arXiv:2304.12789v1 [cs.DM] 25 Apr 2023

关于击集局部搜索的简注

Zden˘ek Dvo˘r´ak*

摘要

设 π 是图 G 和 $Z \subseteq V(G)$ 的有序对 (G, Z) 的一种性质。在最小 π-击集问题中，给定输入图 G，我们希望找到一个最小集合 $X \subseteq V(G)$，使得 X 与每个满足性质 π 的集合 $Z \subseteq V(G)$ 相交，其中 (G, Z) 满足该性质。一个重要的特例是：当且仅当 $G[Z]$ 同构于有限集 $\mathcal{F}$ 中某个图时，有序对 (G, Z) 才满足 π；在这个最小 $\mathcal{F}$-击集问题中，X 需要命中 $\mathcal{F}$ 中各图作为 G 的诱导子图出现的所有位置。本文证明，Har-Peled 和 Quanrud 的局部搜索论证为任意多项式扩张图类中的最小 $\mathcal{F}$-击集问题提供了一个多项式时间近似方案。此外，我们指出，局部搜索论证适用于更一般的所有性质 π：对于这些性质，可以在多项式时间内检验 X 是否为 π-击集，并且只要 (G, Z) 满足 π，$G[Z]$ 就具有有界直径；这统一推广了最小 $\mathcal{F}$-击集问题和最小 r-支配集问题。最后，我们指出，相应的结论对于对偶问题也成立：该问题是寻找满足性质 π 的有序对 (G, Z) 所对应的、两两不相交的集合 Z 的最大数量；这推广了最大 F-匹配、最大诱导 F-匹配以及最大 r-独立集问题。

设 H 和 G 为图。若通过收缩 G 的某个子图中的两两顶点不交子图（每个子图的半径至多为 r），得到一个与 H 同构的图，则称 H 是 G 的 r-浅层 minor。图 H 的密度为 $|E(H)|/|V(H)|$。对于函数 $f\colon \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$，图 G 具有

*查理大学，捷克共和国布拉格。电子邮箱：rakdver@iuuk.mff.cuni.cz。获欧洲研究委员会（ERC）根据欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号810115）资助。

由 f 界定的扩张，如果对于每个非负整数 r，G 的每个 r-浅层 minor 的密度至多为 $f(r)$。若图类 $\mathcal{G}$ 中的所有图均如此，则称 $\mathcal{G}$ 具有由 f 界定的扩张。若 $\mathcal{G}$ 具有由某个函数 f 界定的扩张，则称 $\mathcal{G}$ 具有有界扩张；若 $\mathcal{G}$ 具有由一个多项式界定的扩张，则称其具有多项式扩张。

设 π 是关于一对 (G, Z) 的性质，其中 G 是一个图，且 $Z \subseteq V(G)$ 非空。π 的直径是满足性质 π 的所有点对 (G, Z) 所对应的 $G[Z]$ 的直径中的最大值；如果存在这类点对，使得 $G[Z]$ 的直径可以任意大，则记为 ∞（这包括对于某个满足 π 的 (G, Z)，$G[Z]$ 不连通的情况）。对于图 G，如果集合 $X \subseteq V(G)$ 与满足 (G, Z) 满足 π 的每个 $Z \subseteq V(G)$ 都相交，则称其为 π-命中集。令 $\gamma_\pi(G)$ 表示 G 中 π-命中集的最小大小。对于图类 $\mathcal{G}$，如果存在一个多项式时间算法，能够对图 $G \in \mathcal{G}$ 和集合 $X \subseteq V(G)$ 判定 X 是否为 π-命中集，则称 π-命中集在 $\mathcal{G}$ 中可高效检验。下面介绍两个重要例子：

- 对于一个图的有限集 $\mathcal{F}$，若 π 表示 $G[Z]$ 与 $\mathcal{F}$中的某个图同构这一性质，则我们得到 $\mathcal{F}$-命中集问题：寻找最小的集合 $X \subseteq V(G)$，使得 $G - X$不含 $\mathcal{F}$，即不包含任何与 $\mathcal{F}$中的元素同构的诱导子图。π 的直径等于 $\mathcal{F}$中各图直径的最大值。

