k'$ 和 $n'' = n' \circ k$。同样，由于 n' 是单态射，我们得到 $k \circ k' = \ell$。但由于 $\ell \prec \mathrm{id}_{Q'}$，$k$ 或 k' 必为同构。因此不可能有 $n < n'' < n'$。

逆命题可以用类似的方法证明。 □

同样，我们看到，$b \models \mathrm{Back}[m,Q,\alpha+1](\vec{c})$ 当且仅当，

• 对所有 $n' \succ n$，都存在某个 $m' \succ m$，使得 $(m',\ n') \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。

于是，根据 $\mathrm{Rk}(\alpha+1)$ 的定义即可得到该结果。 □

于是我们得到，$\mathcal{L}_\infty$ 中的等价蕴含来回等价 $\leftrightarrow$。这是我们的第一个主要结果。回顾定义 3.17：当复制者在 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 中从初始位置 $(\bot_a,\ \bot_b)$ 出发时具有获胜策略，其中 $\bot_a$：$\mathbf{0}_a \rightarrowtail a$ 是 $\mathbb{P}\,a$ 的根，$\bot_b$ 也同样如此。

定理 7.11。假设 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入在 $\mathbf{\Gamma}$ 中是可定义的。那么

$$a, b \in \mathcal{C} \ \textit{equivalent in}\ \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma}) \implies a \leftrightarrow b.$$

定理 7.11 的证明依赖于下面的引理 7.12 和引理 7.13。设 $\mathcal{C}$ 是一个林地范畴，其路径嵌入在签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中是可定义的。因此，与上文类似，在 $\mathbf{\Gamma}$ 中存在一个笛卡尔理论 $\mathbf{U}$，使得 $\mathcal{C} \cong \mathbf{Mod(U)}$。令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathbf{U}$ 的句法范畴。

引理 7.12。对于每个 $a \in \mathcal{C}$，存在一个句子 ζ_a，使得 $\mathbf{0}_a \cong \langle \emptyset \mid \zeta_a \rangle$。

证明。回顾引理 3.5，$\mathbf{0}_a$ 是通过对唯一映射 $\mathbf{0} \to a$取分解 $\mathbf{0} \twoheadrightarrow \mathbf{0}_a \rightarrowtail a$得到的，其中 $\mathbf{0}$ 是 $\mathcal{C}$中的始对象。由于 $\mathcal{C}$ 是局部有限可呈现的，$\mathbf{0}$ 是有限可呈现的$\mathbf{U}$-模型 $\langle \emptyset \mid \top \rangle$，其中 $\emptyset$ 是空上下文（§2.1）。此外，根据引理 3.5，$\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{0}_a$ 都是路径。由于我们假设 $\mathcal{C}$ 中的路径是有限可呈现的，因此 $\mathbf{0}_a$ 是有限可呈现的，记为 $\mathbf{0}_a \cong \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$。由引理 2.19，我们由此得到一个商 $e\colon \langle \emptyset \mid \top \rangle \twoheadrightarrow \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$。特别地，$e$ 在 $\mathcal{C}$中是满态射，因而在其全子范畴 $\mathcal{C}_{\mathrm{fp}}$中也同样是满态射。由定理 6.3和米田引理可知，$e$ 由一个单态射 $\mathcal{U}$-态射诱导

$$[\vec{x} \mid \theta] \ :\ \{\vec{x} \mid \varphi\} \longrightarrow \{\emptyset \mid \top\}.$$

由于 $[\vec{x} \mid \theta]$ 是单态射，根据 [36, 引理 D1.4.4(iii)]，可知 $\mathbf{U}$ 证明了该序列

$$\theta \wedge \theta[\vec{x}'/\vec{x}] \vdash_{\vec{x},\vec{x}'} \vec{x} \doteq \vec{x}'.$$

此外，根据 $\mathcal{U}$（定义 6.1）的构造，$\mathbf{U}$ 证明了

$$\theta \vdash_{\vec{x}} \varphi \qquad \text{and} \qquad \varphi \vdash_{\vec{x}} \theta.$$

因此，句子 $\zeta_a = (\exists \vec{x})\varphi$ 在 $\mathbf{U}$ 上是笛卡尔的。此外，在 $\mathcal{U}$ 中，$\{\vec{x} \mid \varphi\}$ 与 $\{\emptyset \mid (\exists \vec{x})\varphi\}$ 同构（参见 [36, 引理 D1.4.4(ii)]的证明），因此在 $\mathcal{C}$ 中，$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 与 $\langle \emptyset \mid (\exists \vec{x})\varphi \rangle$ 同构，从而证明完毕。□

引理 7.12 表明，可以假设形如 $\Theta_{\mathcal{C}}[a, \bot_a, \mathbf{0}_b, \alpha]$ 的 Hintikka 公式是句子。它还推出了关于具有可定义路径嵌入的树状范畴的以下简单而重要的事实。

引理 7.13。如果 a、$b \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ 中等价，则 $\mathbf{0}_a \cong \mathbf{0}_b$。

证明。假设 $a, b \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ 中等价。由于我们有一个嵌入$\bot_a$：$\mathbf{0}_a \rightarrowtail a$，因此 a 是句子 ζ_a 和 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \emptyset | \zeta_a \rangle$的一个模型。因此$b \models \zeta_a$，由引理 6.10 可知存在某个 h：$\mathbf{0}_a \to b$。此外，$b \models \mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \emptyset | \zeta_a \rangle$，因此 h 实际上是一个嵌入。由此可知，唯一映射 $\mathbf{0} \to b$ 分解为 $\mathbf{0} \twoheadrightarrow \mathbf{0}_a \rightarrowtail b$。但 $\mathbf{0} \to b$ 也分解为 $\mathbf{0} \twoheadrightarrow \mathbf{0}_b \rightarrowtail b$。因此 $\mathbf{0}_a \cong \mathbf{0}_b$，因为在适当分解系统中，分解在同构意义下唯一。□

注 7.14。注意，当 $\mathcal{C}$ 是例 3.13 和 3.14(1) 中的树状范畴 $\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma})$ 或 $\mathcal{R}_k^P(\boldsymbol{\sigma})$ 之一时，始对象 $\mathbf{0}$ 的载体为空，因此 $\mathbf{0}_a \cong \mathbf{0}_b$ 对所有 $a, b \in \mathcal{C}$ 都成立。然而，例 3.14(2) 中的树状范畴 $\mathcal{R}_k^M(\boldsymbol{\sigma})$ 并非如此，因为 $\mathbf{0}$ 含有一个元素；在这种情况下，我们确实需要引理 7.13。

现在我们可以证明定理 7.11。

定理 *7.11* 的证明。令 a，$b \in \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ 中等价。我们希望证明，从位置 $(\bot_a,\ \bot_b)$ 开始，复制者在博弈 $\mathcal{G}(a,\ b)$ 中获胜。根据定理 7.6，这相当于证明对于所有序数 α，$(\bot_a,\ \bot_b) \in \mathrm{Rk}(\alpha)$。我们应用命题 7.9，并证明对于每个序数 α，都有 $b \models \Theta_{\mathcal{C}}[a, \bot_a, \mathbf{0}_b, \alpha]$，其中根据引理 7.12，我们已假设$\mathbf{0}_b = \langle \emptyset \mid \zeta_b \rangle$。

注意，复制者从位置 $(\bot_a,\ \bot_a)$ 开始赢得博弈 $\mathcal{G}(a,\ a)$。另一方面，根据引理 7.13，我们有 $\mathbf{0}_a \cong \mathbf{0}_b$。因此，存在某个 $\bot'_a$：$\mathbf{0}_b \rightarrowtail a$ 使得$\bot'_a \sim \bot_a$，也就是说，使得 $\bot'_a$ 和 $\bot_a$ 表示 $\mathbb{P}\, a$ 中的同一个元素（见 §2.4）。由此可知，复制者从位置 $(\bot_a,\ \bot'_a)$ 开始赢得博弈 $\mathcal{G}(a,\ a)$。因此，对于每个序数 α，我们有 $a \models \Theta_{\mathcal{C}}[a, \bot_a, \mathbf{0}_b, \alpha]$，从而也有 $b \models \Theta_{\mathcal{C}}[a, \bot_a, \mathbf{0}_b, \alpha]$。□

7.3. **有限可达林地伴随的情形**。考虑一个有限可达林地伴随

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{E},$$

其中，$\mathcal{C}$ 的路径嵌入在某个签名中是可定义的。直观而言，我们希望沿着由 lfp 范畴的态射 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 所诱导的解释传递定理 7.11（参见 §6.3）。为使这一点明确，我们考虑一个笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，使得 lfp 范畴 $\mathcal{E}$ 等价于 $\mathbf{Mod(T)}$；参见推论 6.5。

将定理 7.11 与 §6.3 中的传递定理 6.17 结合起来，立即得到以下结果。回顾一下，给定 M，$N \in \mathcal{E}$，当 $RM \leftrightarrow RN$ 属于 $\mathcal{C}$ 时，我们有 $M \leftrightarrow_R N$。

推论 7.15。设 $\mathbf{\Sigma}$ 为一个签名。考虑一个有限可达林地伴随$R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入在某个签名中是可定义的，并且$\mathcal{E} = \mathbf{Mod}(\mathbf{T})$，其中 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的某个笛卡尔理论。那么

$$M, N \in \mathcal{E} \textit{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}) \implies M \leftrightarrow_R N.$$

注意，推论 7.15 并未明确提及林地范畴 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入在哪个签名中是可定义的；它只提及外延范畴 $\mathcal{E}$ 的签名 $\mathbf{\Sigma}$。

虽然通往推论 7.15 的道路相对直接，但我们主要结果定理 3.29 的证明则复杂得多。在继续之前，我们先讨论推论 7.15 语境下的 Hintikka 公式。固定一个 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$，如后一结果的陈述所示，并令 $\mathbf{T}$ 满足 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(T)}$。

请注意，我们可以直接将传递定理 6.17 应用于 §7.2 的 Hintikka 公式，无需绕道定理 7.11。这种直接方法需要更明确的描述。假设 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入在签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中可定义。特别地，存在一个 $\mathbf{\Gamma}$ 中的笛卡尔理论 $\mathbf{U}$，使得 $\mathcal{C} = \mathbf{Mod(U)}$。令 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{T}$ 分别为 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{T}$ 的句法范畴。如 §6.3 所述，lfp 范畴的态射 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 通过定理 6.3 对应于函子 $\boldsymbol{t}^*\colon$ 有限极限保持 $[\mathcal{T}, \mathbf{Set}] \to$ 有限极限保持 $[\mathcal{U}, \mathbf{Set}],$，其中 $\boldsymbol{t}\colon\ \mathcal{U} \to \mathcal{T}$ 是一个有限极限保持态射。回想一下，§6.3 中的解释 $(\text{–})^{\boldsymbol{t}}$ 依赖于这样一个事实：给定 $M \in \mathbf{Mod(T)}$ 和 $\{\vec{y} \mid \psi\} \in \mathcal{U}$，我们有

$$[\![\vec{y} \mid \psi]\!]_{RM} \ \cong\ [\![\boldsymbol{t}\{\vec{y} \mid \psi\}]\!]_M.$$

结合命题 7.9，我们得到以下结果。

推论 7.16。设 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 如上所述。设 M、$N \in \mathcal{E}$，并设 $m\colon\ P \rightarrowtail RM$ 是 $\mathcal{C}$ 中的路径嵌入。考虑一条满足 $Q \cong \langle \vec{z} \mid \varpi_Q \rangle$ 的路径 Q，并将 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathcal{T}$ 记作$\boldsymbol{t}\{\vec{z} \mid \varpi_Q\}$。设 $n\colon\ Q \rightarrowtail RN$ 由 $\vec{c} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_N$ 诱导。那么，对于所有序数 α，以下陈述等价：

(i) $N \models (\Theta_{\mathcal{C}}[RM, m, Q, \alpha])^{\boldsymbol{t}}(\vec{c})$.

(ii) $(m,\ n)$ 是博弈 $\mathcal{G}(RM,\ RN)$ 中秩为 $\geq \alpha$ 的位置。

推论 7.16 中更准确的描述（相较于推论 7.15）在以下情形中可能很有用。回顾注记 6.18，对于每个正则基数 κ，$(-)^t$ interprets $\mathcal{L}_\kappa(\mathbf{\Gamma})$ in $\mathcal{L}_\kappa(\mathbf{\Sigma})$。特别地，只要 $\Theta_{\mathcal{C}}[RM, m, Q, \alpha](\vec{z})$ 是有限公式，$(\Theta_{\mathcal{C}}[RM, m, Q, \alpha])^t(\vec{x})$ 也是有限公式。直接检查图 1 可知，当满足以下所有条件时，后一个公式是有限的：

- 序数 α 是有限的。当对于每个 $N \in \mathcal{E}$，$\mathcal{G}(RM,\ RN)$ 的对局都具有（有限的）有界长度（注 7.7.(1)）时，总可以作此假设；例如，k 轮 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈就是这种情况（见例 3.19）。

- 存在有限多个嵌入 $m'\colon\ P' \rightarrowtail RM$（按同构计）使得 $m \prec m'$。对于有限 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈，当 $\boldsymbol{\sigma}$-结构 M 是有限的时，该条件得到满足。

- 对于 $\mathcal{C}$ 中的每条路径 Q，满足带有 $\ell \prec \mathrm{id}_{Q'}$ 的条件的路径 Q' 和嵌入 $\ell\colon\ Q \rightarrowtail Q'$（按同构计）只有有限多个。对于签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 为有限的（纯关系的）k 轮 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈，该条件得到满足。
- 公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[Q](-)$ 是有限的（见定义 7.8）。

回顾引理 3.8，林地范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_{\mathrm{p}}$ 定义了路径及其之间的嵌入；该子范畴可在等价意义下与一个森林序对应。我们得到

推论 7.17。设 $\mathbf{\Sigma}$ 为一个签名。考虑一个有限可达林地伴随 $R\colon\ \mathcal{E} \to \mathcal{C}$，使得 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入在某个签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中是可定义的，并且 $\mathcal{E} = \textbf{模型}(\mathbf{T})$，其中 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的某个笛卡尔理论。假设如下：

(i) 森林 $\mathcal{C}_p$ 是有限分支的。*(ii)* 公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[Q](-)$（在签名 $\mathbf{\Gamma}$ 中）是有限的。

此外，设 M、$N \in \mathcal{E}$ 满足以下条件：

(iii) $\mathcal{G}(RM、\ RN)$ 的对局具有（有限的）有界长度。*(iv)* 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个路径嵌入 m：$P \rightarrowtail RM$，存在有限多个（在同构意义下）嵌入 $m'\colon\ P' \rightarrowtail RM$，使得 $m \prec m'$。

Then

$$M, N \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\omega(\mathbf{\Sigma}) \implies M \leftrightarrow_R N.$$

鉴于推论 7.17，一个值得探讨的问题是，找出哪些充分条件可以确保定义 7.8 中的公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[Q](-)$ 可假定为有限公式。在 §9.3 中，我们将在定理 3.29 的假设下探讨这个问题。

例 4.11 中涉及预层与森林的有限可达树状伴随是一个较简单的情形，其中上述条件 (ii) 成立，下一例将对此加以说明：

例 7.18. 设 $\mathcal{A}$ 为森林上的预层范畴，记作 $\mathcal{A} = \mathbf{F}^{\widehat{}}$。

我们已经看到，$\mathcal{A}$ 是树状的，因而是 wooded（定理 4.9）。回想一下，由于 $\mathcal{A}$ 是托扑斯，(满态射, 单态射) 是 $\mathcal{A}$ 上唯一的适当分解系统，而且该分解系统是稳定的（参见 §2.4）。此外，$\mathcal{A}$ 是局部有限可呈现的。事实上，$\mathcal{A} \cong \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}}))$，其中 $\mathbf{T}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}})$ 是函子 $\mathbf{F}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 的笛卡尔理论（参见例 2.3）。

现在我们将看到，$\mathcal{A}$ 的路径嵌入在 $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}})$ 的签名中是可定义的，其中 $\mathbf{T}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}})$。首先，回顾一下，$\mathcal{A}$ 的路径是有限可呈的，因为它们恰好是可表函子以及始对象（引理 4.12）。其次，我们可以得到定义 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}})$ 中的路径嵌入的有限公式。始路径的情形是平凡的，因为在托扑斯中，从始对象出发的任意箭头都是单态射。至于非初始路径，回顾一下，$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}})$ 对每个 $p \in \mathbf{F}$ 都有一个类型 p，并且对 $\mathbf{F}$ 中的每个 $q \leq p$ 都有一个函数符号 $f_{(q \leq p)}\colon\ p \to q$。可表函子 $\mathbf{F}\ [-, p]$ 对应于

有限呈示模型 $\langle x : p \mid \top\rangle$。于是，对于每个 $p \in \mathbf{F}$，在 $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}})$ 中存在一个有限公式 $\mathsf{Mono}[p](x)$，使得以下命题在 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}}))$ 中等价：

(i) $h\colon \langle x : p \mid \top\rangle \to M$ 是一个单态射。(ii)

$M \models \mathsf{Mono}[p](c)$，其中 h 将 x 映射到 $c \in M(p)$。

（详情见下文 §8.2。）因此，推论 7.17 的条件 (ii) 成立。此外，后者的条件 (i) 等价于 $\mathbf{F}$ 有限分支。无论如何，定理 7.11 适用，因此（将 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathbf{F}^{\mathrm{op}}))$ 与 $\mathcal{A}$ 视为相同）我们得到

$$M, N \in \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})) \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})) \implies M \leftrightarrow N \text{ in } \mathcal{A}.$$

形如 $\mathcal{A} = \mathbf{F}$ 的树状范畴见于例 4.11 的有限可达树状伴随中。设 $\mathcal{D}$ 为一个小范畴，并令 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathcal{D})$ 为由有限序列 s 组成的森林，其中各箭头可复合

$$a_0 \xrightarrow{k_1} a_1 \dashrightarrow a_{n-1} \xrightarrow{k_n} a_n$$

在 $\mathcal{D}$ 中，如例 4.11 所示。通过函子 $\pi\colon \mathbf{F} \to \mathcal{D}$（它将上文的 s 映射到 a_n），我们得到一个有限可达树状伴随

$$\widehat{\mathcal{F}} \underset{\pi^*}{\overset{\pi_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \widehat{\mathcal{D}}$$

因此推论 7.15 适用。于是

$$X, Y \in \widehat{\mathcal{D}} \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})) \implies X \leftrightarrow_{\pi^*} Y,$$

这一次将 $\mathcal{D}$ 认作 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}))$。 □

8. Formulae for embeddings

设 $\mathbf{\Sigma}$ 为一个签名，并考虑一个有限可达林地伴随

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathcal{E}$$

其中外延范畴 $\mathcal{E}$ 具有 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 的形式，其中 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的某个笛卡尔理论。根据推论 7.15，如果林地范畴 $\mathcal{C}$ 的路径嵌入是可定义的（在某个签名中），那么

$$M, N \in \mathcal{E} \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}) \implies M \leftrightarrow_R N.$$

现在，我们的主要目标是在定理 3.29 的假设下建立后一蕴含，即伴随 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon R$ 按照定义 3.26 的意义检测路径嵌入：

- 态射 $f\colon P \to a$ 在 $\mathcal{C}$ 中是嵌入，当且仅当 $Lf\colon LP \to La$ 是 $\mathbf{\Sigma}$-结构在 $\mathcal{E}$中的嵌入。

为此，本节将证明，在其定义域为有限可呈对象的前提下，$\mathcal{E}$中结构的嵌入在签名 $\mathbf{\Sigma}$中是可定义的（回顾命题 5.6，由于其右伴随 R 具有有限性，L 保持有限可呈对象）。因此，我们将得到类似于定义 7.8 中条件（iii）的公式：

- 对于 $\mathcal{E}$的每个有限呈示模型 $\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$，存在 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个（可能是无限的）公式 $\mathsf{Emb}\langle \vec{x} | \varphi\rangle(\vec{x})$，使得对于所有 $M \in \mathcal{E}$ 和所有 $h\colon \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to M$ 将 $\vec{x}$ 取为 $b \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$，

$$h \text{ 是 } \mathbf{\Sigma} \text{ 结构的一个嵌入} \iff M \models \mathsf{Emb}\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{b})。$$