- 设 r 为正整数，并且当且仅当存在 $z \in V(G)$ 使得 Z 恰好由与 z 在 G中的距离至多为 r 的顶点组成时，(G, Z)满足 π。那么，当且仅当 X 是一个 π-支配集时，它是一个 r-命中集；也就是说，G 的每个顶点到 G的距离至多为 r。π 的直径至多为 $2r$。

在这两种情况下，π-命中集在所有图中都可以高效判定。

对于任意满足 π-击中集合可高效判定的 π，以及一个正整数 c，可以使用以下 c-局部搜索启发式来寻找一个（希望规模较小的）π-击中集合：

1. 令 $X = V(G)$。
2. 遍历所有大小至多为 c 且满足 $|X \triangle Y| < |X|$ 的集合 $Y \subseteq V(G)$：
    - 如果 $X \triangle Y$ 是一个 π-命中集，则令 $X := X \triangle Y$ 并重复步骤 2。

当然，一般而言，并不能保证局部搜索的结果接近最优解。然而，Har-Peled 和 Quanrud [4] 针对最小顶点覆盖（$\{K_2\}$-命中集）和最小r-支配集证明了以下结论：对于任意具有多项式扩张的图类 $\mathcal{G}$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，存在 c_ε，使得对每个图 $G \in \mathcal{G}$，c_ε-局部搜索得到的 π-命中集大小至多为 $(1+\varepsilon)\gamma_\pi(G)$。也就是说，将局部搜索限制在任何具有多项式扩张的图类上时，它都能给出一个多项式时间近似方案（PTAS）。本文的主要结果是对这些结果作如下统一推广。

定理 1. 设 $\mathcal{G}$ 为一个具有多项式扩张的图类。对于每个具有有限直径的性质 π 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在 c，使得 c-局部搜索可得到一个大小至多为 $(1+\varepsilon)\gamma_\pi(G)$ 的 π- 命中集。

考虑对偶概念也很自然。图 G 的顶点的两两不相交子集构成的集合 $\mathcal{P}$，若对于每个$P \in \mathcal{P}$，(G, P) 都具有性质 π，则称为 π-装包；若此外 G 中没有边的两个端点分别属于 $\mathcal{P}$ 中不同的元素，则称为诱导 π-装包。例如：

- 对于图 F，若 π 表示 $G[P]$ 同构于 F 这一性质，则得到 F-匹配（以及诱导 F-匹配）问题，即在输入图中寻找数量最多的互不相交（且互不相邻）的 F 副本。

- 设 r 为正整数，并设当且仅当存在 $z \in V(G)$ 使得 Z 恰由 G 中与 z 的距离至多为 r 的顶点组成时，(G, Z) 满足 π。那么，π-装包对应于一个 $2r$-独立集（若任意两个不同元素之间的距离都大于 t，则称顶点集合为 t-独立集），而诱导 π-装包对应于一个 $(2r+1)$-独立集。

令 $\alpha_\pi(G)$ 表示 π-打包的最大规模，令 $\alpha'_\pi(G)$ 表示 G 中诱导 π-打包的最大规模。对于图类 $\mathcal{G}$，如果对于每个正整数 c，都存在一个多项式时间算法，能够针对图 $G \in \mathcal{G}$ 和集合 $T \subseteq V(G)$，找到一个规模至少为 c 的（诱导）π-打包 $\mathcal{P}_0$ 以及这样的 $T \cap \bigcup \mathcal{P}_0 = \emptyset$，或者判定不存在这样的 $\mathcal{P}_0$，那么我们称（诱导）π-打包扩展在 $\mathcal{G}$ 中是易处理的。如果 π 具有这一性质，我们可以运行以下最大化变体的 c-局部搜索算法：

1. 设 $\mathcal{P} = \emptyset$。

2. 遍历所有大小小于 c 的 $Y \subseteq \mathcal{P}$：

- 如果 $\mathcal{P} \setminus Y$ 可以扩展为大小大于 $|\mathcal{P}|$的（诱导） π-打包 $\mathcal{P}'$，则令 $\mathcal{P} := \mathcal{P}'$ 并重复步骤 2。

步骤 2 通过测试是否存在一个与 $\bigcup_{P \in \mathcal{P} \setminus Y} P$（或在诱导情形下，与该集合及其邻居）不相交的、大小为 $|Y|+1$的（诱导） π-打包$\mathcal{P}_0$来实现。作为我们的第二个结果，我们指出，该算法在任何具有多项式扩张的图类中再次给出一个多项式时间近似方案；论证不太复杂，其基本思想已隐含地出现在 [4]中。

定理 2。设 $\mathcal{G}$ 是一个具有多项式扩张的图类。对于有限直径的每个性质 π 以及每个 $\varepsilon > 0$，存在 c，使得（诱导）最大化 c-局部搜索在非诱导情形下得到大小至少为 $(1-\varepsilon)\alpha_\pi(G)$的（诱导） π-打包，在诱导情形下得到大小至少为 $(1-\varepsilon)\alpha'_\pi(G)$的（诱导） π-打包。

定理 1 和定理 2 中算法的直接实现，其时间复杂度是测试或扩展复杂度的 $O(n^{c+1})$ 倍，因此时间复杂度的指数取决于所需的精度；也就是说，我们得到的是一个多项式时间近似方案，而不是一个全多项式时间近似方案。然而，在我们考察的所有示例中，性质 π 在以下意义下是一阶可定义的：存在一阶逻辑中的公式 φ （允许对顶点进行量化，但不允许对顶点集合或边进行量化），该公式使用邻接谓词，并具有自由变量 x_1、.....、 x_m 和 z，使得具有非空 Z 的 (G, Z) 具有性质 π，当且仅当存在某些 v_1、.....、 $v_m \in G$,

$$Z = \{v \in V(G) : G \models \varphi(v_1, \ldots, v_m, v)\}.$$

例如，对于用于定义 r-支配集和 $2r$-独立集问题的性质 π，我们可以设置 $\varphi(x_1, z) \equiv \mathrm{dist}_r(x_1, z)$，其中

$$\mathrm{dist}_r(x, y) \equiv (\exists p_0, \ldots, p_r)\ x = p_0 \wedge y = p_r \wedge \bigwedge_{i=1}^{r} (p_{i-1} = p_i \vee p_{i-1}p_i \in E).$$

在这种情况下，我们可以用一阶逻辑表达测试和扩展过程。让我们用最难的例子来说明：针对最大 π-packing 的 c-局部搜索的第 2 步。设 $\mathcal{P}$ 是当前的 π-packing。对于 $\mathcal{P}$中的每个元素 P，将 $G[P]$ 的一棵 BFS生成树的边染成红色；我们将使用一个新的二元谓词 R来访问这些边的颜色信息。

设 $\mathrm{dist}_r^R(x,y)$ 是一个谓词，其定义方式与 $\mathrm{dist}_r(x,y)$ 类似，只是将E 替换为 R。设 T 是一个解释为 $\bigcup\mathcal{P}$的一元谓词。当且仅当以下公式成立时，我们可以从 $\mathcal{P}$ 中删除至多 $c-1$ 个元素，并添加另外 c 个元素，从而得到一个π-packing：

$$
\begin{aligned}
&(\exists r_1,\ldots,r_{c-1},x_1^1,\ldots,x_m^1,\ldots,x_1^c,\ldots,x_m^c)\\
&\quad\bigwedge_{j=1}^{c}(\exists z)\ \varphi(x_1^j,\ldots,x_m^j,z)\\
&\quad\wedge\bigwedge_{j=1}^{c}(\forall z)\ \Big(\varphi(x_1^j,\ldots,x_m^j,z)\wedge z\in T\Rightarrow\bigvee_{i=1}^{c-1}r_i\in T\wedge\mathrm{dist}_{2r}^R(z,r_i)\Big)\\
&\quad\wedge\bigwedge_{1\le j_1<j_2\le c}(\forall z_1,z_2)\ \big(\varphi(x_1^{j_1},\ldots,x_m^{j_1},z_1)\wedge\varphi(x_1^{j_2},\ldots,x_m^{j_2},z_2)\Rightarrow z_1\neq z_2\big).
\end{aligned}
$$

要从 $\mathcal{P}$ 中移除的元素是与 r_1、...、 r_{c-1} 相交的元素，而要添加的元素由带有参数 x_1^j、...、 x_m^j 的公式 φ 针对 $j\in\{1,\ldots,c\}$ 给出。