但这只能使我们走到推论 7.15 与定理 3.29 之间的一半，因为给定 P，$a \in \mathcal{C}$，我们可以在 $\mathbf{\Sigma}$ 中并且在 $La \in \mathcal{E}$ 上得到一个公式 $\mathsf{Emb}[LP]$，而推论 7.15 要求的是一个关于 $\mathcal{C}$ 的签名中的公式，并且在 $a \in \mathcal{C}$ 上。第二步将在第 §9 节中借助 Hodges 的词构造完成。

回到定义结构在 $\mathcal{E}$ 中嵌入的公式 $\mathsf{Emb}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$，我们首先考虑特殊情形：$\mathcal{E} = \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个有限（单排序）纯关系签名。在这种情况下，通过考虑适当的否定原子合取，我们可以定义有限公式 $\mathsf{Emb}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$；下面对此进行回顾。首先注意，在 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 中的结构 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$，其 $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$，具有载体 $\{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n\}$，其中元素 $\dot{x}_i$'s 不一定两两不同（参见注记 6.13）。现在，考虑一个同态

$$h \colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$$

在 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 中，并假设 h 由 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$ 诱导。由引理 6.12 可知，对于每个 $i = 1, \dots, n$，$h(\dot{x}_i) = a_i$，因此 $h \colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$-结构的嵌入，当且仅当对于每个原子公式 $\vec{x} ::= \alpha$，都有

$$M \models \alpha(a_1, \dots, a_n) \implies \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \models \alpha(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n).$$

换言之，当且仅当 $M \models \mathsf{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{a})$ 时，h 是 $\boldsymbol{\sigma}$-结构的嵌入，其中 $\mathsf{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 是<style id='8'>有限公式

$$\mathrm{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x}) \coloneqq \bigwedge\nolimits_{\substack{\vec{x} ::= \alpha \text{ atomic} \\ \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \models \neg\alpha(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)}} \neg\alpha(\vec{x}). \tag{13}$$

公式 $\mathsf{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 的有限性依赖于以下事实：$\boldsymbol{\sigma}$ 是有限关系签名，且有限可呈结构 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 具有有限载体。如果 $\boldsymbol{\sigma}$是无限的（纯关系的）签名，那么上述公式 $\mathsf{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 仍然会定义嵌入，但它将是无限的。

然而，这种方法无法扩展到任意笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，即使是在有限关系签名 $\boldsymbol{\sigma}$中也是如此。例如，$\mathbf{T}$ 可能会迫使某个关系符号成为函数，而这可能导致结构 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 是无限的。此外，对于非空理论 $\mathbf{T}$，$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 的载体无法用简单的方式描述。这就是为什么在本节余下部分中，我们需要采用不同的方法来定义公式 $\mathsf{Emb}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$。

我们在 §8.1 中处理 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 对于 $\mathbf{T}$ 为任意笛卡尔理论的一般情形。这涉及一些技术细节，为此我们高度依赖 §6 的材料。在 §8.2 中，我们利用 §8.1 的工具为例 7.18 补充缺失的证明。

$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 与 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 两种情形之间表面上的技术性空缺将在下文 §10 中讨论；在那里我们将证明，即使 $\mathbf{T}$ 是具有有限关系签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 的笛卡尔理论，定理 3.29 中的伴随 $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 也未必能约化为 $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 的较简单情形。

8.1. **At-反射同态**。固定一个签名为 $\mathbf{\Sigma}$ 的笛卡尔理论 $\mathbf{T}$，并记 $\mathcal{T}$ 为 $\mathbf{T}$ 的句法范畴。令 At 为一组上下文中的原子公式，即 At 中的每个元素都是一个上下文中的公式 $\vec{x} ::= \alpha$，其中 α 是原子的（参见 §2.1）。当对于所有 $(\vec{x} ::= \alpha) \in At$ 时，我们称一个同态 $h \in \mathbf{Mod}(\mathbf{T})\ [M, N]$ 为 ***At*-反射**，

$$h(\vec{a}) \in [\![\vec{x} \mid \alpha]\!]_N \implies \vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \alpha]\!]_M.$$

例 8.1。如果At 由所有形如 $(x,\ y ::= x \doteq y)$ 的（分类型）公式组成，那么At-反映同态的 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 恰好是单态射。只需注意，根据引理 6.6，$\mathbf{Mod}(\mathbf{T}) \hookrightarrow \mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})$ 的满包含保持并反映单态射，而$\mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})$ 中的单态射恰好是按类单射的同态（见例 2.18）。

例 8.2。 如果At 由所有上下文中的原子公式组成，那么At-反映态射的 **Mod(T)** 恰好是 **Σ**-结构的嵌入，即其像在包含 $\mathbf{Mod(T)} \hookrightarrow \mathbf{Str(\Sigma)}$ 下是强单态射的同态。

事实上，正如我们将在注记 8.6 中看到的，m **Mod(T)** 中的每个强单态射都是 **Σ**-结构的嵌入。但请回忆注记 3.27.(3)：逆命题并不成立，即使我们假设 m 的定义域是有限可呈的。

记号 8.3。给定 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathcal{T}$，令

$$\iota_\varphi(\vec{x}, \vec{x}') \;\coloneqq\; \varphi(\vec{x}) \;\wedge\; \vec{x} \doteq \vec{x}' \;.$$

这诱导出一个态射 $[\vec{x}, \vec{x}' \mid \iota_\varphi]\colon \{\vec{x} \mid \varphi\} \to \{\vec{x} \mid \top\}$。我们将 **Mod(T)** 中对应于自然变换 $\mathbf{y}[\vec{x}, \vec{x}' \mid \iota_\varphi]$ 的同态记为 $\imath_\varphi\colon \langle \vec{x} \mid \top\rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$，其中对应关系由定理 6.3 给出（回忆一下，$\mathbf{y}$ 是逆变的）。

注记 8.4。 箭头 $\imath_\varphi\colon \langle \vec{x} \mid \top\rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$ 在 **Mod(T)** 中是满态射。这是因为相应的自然变换 $\mathbf{y}\imath_\varphi\colon \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \top\} \to \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \varphi\}$ 在有限极限保持 $[\mathcal{T}, \mathbf{Set}]$中是满态射。也就是说，每当 $M \in \mathbf{Mod(T)}$ 且$\lambda,\ \kappa\colon \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \varphi\} \to F_M$满足这些条件时

$$\lambda \circ \mathbf{y}\iota_\varphi \;=\; \kappa \circ \mathbf{y}\iota_\varphi, \tag{14}$$

我们有 $\lambda = \kappa$。为说明这一点，令 $\vec{a} = \lambda_{\{\vec{y}\mid\varphi\}}(\mathrm{id})$ 且 $\vec{b} = \kappa_{\{\vec{y}\mid\varphi\}}(\mathrm{id})$。采用 §6.2 的记号，我们有 $\lambda = F_M(\text{–})(\vec{a})$ 和 $\kappa = F_M(\text{–})(\vec{b})$，因此等式 (14) 推出

$$F_M(\iota_\varphi)(\vec{a}) \;=\; F_M(\iota_\varphi)(\vec{b}).$$

但 $F_M(\imath_\varphi)\colon [\![\vec{y} \mid \varphi]\!]_M \to [\![\vec{y} \mid \top]\!]_M$是其图为

$$[\![\vec{y}, \vec{y}' \mid \varphi(\vec{y}) \;\wedge\; \vec{y} \doteq \vec{y}']\!]_M \;\hookrightarrow\; [\![\vec{y} \mid \varphi]\!]_M \times [\![\vec{y} \mid \top]\!]_M,$$

因此 $\vec{a} = b$，所以 $\lambda = \kappa$。

命题 8.5。 对于所有 $h \in \mathbf{Mod}(\mathbf{T})\ [N, M]$，下列条件等价：

(i) h 是 *At*-反射的。*(ii)* 对每个 $(\vec{y} ::= \alpha) \in \mathit{At}$，以及如下图左侧所示的每个交换方形，

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{y} \mid \top\rangle & \xrightarrow{\imath_\alpha} & \langle \vec{y} \mid \alpha\rangle \\ {\scriptstyle \ell}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ N & \xrightarrow[h]{} & M \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \langle \vec{y} \mid \top\rangle & \xrightarrow{\imath_\alpha} & \langle \vec{y} \mid \alpha\rangle \\ {\scriptstyle \ell}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle d} & \\ N & & \end{array} \tag{15}$$

*t*存在 $d\colon \langle \vec{y} \mid \alpha\rangle \to N$，使得上方最右侧的三角形交换。[18]

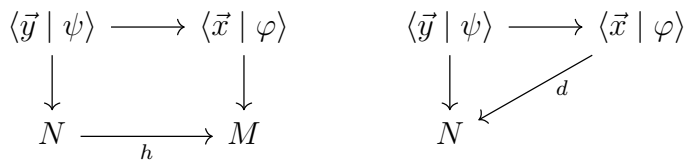
在证明命题 8.5 之前，我们先作几点说明。

注记 8.6。 由命题 8.5 可知，**Mod(T)** 中的任何强单态射都是 **Σ**-结构的嵌入。只需注意，如果 h 是一个强单态射，并且 α 是任意一个原子公式，那么等式 (15) 左侧所示的每个交换方形都存在一个对角填充，因为 $\imath_\alpha$ 是一个满态射（见注记 8.4）。

注记 8.7（与 ω-纯态射的比较）。 在例 8.2 的情形下，命题 8.5 中的条件 (ii) 使人联想到（ω-）纯态射的概念；例如参见 [13,命题 5.15，第 5A 节]。

[18]根据注记 8.4，这等价于说 d 是一个对角填充。

回顾 [13, §2D]，结构同态 $h\colon\ N \to M$ 是 ω-纯 的，如果对于如下左侧所示的每个交换方形



存在 一个 $d\colon\ \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to N$ 使得上方右侧的三角形交换 .

每个 ω-纯态射都是正则单态射 [13, 命题 2.31]。此外，根据 [13, 命题 5.15], ，如上所述的同态 h 是 ω-纯的，当且仅当它（保持并）反映正原子 公式，即形如 $(\exists \vec{y})\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ 的公式，其中 φ 是原子公式的有限合取。事实上，直接检查 [13,命题 5.15] 的证明可知，只需考虑以下形式的交换方形

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{x} \mid \top\rangle & \longrightarrow & \langle \vec{x},\ \vec{y} \mid \varphi\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow[h]{} & M \end{array}$$

其中 $\varphi(\vec{x},\ \vec{y})$ 是原子公式的一个（有限）合取。

在例 8.2 的情形下，由命题 8.5 可知， ω-纯态射是结构的嵌入。但请注意，命题 8.5 只考虑顶端箭头形如 $\langle \vec{x} \mid \top\rangle \to \langle \vec{x} \mid \alpha\rangle$ 的交换方形，其中两个结构$\langle \vec{x} \mid \top\rangle$ 和 $\langle \vec{x} \mid \alpha\rangle$ 具有相同的生成元，且 α 是原子的。

命题 8.5 的证明在精神上类似于 [13, 命题 5.15] 中关于 ω-纯态射的证明，见 **Str(Σ)**。但在**Mod(T)**的情形下，我们几乎没有关于有限可呈模型 $\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$ 中元素的直接信息。相反，我们依赖定理 6.3 以及 §6.2 中的工具，特别是引理 6.10 和 6.14。

回顾 §6.1，给定 $L \in$ **Mod(T)** 和 $[\vec{x}, \vec{y} \mid \theta] \in \mathcal{T}[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{\vec{y} \mid \psi\}]$，函数 $F_L([\vec{x}, \vec{y} \mid \theta])\colon$ $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_L \to [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_L$的图为

$$[\![\vec{x}, \vec{y} \mid \theta]\!]_L \longhookrightarrow [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_L \times [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_L.$$

特别地，对于记号 8.3 中的态射 $[\vec{x}, \vec{x}' \mid \iota_\alpha]$ ，我们只需有

$$F_L([\vec{x}, \vec{x}' \mid \iota_\alpha])\ \ :\ \ \begin{array}{ccc} [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_L & \longrightarrow & [\![\vec{y} \mid \top]\!]_L \\ \vec{b} & \longmapsto & \vec{b} \end{array}$$

命题 *8.5* 的证明。 (i) ⇒(ii)。设 $h\colon\ N \to M$是At-反射的，并考虑等式 (15) 左侧所示的交换方形:

$$\begin{array}{ccc} \langle \vec{y} \mid \top\rangle & \xrightarrow{\iota_\alpha} & \langle \vec{y} \mid \alpha\rangle \\ {\scriptstyle \ell}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ N & \xrightarrow[h]{} & M \end{array}$$

假设 ℓ将 $\vec{y}$映射到 $\vec{a} \in [\![\vec{y} \mid \top]\!]_N$，而 k将 $\vec{y}$映射到 $\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_M$。我们需要给出一个 $d\colon$ $\langle \vec{y} \mid \alpha\rangle \to N$，使得 $d \circ \iota_\alpha = \ell$。根据引理 6.14，这相当于证明

$$N \ \models\ (\exists \vec{y})\iota_\alpha(\vec{y}, \vec{a}).$$

根据公式 ι_α（记号 8.3）的定义，这等价于证明 $\vec{a} \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_N$。因此，由于 $\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_M$ 且 h是 At-反射的，只需证明 $h(\vec{a}) = \vec{b}$。

$$\mathrm{At}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x}) :=$$

$$\bigwedge_{(\vec{y} ::= \alpha) \in At} \; \bigwedge_{\theta \in \mathcal{T}[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{\vec{y} \mid \top\}]} (\forall \vec{y}) \left(\big(\alpha(\vec{y}) \;\wedge\; \theta(\vec{x}, \vec{y}) \big) \;\to\; \bigvee\nolimits_{\delta \in \mathcal{T}[\{\vec{x} \mid \varphi\}, \{\vec{y} \mid \alpha\}]} \delta(\vec{x}, \vec{y}) \right)$$

FIGURE 2. *At*-反射同态的公式（其定义域为有限可呈域）（推论 8.8）。

我们根据定理 6.3 给出的自然变换，重新表述上述图表。我们已经知道，ι_α 由自然变换诱导

$$\mathbf{y}\iota_\alpha \;:\; \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \top\} \;\longrightarrow\; \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \alpha\}.$$

如果 $\eta\colon\; F_N \to F_M$ 是对应于 $h\colon\; N \to M$ 的自然变换，那么我们得到以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \top\} & \xrightarrow{\mathbf{y}\iota_\alpha} & \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \alpha\} \\ {\scriptstyle F_N(-)(\vec{a})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_M(-)(\vec{b})} \\ F_N & \xrightarrow[\eta]{} & F_M \end{array} \tag{16}$$

与引理 6.14 的证明类似，注意到等式 (16) 中的上路径与 $F_M(-)(F_M(\iota_\alpha)(\vec{b}))$ 重合。现在，在 $\{\vec{y} \mid \top\}$ 处取分量，并将 $\vec{\ }$ $\vec{\ }$ 作用于 $\{\vec{y} \mid \top\}$ 上的恒等态射，上路径得到 $F_M(\iota_\alpha)(b)$ $(= b)$，而下路径得到 $\eta_{\{\vec{y} \mid \top\}}(\vec{a})$。因此 $\eta_{\{\vec{y} \mid \top\}}(\vec{a}) = \vec{b}$，并且由于根据引理 6.4 我们有，所以得到 $h(\vec{a}) = \vec{b}$

$$h(\vec{a}) \;=\; \eta_{\{\vec{y} \mid \top\}}(\vec{a}) \;\in\; [\![\vec{y} \mid \top]\!]_M.$$

(ii) ⇒(i)。考虑一个同态 $h\colon\; N \to M$以及一个公式 $(\vec{y} ::= \alpha) \in$在。令$\vec{a} \in [\![\vec{y} \mid \top]\!]_N$ 满足 $h(\vec{a}) \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_M$。我们需要证明 $\vec{a} \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_N$。

写作 b 表示 $h(\vec{a})$，并令 $\eta\colon\; F_N \to F_M$ 为对应于$h\colon\; N \to M$的自然变换。首先，我们证明上面的图表 (16) 在当前的$\vec{a}$、b 和 η取值下交换。根据米田引理，我们只需证明下面的两条路径

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \top\}\{\vec{y} \mid \top\} & \xrightarrow{(\mathbf{y}\iota_\alpha)_{\{\vec{y} \mid \top\}}} & \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \alpha\}\{\vec{y} \mid \top\} \\ {\scriptstyle F_N(-)(\vec{a})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_M(-)(\vec{b})} \\ F_N\{\vec{y} \mid \top\} & \xrightarrow[\eta_{\{\vec{y} \mid \top\}}]{} & F_M\{\vec{y} \mid \top\} \end{array}$$

在 $\mathrm{id} \in \mathcal{T}[\{\vec{y} \mid \top\}, \{\vec{y} \mid \top\}]$ 上相等。上方路径给出 $F_M(\iota_\alpha)(\vec{b}) = \vec{b}$，而$\vec{\ }$下方路径给出 $\eta_{\{\vec{y} \mid \top\}}(\vec{a})$。因此，由于根据引理 6.4，$\eta_{\{\vec{y} \mid \top\}}(\vec{a}) = h(\vec{a}) = b$，我们便完成了证明。

现在，假设 (ii) 给出某个 $\delta\colon \mathbf{y}\{\vec{y} \mid \alpha\} \to F_N$，使得 $\delta \circ \mathbf{y}\iota_\alpha = F_N(-)(\vec{a})$。根据引理 6.14，这意味着存在一个元组 $\vec{c} \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_N$，使得 $N \models \iota_\alpha(\vec{c}, \vec{a})$，也就是说 $\vec{a} = \vec{c} \in [\![\vec{y} \mid \alpha]\!]_N$。□

结合命题 8.5 与推论 6.16，我们得到一些公式，可用于判定定义域有限可呈的同态何时是 *At*-反映的：

推论 8.8。在 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 中，假设 $h\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$由 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$ 诱导。以下陈述彼此等价：

(i) h 是 *At*-反映的。*(ii)* $M \models \mathrm{At}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{a})$，其中（可能是无限的）公式 $\mathrm{At}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 按图 *2* 中的定义给出。

8.1.1. 结构的嵌入。 推论 8.8 特别给出了这样的公式：对于 Mod(T) 中定义域为有限可呈域的同态，这些公式能够判定其是否为 Σ-结构的嵌入。我们明确陈述这一结果，以备今后参考。

记号 8.9. 当At 由所有原子公式组成时，我们将推论 8.8 中的公式 At$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$（见图 2）记作 Emb$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$。

采用这一记号，我们有

推论 8.10. 在$\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$中，假设 $h\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$由 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$ 诱导。以下陈述等价：

(i) h是 Σ-结构的一个嵌入。*(ii)* $M \models \mathrm{Emb}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{a})$。

8.2.**森林上的预层**。 一般而言，推论 8.10 中的公式 Emb$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 是无限的。本节将证明，在例 7.18 所述的森林上的预层的树状范畴这一情形中，这些公式可给出定义单态射的有限 公式。固定一个森林 F，并考虑树状范畴 F。回顾例 2.3 中的笛卡尔理论 T(F^{op})，它描述函子 F^{op} →Set，因此

$$\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})) \;\cong\; \widehat{\mathcal{F}}. \tag{17}$$

签名 Σ(F^{op}) 的 T(F^{op}) 对 F 中的每个元素 $p \in$都有一个类型 p，并且对 F 中的每一对元素 $q \leq p$ 都有一个函数符号 $f_{(q \leq p)}\colon\ p \to q$。

我们断言，对于每个有限可呈模型 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$，在 Σ(F^{op}) 中存在一个有限公式 Mono$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$($\vec{x}$)，使得以下各项在 Mod(T(F^{op})) 中等价：

(i) $h\colon\ \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$ 是一个单态射。(ii) $M \models$ Mono$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{c})$，其中 h 将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{c}$。