- 第二行表示，对于每个 j，由 m-元组 x_1^j、...、 x_m^j 参数化的公式 φ 定义了一个非空集合 Z_j。
- 第三行指出， Z_j 仅与包含待从 $\mathcal{P}$ 中移除的 r_1、...、 r_{c-1} 的元素相交。
- 最后一行说明集合 Z_1、...、 Z_m 两两不相交。

Dvoˇr´ak、Kr´al' 和 Thomas [1] 描述了一种数据结构：对于固定类中具有有界扩张的每个图，经过线性时间预处理后，可以在常数时间内执行以下操作：

- 重新为一条边着色。
- 更改解释一元谓词的集合中某个顶点的归属。
- 测试给定的一阶句子 ψ 是否得到满足，以及
- 如果是这样，就为 ψ的存在量词初始段找到一个满足赋值。

借助这一数据结构，我们可以得出：对于任何固定的具有有界扩张的图类中的一阶逻辑可定义有界直径性质， n-顶点图 G ，以及任何固定的 c，我们可以运行

- c-局部搜索最小 π-命中集的时间为 $O(n)$，并且
- （诱导） c-局部搜索最大 π-打包的时间为 $O(n^2)$。

第二种情况下出现二次时间复杂度的原因在于，每次迭代后都需要重新着色红边；如果（诱导） π-打包中的集合大小无界，则可能导致 $O(n)$的时间复杂度。如果集合大小有界，例如对于最大（诱导） F-匹配问题，时间复杂度则变为 $O(n)$。此外，即使打包中的元素大小无界，也可以采用其他方式在一阶逻辑中描述该打包（例如，在最大t-独立集的情况下，我们只需标记构成该集合的顶点），从而总时间再次变为 $O(n)$。

1 工具

为了证明定理 1，我们使用有界扩张类理论中的若干标准工具。

广义着色数

设 $\prec$ 是图 G 的顶点的线性序。对于非负整数 r，如果存在一条从 v 到 u 的路径 P，其长度至多为 r，且 $V(P)\setminus\{u\}$ 中的所有顶点在序 $\prec$ 中都大于 u，则称顶点 u 从顶点 $v \succeq u$ 弱（$r, \prec$）-可达。令 $L_{r,\prec}(v)$ 表示从 v 弱（$r, \prec$）-可达的所有顶点的集合，并令 $R_{r,\prec}(u)$ 表示 u 可以从其弱（$r, \prec$）-可达的所有顶点的集合。（$G, \prec$）的弱 r-着色数是对所有顶点 $v \in V(G)$ 取 $|L_{r,\prec}(v)|$ 的最大值。 G 的弱 r-着色数 $\mathrm{wcol}_r(G)$ 是对 $V(G)$ 的所有线性序 $\prec$ 取（ $G, \prec$ ）的弱 r- 着色数的最小值。

定理 3（Zhu [5]）。对于每个 $\mathcal{G}$ 具有有界扩张的类以及每个$r \geq 0$，都存在一个整数 b，使得对于每个 $G \in \mathcal{G}$，$\mathrm{wcol}_r(G) \leq b$。

浅层装填的扩张

如果图 G 的顶点子集的一个集合 $\mathcal{C}$ 满足： G 的每个顶点至多出现在 ω 个 $\mathcal{C}$ 中，并且对于每个 $C \in \mathcal{C}$， $G[C]$ 的半径至多为 t ，则称其为（ω， t）-浅层集合。打包图 $G[\mathcal{C}]$ 定义为顶点集为 $\mathcal{C}$ 的图，其中当且仅当存在 $v_1 \in C_1$ 和 $v_2 \in C_2$使得 $v_1 = v_2$ 或 $v_1 v_2 \in E$（G）时， C_1 和 C_2 相邻。特别地， r-浅层 minor 是（1， r）-浅层集合的打包图。

定理 4（Har-Peled 和 Quanrud [4]）。设 G 是一个扩张受函数 f 限制的图。对于 G 的顶点子集的任意 (ω, t)-浅层集合族 $\mathcal{C}$，图 $G[C]$ 的扩张受函数

$$f'(r) = 5\omega^2(2t+1)^2(2r+1)^2 f((2t+1)r+t).$$

推论 5。对于具有多项式扩张的任意图类 $\mathcal{G}$ 以及任意非负整数 ω 和 t，存在一个具有多项式扩张的图类 $\mathcal{G}'$ ，使得图 $G \in \mathcal{G}$ 的顶点子集的任意 (ω, t)-浅层集合族的打包图属于 $\mathcal{G}'$。

多项式扩张与强次线性分隔子

图 G 中的一个平衡分隔集是一个集合 $S \subseteq V(G)$，使得 $G - S$ 的每个连通分量至多包含 $\frac{2}{3}|V(G)|$ 个顶点。对于函数 $s\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}_0^+$，如果图类 $\mathcal{G}$ 对于每个 $G \in \mathcal{G}$，G 的每个子图 H 都有一个大小至多为 $s(|V(H)|)$ 的平衡分隔集，则称其具有 s-分隔子。如果存在 $\varepsilon > 0$ 和函数 $s(n) = O(n^{1-\varepsilon})$，使得 $\mathcal{G}$ 具有 s-分隔子，则称图类 $\mathcal{G}$ 具有强次线性分隔子。

定理 6（Dvo$\check{\text{r}}$´ak 和 Norin [2]）。一个图类具有强次线性分隔子，当且仅当它具有多项式扩张。

设 $\mathcal{K}$ 是图 G 的顶点子集系统。我们称 $\mathcal{K}$ 是 G 的覆盖，当且仅当 $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} G[K] = G$。对于 $K \in \mathcal{K}$，设 ∂K 是 K 中属于 $\mathcal{K}$ 的多个元素的顶点集合。覆盖 $\mathcal{K}$ 的超额为 $\sum_{K \in \mathcal{K}} |\partial K|$。以下引理是民间结果（证明例如可见于 [3]）。

引理 7. 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有强次线性分隔子的图类。存在一个多项式 p，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，每个图 $G \in \mathcal{G}$ 都有一个超额至多为 $\varepsilon|V(G)|$ 的覆盖，该覆盖由大小至多为 $p(1/\varepsilon)$ 的集合组成。

2 证明

定理 1 的证明沿用了 [4], 的思想，但存在以下关键差异：我们不将实际解与最优解进行比较，而是将其与适当选取的最优解扩充进行比较。对于图 G 的顶点集合 O 、 $V(G)$ 的线性序 $\prec$ 以及非负整数 r 和 m，如果 $|R_{r,\prec}(v) \cap O| \geq m$，则称顶点 v 是 $(r, \prec, m, O)$-富集的。

观察 8。设 G 为一个图， O 为 G 的顶点集合， r 和 m 为非负整数， $\prec$ 为 G 的顶点线性序。设 O' 为所有 $(r$、 $\prec$、 m、 $O)$-丰富顶点的集合。如果 $(G, \prec)$ 的弱 r-着色数至多为 b，则

$$|O'| \leq \frac{b}{m}|O|.$$

证明。根据丰富性的定义，至少存在 $m|O'|$ 个顶点对 (v, u)，使得 $v \in O'$ 且 $u \in R_{r,\prec}(v) \cap O$。然而，如果 $u \in R_{r,\prec}(v)$，那么 $v \in L_{r,\prec}(u)$，且 $|L_{r,\prec}(u)| \leq b$ ，根据这些假设可知。因此，这类顶点对的数量也至多为 $b|O|$。 □

考虑观察 8 中的情形，并设 A 为 G 的另一个顶点集合。令 $\mathcal{C}_{r,\prec,m,O,A} = \{C_v : v \in A \cup O \cup O'\}$ 为 G 的顶点子集系统，定义如下：

- 对于 $v \in O'$，令 $C_v = R_{r,\prec}(v)$。
- 对于 $v \in O \setminus O'$，令

$$C_v = \bigcup_{x \in L_{r,\prec}(v) \setminus O'} R_{r,\prec}(x).$$

- 对于 $v \in A \setminus (O \cup O')$，令 $C_v = \{v\}$。

引理 9. 设 G 为一个图， A 和 O 为 G 的顶点集合， r 和 m 为非负整数， $\prec$ 为 G 的顶点的一个线性序。令 O' 为所有 $(r, \prec, m, O)$-富顶点的集合。令 H 为 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{r,\prec,m,O,A}$ 的打包图。若 F 是 G 的一个子图，直径至多为 r，且 $V(F) \cap O \neq \emptyset$，则存在 $u \in V(F) \cap (O \cup O')$，使得对每个 $v \in V(F) \cap A \setminus (O \cup O')$，都有 $C_u C_v \in E(H)$。此外，若 $(G, \prec)$ 的弱 r-着色数至多为 b，则 $\mathcal{C}$ 是 $(bm + 1, 2r)$-浅层的。