^固定任意一个 $p \in$F。首先，我们证明预层 $\mathbf{y}p \in$ F 在等式 (17) 下对应于有限可呈模型 $\langle x\colon\ p \mid \top \rangle$。由于 $\mathbf{y}p$ 在 F 中是有限可呈的，因此它在等式 (17) 下对应于 Mod(T(F^{op})) 的一个有限可呈对象，记为 $\langle \vec{y} \mid \psi \rangle$。现在，考虑一个模型 $M \in$ Mod(T(F^{op}))。不妨设 M 具有如下形式：对于某个预层 $X \in$ F，M_X，其中对于每个 $p \in$Sort(Σ(F^{op}))，$M_X(p)\colon = X(p)$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle \vec{y} \mid \psi \rangle, M_X] &\cong \widehat{\mathcal{F}}[\mathbf{y}p, X] \\
&\cong X(p) \\
&\cong M_X(p) \\
&\cong [\![x : p \mid \top]\!]_{M_X} \\
&\cong \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle x : p \mid \top \rangle, M_X].
\end{aligned}$$

这条 自然同构链诱导出可表函子的同构 s

$$\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle \vec{y} \mid \psi \rangle, -] \cong \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle x : p \mid \top \rangle, -]$$

^因此我们得到 $\langle \vec{y} \mid \psi \rangle \cong \langle x\colon\ p \mid \top \rangle$，这表明预层 $\mathbf{y}p \in$ F 对应于有限可呈模型 $\langle x : p \mid \top \rangle$。

现在，记 $\mathcal{T}$ 为 T(F^{op}) 的句法范畴。下面的引理是获得所需有限公式 Mono$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 的关键：

引理 8.11。 以下陈述在 $\mathcal{T}$ 中成立：

(i) 同态集 $\mathcal{T}[\{x\colon\ p \mid \top\}, \{y\colon\ q \mid \top\}]$ 至多包含一个元素，并且当且仅当 $q \not\leq p$ 属于 $\mathcal{F}$ 时为空。

单态射$\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x}) :=$

$$\bigwedge_{q \in \downarrow\{p_1,\ldots,p_n\}} \bigwedge_{\theta \in \mathcal{T}[\{\vec{x}|\varphi\},\{y,y':q|\top\}]} (\forall y, y') \left((y \doteq y' \wedge \theta(\vec{x}, y, y')) \;\to \bigvee_{\delta \in \mathcal{T}[\{\vec{x}|\varphi\},\{y,y':q|y \doteq y'\}]} \delta(\vec{x}, y, y') \right)$$

FIGURE 3. 单态射公式（命题 8.12）。

(*ii*) 同态集 $\mathcal{T}[\{x_1 :\ p_1、\ldots、x_n :\ p_n \mid \varphi\}、\{\vec{y} :\ q \mid \top\}]$ 是有限的，并且当对于所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$q \not\leq p_i$ 属于 $\mathcal{F}$ 时，它为空。

证明。(i) 回顾 §6.2，在定理 6.3 下，有限呈示模型 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 对应于可表函子 $\mathbf{y}\{\vec{x} \mid \varphi\} \in$ 有限极限保持 $[\mathcal{T},\mathbf{Set}],$，由米田引理可知，对于每个 $q \in$F，

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}[\{x : p \mid \top\}, \{y : q \mid \top\}] &\cong \mathrm{lex}[\mathcal{T}, \mathbf{Set}][\mathbf{y}\{y : q \mid \top\}, \mathbf{y}\{x : p \mid \top\}] \\
&\cong \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle y : q \mid \top\rangle, \langle x : p \mid \top\rangle] \\
&\cong \widehat{\mathcal{F}}[\mathbf{y}q, \mathbf{y}p] \\
&\cong \mathcal{F}[q, p].
\end{aligned}$$

因此，同态集 $\mathcal{T}[\{x :\ p \mid \top\},\ \{y :\ q \mid \top\}]$ 至多含有一个元素，并且当且仅当 $q \not\leq p$ 属于 F 时为空。

(ii) 考虑上下文 $\vec{x} = x_1 :\ p_1、\ldots\ldots、x_n :\ p_n$ 以及 $\vec{y} = y_1、\ldots\ldots、y_m :\ q$。对偶地，我们考虑同态集 $\mathbf{Mod(T(F^{op}))}[\langle \vec{y} :\ q \mid \top\rangle,\ \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle]$。由记号 8.3，回忆同态

$$\imath_\varphi \colon \langle \vec{x} \mid \top\rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle,$$

它诱导出一个映射

$$\imath_\varphi \circ - \colon \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle \vec{y} : q \mid \top\rangle, \langle \vec{x} \mid \top\rangle] \to \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))[\langle \vec{y} : q \mid \top\rangle, \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle].$$

根据注记 6.15，$\langle \vec{y} :\ q \mid \top\rangle$ 同构于 m 个 $\langle y :\ q \mid \top\rangle$ 的余积，并且我们在上文已经看到，$\langle y :\ q \mid \top\rangle$ 对应于可表预层 $\mathbf{y}q$。由于可表函子是射影对象，而射影对象的余积仍是射影对象，因此我们看到，$\langle \vec{y} :\ q \mid \top\rangle$ 是 $\mathbf{Mod(T(F^{op}))}$ 中的射影对象。因此，映射 $\imath_\varphi \circ -$ 是满射，因为 $\imath_\varphi$ 是满态射（见注记 8.4），所以只需证明同态集 $\mathbf{Mod(T(F^{op}))}[\langle \vec{y} : q \mid \top\rangle,\ \langle \vec{x} \mid \top\rangle]$ 是有限的，并且当对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 都有 $q \not\leq p_i$ 属于 F 时为空集。我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))\left[\langle \vec{y} : q \mid \top\rangle, \langle \vec{x} \mid \top\rangle\right] &\cong \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))\left[\coprod_{j=1}^{m} \langle y : q \mid \top\rangle, \coprod_{i=1}^{n} \langle x_i : p_i \mid \top\rangle\right] \\
&\cong \left(\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))\left[\langle y : q \mid \top\rangle, \coprod_{i=1}^{n} \langle x_i : p_i \mid \top\rangle\right]\right)^m \\
&\cong \left(\coprod_{i=1}^{n} \mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))\left[\langle y : q \mid \top\rangle, \langle x_i : p_i \mid \top\rangle\right]\right)^m
\end{aligned}$$

其中，最后一步使用了这样一个事实：$\langle y : q \mid \top\rangle$ 是一个连通对象（回顾引理 4.14 及其证明，相应的预层 $\mathbf{y}q$ 是连通的）。由 (i) 可知，同态集 $\mathbf{Mod(T(F^{op}))}[\langle \vec{y} :\ q \mid \top\rangle,\ \langle \vec{x} \mid \top\rangle]$ 是有限的，并且当且仅当对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$q \not\leq p_i$ 都属于 F 时，它为空。□

命题 8.12。 在 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}))$中，假设 $h\colon\ \langle\vec{x}\mid\varphi\rangle\to M$ 由 $\vec{c}\in[\![\vec{x}\mid\varphi]\!]_M$诱导，其中 $\vec{x}=x_1\colon\ p_1$、……、$x_n\colon\ p_n$。则以下各项等价：

(i) h是单态射。*(ii)* 命题 *8.5* 的条件 *(ii)* 限制为形如$(y,y'::=\alpha)$ 的公式$(y,y'\colon q::=y\doteq y')$ 时，对某个 $i\in\{1,\dots,n\}$ 满足 $q\le p_i$，则该条件成立。*(iii)* $M\models\mathrm{Mono}\langle\vec{x}\mid\varphi\rangle(\vec{c})$，其中$\mathrm{Mono}\langle\vec{x}\mid\varphi\rangle(\vec{x})$ 是图 *3* 中的有限公式。

证明。 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 结合命题 8.5 与例 8.1 可得，条件 (i) 等价于将条件 (ii) 推广至所有形如 $(y,y'::=\alpha)$ 的公式：

$$(y,y'\colon q::=y\doteq y')$$

其中 $q\in\mathsf{F}$。因此，我们需要证明可以将讨论限制在对某个 $i\in\{1,\dots,n\}$ 满足 $q\le p_i$ 的情形。进而，这可由以下事实推出：根据引理 8.11(ii)，若对所有 $i\in\{1,\dots,n\}$ 都有 $q\not\le p_i$，则不存在态射 $\ell\colon\langle y,y'\colon\ q\mid\top\rangle\to\langle\vec{x}\mid\varphi\rangle$，因此也不存在如等式 (15) 左侧所示的交换方形（参见命题 8.5 的条件 (ii)）。

（ii）$\Leftrightarrow$（iii）这由推论 8.8 得出（另见推论 6.16）。

还需证明公式 $\mathrm{Mono}\langle\vec{x}\mid\varphi\rangle$ 是有限的。第一个合取是有限的，因为 F 是一片森林；根据引理 8.11(ii)，第二个合取（关于 θ）也是有限的。最后，考虑关于 $\delta\in\mathcal{T}[\{\vec{x}\mid\varphi\},\{y,y'$ 的析取式：$\ q\mid y\doteq y'\}]$。根据 [36,引理 D1.4，4] 可得

$$[y,y',z,z'\colon q\mid y\doteq y'\ \wedge\ z\doteq y\ \wedge\ z'\doteq y']$$

是从 $\{y,y'\colon\ q\mid y\doteq y'\}$ 到 $\{z,z'\colon\ q\mid\top\}$ 的单态射。通过前复合，这给出了一个到下列集合中的单射：

$$\mathcal{T}[\{\vec{x}\mid\varphi\},\{y,y'\colon q\mid y\doteq y'\}]$$

到有限集

$$\mathcal{T}[\{\vec{x}\mid\varphi\},\{y,y'\colon q\mid\top\}]\,.$$

因此，同态集 $\mathcal{T}[\{\vec{x}\mid\varphi\},\{y,y'\colon\ q\mid y\doteq y'\}]$ 是有限的。 □

特别地，前一个命题给出了定义 $\mathsf{F}\cong\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathsf{F}^{\mathrm{op}}))$ 中路径嵌入 $\widehat{\ }$ 的有限公式。回顾引理 4.12，F 中的非初始路径恰好是可表预层，它们对应于以下形式的对象$\langle x\colon\ p\mid\top\rangle$ in $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathsf{F}^{\mathrm{op}}))$。因此，对每个 $p\in\mathsf{F}$，命题 8.12 给出一个有限公式

$$\mathrm{Mono}[p](x)\coloneqq\mathrm{Mono}\langle x:p\mid\top\rangle(x)$$

使得对于任意态射 $h\colon\langle x\colon\ p\mid\top\rangle\to M$ in $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}(\mathsf{F}^{\mathrm{op}}))$，以下陈述等价：

(i) $h\colon\langle x\colon\ p\mid\top\rangle\to M$ 是单态射。(ii) $M\models\mathrm{Mono}[p](c)$，其中 h 将 x 映为 $c\in M(p)$。

9. Proof of the main result

本节致力于证明定理 3.29。该定理指出，若一个有限可达的林地伴随

$$\mathcal{C}\ \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\ \mathcal{E}\qquad(\perp)$$

在签名 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中检测路径嵌入，然后

$$M,N\in\mathcal{E}\text{ equivalent in }\mathcal{L}_\infty(\boldsymbol{\Sigma})\implies M\leftrightarrow_R N.\tag{18}$$

根据推论 7.15，我们知道，在假设 $\mathcal{C}$ 中的路径嵌入是可定义的情况下，后一个蕴含成立。为了证明定理 3.29，我们将证明：只要 $\mathcal{C}$ 中的路径嵌入由 L 检测出来，它们就是可定义的： $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$。

回顾推论 8.10（§8.1.1），我们得到了在 $\mathcal{E}$ 中定义结构嵌入的公式。为了将后者转换为在 $\mathcal{C}$ 中定义路径嵌入的公式，我们使用 Hodges 的 词构造 [29, 30]。我们将在 §9.1 中回顾后者，并在 §9.2 中完成定理 3.29 的证明。最后，在 §9.3 中，我们讨论 $\mathcal{E}$ 是有限关系签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 的结构范畴这一特殊情形，并给出当 $\mathcal{L}_\infty(\boldsymbol{\sigma})$ 被一阶逻辑 $\mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma})$ 替换时使等式 (18) 成立的充分条件。

9.1. **Hodges 的词构造**。 设 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{U}$ 分别是签名 $\mathbf{\Sigma}$ 和 $\mathbf{\Gamma}$ 中的笛卡尔理论。回顾 §6.3，lfp 范畴的态射

$$\mathbf{Mod}(\mathbf{U}) \to \mathbf{Mod}(\mathbf{T}),$$

即有限元右伴随（参见命题 5.6）将 $\mathbf{\Sigma}$ 中的公式的解释为 $\mathbf{\Gamma}$ 中的公式。Hodges 的 词构造 [29, 30], （另见 [31, §9.3], ）是解释的一种宽松形式，适用于所有有限元函子 $\mathbf{Mod(U)} \to \mathbf{Mod(T)}$，尤其适用于左 伴随函子。

9.1.1. 生成结构和表示。 我们回顾 [31, 1.2.2和§9.2]中的以下标准概念。

固定一个签名 $\mathbf{\Sigma}$。给定取自 $\mathbf{\Sigma}$-结构 M的元素元组 $\vec{a}$，如果包含 $\vec{a}$ 的最小子结构就是 M 本身，那么我们称 $\vec{a}$ 生成 M。

一个表示 是一个二元组（$\vec{x}$, （α_i）$_{i\in I}$），其中 α_i是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的原子公式，而 $\vec{x}$是一个可能为无限的分排序变量序列，包含（$\alpha_i \mid i \in I$）中的所有变量。

设 $\mathcal{K}$ 是一个 $\mathbf{\Sigma}$-结构类。考虑一个表示（$\vec{x}$, （α_i）$_{i\in I}$），其中 $\vec{x} =$ （x_j）$_{j\in J}$以及一个结构 $M \in \mathcal{K}$。设 $\vec{a} =$ （a_j）$_{j\in J}$ 是一个取自 M的载体集、且与 $\vec{x}$的类型相匹配的元素序列。当以下条件成立时，我们称（$\vec{x}$, （α_i）$_{i\in I}$）表示 在 $\mathcal{K}$ 中的扩展结构（M, $\vec{a}$）：

(i) M 由 $\vec{a}$生成（作为一个 $\mathbf{\Sigma}$-结构），(ii) 对每个 $i \in I$，$(M, \vec{a}) \models \alpha_i$，(iii) 若 $N \in \mathcal{K}$ 且对每个 $i \in I$，$(N, b) \models \alpha_i$，则存在一个（必然唯一的）同态$\vec{}$射$(M, \vec{a}) \to (N, b)$。

注意，若 $(M, \vec{a})$ 和 $(N, \vec{b})$ 都由 $\mathcal{K}$ 中的 $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ 表示，则唯一的同态$\vec{}$射 $(M, \vec{a}) \to (N, b)$ 是一个同构。

以下有用的事实已在 [31, 引理 9.2.1] 中得到证明。

引理 9.1。 设 $\mathcal{K}$ 是一个由 $\mathbf{\Sigma}$-结构组成的类，并考虑一个表示 $(\vec{x}, (\alpha_i)_{i\in I})$。那么，对于每个具有 $M \in \mathcal{K}$的 $(M, \vec{a})$，以下命题等价：

(i) $(\vec{x}, (\alpha_i)_{i\in I})$ 在 $\mathcal{K}$ 中表示 $(M, \vec{a})$。*(ii)* $\vec{a}$ 生成 M （作为一个 $\mathbf{\Sigma}$-结构），并且对于 $\mathbf{\Sigma}$ 的每个原子公式 $\beta(\vec{x})$，我们$\vec{}$有：$(M, \vec{a}) \models \beta$ 当且仅当，对于所有满足 $N \in \mathcal{K}$ 的 (N, b)，如果 $(N, b) \models \alpha_i$ 对每个$i \in I$，那么 $(N, b) \models \beta$。

引理 9.1 的证明。这里使用 $\mathcal{L}_{\infty,\infty}$-公式 $(\forall \vec{x})\,(\bigwedge_i \alpha_i \to \beta)$ 很方便。首先假设 $(\vec{x}, (\alpha_i)_i)$ 表示 $(M, \vec{a})$。那么根据定义， $\vec{a}$生成 M。现在考虑 $\mathbf{\Sigma}$ 的一个原子公式 $\beta(\vec{x})$。如果 $\mathcal{K} \models (\forall \vec{x})\,(\bigwedge_i \alpha_i \to \beta)$，那么特别地我们有$\vec{}$$(M, \vec{a}) \models \beta$。如果 $\mathcal{K} \not\models (\forall \vec{x})\,(\bigwedge_i \alpha_i \to \beta)$，那么存在一个 $N \in \mathcal{K}$ 和某个 $b \in N$，使得 $(N, \vec{b}) \models \bigwedge_i \alpha_i$，但 $(N, \vec{b}) \not\models \beta$。根据对 M 的假设，存在一个同态$\to$$h : M \to N$，它将 $\vec{a}$ 映到 b，因此我们也必须有 $(M, \vec{a}) \not\models \beta$。

对于逆命题，我们必须证明 $(\vec{x}, (\alpha_i)_i)$ 表示 $(M, \vec{a})$。给定 $j \in I$，显然有 $\mathcal{K} \models (\forall \vec{x})(\bigwedge_i \alpha_i \to \alpha_j)$，因此根据假设，$(M, \vec{a}) \models \alpha_j$。由此可得 $(M, \vec{a}) \models \bigwedge_i \alpha_i$。现在考虑某个 $N \in \mathcal{K}$ 和某个 $b \in N$，使得 $(N, b) \models \bigwedge_i \alpha_i$。因此，对于每个原子公式 β，若 $(M, \vec{a}) \models \beta$，则 $(N, b) \models \beta$，因为 $\mathcal{K} \models (\forall \vec{x})(\bigwedge_i \alpha_i \to \beta)$。回忆第 §2 节，等式是原子公式。由于 $\vec{a}$ 生成 M，可知赋值 $\vec{a} \mapsto b$ 可扩展为函数 $h\colon M \to N$，该函数保持 $\mathbf{\Sigma}$ 的函数符号，也就是说，对于 $\mathbf{Fun(\Sigma)}$ 中的每个项 $t(\vec{x})$，我们有

$$h(t_M(\vec{a})) \;=\; t_N(\vec{b})$$

同样容易看出，h 保留了 $\mathbf{\Sigma}$的谓词符号。 □

注9.2。上文我们考虑了对偶组 $(\vec{x},\ \vec{\alpha})$ 的表示，其中 $\vec{x}$ 是一个分排序变量序列。但我们也可以等价地考虑对偶组 $(\vec{c},\ \vec{\alpha})$ 的表示，其中 $\vec{c} = (c_j)^{j\in J}$ 是来自集合族 $S = (S_\tau \mid \tau \in \mathbf{Sort(\Sigma)})$ 的元素序列，而 $\vec{\alpha}$ 是 $\mathbf{\Sigma}(\vec{c})$中的原子公式；$\mathbf{\Sigma}(\vec{c})$是通过为每个 c_j添加一个适当类型的新常元符号而扩展 $\mathbf{\Sigma}$ 所得。

此外，坚持要求 $\vec{x}$或 $\vec{c}$构成序列而非单纯集合，是一种技术上的便利。仿照 [31, 注9.2], ，在不明确指出序列中元素的次序时，我们可以只考虑对偶组 $(X,\ \Phi)$，其中 X 是一个集合，Φ 是 $\mathbf{\Sigma}(X)$中的原子公式集合。

9.1.2. 词构造。 考虑一个有限元函子 $F\colon \mathbf{Mod(U)} \to \mathbf{Mod(T)}$，其中 $\mathbf{U}$和 $\mathbf{T}$ 分别是签名 $\mathbf{\Gamma}$ 和 $\mathbf{\Sigma}$上的笛卡尔理论。相应的词构造给出一个从 $\mathcal{L}_\infty\mathbf{(\Sigma)}$ 到 $\mathcal{L}_\infty\mathbf{(\Gamma)}$ 的公式翻译，使得对于每个模型 $M \in \mathbf{Mod(U)}$，FM的理论都可以用 M的理论来表达。