证明。令 x 为序 $\prec$ 中 $V(F)$ 的最小顶点。由于 F 的直径至多为 r，对每个 $y \in V(F)$，在 F 中都存在一条从 y 到 x、长度至多为 r 的路径；根据 x 的选取，这条路径上的顶点在序 $\prec$ 中都排在 x 之后。因此，$y \in R_{r,\prec}(x)$ 且 $x \in L_{r,\prec}(y)$。

如果 $x \in O'$，令 $u = x$；否则，将 u 选为 $V(F) \cap O$ 的任意一个顶点。在前一种情况下，我们有 $V(F) \subseteq R_{r,\prec}(u) = C_u$。在后一种情况下，我们有 $x \in L_{r,\prec}(u) \setminus O'$，因此 $V(F) \subseteq R_{r,\prec}(x) \subseteq C_u$。因此，对于每个 $v \in V(F) \cap A \setminus (O \cup O')$，都有 $C_u C_v \in E(H)$。

接下来，我们来界定 $\mathcal{C}$ 中集合的直径。对于任意 $z \in V(G)$，以及 R_r 中的每个顶点 w，$\prec(z)$，存在一条长度至多为 r 的路径，从 w 到 z，且其中所有顶点都出现在 z 之后的 $\prec$ 中；注意，这条路径的顶点也属于 $R_{r,\prec}(z)$。因此，$R_{r,\prec}(z)$ 的每个顶点在 $G[R_{r,\prec}(z)]$，中距 z 至多为 r，从而 $G[R_{r,\prec}(z)]$ 的直径至多为 $2r$。对于 $v \in O \cup O'$，我们可以得出，C_v 是直径至多为 $2r$ 的图的顶点集的并集，其中每个图都包含 v，因此 $G[C_v]$ 的半径至多为 $2r$。对于 $v \in A \setminus (O \cup O')$，$G[C_v]$ 的半径为 0。

最后，我们来论证没有顶点属于 $\mathcal{C}$ 中过多的集合。如果顶点 z 属于 C_v，且满足 $v \in O'$，那么 $z \in R_{r,\prec}(v)$，因此 v 是 $L_{r,\prec}(z)$ 中至多 b 个顶点之一。如果 z 属于 C_v，且满足 $v \in O \setminus O'$，那么对于某个 $x \in L_{r,\prec}(v) \setminus O'$，有 $z \in R_{r,\prec}(x)$；$L_{r,\prec}(z)$ 中 x 的选择至多有 b 种，而对于固定的 $x \notin O'$，满足 $x \in L_{r,\prec}(v)$（或等价地，$v \in R_{r,\prec}(x) \cap O$）的顶点 $v \in O$ 少于 m 个。最后，顶点 z 至多属于一个满足 $O \cup O'$的 C_v（$v \in A \setminus$）。因此，z至多属于 C_v 中的 $m-1$个 $+1$顶点 $v \in A \cup O \cup O'$。因此，$\mathcal{C}$ 是 $(bm+1, 2r)$-浅层的。 □

现在我们可以证明主要结果了。

定理 1 的证明。不妨设 $\varepsilon \leq 1$。令 r 为 π的直径。根据定理 3，存在 b，使得对于每个 $G \in \mathcal{G}$，都有 $\mathrm{wcol}_r(G) \leq b$。令 $m = \lceil 3b/\varepsilon \rceil$。令 $\mathcal{G}'$ 为由推论 5 给出的、具有多项式扩张的图类，其中 $\omega = bm+1$ 和 $t = 2r$。令 p 为引理 7 针对该图类 $\mathcal{G}'$给出的多项式。定义 $c = \lceil p(18/\varepsilon) \rceil$。