更具体地说，一个词构造

$$W \;:\; \mathbf{\Gamma} \;\longrightarrow\; \mathbf{\Sigma}$$

对于上述函子 F，是一个句法工具，它为每个 $M \in \mathbf{Mod(U)}$ 生成一个 $\mathbf{Mod(T)}$ 的表示 $W(M) = (X, \Phi)$。关键在于，“生成元” X和“关系” Φ 由 $\mathbf{\Gamma}$ 中的公式控制，而这些公式的定义独立于 M。

现在我们回顾词构造的形式化定义；下文给出的是 [30] 的多排序概念的有限性版本。

定义 9.3（词构造）。设 $\mathbf{\Gamma}$ 和 $\mathbf{\Sigma}$ 是签名。一个词构造

$$W \;:\; \mathbf{\Gamma} \;\longrightarrow\; \mathbf{\Sigma}$$

是一个元组 $W = (\mathbf{\Sigma}(W),\ \mathbf{Te}(W),\ \mathbf{At}(W))$，其中：

(1) $\mathbf{\Sigma}(W)$ 是一个签名，其中 $\mathbf{Sort}(\mathbf{\Sigma}(W)) := \mathbf{Sort}(\mathbf{\Sigma}) + \mathbf{Sort}(\mathbf{\Gamma})$，它扩展了带有函数符号的 $\mathbf{\Sigma}$

$$f \;:\; \gamma_1 \dots \gamma_n \;\longrightarrow\; \tau$$

对于每个 γ_1、.....、$\gamma_n \in \mathbf{Sort(\Gamma)}$ 和 $\tau \in \mathbf{Sort(\Sigma)}$。

注意，$\mathbf{\Sigma}(W)$ 中的原子公式也是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的原子公式，但其中的项可能涉及 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 的附加函数符号。

(2) $\mathbf{Te}(W)$ 是一个函数，它将 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 中的项 $(\vec{x}\colon \vec{\gamma} ::= t\colon \tau)$，其中有 $\vec{\gamma} \in \mathbf{Sort(\Gamma)}$ 和$\tau \in \mathbf{Sort(\Sigma)}$，映射为 $\mathbf{\Gamma}$ 中自由变量属于 $\vec{x} : \vec{\gamma}$ 的公式。(3) $\mathbf{At}(W)$ 是一个函数，它将 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 中的原子公式 $(\vec{x}\colon \vec{\gamma} ::= \alpha)$，其中有 $\vec{\gamma} \in \mathbf{Sort(\Gamma)}$，映射为 $\mathbf{\Gamma}$ 中自由变量属于 $\vec{x} : \vec{\gamma}$ 的公式。

一个词构造 $W\colon\ \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Sigma}$ 对于每个 $M \in \mathbf{Str(\Gamma)}W$诱导出一个表示$M(=)\, X(,\ )$，其定义如下：

- X 是形如 [19] $t(\vec{a})$ 的表达式集合，其中 $(\vec{x}:\ \vec{\gamma} ::= t:\ \tau)$ 属于 $\mathsf{Te}(W)$、$\vec{a} \in M(\vec{\gamma})$ 和 $M \models \mathsf{Te}(W)(t)(\vec{a})$ 的定义域。
- Φ 是形如 $\alpha(\vec{a})$ 的原子公式集合，其中 $(\vec{x} : \vec{\gamma} ::= \alpha)$ 属于 $\mathsf{At}(W)$ 的定义域，$\vec{a} \in M(\vec{\gamma})$，且 $M \models \mathsf{At}(W)(\alpha)(\vec{a})$。

注记 9.4. 一般而言，给定一个结构类 $\mathcal{K}$ 和一个表示 $(\vec{x},\ (\alpha_i)_{i\in I})$，$\mathcal{K}$ 中的某个成员可能不存在（扩展后）能由 $(\vec{x},\ (\alpha_i)_{i\in I})$ 表示的结构。

全称 Horn 理论的一个特征性质是，在其模型范畴中，每个表示都会表示某个扩展结构；参见 [31, 定理 9.2.2 和习题 9.2.19]。特别地，如果 $\mathcal{K}$ 是某个全称 Horn 理论的模型类，那么总存在 $\mathcal{K}$ 中的一个结构的扩展，它由 $W(M)$ 表示。

事实上，Hodges 在 [29, 30, 31]中研究了（无穷）Horn 理论。由于我们允许任意笛卡尔理论，因此需要对 Hodges 的结果稍作调整。[20]

9.1.3. 局部有限可呈范畴之间有限元函子的词构造。固定一个有限元函子F：$\mathbf{Mod(U)} \to \mathbf{Mod(T)}$，其中$\mathbf{U}$、$\mathbf{T}$ 是笛卡尔理论。记 $\mathbf{\Gamma}$ 和 $\mathbf{\Sigma}$ 分别为$\mathbf{U}$ 和$\mathbf{T}$的签名。我们将为 F 构造一个词构造

$$W \ :\ \mathbf{\Gamma} \longrightarrow \mathbf{\Sigma}$$

使得对于每个 $M \in \mathbf{Mod(U)}$，$W(M)$在$\mathbf{Mod(T)}$中给出 FM的一个扩张。这使我们能够将 FM 的 $\mathcal{L}_\infty\mathbf{(\Sigma)}$-理论转换为 M的 $\mathcal{L}_\infty\mathbf{(\Gamma)}$-理论（见下文定理 9.9）。

设 $M \in \mathbf{Mod(U)}$。回忆一下，M 是由定义域有限可呈的态射 $\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to M$组成的余锥的典范滤余极限。由于 F 保滤过余极限，FM就是由 $F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to FM$构成的滤过余极限，其连接映射由$\mathbf{Mod(U)}$中的交换三角形诱导。给出这个滤过余极限的显式描述很方便。

注 9.5。根据引理 6.6，$\mathbf{Mod(T)}$ 在滤过余极限下于 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中闭合。根据 [13, 注记 5.1(3) 和 3.4(4)(iii)],[21]，这给出了 FM 的如下描述。

(1) 对于每个类型 $\tau \in \mathsf{Sort}\mathbf{(\Sigma)}$，$FM(\tau)$ 是 $\mathbf{Set}$ 中 $F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle(\tau)$ 的滤过余极限。回忆一下，这意味着 $FM(\tau)$ 同构于 $F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle(\tau)$ 各项的不交并关于如下等价关系所得的商：该等价关系将那些在形如以下形式的余跨度中具有相同像的元素对等同起来

$$\begin{array}{ccc} F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle(\tau) & & F\langle \vec{y} \mid \psi\rangle(\tau) \\ & {\scriptstyle (Fh)^\tau} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle (Fk)^\tau} & \\ & F\langle \vec{z} \mid \theta\rangle(\tau) & \end{array}$$

（参见例如 [40, 命题 3.1.3]）。

(2) 现在考虑一个函数符号 $f \in \mathsf{Fun}\mathbf{(\Sigma)}(\tau_1、\ldots\ldots、\tau_n;\ \tau)$。给定 $\vec{a} \in FM(\vec{\tau})$，由于 M 的典范图是滤子的，因此存在某个 $Fh\colon F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to FM$，使得 $\vec{a}$ 属于 Fh 的像，例如 $\vec{a} = (Fh)(\vec{b})$。于是我们可以令 $f^{FM}(\vec{a})$ 为 $hf_{\langle \vec{x}\mid\varphi\rangle}(\vec{b})$。这确实唯一地定义了 f^{FM}，原因是 M 的典范图是滤子的。

（3）最后，对于每个关系符号 $R \in \mathsf{Rel}\mathbf{(\Sigma)}(\tau_1,\ \ldots\ldots,\ \tau_n)$，$R^{FM}$是 R 的解释在态射 $Fh\colon F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to FM$ 下的像的并集。

[19]这里我们采用注9.2中概述的等价方法。[20]回想注记 2.5，Horn 理论是笛卡尔理论的真子类。[21]另一种做法是利用这样一个事实：$\mathbf{Str(\Sigma)}$ 中的滤过余极限是在 $[\mathfrak{T}\mathbf{(\Sigma)},\ \mathbf{Set}]$, 中计算的，其中 $\mathfrak{T}\mathbf{(\Sigma)}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 的句法范畴。参见第 5.2 节以及第 6.1 节中的等式 (6)。

现在我们定义与 F 相关联的词构造 $W\colon\ \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Sigma}$。为此，我们必须设计签名 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 以及函数 $\mathsf{Te}(W)$ 和 $\mathsf{At}(W)$。

我们首先描述扩展 $\mathbf{\Sigma}$ 的签名 $\mathbf{\Sigma}(W)$。回顾一下，$\mathbf{\Sigma}(W)$ 的类型为 $\mathsf{Sort}(\mathbf{\Gamma}) + \mathsf{Sort}(\mathbf{\Sigma})$。$\mathbf{\Sigma}(W)$ 的附加函数符号如下。设 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 是 $\mathbf{U}$ 的有限呈示模型。假设 $\vec{x} = x_1\colon \gamma_1, \ldots\ldots, x_k\colon \gamma_k$（其中 $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_k$ 是 $\mathbf{\Gamma}$ 的类型）。对于每个 $\tau \in \mathsf{Sort}(\mathbf{\Sigma})$ 以及每个 $c \in F\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\tau)$，我们引入一个新的函数符号

$$f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle} \ :\ \gamma_1 \ldots \gamma_k \longrightarrow \tau.$$

$f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}$ 的预期解释如下。给定 $M \in \mathbf{Mod}(\mathbf{U})$，带有 $c \in \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\tau)$ 的函数符号 $f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}$ 应被理解为函数

$$\begin{array}{rcl} [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M & \longrightarrow & (FM)(\tau) \\ \vec{a} & \longmapsto & (Fh_{\vec{a}})(c) \end{array}$$

其中 $h_{\vec{a}}\colon\ \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$ 是由 $\vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M$（引理 6.10）诱导的同态。因此，$FM$ 由赋值生成（其含义见 §9.1.1）

$$C \ :\ (f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}, \vec{a} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_M) \longmapsto (Fh_{\vec{a}})(c) \in FM \tag{19}$$

其中（$\vec{x} ::= \varphi$）遍历 $\mathbf{U}$上的笛卡尔公式。

现在转向 $\mathsf{Te}(W)$。上述对 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 的描述立即给出了公式 $\mathsf{Te}(W)(f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle})(\vec{x})$，即

$$\mathrm{Te}(W)(f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}(\vec{x})) \ :=\ \varphi(\vec{x}).$$

此外，由于 FM由等式 (19) 的赋值 C生成，对于 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 中不具有 $f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}(\vec{x})$ 形式的每个项 t，我们可以简单地令

$$\mathrm{Te}(W)(t) \ :=\ \bot.$$

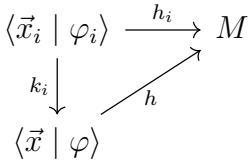
$\mathsf{At}(W)$ 的情形不太直接。令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathbf{Mod}(\mathbf{U})$ 的句法范畴。令 β 为 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 中的一个原子公式，其自由变量的类型属于 $\mathsf{Sort}(\mathbf{\Gamma})$。$\mathbf{\Gamma}$ 中的公式 $\mathsf{At}(W)(\beta)$ 定义如下。回忆一下，新函数符号 $f^c_{\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle}$ 的输入类型是 $\mathbf{\Gamma}$的类型，并记

$$\beta \ =\ \alpha\left(f^{c_1}_{\langle \vec{x}_1 \mid \varphi_1 \rangle}(\vec{x}_1), \ldots, f^{c_n}_{\langle \vec{x}_n \mid \varphi_n \rangle}(\vec{x}_n)\right)$$

其中，α 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的原子公式，且 $\vec{x}_i$不必互不相同。我们基于以下刻画构造 $\mathsf{At}(W)(\beta)$。

引理 9.6。设 $\alpha(y_1, \ldots, y_n)$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个原子公式，并设 $M \in$ **模**$(\mathbf{U})$。给定态射 $h_i\colon \langle \vec{x}_i \mid \varphi_i \rangle \to M$，其中 $i = 1, \ldots, n$，以下条件等价：

(i) $FM \models \alpha((Fh_1)(c_1) \ldots, (Fh_n)(c_n))$。***(ii)*** 存在 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 和 $h\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to M$，使得每个 h_i 都可以分解为



其中态射 k_i' 满足

$$F\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \ \models\ \alpha\big((Fk_1)(c_1), \ldots, (Fk_n)(c_n)\big).$$

证明。我们首先证明 (ii) $\Rightarrow$(i)。给定 $h\colon\ \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to M$和 $k_i\colon\ \langle \vec{x}_i \mid \varphi_i\rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$，如要求所示，由于 h 是一个同态，我们有

$$FM \ \models\ \alpha\big((Fh)(Fk_1)(c_1),\ldots,(Fh)(Fk_n)(c_n)\big),$$

因此我们已经完成证明，因为

$$(Fh_i)(c_i)\ =\ (Fh)(Fk_i)(c_i).$$

现在我们证明 (i) $\Rightarrow$(ii)。假设 $FM \models \alpha((Fh_1)(c_1)\ldots,(Fh_n)(c_n))$。根据注 9.5，存在某个 $h'\colon \langle \vec{x}' \mid \varphi'\rangle \to M$以及某些 $b_1,\ldots,b_n \in F\langle \vec{x}' \mid \varphi'\rangle$，使得$F\langle \vec{x}' \mid \varphi'\rangle \models \alpha(b_1,\ldots,b_n)$，并且对于每个 $i=1,\ldots,n$，有 $(Fh')(b_i) = (Fh_i)(c_i)$。再次根据注 9.5，利用 M 在 **Mod(U)** 中的典范图是滤子的这一事实，h'分解为

$$\langle \vec{x}' \mid \varphi'\rangle \xrightarrow{\ h''\ } \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \xrightarrow{\ h\ } M$$

使得对于每个 $i=1,\ldots,n$，都存在一个 $k_i\colon \langle \vec{x}_i \mid \varphi_i\rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$，满足 $h_i = h\circ k_i$ 以及 $(Fh'')(b_i) = (Fk_i)(c_i)$。由于 h'' 是一个同态，我们有

$$F\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \ \models\ \alpha\big((Fh'')(b_1),\ldots,(Fh'')(b_n)\big).$$

证明至此完成。 □

推论 6.16 为引理 9.6 中条件 (ii) 提供了句法表述。这促使我们将 $\mathrm{At}(W)(\beta)(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ 定义为公式

$$\bigvee_{\{\vec{x}\mid\varphi\}\in\mathcal{U}} \ \bigvee_{\substack{\theta_1\in\mathcal{U}[\varphi,\varphi_1],\ldots,\theta_n\in\mathcal{U}[\varphi,\varphi_n]\\ F\langle\vec{x}\mid\varphi\rangle\models\alpha((Fk_1)(c_1),\ldots,(Fk_n)(c_n))}} (\exists\vec{x})\left(\varphi\wedge\bigwedge_{1\le i\le n}\theta_i(\vec{x},\vec{x}_i)\right)$$

其中 $k_i\colon \langle \vec{x}_i \mid \varphi_i\rangle \to \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$ 在定理 6.3 下对应于 $\mathbf{y}\theta_i$。

这完成了与 F 相关的词构造 W 的定义。现在我们将证明，对于每个 $M \in$ **Mod(U)**，扩展结构 (FM, C) 在 **Mod(T)** 中由 $W(M)$ 表示。

命题 9.7。给定 $M \in \mathbf{Mod}(\mathbf{U})$，表示 $W(M)$ 在 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ 中表示扩展结构 (FM, C)，其中 C 如公式 (19) 所示。

证明。设 $M \in$ **Mod(U)**，并按照 §9.1.2 将 $W(M) = (X, \Phi)$ 写出。我们应用引理 9.1。

首先，由注 9.5.(1)可知，FM 由 C生成。但 X的元素恰好是满足（M，$\vec{a}$）$\models\varphi$ 的 $f^{c}_{\langle\vec{x}\mid\varphi\rangle}(\vec{a})$，也就是说，存在一个（必然唯一的）$h_{\vec{a}}\colon\ \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to M$，将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{a}$。因此，我们在序列 C中得到了对 X元素的解释，而该解释生成了 FM。

现在考虑 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个带有 X中参数的原子公式 β，即

$$\beta \ =\ \alpha\left(f^{c_1}_{\langle\vec{x}_1\mid\varphi_1\rangle}(\vec{a}_1),\ldots,f^{c_n}_{\langle\vec{x}_n\mid\varphi_n\rangle}(\vec{a}_n)\right).$$

我们需要证明，$(FM,\ C) \models \beta$当且仅当，每个带有对 X 元素的解释的 $N \in$ **Mod(T)**在满足 Φ 中的所有公式时，都满足 β。注意，由于 FM 是**T**的模型，只需证明对于所有上述 β，都有

$$(FM, C) \models \beta \quad \text{iff} \quad \beta \in \Phi,$$

也就是说

$$(FM, C) \models \beta \quad \text{iff} \quad M \models \mathrm{At}(W)(\beta).$$

但这可由推论 6.16 和引理 9.6 得出。 □

注记 9.8。 注意，由于 $\mathbf{T}$ 不被假定为 Horn 理论，我们无法由 [31,定理 9.2。2] 推导出命题 9.7。

此外，将命题 9.7 与 [31, 定理 9.3.7], 进行比较，可注意到后者讨论的是 $\mathbf{T}$ 为全称 Horn 理论且 $\mathbf{Mod(U)} = \mathbf{Str(\Gamma)}$ 的情形。

顺便一提，请注意，$\mathrm{Te}(W)$ 和 $\mathrm{At}(W)$ 中涉及的所有公式 φ 和 θ_i 都是笛卡尔的，因此也是原子正的（参见备注 8.7）。因此，词构造 W 在 [31, §9.3] 的意义下是存在的。

对于 $F\colon \mathbf{Mod(U)} \to \mathbf{Mod(T)}$，以及 $W\colon \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Sigma}$ 如上所述，且 $M \in \mathbf{Mod(U)}$，我们现在将说明如何把 FM 的 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$-理论翻译为 M 的 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$-理论。这依赖于以下公式翻译 $(-)^W$。

设 $\psi(y_1,\dots,y_n)$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 中的一个公式，并设 $\vec{f} = f^{c_1}_{\langle \vec{x}_1|\varphi_1\rangle}(\vec{x}_1)\dots, f^{c_n}_{\langle \vec{x}_n|\varphi_n\rangle}(\vec{x}_n)$ 是来自 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 的其他函数符号，其输出类型与 $y_1,\dots,y_n$ 的类型相匹配。我们按 ψ 归纳定义 $\psi(\vec{f})^W(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ 如下。

- 若 $\psi(y_1, \dots..., y_n)$ 是原子公式 $\alpha(y_1, \dots..., y_n)$，
$$\psi(\vec{f})^W(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \;:=\; \mathrm{At}(W)(\beta)(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$$
where $\beta = \alpha\left(f^{c_1}_{\langle \vec{x}_1|\varphi_1\rangle}(\vec{x}_1),\dots,f^{c_n}_{\langle \vec{x}_n|\varphi_n\rangle}(\vec{x}_n)\right)$.
- 翻译 $(-)$ 与命题联结词交换。
- 在 $\psi(\vec{y}) = (\exists y\colon \tau)\psi'(\vec{y}, y)$ 的情形下，我们令 $\psi(\vec{f})^W(\vec{x}_1, \dots..., \vec{x}_n)$ 为公式
$$\bigvee_{\{\vec{x}|\varphi\}\in\mathcal{U}} \bigvee_{c\in(F\langle\vec{x}|\varphi\rangle)(\tau)} (\exists\vec{x})\left(\varphi(\vec{x}) \wedge \psi'(\vec{f}, f^c_{\langle\vec{x}|\varphi\rangle})^W(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{x})\right)$$
其中 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbf{U}$ 的句法范畴。

翻译 $(-)^W$ 在以下意义上是正确的：

定理 9.9. 设 $\psi(y_1,\dots,y_n) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$，并设 $\vec{f} = f^{c_1}_{\langle \vec{x}_1|\varphi_1\rangle}(\vec{x}_1)\dots, f^{c_n}_{\langle \vec{x}_n|\varphi_n\rangle}(\vec{x}_n)$ 是来自 $\mathbf{\Sigma}(W)$ 的附加函数符号。令 $M \in \mathbf{Mod(U)}$，并设 $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n \in M$ 满足：对每个 $i = 1,\dots,n$，$(M,\vec{a}_i) \models \mathrm{Te}(W)(f^{c_i}_{\langle \vec{x}_i|\varphi_i\rangle}(\vec{x}_i))$。那么，以下陈述彼此等价：

(i) $FM \models \psi((Fh_1)(c_1)\dots,(Fh_n)(c_n))$，其中 $h_i\colon \langle\vec{x}_i \mid \varphi_i\rangle \to M$ 将 $\vec{x}_i$ 映射为 $\vec{a}_i$。*(ii)* $M \models \psi(\vec{f})^W(\vec{a}_1, \dots..., \vec{a}_n)$。

证明。 该命题通过对 ψ 进行结构归纳加以证明。我们只详细说明最重要的情形：

- ψ 原子的情形由推论 6.16 和引理 9.6 得出 .
- 如果 $\psi(\vec{y}) = (\exists y)\psi'(\vec{y}, y)$，则由注 9.5 可知
$$FM \models \psi((Fh_1)(c_1),\dots,(Fh_n)(c_n))$$
当且仅当存在 $h\colon \langle\vec{x} \mid \varphi\rangle \to M$ 和 $c \in F\langle\vec{x} \mid \varphi\rangle$ 使得
$$FM \models \psi'((Fh_1)(c_1),\dots,(Fh_n)(c_n),(Fh)(c)).$$
但是，存在同态 $h\colon \langle\vec{x} \mid \varphi\rangle \to M$，当且仅当存在 $\vec{a} \in M$ 使得 $(M, \vec{a}) \models \varphi$。因此，根据归纳假设即可得到该结果。□

注记 9.10。 定理 9.9 类似于 [31, 定理 9.3。2]。我们进一步作出如下评论：

(1) 根据 M 定理 9.9，如果 N 和 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ 中的 FM 等价，那么 FN 和 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$ 中的等价。

(2) 不同于解释的情形（参见注记 6.18），如果 M 和 N ($\mathcal{L}_\omega$) 中的 $\mathbf{\Gamma}$等价，并不必然推出 FM 和 FN ($\mathcal{L}_\omega$) 中的 $\mathbf{\Sigma}$等价。(3) 当 **Mod(U)** 和 **Mod(T)** 是结构范畴时，条目 (1) 也可以等价地由 [14,定理 2.18 和 2.25]推出。事实上，由 [13, 定理 1.70]的证明可知，**Mod(U)** 和**Mod(T)** 都是 ω-单态射生成的，其含义见 [14]。于是，根据 [14, 定理 2.25]，如果 **Mod(U)** 和 **Mod(T)** 是结构范畴 **Str(Γ)** 和 **Str(Σ)**，那么上述对逻辑等价的保持分别由 [14, 定理 2.18]给出。

9.2. **定理 3.29 的证明**。现在我们可以证明主要结果，为方便读者，先重述如下。

定理 3.29。设 $\mathbf{\Sigma}$为一个签名，并假设 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$是一个有限可达的林地伴随，且它在 $\mathbf{\Sigma}$中检测路径嵌入。对于所有 $M, N \in \mathcal{E}$,

$$M, N \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}) \implies M \leftrightarrow_R N.$$

固定一个伴随

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\overset{\perp}{}}{\rightleftarrows}}} \mathcal{E}$$

如上文所述。回想一下，这意味着：

(1) 存在一个 $\mathbf{\Sigma}$ 中的笛卡尔理论$\mathbf{T}$，使得 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(T)}$。(2) 林地范畴 $\mathcal{C}$ 是局部有限可呈现的。因此，根据推论 6.5(2)，我们可以将 $\mathcal{C}$ 识别为**Mod(U)**，其中**U** 是签名 $\mathbf{\Gamma}$上的一个笛卡尔理论。(3) 右伴随 $R\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 是有限性的（定义 3.22）；等价地，左伴随 $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 保有限可呈对象（命题 5.6）。(4) $\mathcal{C}$ 的路径是有限可呈对象，并且一个 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon P \to a$，若 P 是路径，则它是嵌入（按林地范畴 $\mathcal{C}$ 的意义）当且仅当 Lf是 $\mathcal{E}$ 中 $\mathbf{\Sigma}$-结构的嵌入（定义 3.26）。

Co上面的条件 (4) 是路径嵌入检测这一概念中的关键部分 .

根据推论 7.15，我们知道，在 $\mathcal{C}$ 中的路径嵌入在 $\mathbf{\Gamma}$ 中是可定义的这一假设下（定义 7.8），定理 3.29 的结论成立，也就是说

(5) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每条路径 $\langle \vec{y} \mid \psi \rangle$，存在一个公式 $\mathbf{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \vec{y} | \psi \rangle(\vec{y}) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$，使得对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和每个 $h\colon \langle \vec{y} \mid \psi \rangle \to a$，将 $\vec{y}$ 映射到 $\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_a$,

$$h \text{ is an embedding in } \mathcal{C} \iff a \models \mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}\langle \vec{y} \mid \psi \rangle(\vec{b}).$$

定理 3.29 随即成为以下引理的直接推论；该引理表明，在该定理的设定下，(4) ⇒ (5)。也就是说，只要路径嵌入能够被检测出来，它们在 $\mathcal{C}$ 中就是可定义的。

引理 9.11。考虑如上所述的伴随 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$，并设 $P = \langle \vec{y} \mid \psi \rangle$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一条路径。存在一个公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P](\vec{y}) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$，使得对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 以及每个将 $\vec{y}$ 映射到 $b \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_a$ 的同态 $h\colon \langle \vec{y} \mid \psi \rangle \to a$，以下各项等价：

(i) h 是一个嵌入，

(ii) $a \models \mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P](\vec{b})$.

证明。令 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 为有限呈示模型 $L\langle \vec{y} \mid \psi \rangle = LP$。推论 8.10 为我们提供了一个公式 $\mathbf{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x}) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$，使得对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和每个同态 $h\colon \langle \vec{y} \mid \psi \rangle \to a$，以下各项等价：

(A) $Lh\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to La$ 是 $\mathcal{E}$ 中的结构嵌入。(B) $La \models \mathbf{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{c})$，其中 $Lh\colon \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \to La$ 由 $\vec{c} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_{La}$诱导。

我们将把公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P](\vec{y}) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma})$ 定义为公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{x})$ 的适当翻译。为此，考虑由左伴随 $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$（§9.1.3）诱导的词构造 $W(L)\colon \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Sigma}$，以及随之产生的公式翻译 $(\text{–})^{W(L)}$，参见定理 9.9。

令 $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$。对于每个 $i = 1, \dots, n$，考虑由引理 6.12 给出的元素 $\dot{x}_i \in \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$，并令 $\vec{f} = f^{\dot{x}_1}_{\langle \vec{y} \mid \psi\rangle}(\vec{y}_1) \dots, f^{\dot{x}_n}_{\langle \vec{y} \mid \psi\rangle}(\vec{y}_n)$ 为来自 $\mathbf{\Sigma}(W(L))$ 的附加函数符号。回顾命题 9.7，每个 $f^{\dot{x}_i}_{\langle \vec{y} \mid \psi\rangle}(\vec{y}_i)$ 都被视为函数

$$\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_a \;\longmapsto\; (Lh)(\dot{x}_i) \in La$$

其中 $h\colon \langle \vec{y} \mid \psi\rangle \to a$ 由 $\vec{b}$ 诱导。令

$$\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P](\vec{y}) \;\coloneqq\; \mathrm{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{f})^{W(L)}(\vec{y}, \dots, \vec{y}) \;\in\; \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Gamma}).$$

由定理 9.9，对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和每个 h，以下条件等价：$\langle \vec{y} \mid \psi\rangle \to a$：

（C） $La \models \mathrm{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi\rangle$（$Lh$（$\dot{x}_1$） …，（$Lh$）（$\dot{x}_n$））。（D） $a \models \mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P]$（$\vec{b}$），其中 $h\colon \langle \vec{y} \mid \psi\rangle \to a$ 由 $\vec{b} \in [\![\vec{y} \mid \psi]\!]_a$ 诱导。

称 $Lh\colon \langle \vec{x} \mid \varphi\rangle \to La$ 由 $\vec{c} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_{La}$ 诱导，是指对于每个 $i = 1, \dots, n$，都有（Lh）（$\dot{x}_i$）$= c_i$，因此（B）等价于（C），从而四个条件（A）–（D）彼此等价。由于该伴随可以检测路径嵌入，条件（A）等价于称 h 是 $\mathcal{C}$ 中的一个嵌入。因此，引理的陈述得证。□

虽然我们由推论 7.15 推导出了定理 3.29，但在 §7.3 中，我们还在 $\mathcal{E}$ 中构造了 Hintikka 公式。这些公式是利用有限保持右伴随 R 所诱导的解释，由命题 7.9（§7.2）的公式得到的：$\mathcal{E} \to \mathcal{C}$。这在推论 7.16 中得到了陈述；该推论结合引理 9.11，给出如下结果。

推论 9.12。考虑上述一个伴随 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon R$。设 $m\colon P \rightarrowtail RM$ 是 $\mathcal{C}$ 中满足 $M \in \mathcal{E}$ 的路径嵌入。此外，设 $Q = \langle \vec{z} \mid \varpi_Q\rangle$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一条路径，并记 $\{\vec{x} \mid \varphi\} \in \mathcal{T}$ 为 $\boldsymbol{t}\{\vec{z} \mid \varpi_Q\}$。

对于每个序数 α，存在一个公式 $\Theta_{\mathcal{E}}[M, m, Q, \alpha](\vec{x}) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma})$，使得对于每个 $N \in \mathcal{E}$ 以及每个由 $\vec{c} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_N$ 诱导的 $n\colon Q \rightarrowtail RN$，以下各项等价：

(i) $N \models \Theta_{\mathcal{E}}[M, m, Q, \alpha](\vec{c})$，***(ii)*** （$m$、$n$）是博弈 $\mathcal{G}$（RM、RN）中秩为 $\geq \alpha$ 的位置。

9.3. 有限关系签名与有限元逻辑。设 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon R$ 是一个有限可达林地伴随，它在一个有限关系签名 $\boldsymbol{\sigma}$ 中检测路径嵌入。我们讨论在何种充分条件下，可以通过用普通一阶逻辑替代无穷逻辑来加强定理 3.29，从而得到

$$M, N \in \mathcal{E} \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma}) \;\implies\; M \leftrightarrow_R N.$$

这些条件本质上等价于推论 9.12 的 Hintikka 公式 $\Theta_{\mathcal{E}}$ 的有限性。以下是一个有用的观察（其证明将在下文给出）。

命题 9.13。设 $\mathcal{E} = \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 对于有限的 $\boldsymbol{\sigma}$ 成立，并假设 $L\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E}\colon R$ 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中检测路径嵌入。进一步假设，对于 $\mathcal{C}$ 中的每条路径 P，商 $e\colon P \twoheadrightarrow Q$ 在 $\mathcal{C}$ 中（在同构意义下）只有有限多个。

那么，对于 $\mathcal{C}$ 中的每条路径 P，引理 *9.11* 的公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P]$ 等价于一个有限（即一阶）公式。

命题 9.13 与推论 7.17 结合，得出了关于 R- 等价的有限 Hintikka 公式。我们在下一个推论中陈述这一观察，并在其中用到这样一个事实：给定任意林地范畴 $\mathcal{C}$，由其中的路径及它们之间的嵌入所定义的子范畴 $\mathcal{C}_{\mathrm{p}}$，在等价意义下可视为一个森林序（见引理 3.8）。

推论 9.14。 设 $\mathcal{E} = \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 对应一个有限的 $\boldsymbol{\sigma}$，并假设 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$ 能检测出 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的路径嵌入。假设如下：

(i) 森林 $\mathcal{C}_p$ 是有限分支的。*(ii)* 对于 $\mathcal{C}$中的每条路径 P，商$e\colon\ P \twoheadrightarrow Q$ 在 $\mathcal{C}$ 中至多有有限多个同构类。

此外，设 M、$N \in \mathcal{E}$ 满足以下条件：

(iii) $\mathcal{G}$（RM，RN）的对局具有（有限的）有界长度。*(iv)* 对于 $\mathcal{C}$中的每个路径嵌入 $m\colon\ P \rightarrowtail RM$，满足 $m \prec m'$的嵌入 $m'\colon\ P' \rightarrowtail RM$ 至多有有限多个同构类。

Then

$$M, N \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma}) \implies M \leftrightarrow_R N.$$

例 9.15。 考虑一个有限的 $\boldsymbol{\sigma}$，令 $k < \omega$，并回顾例 3.30 中的伴随：

$$\mathcal{R}_k^E(\boldsymbol{\sigma}^I) \underset{R_k}{\overset{L_k}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma}^I) \underset{J}{\overset{H}{\rightleftarrows}} \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$$

给定某个有限的 $M \in \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$，我们如预期般在 $\boldsymbol{\sigma}$中得到关于 R_k^I-等价于 M的有限 Hintikka 公式：$\boldsymbol{\sigma}^I$-结构 JM是有限的，并且不难看出，$L_k \dashv R_k$满足推论 9.14 的所有条件。现在，给定 $N \in \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$，如果 N 与 M是$\mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma})$-等价的，那么由注记 6.18 可知，$JN$与 JM是 $\mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma}^I)$-等价的。因此，推论 9.14 得出 JM和 JN是 R_k-等价的。换言之，

$$k \text{ finite}, M \text{ finite and } M, N \text{ equivalent in } \mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\sigma}) \implies M, N \ R_k^I\text{-equivalent} \tag{20}$$

注记 9.16。 式（20）中假设 M 有限，是由于推论 9.14 的条件（iv）。后者正是推论 7.17 的条件（iv）。这是因为我们在图 1（§7.2）中使用的 Hintikka 公式 $\Theta_{\mathcal{C}}[RM, -, -, -]$ 隐藏了合取与析取，而这些合取与析取可能（本质上）遍历 RM 的所有元素。

这与 [31, 定理 3.51]和 [23, 定义 2.25], 中的 Hintikka 公式一致：当所涉及的结构为无限结构时，这些公式也是无限的。但请注意，这不同于“Hintikka-Fra¨ıss´e”定理中使用的公式（见 [31, 定理 3.32]）：后者表示截至给定量词深度的初等等价，并且当 $\boldsymbol{\sigma}$为有限时总是有限的。

命题 9.13 的证明依赖于下面的引理 9.17。我们采用与引理 9.11 及其证明相同的记号。此外，我们用 $\mathcal{T}$ 表示 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$ 的句法范畴。

设 $\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle$ 为有限可呈模型 $L\langle \vec{y} \mid \psi \rangle$，其中 φ 无量词，并记 $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$。在引理 9.11 的证明中，我们从推论 8.10 给出的公式 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 出发，并对其应用由左伴随 $L\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 诱导的词构造 $W(L)$ 所导出的公式翻译 $(-)^{W(L)}$。但是，由于对于某个（单排序的）纯关系型 $\boldsymbol{\sigma}$，$\mathcal{E} = \mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$，我们可以不从 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{E}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x})$ 出发，而是从以下公式出发：

$$\mathrm{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{x}) \ = \bigwedge_{\substack{\vec{x} \,::=\, \alpha \text{ atomic} \\ \langle \vec{x} \mid \varphi \rangle \models \neg\alpha(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)}} \neg\alpha(\vec{x})$$

在式 (13)（§8）中构造。因此，在引理 9.11 中，我们可以将公式取作 $\mathrm{Emb}_{\mathcal{C}}[P](\vec{y})$

$$\mathrm{Emb}^{\boldsymbol{\sigma}}\langle \vec{x} \mid \varphi \rangle(\vec{f})^{W(L)}(\vec{y}, \ldots, \vec{y})$$

其中 $\vec{f} = f^{\dot{x}_1}_{\langle\vec{y}|\psi\rangle}(\vec{y}_1)\ldots, f^{\dot{x}_n}_{\langle\vec{y}|\psi\rangle}(\vec{y}_n)$，并且 $\mathrm{Emb}^{\sigma}\langle\vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{f})^{W(L)}(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n)$ 是由定理 9.9 根据上述公式 $\mathrm{Emb}^{\sigma}\langle\vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{x})$ 给出的。

还需证明，在命题 9.13 的假设下，可以假定公式 $\mathrm{Emb}^{\sigma}\langle\vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{f})^{W(L)}$ 是有限的。我们将使用引理 9.6 的以下变体。

引理 9.17。令 $a \in \mathcal{C} = \mathbf{Mod}(\mathbb{U})$，并令 P 为形如 $\langle\vec{y} \mid \psi\rangle$ 的路径。假设$LP = \langle\vec{x} \mid \varphi\rangle$，其中 $\vec{x} = x_1$、……、x_n。固定 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的一个原子公式 $(\vec{x} ::= \alpha)$。

给定 $h\colon\ P \to a$，并给定对于 $i = 1$、……、n 的 $c_i \in L\langle\vec{y} \mid \psi\rangle$，以下各项等价 $t.$

(i) $La \models \alpha((Lh)(c_1)\ldots\ldots, (Lh)(c_n))$ *(ii)* h 可分解为

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\ h\ } & a \\ {\scriptstyle e}\downarrow & \nearrow_{g} & \\ Q & & \end{array}$$

对于某条路径 Q 和某个商 $e\colon\ P \twoheadrightarrow Q$ 使得

$$LQ \ \models\ \alpha\big((Le)(c_1), \ldots, (Le)(c_n)\big)$$

证明。假设 $Lh\colon\ \langle\vec{x} \mid \varphi\rangle \to La$ 将 $\vec{x}$ 映射到 $\vec{b} \in [\![\vec{x} \mid \varphi]\!]_{La}$。

我们首先证明 (ii) ⇒ (i)。对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，我们有 $(Lh)(c_i) = (Lg)((Le)(c_i))$。因此 $La \models \alpha((Lh)(c_1)\ldots\ldots, (Lh)(c_n))$，因为 $Lg\colon\ LQ \to La$ 是同态。

对于逆命题，将 h 分解为 $m \circ e$，其中 $e \in \mathfrak{Q}$ 和 $m \in \mathcal{M}$。根据引理 3.5，e 的陪域是一条路径，记为 Q，并且我们有 $LQ \models \alpha\big((Le)(c_1)\ldots\ldots, (Le)(c_n)\big)$，因为 Lm 是结构嵌入，且对于所有 $i = 1, \ldots\ldots, n$，都有 $(Lh)(c_i) = (Lm)((Le)(c_i))$。□

注 9.18。请注意，(i) ⇒ (ii) 的证明表明，我们总可以对 g 取一个树状嵌入，而条件 (ii) 中并未假定这一点。此外，e 是一个商的假设并未用于蕴含 (ii) ⇒ (i) 中。

条件 (ii) 的实际表述是专门设计的，以便在词构造 $W(L)$ 下得到有限公式。

现在我们可以证明命题 9.13。

命题 *9.13* 的证明。引理 9.17（连同推论 6.16）可以简化公式 $\mathrm{At}(W(L))(\beta)(\vec{y})$，得到

$$\beta \ = \ \alpha\left(f^{\dot{x}_1}_{\langle\vec{y}|\psi\rangle}(\vec{y}), \ldots, f^{\dot{x}_n}_{\langle\vec{y}|\psi\rangle}(\vec{y})\right)$$

其中 $\vec{x} ::= \alpha$ 是（在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的）原子的，并且路径 P 是 $\langle\vec{y} \mid \psi\rangle$。也就是说，假设 $LP = \langle\vec{x} \mid \varphi\rangle$，我们可以将 $\mathrm{At}(W(L))(\beta)(\vec{y})$ 取为公式

$$\bigvee_{\substack{e\colon\ P \twoheadrightarrow Q \\ LQ \models \alpha((Le)(\dot{x}_1),\ldots,(Le)(\dot{x}_n))}} (\exists\vec{z})\theta_e(\vec{z}, \vec{y})$$

其中 $Q \cong \langle\vec{z} \mid \vartheta\rangle$ 且其中

$$[\vec{z}, \vec{y} \mid \theta_e] \ :\ \{\vec{z} \mid \vartheta\} \ \longrightarrow\ \{\vec{y} \mid \psi\}$$

满足 $\mathbf{y}\theta_e = e$。

如果（在同构意义下）只有有限多个树状商 $e\colon\ P \twoheadrightarrow Q$ in $\mathcal{C}$，则可以假设公式 $\mathrm{At}(W(L))(\beta)(\vec{y})$ 是有限的。在这种情况下，上述公式 $\mathrm{Emb}^{\sigma}\langle\vec{x} \mid \varphi\rangle(\vec{f})^{W(L)}$ 也可以假设是有限的。□

10. The factorisation property

在有限可达林地伴随的主要例子中

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$$

到目前为止所呈现的外延范畴 $\mathcal{E}$ 是一个结构范畴，而定理 3.29 涵盖了更一般的情形：其中 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔理论的模型范畴。这样做主要是着眼于未来的应用，同时也是因为这正是 Gabriel–Ulmer 对偶的自然背景。

另一方面，请注意，给定一个有限可达林地伴随

$$\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})$$

以及签名 $\mathbf{\Sigma}$上的笛卡尔理论$\mathbf{T}$ ，我们可以将后一个伴随与$\mathbf{Str(\Sigma)}$到$\mathbf{Mod(T)}$的反射复合起来。特别地，这得到一个有限可达伴随$\mathbf{Str(\Sigma)} \rightleftarrows \mathbf{Mod(T)}$（参见注 2.9 和引理 6.6）。所得结果是 $\mathcal{C}$ 与$\mathbf{Mod(T)}$之间的一个有限可达林地伴随：

$$\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma}) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathbf{T}). \tag{21}$$

博弈余单子的语境中对等号的编码方式（参见例 3.19 和式 (3)）可视为这一现象的一个例子：将范畴$\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$识别为以下笛卡尔理论的模型范畴

$$I(x,y) \vdash_{x,y} x \doteq y, \qquad x \doteq y \vdash_{x,y} I(x,y)$$

在签名 $\boldsymbol{\sigma}^I$ 中。现在我们提供另一个例子：

例 10.1。 回忆一下，模态逻辑 **S4** 是自反且传递的 Kripke 框架的逻辑（参见例如 [15, 定理 4.29]）。为简单起见，假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是由一个二元关系且不含一元关系组成的模态词汇。那么，相应的（带指点）Kripke 模型和自反传递 Kripke 模型分别是（带指点）图和预序。引理 6.6 给出了一个有限可达伴随

$$\mathbf{Gph}_\bullet \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{Pre}_\bullet$$

其中，U 是带指点预序的全子范畴 $\mathbf{Pre}_\bullet$ 到带指点图及其同态组成的范畴 $\mathbf{Gph}_\bullet$ 的包含，[22] 而 F 通过对边关系取自反传递闭包，从图生成一个预序。将这一伴随与由模态余单子诱导的有限可达树状伴随（见例 3.21(2)）复合后，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们得到一个有限可达树状伴随

$$\mathcal{R}_k^M(\boldsymbol{\sigma}) \underset{R_k^M}{\overset{L_k^M}{\rightleftarrows}} \mathbf{Gph}_\bullet \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{Pre}_\bullet$$

其中编码了点化 Kripke 框架的截至层级 k 的 **S4**-展开，例如参见 [15,第 220–221]页。在 $\boldsymbol{\sigma}$ 包含任意数量的一元关系的情况下，通过考察 Kripke 模型向自反传递 Kripke 模型的反射，可以将其以直接的方式扩展到点化 Kripke 模型。

[22]这里所说的图是指有向图，可能带有自环。注意，$\mathbf{Gph}_\bullet$ 可以通过在签名中添加一个常元符号而识别为一个结构范畴，而$\mathbf{Pre}_\bullet$ 则是这个扩展签名下某个笛卡尔理论的模型范畴。

形式为 $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Str(\Sigma)}$ 的有限可达林地伴随在技术上更易处理，尤其当 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个单排序关系签名时。在这种情况下，引理 9.11 的公式 $\mathbf{Emb}_{\mathcal{C}}[P](\vec{y})$ 可以大幅简化（参见命题 9.13 及其证明）。最终，这避免了 §8 中大量的技术性推导，并且只需将词构造所诱导的公式翻译应用于无量词公式。

人们可能会问，我们是否总能将问题归约到 $\mathcal{E}$ 是结构范畴的情形；这引出了下面的定义。

定义 10.2。设 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod(T)}$，其中 $\mathbf{T}$ 是签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中的笛卡尔理论。若有限可达林地伴随 $L\colon\ \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{E} : R$ 可以分解（差一个自然同构）为一个有限可达伴随 $\mathcal{C} \rightleftarrows \mathbf{Str(\Sigma)}$，随后接反射 $\mathbf{Str(\Sigma)} \rightleftarrows \mathcal{E}$，如公式 (21) 所示，则称其具有分解性质 。

例 10.3。设 $\mathcal{D}$ 为一个小范畴，并回顾例 4.11 中的有限可达树状伴随

$$\widehat{\mathcal{F}} \underset{\pi^*}{\overset{\pi_!}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \widehat{\mathcal{D}}$$

其中 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathcal{D})$ 是 $\mathcal{D}$ 中可复合箭头的有限序列森林（另见例 7.18 和 §8.2）。我们在例 2.3 中看到，存在签名 $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$ 中的一个（等式）理论 $\widehat{\ }\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$，使得 $\mathcal{D} \cong \mathbf{Mod(T)}$。可以证明，上述伴随具有分解性质，即它可以分解为一个有限可达伴随 $\mathbf{F} \rightleftarrows \mathbf{Str(\Sigma)}$，随后接反射 $\mathbf{Str(\Sigma)} \rightleftarrows \mathcal{D}$。

证明。回顾例 4.11 中的函子 $\pi\colon \mathbf{F} \to \mathcal{D}$，它诱导出伴随 $\pi_! \dashv \pi^*$。同时，回顾例 2.3 中的签名 $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$ 以及（等式）$\widehat{\ }$理论 $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}})$，其中 $\mathbf{\Sigma}$ 满足 $\mathcal{D} \cong \mathbf{Mod(T)}$。记 $F\colon \mathbf{Str(\Sigma)} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ 为由引理 6.6 诱导的伴随。

伴随 $\pi_! \dashv \pi^*$（在同构意义下）分解为

$$\widehat{\mathcal{F}} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma}) \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}}}} \widehat{\mathcal{D}}.$$

有限可达伴随 $L \dashv R$ 如下获得。记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbf{\Sigma}$中空笛卡尔理论的句法范畴。存在函子 $\mathbf{F} \to \mathcal{S}^{\mathrm{op}}$，它将一个节点 $s \in \mathbf{F}$（记作）

$$a_0 \xrightarrow{k_1} a_1 \dashrightarrow a_{n-1} \xrightarrow{k_n} a_n$$

映射到 $\mathcal{S}$-对象 $\{x : a_n | \top\}$，并且对于形如以下形式的节点 $t \in \mathbf{F}$

$$a_0 \overset{s}{\dashrightarrow} a_n \xrightarrow{k_{n+1}} a_{n+1} \dashrightarrow a_{n+m-1} \xrightarrow{k_{n+m}} a_{n+m}$$

将 $\mathbf{F}$-态射 $s \leq t$ 映射到 $\mathcal{S}$-态射

$$[x : a_{n+m}, y : a_n \mid y \doteq f_{k_{n+1}}(\dots f_{k_{n+m}}(x))] \ :\ \{x : a_{n+m} \mid \top\} \longrightarrow \{y : a_n \mid \top\}$$

注意，$s \in \mathbf{F}$ 上的恒等映射被取为 $\mathcal{S}$-恒等映射 $[x :\ a_n,\ y :\ a_n \mid y \doteq x]$，而 $\mathbf{F}$-复合被取为项替换。

根据定理 6.3，这诱导出一个函子 $\varpi\colon\ \mathbf{F} \to \mathbf{Str(\Sigma)}$。函子 $R\colon\ \mathbf{Str(\Sigma)} \to \mathbf{F}$，将 M 取为 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ $[\varpi(-)\ M]$，是一个右伴随（例如参见 $[45, \text{定理 I.5.2}]$）。注意，R 是有限性的，因为 ϖ 的像由有限可呈的 $\mathbf{\Sigma}$-结构组成。

此外， $F \circ \varpi$ 将上述的 $s \in \mathrm{F}$ 取为与**T**-模型$\frown\langle x: \ a_n \mid \top\rangle$相对应的预层，即取为 $\mathbf{y}a_n$。因此， $F \circ \varpi \cong \mathbf{y} \circ \pi$，而 $R \circ U$ 将预层 $P \in \mathcal{D}$ 取为

$$\mathbf{Str}(\mathbf{\Sigma})\,[\varpi(-), UP] \ \cong \ \widehat{\mathcal{D}}\,[F\varpi(-), P] \ \cong \ \widehat{\mathcal{D}}\,[(\mathbf{y} \circ \pi)(-), P] \ \cong \ P\pi$$

由此可得 $R \circ U \cong \pi^*$。 □

现在我们给出两个不满足分解性质的有限可达的林地伴随示例（第二个甚至是树状伴随）。从逻辑角度来看，第一个示例不太相关，但它为第二个示例提供了有用的预备。

例 10.4。 令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为偏序集的签名 $\{\dot{\leq}\}$ （参见例 2.4），并回顾例 3.28 中的有限可达的有林（自）伴随

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Pos} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Pos} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Id}"] \end{tikzcd}$$

它还　　能检测路径嵌入。引理 6.6 给出了一个有限可达伴随

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gph} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Pos} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

其中 U 是包含函子，其左伴随 F 将一个图映射为其强连通分量（SCCs）构成的偏序集。

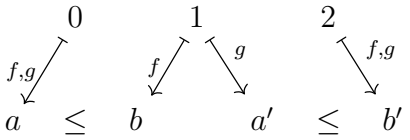
我们断言不存在伴随 L：$\mathbf{Pos} \rightleftarrows \mathbf{Gph}$:$R$，使得 Id $\dashv$Id 分解为（在自然同构意义下） as

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Pos} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Gph} \arrow[l, bend left, "R"] \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Pos}. \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

为说明这一点，反设存在这样的伴随 $L \dashv R$，即 $FL \cong \mathrm{Id}$ 和 $RU \cong \mathrm{Id}$。

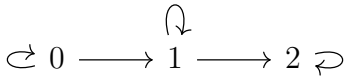
我们将使用这一众所周知的事实：包含函子 U：$\mathbf{Pos} \to \mathbf{Gph}$ 保留余积，但不保留余等化子。令 $|3|$ 为离散偏序集 $\{0, 1, 2\}$，并令 2 为偏序集 $\{0 \leq 1\}$。考虑单调映射 f, g： $|3| \rightrightarrows 2 + 2$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, mapsto, "f,g"'] & & 1 \arrow[dl, mapsto, "f"'] \arrow[dr, mapsto, "g"] & & 2 \arrow[dr, mapsto, "f,g"] & \\ a & \leq & b & & a' & \leq & b' \end{tikzcd}$$



其中我们将 $2 + 2$ 表示为 $\{a \leq b\} + \{a' \leq b'\}$。 f 和 g 在 $\mathbf{Pos}$ 中的余等化子为 $3 = \{0 \leq 1 \leq 2\}$，而它们在 $\mathbf{Gph}$ 中的余等化子是以下非传递图：

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[loop above] \arrow[r] & 2 \arrow[loop right] \\ 0 \arrow[loop left] \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 & \end{tikzcd}$$



由于 L：$\mathbf{Pos} \to \mathbf{Gph}$ 是左伴随，在 $\mathbf{Gph}$ 中我们得到一个余等化子图表

$$L|3| \underset{Lg}{\overset{Lf}{\rightrightarrows}} L2 + L2 \twoheadrightarrow L3.$$

另一方面，由于 $FL \cong \mathrm{Id}$，图 $L|3|$ 有三个强连通分量（它们之间没有边）， $L2$ 是一个有两个强连通分量的图，设为 S_0， S_1，且至少有一条边从 S_0 指向 S_1，但没有边从 S_1 指向 S_0。类似地， $L3$ 有三个强连通分量，设为 T_0， T_1， T_2，且有边从

T_0 指向 T_1，并且从 T_1 指向 T_2（反方向则没有边）。此外，由于 $L3$ 是**Gph**中的 Lf 和 Lg 的余等化子，$L3$中没有边从 T_0 指向 T_2。

现在考虑单调映射 $h\colon 2 \to 3$，它将 0 映到 0，将 1 映到 2。在 $L2$ 中，存在顶点 $u \in S_0$ 和 $v \in S_1$，且有一条边从 u 指向 v。再次利用 $FL \cong \mathrm{Id}$ 这一事实，必然有 $Lh(u) \in T_0$ 和 $Lh(v) \in T_2$。但这样一来，Lh 就不可能是图同态，因为在 $L3$ 中不存在从 T_0 指向 T_2 的边。矛盾。□

我们在 §4.1 中看到，范畴 **Pos** 并非树状的，因此前一个例子中的林地伴随也不是树状的。现在我们将介绍一个有限可达树状伴随的例子，它涉及"确定性"Kripke 结构，但不具有分解性质。

例 10.5. 令 $\mathcal{D}$ 为 **Gph** 的全子范畴，由确定性图定义；也就是说，图 $G = (V, E)$ 满足：对于所有 $u \in V$，至多存在一个 $v \in V$ 满足 $E(u, v)$。注意，$\mathcal{D}$ 是 Horn 理论（特别是笛卡尔理论）的模型范畴。

$$\{E(x, y) \wedge E(x, z) \vdash_{x,y,z} y \doteq z\}.$$

考虑有限可达伴随 $L^M\colon$ **森林** $\rightleftarrows$ **图** $:R^M$，其中 L^M 将森林映射为其覆盖关系的图，而 R^M 将图映射为其有限游走构成的森林。该伴随限制为一个林地伴随

$$\mathcal{A} \underset{R^D}{\overset{L^D}{\underset{\curvearrowleft}{\overset{\curvearrowright}{\bot}}}} \mathcal{D}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是 **森林** 的全子范畴，由覆盖关系是确定的的森林组成，即每个节点至多被一个元素覆盖。换言之，$\mathcal{A}$ 由分支的不交并构成的森林组成。范畴 $\mathcal{A}$ 是局部有限可呈现的，并且关于（满射、单射）分解系统是树状的。因此，$L^D\colon\ \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon\ R^D$ 是一个检测路径嵌入的有限可达树状伴随。

鉴于引理 6.6，存在一个有限可达伴随 n

$$\mathbf{Gph} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\curvearrowleft}{\overset{\curvearrowright}{\bot}}}} \mathcal{D}$$

其中 U 是全嵌入，而 F 将图 $G =$（V，E）映射为其关于由关系生成的等价关系的商

$$\{(u, v) \in V \times V \mid \exists w \in V \text{ such that } E(w, u) \text{ and } E(w, v)\}.$$

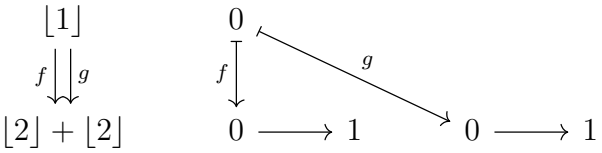
我们断言，不存在有限可达伴随 $L\colon\ \mathcal{A} \rightleftarrows$ **图** $:R$，使得伴随 $L^D \dashv R^D$（在自然同构意义下）分解为

$$\mathcal{A} \underset{R}{\overset{L}{\underset{\curvearrowleft}{\overset{\curvearrowright}{\bot}}}} \mathbf{Gph} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\curvearrowleft}{\overset{\curvearrowright}{\bot}}}} \mathcal{D}.$$

反设存在这样的伴随，因此有 $FL \cong L^D$ and$RU \cong R^D$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，将长度为 n 的链 $0 < 1 < \cdots < n-1$ 记作 $\mathbf{n}$，其中该链位于 $\mathcal{A}$ 中，并令 $\lfloor n \rfloor$ 表示其在函子 L^D 下的像；也就是说，$\lfloor n \rfloor$ 是确定性图

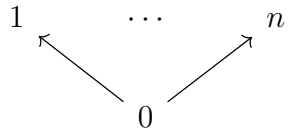
$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1.$$

特别地，$\lfloor 0\rfloor$ 是空图，$\lfloor 1\rfloor$ 是具有一个顶点 **0** 且没有边的图，而$\lfloor 2\rfloor$ 是图 $0 \longrightarrow 1$。考虑下面的函数 $f, g\colon \lfloor 1\rfloor \rightrightarrows \lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor$：



在范畴 $\mathcal{A}$ 中，记 $!\colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ 为唯一的森林态射，并令 $\varphi, \psi\colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}+\mathbf{2}$分别由将 $!$ 与第一、第二个余积注入复合得到。于是，$L^D(\mathbf{2}+\mathbf{2})$ 可识别为 $\lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor$，而 $L^D\varphi, L^D\psi$ 分别可识别为 f 和 g。

φ 和 ψ 在 $\mathcal{A}$ 中的余等化子为 $\mathbf{2}$，而 Uf 和 Ug 在 $\mathbf{Gph}$ 中的余等化子是图 H_2，其中 H_n 表示下方所示的图：



Now，因为 $L\colon \mathcal{A} \to \mathbf{Gph}$ 是左伴随，所以在 $\mathbf{Gph}$ 中我们得到一个余等化子图

$$L\mathbf{1} \underset{L\psi}{\overset{L\varphi}{\rightrightarrows}} L\mathbf{2} + L\mathbf{2} \twoheadrightarrow L\mathbf{2}.$$

不难看出 $L\mathbf{1} \cong U\lfloor 1\rfloor$；再利用伴随 $L \dashv R$ 是有限可达的这一事实，可知对于某个 $n > 0$，有 $L\mathbf{2} \cong H_n$。此外，由上文对 $F\colon \mathbf{Gph} \to \mathcal{D}$ 的描述可知，$L\varphi\colon L\mathbf{1} \to L\mathbf{2} + L\mathbf{2}$ 将 **0** 映射到 $L\mathbf{2} + L\mathbf{2}$ 的一个根，而 $L\psi$ 将 **0** 映射到 $L\mathbf{2} + L\mathbf{2}$ 的另一个根。因此，H_{2n} 是 $L\varphi$ 和 $L\psi$ 在 $\mathbf{Gph}$ 中的余等化子。但对于 $n > 0$，$H_n \ncong H_{2n}$，产生矛盾。□

证明。 我们证明例 10.5 中的若干陈述。

断言。 范畴 $\mathcal{A}$ 是局部有限可呈现的。

断言的证明。 我们依赖于例 2.12，更确切地说，依赖于等价关系$\widehat{\ }$**森林** $\cong \mathbb{N}$。注意，该等价关系将森林 $\mathbf{F}$ 映射为预层 $X_{\mathcal{F}} \in [\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$，其中 $X_{\mathcal{F}}(n)$ 是所有满足 $\downarrow u$ 具有基数 n的 $u \in \mathbf{F}$ 的集合，而限制映射 $X_{\mathcal{F}}(n+1) \to X_{\mathcal{F}}(n)$ 将具有 $\downarrow u = \{v_1 \prec \cdots \prec v_n \prec v_{n+1}\}$ 的 u 映射为 v_n。因此，当且仅当 $X_{\mathcal{F}}$ 的所有限制映射都是单射时，我们有 $\mathbf{F} \in \mathcal{A}$。但后一个条件可以由签名$\mathbf{\Sigma}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$中的一个笛卡尔（事实上是 Horn）理论表达，该签名与例 2.3 中的 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}$ 相关。因此，$\mathcal{A}$ 是局部有限可呈现的。□

断言。 $\mathcal{A}$ 是一个树状范畴。

断言的证明。 我们将证明，当赋予分解系统（$\mathfrak{Q}$，$\mathfrak{M}$）时，$\mathcal{A}$ 是树状的，其中 $\mathfrak{Q}$（分别为 $\mathfrak{M}$）由满射态射（分别为单射态射）组成。

$\widehat{\ }$我们在上文已经看到，在等价 $\mathbf{Forest} \cong \mathbb{N}$下，$\mathcal{A}$ cor-$\widehat{\ }$的对象恰好对应于在例 2.3中与 $\mathbb{N}$相关联的 Horn 理论的 Horn 扩张的模型。因此，根据引理 6.6（直接改编而来），满包含 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{Forest}$ 是一个有限性保持右伴随。

由例 4.3和例 2.17可知，$\mathbf{Forest}$ 相对于（满射态射，单射态射）分解是树状的。此外，由例 3.4可知，在 $\mathbf{Forest}$中，路径恰好是有限链。

现在我们证明，$(\mathfrak{Q},\ \mathfrak{M})$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个（真）分解系统。令 $f \in \mathcal{A}[a, b]$。我们可以将 f 分解为 $f = m \circ e$，其中 e（分别为 m）是一个满射（分别为单射）态射

的 **森林**。但由例 2.17（实际上是 [16, 4.3.10.g]）可知， m 是 **森林**中的一个强⌢单态射。于是根据注记 8.6， m 在 **森林**≅ $\mathbb{N}$ 下对应于一个从 $\mathbf{\Sigma}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$ 结构到 $\mathbf{\Sigma}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$ 结构的嵌入，其中 $\mathbf{\Sigma}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$ 是与 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}$ 在⌢例 2.3 中关联的签名。现在， $\mathcal{A}$ 在 **森林** ≅ $\mathbb{N}$下对应于 $\mathbf{\Sigma}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}})$ 中某个 Horn 理论的模型范畴。因此，该范畴在子结构下稳定（例如参见 [13, 定理 5.12]）。所以 m 的定义域实际上是 $\mathcal{A}$ 的一个对象，从而$m \circ e$是 f 的一个（$\mathfrak{Q}$， $\mathfrak{M}$）分解。

此外，真分解系统 $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{M})$ 是稳定的，因为满包含 $\mathcal{A} \hookrightarrow$**森林** 保持拉回，并且保持且反映 $\mathfrak{Q}$ 和 $\mathfrak{M}$。

因此我们得到，配备 $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{M})$ 的 $\mathcal{A}$ 是 wooded。

剩下要检查定义 4.2 的条件 (i)–(iv)。条件 (ii)（路径的余积）由 $\mathcal{A}$ 是局部有限可呈现的这一事实推出，因此它是余完备的。

对于其他条件，首先注意到 $\mathcal{A}$ 的路径恰好是**森林**的路径。事实上，由例 3.4 可知，**森林**的所有路径都是 $\mathcal{A}$ 的对象，由此可得**森林**的所有路径实际上都是 $\mathcal{A}$ 中的路径。反过来，由于 $\mathcal{A}$ 在**森林**中对单射态射的定义域封闭，我们得到 $\mathcal{A}$ 的所有路径都是**森林**中的路径。

这就得到了定义 4.2 的条件 (i)（“2-out-of-3”）。

关于条件（iii）（连通性），请注意，包含 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{Forest}$ 保留余积。

最后，由上述结果以及包含 $\mathcal{A} \hookrightarrow$**Forest** 是满的这一事实，可得条件（iv）（路径生成）。□

断言。 $L^D\colon \ \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon R^D$ 是一个有限可达伴随。

断言的证明。 由上述结果可知，有限可达伴随 $L^M\colon \mathbf{Forest} \rightleftarrows \mathbf{Gph}\colon R^M$限制为伴随 $L^D\colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon R^D$，其中 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{D}$均为局部有限可呈现。

鉴于命题 5.6，接下来只需证明 $L^D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 保留有限可呈对象。但这可由以下事实推出：在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$中，有限可呈对象都是有限结构。□

断言。 $L^D\colon \ \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon R^D$ 检测路径嵌入。

断言的证明。 $\mathcal{A}$ 中的嵌入按定义就是单射态射。由于L^D 是一个（非满）包含，只要证明 $f\colon a \to b$ 在 $\mathcal{A}$ 中的态射是单射的，当且仅当它是 $\prec$-结构的嵌入，我们就完成了证明。

显然， $\prec$-结构的嵌入是单射的。

对于逆命题，考虑一个单射态射 $f \in \mathcal{A}[a, b]$。设 u和 v是 a的顶点，且在 b中 $f(u) \prec f(v)$。因此， $f(v)$不是 b的根，所以 v不可能是 a的根。于是， a 中存在某个顶点 w ，使得在 a中 $w \prec v$ 。但此时$f(w) \prec f(v)$，所以由于 b是森林， $f(w) = f(u)$。因此 $w = u$，因为 f是单射的。□

断言。 $F\colon \ \mathbf{Gph} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon U$ 是一个有限可达伴随。

断言的证明。 由于 $\mathcal{D} = \mathbf{Mod(T)}$ 中的 $\mathbf{T}$ 是笛卡尔的，根据引理 6.6（§6.1），可知包含函子 $U\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Gph}$ 是有限保持右伴随。因此，我们需要证明所指示的 F 确实是 U 的左伴随。为此，我们只需证明通常的泛性质（参见例如 [44, 定理 IV.1.2]）。

回忆一下， F 将图 $G = (V,\ E)$ 映射为其在 $\simeq$ 上的最小等价关系 V 下的商，其中该关系满足： $u \simeq v$ 如果存在某个 w ，使得 $E(w,\ u)$ 和 $E(w,\ v)$。 FG 的边关系是由满足如下条件的有序对 $([u]_{\simeq},\ [v]_{\simeq})$ 构成的集合：存在某个 $u' \simeq u$和某个$v' \simeq v$，使得 $E(u',\ v')$ 属于 G。

给定一个图 $G \in \mathbf{Gph}$，记 $\eta_G\colon G \to UFG$ 为将 G的每个顶点 u 映射到其在 UFG中的 $\simeq$-等价类 $[u]_\simeq$ 的函数。显然， η_G 是一个图态射，因为如果 $E(u,\ v)$ 属于 G，那么 $[u]_\simeq$ 与 $[v]_\simeq$ 之间在 UFG 中存在一条边。

给定某个 $K \in \mathcal{D}$ 以及某个图态射 $h\colon G \to UK$，我们需要证明存在唯一的 $\mathcal{D}$-态射 $h^*\colon FG \to K$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\ h\ } & UK \\ {\scriptstyle \eta_G}\downarrow & \nearrow_{Uh^*} & \\ UFG & & \end{array}$$

我们首先定义 $h^*\colon FG \to K$。为此，我们对 $\simeq$使用归纳法，证明 $u \simeq v$蕴含 $h(u) = h(v)$。

基例： 在基例中，存在某个 $w \in V$，使得 $E(w,\ u)$ 且 $E(w,\ v)$。因此，在 K 中，存在从 hw 到 hu 以及到 hv的边。但这蕴含 $hu = hv$，正如所需。

归纳步骤（对称性）： 在这种情况下，我们由 $v \simeq u$得到 $u \simeq v$，结论直接由归纳假设得出。

归纳步骤（传递性）： 在这种情况下，我们由 $u \simeq w$ 和 $w \simeq v$得到 $u \simeq v$，结论同样由归纳假设得出。

因此，如果 $\eta_G(u) = \eta_G(v)$，那么 $h(u) = h(v)$，这就定义了 h^* 在 $[u]_\simeq = [v]_\simeq$上的值。此外， h^* 确实是一个 $\mathcal{D}$-态射，因为如果对于某个 $u' \simeq u$ 和某个$v' \simeq v$有 $E(u',\ v')$，那么在 UK 中存在一条从 $h(u')$ 到 $h(v')$ 的边，而 $h^*[u]_\simeq = h(u')$ 且$h^*[v]_\simeq = h(v')$。最后，根据 h^* 的定义，我们确实有 $Uh^* \circ \eta_G = h$。

接下来需要证明 h^* 的唯一性： $FG \to K$。设 $g\colon FG \to K$ 是 $\mathcal{D}$ 中满足$Ug \circ \eta_G = h$的对象。这意味着对于每个 $[u]_\simeq \in F$， $g[u]_\simeq = h(u) = h^*[u]_\simeq$，从而 $g = h^*$。□

断言。 满包含 $U\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Gph}$ 保持余积。

断言的证明。 考虑 $\mathcal{D}$ 中对象的一个族 $(K_i \mid i \in I)$，其中 $K_i = (W_i,\ E_i)$，并令 $G := \coprod_{i\in I} K_i$ 为它们在 $\mathbf{Gph}$ 中的余积。根据 [13, 注记 1.5(3)]，， G 的边关系 E 恰好包含满足 $i = j$ 和 $E_i(u_i,\ v_i)$ 的所有序对 $((i,\ u_i),\ (j,\ v_j))$。由此可得 $G \in \mathcal{D}$。□

断言。 余积 $\lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor$ 在 $\mathbf{Gph}$ 和 $\mathcal{D}$ 中相同。 $\mathcal{A}$ 中的余积 $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ 是由 $\mathbf{2}$ 的两个副本组成的森林。

证明。 事实上，上述显示的 $\lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor$ 是 $\mathbf{Gph}$ 中的余积（[13, 注记 1.5(3)]）。因此，由于包含$U\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Gph}$ 保持余积，它也是余完备范畴 $\mathcal{D}$ 中的余积。由于（非满）包含 $L^D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 是一个左伴随，因此余完备范畴 $\mathcal{A}$ 中的余积 $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ 是由 $\mathbf{2}$ 的两个副本组成的森林。□

断言。 φ 和 ψ 在 $\mathcal{A}$ 中的余等化子是$\mathbf{2}$。

断言的证明。 我们证明， f 和 g 在 $\mathcal{D}$ 中的余等化子是 $\lfloor 2\rfloor$。根据（非满的）包含 $L^D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ 是左伴随这一事实，结论随即成立。

令 $e\colon \lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor \twoheadrightarrow \lfloor 2\rfloor$ 将两个 $\mathbf{0}$ 映到 $\mathbf{0}$，并将两个 $\mathbf{1}$ 映到 $\mathbf{1}$。于是 e 是$\mathcal{D}$的一个态射，而且我们还有 $e \circ f = e \circ g$。

现在考虑某个 $\mathcal{D}$-态射 $h\colon \lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor \to K$ 使得 $h \circ f = h \circ g$。特别地，$h(f(\mathbf{0})) = h(g(\mathbf{0}))$，因此 h 将 $\lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor$中的两个 $\mathbf{0}$ 识别起来。但由于 $K \in \mathcal{D}$，可知 h 也必须将 $\lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor$ 中的两个 $\mathbf{1}$ 识别起来（否则 $h(f(\mathbf{0})) = h(g(\mathbf{0}))$ 将在 K 中具有两条不同的出边）。因此， $h\colon \lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor \to K$ 唯一地通过 $e\colon \lfloor 2\rfloor + \lfloor 2\rfloor \twoheadrightarrow \lfloor 2\rfloor$分解。□

断言。 $L\mathbf{1} \cong \lfloor 1 \rfloor$。

断言的证明。 首先，注意到 $R\lfloor 1 \rfloor \cong \mathbf{1}$ 由于 $R\lfloor 1 \rfloor \cong RU\lfloor 1 \rfloor \cong R^D\lfloor 1 \rfloor \cong \mathbf{1}$。由此可知，$\mathbf{Gph}\,[L\mathbf{1}, \lfloor 1 \rfloor] \cong \mathcal{A}\,[\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ 是一个单元素集。特别地，图 $L\mathbf{1}$ 没有边，根据上述对 F 的描述可得：$\mathbf{Gph} \to \mathcal{D}$ 满足 $FL\mathbf{1} \cong L\mathbf{1}$。但是$FL \cong L^D$，因此 $L\mathbf{1} \cong L^D\mathbf{1} \cong \lfloor 1 \rfloor$，因为 L^D 在对象上是恒等映射。□

断言。 对于某个 $n > 0$，有 $L\mathbf{2} \cong H_n$。

断言的证明。 首先，注意到 $\mathbf{Gph}\,[L\mathbf{2}, \lfloor 2 \rfloor]$ 是一个单元素集。这是由 $R\lfloor 2 \rfloor \cong R^D\lfloor 2 \rfloor \cong \mathbf{2} + \mathbf{1}$ 这一事实推出的，因此

$$\mathbf{Gph}\,[L\mathbf{2}, \lfloor 2 \rfloor] \;\cong\; \mathcal{A}\,[\mathbf{2}, \mathbf{2} + \mathbf{1}] \;\cong\; \mathcal{A}\,[\mathbf{2}, \mathbf{2}]$$

而唯一的森林态射 $\mathbf{2} \to \mathbf{2}$ 是恒等。

此外， $L\mathbf{2}$ 是一个有限图，因为 $L\colon\ \mathcal{A} \to \mathbf{Gph}$ 保有限可呈对象（见命题 5.6）。

记 $L\mathbf{2} = (V,\ E)$，并令 $h\colon\ L\mathbf{2} \to \lfloor 2 \rfloor$ 为唯一的图态射。我们有$V = V_0 + V_1$，其中 $V_i = h^{-1}(\{i\})$。注意， V_i的任意两个顶点之间都没有边。此外，每个 $u \in V_0$ 必须与一个 $v \in V_1$相连，否则令 u 取值为 $\mathbf{1}$，便会得到一个不同的态射 $h'\colon\ L\mathbf{2} \to \lfloor 2 \rfloor$。类似地，每个 $v \in V_1$ 都必须有一条来自某个 $u \in V_0$的边。特别地，当且仅当 V_1 非空时， V_0 才非空。

剩下的工作是证明 V_0 是一个单元素集。注意， $FL\mathbf{2} \cong \lfloor 2 \rfloor$。因此，根据上述对 F 的描述， V_0 中的所有顶点都必须由 F识别。但由于没有任何 $u \in V_0$ 是某条边的目标，这意味着 V_0 至多含有一个元素。反设 $V_0 = \emptyset$。那么（根据上文），我们还得到 $V_1 = \emptyset$。但此时 $L\mathbf{2}$ 是 $\lfloor 0 \rfloor$，即 $\mathcal{A}$的始对象，$\mathbf{Gph}$ 并且 $\mathcal{D}$。由于 F 是左伴随，这就得到 $FL\mathbf{2} \cong \lfloor 0 \rfloor$，与 $FL\mathbf{2} \cong L^D\mathbf{2} \cong \lfloor 2 \rfloor$矛盾。□

断言。 设 $k, \ell\colon\ \lfloor 1 \rfloor \to H_n + H_n$ 是 $\mathbf{Gph}$-态射，使得 k 将 0 映到 $H_n + H_n$的左根，而 ℓ 将 0 映到 $H_n + H_n$的右根。那么， k和 ℓ在 $\mathbf{Gph}$ 中的余等化子是 H_{2n}。

断言的证明。 设 $e\colon\ H_n + H_n \twoheadrightarrow H_{2n}$ 是图态射，它将 $H_n + H_n$的两个根与 H_{2n}的根识别，并且在 $H_n + H_n$的叶子上是单射。我们将证明 e 是 k 和 ℓ 在 $\mathbf{Gph}$中的余等化子。

首先， e 显然使 k 和 ℓ相等。此外，若 $h\colon\ H_n + H_n \to G$ 使 k 和 ℓ相等，则有 $h(k(0)) = h(\ell(0))$，由此可直接推出存在唯一的$h^*\colon\ H_{2n} \to G$，使得 $h^* \circ e = h$。□

例 10.5 的证明至此完成。 □

11. 结论

在这项工作中，我们为由满足关于路径嵌入的可定义性（更一般地说，可检测性）的温和假设的有限可达林地伴随所诱导的来回等价关系的表达能力确定了一个紧上界（即， $\mathcal{L}_\infty$）。这些假设在广泛的例子中都得到满足。除了 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 博弈之外，我们的结果还适用于卵石博弈，以及模态和混合双模拟博弈 [9, 6, 4]。我们预计，同样的方法还可推广到守卫片段等情形 [3]。另一方面，我们的结果表明，单子二阶逻辑的博弈余单子不可能导出有限可达林地伴随，至少在采用路径嵌入的显然选择时是如此（参见例 3.32）。

这表明，为了处理更强的逻辑，可能需要考虑适用于不可数正则基数 κ的 κ-可达林地伴随。我们认为，这

是未来研究的一个自然方向。特别是，广义 Lindstr¨om 量词 [17, 19] 的博弈可能有助于开展系统性研究。

致谢。 本研究得到英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）资助，项目编号 EP/V040944/1；并得到法国国家研究署项目 ReCiProg（ANR-21-CE48-0019）资助。

References

1. S. Abramsky，《结构与力量：一幅正在显现的图景》，Fundam. Informaticae 186 (2022年)，第1-4期，1–26。见第16页。 2. S. Abramsky、A. Dawar 和 P. Wang，《有限模型论中的卵石化余单子》，LICS'17论文集，2017年。见第2、10、11、12、15、18和22页。 3. S. Abramsky 和 D. Marsden，《守卫片段的余单子语义》，第36届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年度研讨会，LICS 2021，意大利罗马，2021年6月29日至7月2日，2021年，第1–13页。见第70页。 4.，《混合逻辑的余单子语义》，第47届国际计算机科学数学基础研讨会，MFCS 2022，2022年8月22日至26日，奥地利维也纳，2022年，第7:1–7:14页。见第15、16、18和70页。 5. S. Abramsky 和 L. Reggio，《树状范畴与资源》，第48届国际自动机、语言与程序设计研讨会，ICALP 2021，2021年7月12日至16日，苏格兰格拉斯哥（线上会议），2021年，第115:1–115:20页。见第1、2、10、12、13、15、16和23页。 6.，《树状范畴：资源的公理化理论》，Logical Methods in Computer Science 19 (2023)，第3期。见第1、2、9、10、12、13、15、16、17、18、23、24、25和70页。 7.，《博弈余单子导论》，ACM SIGLOG News 11 (2024)，第3期，5–48。见第2、12和16页。 8. S. Abramsky 和 N. Shah，《关联结构与力量：计算资源的余单子语义》，CSL'18论文集，2018年，第2:1–2:17页。见第2、11、12、15和18页。 9.，《关联结构与力量：计算资源的余单子语义》，《逻辑与计算杂志》31 (2021)，第6期，1390–1428。见第2、10、11、12、15、17、18和70页。 10. J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G. Strecker，《抽象范畴与具体范畴：猫的乐趣》，第17卷，范畴理论与应用重印丛书，2006年，原由 John Wiley and Sons 于1990年在纽约出版。见第4和21页。 11. J. Ad´amek、S. Milius、L. Sousa 和 T. Wissmann，《论有限元函子》，Theory Appl. Categ. 34 (2019)，第35期，1134–1164。见第19页。 12. J. Ad´amek 和 H.-E. Porst，《拟簇的代数理论》，Journal of Algebra 208 (1998)，第2期，379–398。见第3和30页。 13. J. Ad´amek 和 J. Rosick´y，《局部可表示范畴与可达范畴》，伦敦数学会讲义丛书，第189卷，剑桥大学出版社，1994年。见第3、6、7、8、10、15、20、28、29、30、32、47、48、55、59、68、69、74和75页。 14. T. Beke 和 J. Rosick´y，《初等等价与可达函子》，Annals of Pure and Applied Logic 169 (2018)，第7期，674–703。见第59页。 15. P. Blackburn、M. de Rijke 和 Y. Venema，《模态逻辑》，剑桥理论计算机科学论丛，剑桥大学出版社，2002年。见第63页。 16. F. Borceux，《范畴代数手册：第1卷，基础范畴论》，数学及其应用百科全书，剑桥大学出版社，1994年。见第8、29和68页。 17. X. Caicedo，《任意量词的来回系统》，《拉丁美洲数理逻辑》（A.I. Arruda、R. Chuaqui 和 N.C.A. Da Costa 编），逻辑与数学基础研究，第99卷，Elsevier，1980年，第83–102页。见第71页。 18. E. Casanovas、P. Dellunde 和 R. Jansana，《无等号逻辑的初等等价》，Notre Dame Journal of Formal Logic 37 (1996)，第3期，506–522。见第17页。´19. A. O Conghaile 和 A. Dawar，《博弈余单子与广义量词》，第29届 EACSL 计算机科学逻辑年会，CSL，第183卷，Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021年，第16:1–16:17页。见第71页。 20. M. Coste，《有限射影极限可定义理论的逻辑方法》，B´enabou 研讨会，巴黎北大学，1976年。见第3、5和30页。 21. A. Dawar、T. Jakl 和 L. Reggio，《Lov´asz 型定理与博弈余单子》，LICS'21论文集，2021年。见第17页。

22. Y. Diers, 《布尔简单代数层范畴》, 数学讲义, 第1187卷, 施普林格出版社, 柏林, 1986年。见第19页。 23. H.-D. Ebbinghaus 和 J. Flum, 《有限模型论》, 第2版, 施普林格数学专著, 施普林格, 1999年。见第1、5、11、22、37和61页。 24. A. Ehrenfeucht, 《博弈在形式化理论完全性问题中的应用》, Fund. Math. 49 (1960/61年), 129–141。见第10和17页。 25. R. Fra¨ıss´e, 《关于关系系统的若干分类》, Publ. Sci. Univ. Alger. S´er. A 1 (1954年), 35–182。见第11和17页。 26. P.J. Freyd 和 G.M. Kelly, 《连续函子范畴 I》, 纯粹与应用代数杂志 2 (1972年), 第3期, 169–191。见第9页。 27. P. Gabriel 和 F. Ulmer, 《局部可呈范畴》, 数学讲义, 第221卷, 施普林格, 1971年。见第3、27和30页。 28. M. Hebert、J. Ad´amek 和 J. Rosick´y, 《局部可呈范畴中的正交性问题续篇》, Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques 42 (2001年), 第1期, 51–80。见第20和74页。 29. W. Hodges, 《代数构造的范式》, 伦敦数学会通报 6 (1974年), 第1期, 57–60。见第4、23、53和55页。 30. , 《代数构造的范式 II》, Logique et Analyse 18 (1975年), 第71/72期, 429–487。见第4、23、53、54和55页。 31. , 《模型论》, 数学及其应用百科全书, 第42卷, 剑桥大学出版社, 1993年。见第1、4、5、11、17、35、37、38、39、41、53、54、55、58、61和74页。 32. N. Immerman, 《描述复杂性》, 计算机科学研究生教材, 施普林格出版社, 纽约, 1999年。见第2页。 33. T. Jakl、D. Marsden 和 N. Shah, 《Courcelle 与 Feferman-Vaught-Mostowski 定理的博弈余单子论述》, https://arxiv.org/abs/2205.05387, 2022年。见第22页。 34. T. Jech, 《集合论：第三个千年版》, 修订扩充版, 施普林格数学专著, 施普林格, 2006年。见第39和76页。 35. P.T. Johnstone, 《Stone 空间》, 剑桥高等数学研究丛书, 剑桥大学出版社, 1982年。见第29页。 36. , 《大象素描：托普斯理论纲要》, 牛津逻辑指南, 克拉伦登出版社, 2002年。见第3、5、6、7、20、26、30、31、33、42、52、74和75页。 37. A. Joyal、M. Nielsen 和 G. Winskel, 《双模拟与开映射》, 第八届年度计算机科学逻辑研讨会论文集（LICS'93）, 加拿大蒙特利尔, 1993年6月19日至23日, 1993年, 第418–427页。见第2和16页。 38. , 《开映射所定义的双模拟》, Inf. Comput. 127 (1996), 第2期, 164–185。见第2和24页。 39. C. Karp, 《有限量词等价》, 《模型理论研讨会论文集》, 1963年, 伯克利（阿姆斯特丹）（J. W. Addison、L. A. Henkin 和 A. Tarski 编）, 北荷兰出版社, 1965年, 第407–412页。见第2页。 40. M. Kashiwara 和 P. Schapira, 《范畴与层》, 数学基础丛书, 第332卷, 施普林格出版社, 柏林—海德堡, 2006年。见第55页。 41. A. S. Kechris, 《经典描述集合论》, 数学研究生教材, 第156卷, 施普林格, 1995年。见第4、38和39页。 42. T. Kloks, 《树宽：计算与近似》, 计算机科学讲义, 施普林格, 柏林—海德堡, 1994年。见第15页。 43. L. Libkin, 《有限模型论基础》, 理论计算机科学丛书：EATCS 丛书, 施普林格, 柏林—海德堡, 2004年。见第1页。 44. S. Mac Lane, 《工作数学家的范畴论》, 第2版, 施普林格, 1998年。见第4、28和68页。 45. S. Mac Lane 和 I. Moerdijk, 《几何与逻辑中的层：托普斯理论初步导论》, 施普林格, 1992年。见第6、25、30和64页。 46. M. Makkai 和 A. M. Pitts, 《关于局部有限可呈范畴的一些结果》, 《美国数学会汇刊》299 (1987), 第2期, 473–496。见第30页。 47. D. Marker, 《模型论导论》, 数学研究生教材, 第217卷, 施普林格, 纽约, 2002年。见第1页。 48. M. Mislove, 《序散与拓扑散何时相同？》, 《序：描述与作用》（拉尔布雷勒, 1982年）, North-Holland Math. Stud., 第99卷, 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, 1984年, 第61–80页。见第27和28页。

49. S. Negri, 《超越几何理论的证明分析：从规则系统到规则的系统》, 《逻辑与计算杂志》**26** （2016），第 2 期，513–537。第 6 页引用。50. J. Neˇsetˇril 和 P. Ossona de Mendez, 《树深度、子图着色与同态界》, 《欧洲组合学杂志》**27** （2006），第 6 期，1022–1041。第 15 页引用。51. M. O. Rabin, 《模型类与具有交性质的句子集》, 克莱蒙大学科学学院数学年刊´e ´Math´ématiques **7** （1962），第 1 期，39–53。第 20、74 和 75 页引用。52. , 《二阶理论的可判定性与无限树上的自动机》, 《美国数学会汇刊》**141** （1969），1–35。第 23 页引用。53. L. Reggio, 《多元集与同态计数》, 《数学进展》**410, Part A**（2022），第 108712 号，108712。第 19 页引用。54. E. Riehl, 《分解系统》, 可访问 https://math.jhu.edu/~eriehl/factorization. pdf，2008。第 9 页引用。55. J. G. Rosenstein, 《线性序》, 纯粹数学与应用数学，学术出版社，1982年。第 2、11、18 和 23 页引用。56. S. Shelah, 《序的单子理论》, 《数学年刊》第二辑 **102** （1975），第 3 期，379–419。第 23 页引用。57. H. Volger, 《结构的极限与结构层的整体截面的保持定理》, 《数学杂志》**166** （1979），27–54。第 20 和 74 页引用。

Appendix A. Lfp categories as categories of structures

在注 3.27(1)中，我们回顾了：给定 **Str(Σ)** 的一个全子范畴 $\mathcal{E}$ ，该子范畴在 **Str(Σ)** 中是反射的并且对滤过余极限封闭，则未必存在一个笛卡尔理论 **T in Σ** 使得 $\mathcal{E} \cong$ **Mod(T)**。这一点可以通过对 [51], 中给出的一个例子稍作调整而看出，下面将对此进行详细说明；另见 [57, 28]。

设 $\mathcal{K}$ 为一类 **Σ**-结构。按照 [51, 定义 **1**，§2], ，我们称 $\mathcal{K}$ 具有交性质 ，如果给定 $M \in \mathcal{K}$ 以及一族结构 $(N_i \mid i \in I)$ $N_i \in \mathcal{K}$，使得每个 N_i 都是 M的子结构，则有 $\bigcap_{i\in I} N_i \in \mathcal{K}$。上述结构的交 $\bigcap_{i\in I} N_i$ 是**Str(Σ)** 中子结构嵌入$N_i \rightarrowtail M$的宽拉回。特别地，给定 **Σ**中的笛卡尔理论**T** ，由于**Mod(T)** 在**Str(Σ)**中对极限封闭（引理 6.6），因此**Mod(T)**作为一类 **Σ**-结构，具有交性质。[23]

例 A.1. 以下内容改编自 [51, 57]。设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为一个签名，其中对每个 $n \in \mathbb{N}$都有一个 $(n+1)$ 元关系符号 P_n。以下句子是在 [51, §8]中设计的：对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$\begin{aligned}
\varpi_n &:= (\forall x)(\forall y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})\big(P_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \rightarrow P_n(x, y_1, \ldots, y_n)\big)\\
\varphi_n &:= (\forall x)(\forall \vec{y}, y_{n+1})(\forall \vec{z}, z_{n+1})\Big(\big(P_{n+1}(x, \vec{y}, y_{n+1}) \wedge P_{n+1}(x, \vec{z}, z_{n+1})\big) \rightarrow \vec{y} \doteq \vec{z}\Big)\\
\gamma_n &:= (\forall x)(\exists y_1, \ldots, y_n) P_n(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

令 $\mathcal{E}$ 为 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中由上述所有句子的模型构成的全子范畴，其中 n遍历 $\mathbb{N}$。 [57] 中已经观察到， $\mathcal{E}$ 在 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中对有限极限封闭。根据 [57], 的一个结果，这意味着 $\mathcal{E}$ 在 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中对极限和滤过余极限封闭，由此得到如下结论（见 [13, 定理 5.20 和推论 5.21]）。

断言。 $\mathcal{E}$ 是反射的，并且在 $\mathbf{Str}(\boldsymbol{\sigma})$ 中对滤过余极限封闭。

断言的证明。 这由 [13, 推论 5.21], 得出；该推论只要求我们证明 $\mathcal{E}$ 在 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中对有限极限封闭。句子 ϖ_n、 φ_n 和 γ_n 是正则的，因此由 [31, 引理 9.1.4] 可知， $\mathcal{E}$ 在 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中对积封闭（另见 [36, D2.4.3]）。还需证明 $\mathcal{E}$ 在 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中对等化子封闭。

我们依赖于 [13, 注 5.1(2)] 中给出的 **Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中等化子的描述。也就是说，**Str($\boldsymbol{\sigma}$)** 中平行箭头 $f, g\colon M \to N$ in $\mathcal{E}$ 的等化子，是 M 中由满足 $f(a) = g(a)$ 的那些 $a \in M$ 构成的子结构 E。我们必须证明，对所有$n \in \mathbb{N}$， $E \models \varpi_n \wedge \varphi_n \wedge \gamma_n$ 都成立。注意， ϖ_n 和 φ_n 是 Horn 句子，因此它们的模型类在取子结构下封闭（这可由 [13, 定理 5.12] 得出）。因此，对所有$n \in \mathbb{N}$， $E \models \varpi_n \wedge \varphi_n$ 都成立。剩下要证明的是，对所有 $n \in \mathbb{N}$， $E \models \gamma_n$ 都成立。取定 $n \in \mathbb{N}$ ，并令 $a \in E$。由于 M 是 γ_{n+1} 和 ϖ_n 的一个模型，存在 $\vec{b}, b \in M$ ，使得 $P_{n+1}(a, \vec{b}, b)$ 和 $P_n(a, \vec{b})$ 在 M 中成立 $\vec{}$ $\vec{}$。因此， $P_{n+1}(f(a)\ f(b)\ f(b))$ 和 $P_{n+1}(g(a)\ g(b)\ g(b))$ 在 N 中都成立。但由于 $a \in E$，我们有 $f(a) = g(a)$；又由于 $N \models \varphi_n$，所以 $f(\vec{b}) = g(\vec{b})$。由此可得 $\vec{b} \in E$；鉴于 E 是 M 的子结构，结论得证。□

特别地 $\mathcal{E}$，作为一类 $\boldsymbol{\sigma}$-结构，具有交性质。然而，根据 [51, 定理 11] ，不存在句子集合 Ψ ，使得 $\mathcal{E}$ 是 Ψ的模型类，并且对每个 $\psi \in \Psi$， ψ 的模型类都具有交性质。由此不难推出如下结论。

断言。 不存在一个 $\boldsymbol{\sigma}$ 中的笛卡尔理论**T** ，使得 $\mathcal{E} = \mathbf{Mod}(\mathbf{T})$。

断言的证明。 反设 $\mathcal{E} =$ **Mod(T)** 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 中某个笛卡尔理论 **T** 的模型类。根据定义 2.1，对于 **T** 的每个序列式 $(\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2)$，都有一个 有限的

[23] Re回顾一下，子结构嵌入在**Str(Σ)**中是正则单态射，参见例 2.18 .

笛卡尔 $\mathbf{T}_{(\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2)} \subseteq \mathbf{T}$，其中 $(\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2) \in \mathbf{T}_{(\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2)}$。于是，对于 $\mathbf{T}$ 的每个 $(\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2) \in$，都有一个句子 ψ 属于 $\boldsymbol{\sigma}$，其模型类恰好是 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T}_{(\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2)})$，因而具有交性质。因此，$\mathcal{E}$ 是一个句子集 Ψ 的模型类，并且对于每个 $\psi \in \Psi$，ψ 的模型类都具有交性质。这与 [51,定理 11] 矛盾。□

Appendix B. Additional material for§2 (Preliminaries)

B.1. 结构与同态。 一个多排序 签名 $\mathbf{\Sigma}$ 由一个类型集合 $\mathbf{Sort(\Sigma)}$ 以及函数符号和关系符号的集合分别组成

$$\mathrm{Fun}(\mathbf{\Sigma}) = \bigcup_{(\tau_1,\ldots,\tau_n;\tau)\in \mathrm{Sort}(\mathbf{\Sigma})^{n+1}} \mathrm{Fun}(\mathbf{\Sigma})(\tau_1,\ldots,\tau_n;\tau)$$
$$\mathrm{Rel}(\mathbf{\Sigma}) = \bigcup_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in \mathrm{Sort}(\mathbf{\Sigma})^{n}} \mathrm{Rel}(\mathbf{\Sigma})(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

，分别记作函数 符号和关系 符号。我们记作

$$f\colon \tau_1 \ldots \tau_n \to \tau$$

若 $f \in \mathbf{Fun(\Sigma)}(\tau_1, \ldots, \tau_n; \tau)$，并且

$$R \hookrightarrow \tau_1 \ldots \tau_n$$

若 $R \in \mathbf{Rel(\Sigma)}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$。

定义 B.1（结构）。设 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个签名。

(1) 一个 $\mathbf{\Sigma}$-结构 M 由以下数据给出：**(i)** 对于每个类型 $\tau \in \mathbf{Sort(\Sigma)}$，一个集合 $M(\tau)$；**(ii)** 对于每个函数符号 $f\colon \tau_1 \ldots \tau_n \to \tau$，一个函数 $f_M\colon M(\tau_1) \times \cdots \times M(\tau_n) \to M(\tau)$；**(iii)** 对于每个关系符号 $R \hookrightarrow \tau_1 \ldots \tau_n$，一个关系 $R_M \subseteq M(\tau_1) \times \cdots \times M(\tau_n)$。

(2) 一个 $\mathbf{\Sigma}$-结构的同态 $h\colon M \to N$ 是一个函数族

$$(h^\tau\colon M(\tau) \to N(\tau) \mid \tau \in \mathrm{Sort}(\mathbf{\Sigma}))$$

使得对于每个 $f\colon \tau_1 \ldots \tau_n \to \tau$和 $R \hookrightarrow \tau_1 \ldots \tau_n$，以及所有 $(a_1, \ldots, a_n) \in M(\tau_1) \times \cdots \times M(\tau_n)$，都有

$$\begin{array}{rcl} h^\tau(f_M(a_1,\ldots,a_n)) & = & f_N(h^{\tau_1}(a_1),\ldots,h^{\tau_n}(a_n)) \\ R_M(a_1,\ldots,a_n) & \Rightarrow & R_N(h^{\tau_1}(a_1),\ldots,h^{\tau_n}(a_n)) \end{array}$$

(3) 我们将 $\mathbf{Str(\Sigma)}$ 记作这样一个范畴：其对象是 $\mathbf{\Sigma}$-结构，态射是同态。

B.2. 无穷一阶逻辑。 我们将考察无穷一阶逻辑的不同片段。与 [13, §5] 相比，但按照 [36, §D1] 的做法，我们处理的公式至多具有有限多个自由变量。这些变量声明为上下文 Γ，形式为 $x_1\colon \tau_1, \ldots, x_n\colon \tau_n$，其中变量 $x_1, \ldots, x_n$ 两两不同。

签名 $\mathbf{\Sigma}$ 中的上下文中的项 $\Gamma ::= t : \tau$ 归纳定义如下：

- $x_1\colon \tau_1, \ldots, x_n\colon \tau_n ::= x_i\colon \tau_i$ 对于每个 $i = 1, \ldots, n$ 都是上下文中的项，
- $\Gamma ::= f(t_1, \ldots, t_n)\colon \tau$ 是上下文中的项，当且仅当 $f\colon \tau_1 \ldots \tau_n \to \tau$，并且对于每个 $i = 1, \ldots, n$，$\Gamma ::= t_i\colon \tau_i$ 都是上下文中的项。

现在我们转向公式。

定义 B.2（公式）。设 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个签名。多排序语言 $\mathcal{L}_\infty(\mathbf{\Sigma}) = \mathcal{L}_\infty(= \mathcal{L}_{\infty,\,\omega})$ 由如下归纳定义的 上下文中的公式 $\Gamma ::= \varphi$ 构成。

• $\Gamma ::= (t \doteq_\tau u)$ 是一个上下文中的公式，当且仅当 $\Gamma ::= t : \tau$ 和 $\Gamma ::= u : \tau$ 是上下文中的项。
• $\Gamma ::= R(t_1, \dots, t_n)$ 是上下文中的公式，当且仅当 $R \hookrightarrow \tau_1 \dots \tau_n$，并且对每个 $i = 1, \dots, n$，$\Gamma ::= t_i : \tau_i$ 都是上下文中的项。
• $\Gamma ::= \neg\varphi$ 是上下文中的公式，当且仅当 $\Gamma ::= \varphi$ 是上下文中的公式。
若 $\Gamma, x : \tau ::= \varphi$ 是上下文中的公式，则 • $\Gamma ::= (\forall x : \tau)\varphi$ 和 $\Gamma ::= (\exists x : \tau)\varphi$ 都是上下文中的公式。

若 I 是一个小集合，并且对每个 $i \in I$，$\Gamma ::= \varphi_i$ 都是上下文中的公式，则 • $\Gamma ::= \bigwedge_{i\in I} \varphi_i$ 和 $\Gamma ::= \bigvee_{i\in I} \varphi_i$ 都是上下文中的公式。

注意，$\mathcal{L}_\infty$ 是一个大集合。还要注意，按构造，上下文中的公式至多含有有限多个自由变量。最后，注意若 $\mathbf{\Sigma}$ 是纯关系的（即 $\mathsf{Fun}(\mathbf{\Sigma}) = \emptyset$），则上下文中的项这一概念仍能恰当地处理原子公式的上下文：例如，$\Gamma ::= P(x_1, \dots, x_n)$ 要求所有 x_i 都以适当的类型声明在 Γ 中，但 Γ 可以声明其他变量。

给定一个基数 κ，我们用 $\mathcal{L}_\kappa (= \mathcal{L}_{\kappa,\,\omega})$ 表示这样的公式集合 $\varphi \in \mathcal{L}_\infty$：其合取式和析取式的基数为 $< \kappa$。以下是定义的一个直接推论。

事实 B.3（**AC**）。若 $\varphi \in \mathcal{L}_\infty$，则存在某个 κ，使得 $\varphi \in \mathcal{L}_\kappa$。

证明。对 φ 使用归纳法。我们只讨论 $\varphi = \bigwedge_{i\in I} \varphi_i$ 的情形。根据归纳假设，对于每个 $i \in I$，存在一个基数 $\kappa_i > 0$，使得 $\varphi_i \in \mathcal{L}_{\kappa_i}$。利用选择公理（参见例如 [34, §5]），令 κ 为 $\sum_{i\in I} \kappa_i$ 的基数。于是对于所有 $i \in I$ 都有 $\varphi_i \in \mathcal{L}_\kappa$。由于 I 的基数为 $\leq \kappa$，我们得到 $\varphi \in \mathcal{L}_\kappa$。□

Dipartimento di Matematica “Federigo Enriques”, Università degli Studi di Milano, Italy

电子邮箱地址：luca.reggio@unimi.it

LIP, ENS de Lyon, France电子邮箱地址：
colin.riba@ens-lyon.fr