考虑任意图 $G \in \mathcal{G}$。设 O 是 π-击集，其在 G 中的大小为 $\gamma_\pi(G)$，并设 A 是由 c-局部搜索算法返回的 π-击集。令 O' 为 G 中所有（r，$\prec$，m，O）-富顶点的集合；根据观察 8，我们有$|O'| \leq \frac{b}{m}|O| \leq \frac{\varepsilon}{3}|O|$。令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{r,\prec,m,O,A}$；根据引理 9，$\mathcal{C}$ 是（$bm+1$，$2r$）-浅层的，并且根据推论 5，打包图 $H = G[\mathcal{C}]$ 属于 $\mathcal{G}'$。对于任意 $Y \subseteq V(H)$，令 $\overline{Y} = \{v \in V(G) : C_v \in Y\}$。根据引理 7，存在

一个覆盖 $\mathcal{K}$，其对 H 的超额至多为 $\frac{\varepsilon}{18}|V(H)| \leq \frac{\varepsilon}{18}(|A|+|O|+|O'|)$，使得 $\mathcal{K}$ 的每个元素的大小至多为 $p(18/\varepsilon) \leq c$。

考虑任意 $K \in \mathcal{K}$，并令 $A' = (A \setminus (\overline{K \setminus \partial K})) \cup ((O \cup O') \cap \overline{K})$。我们声称 A' 是一个 π- 击中集。事实上，反设存在 $Z \subseteq V(G)$，使得 (G, Z) 满足性质 π，但 $A' \cap Z = \emptyset$。由于 A 是一个 π-击中集，因此存在 $v \in A \cap Z$；又由于 $v \notin A'$，我们有$v \in (\overline{K \setminus \partial K}) \setminus (O \cup O')$。由于 O 是一个 π-击中集，因此有 $Z \cap O \neq \emptyset$；由引理 9 应用于 $F = G[Z]$，可知存在 $u \in Z \cap (O \cup O')$，使得 $C_u C_v \in E(H)$。由于 $\mathcal{K}$ 是 H 的覆盖，因此存在 $K' \in \mathcal{K}$，使得 $C_u C_v \in E(H[K'])$。由于 $C_v \in K \setminus \partial K$，可得 $K' = K$，从而推出 $C_u \in K$。因此，我们有 $u \in (O \cup O') \cap \overline{K}$，并且 $u \in A' \cap Z$，这就产生了矛盾。

注意到 $A \triangle A' \subseteq \overline{K}$，因此 $|A \triangle A'| \leq c$。于是，c-局部搜索算法考虑了该解 A'，但没有将 A 改进为 A'，这意味着 $|A'| \geq |A|$。我们得出

$$|(O \cup O') \cap \overline{K}| \geq |A \cap (\overline{K \setminus \partial K})|$$

对每个 $K \in \mathcal{K}$均成立。因此，记 $\mathcal{K}$的超额为 s，我们有

$$\begin{aligned}
|A| &\leq \sum_{K \in \mathcal{K}} |A \cap \overline{K}| \leq s + \sum_{K \in \mathcal{K}} |A \cap (\overline{K \setminus \partial K})| \\
&\leq s + \sum_{K \in \mathcal{K}} |(O \cup O') \cap \overline{K}| \leq 2s + \sum_{K \in \mathcal{K}} |(O \cup O') \cap (\overline{K \setminus \partial K})| \\
&\leq 2s + |O| + |O'| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}|A| + (1 + \varepsilon/3)|O|.
\end{aligned}$$

因此，

$$|A| \leq \frac{1 + \varepsilon/3}{1 - \varepsilon/3}|O| \leq (1 + \varepsilon)|O|,$$

如所要求的。 □

装箱版本的证明要简单得多。

定理 2 的证明。不失一般性，假设 $\varepsilon \leq 1$。令 r 为 π的直径。令 $\mathcal{G}'$ 为由推论 5 给出的、满足 $\omega = 2$ 和 $t = r$的具有多项式扩张的图类。令 p 为引理 7 针对该图类 $\mathcal{G}'$给出的多项式。定义 $c = \lceil p(4/\varepsilon) \rceil$。

考虑任意图 $G \in \mathcal{G}$。设 O 是 G 中大小为 $\alpha_\pi(G)$（或 $\alpha'_\pi(G)$）的一个（诱导） π-打包，并设 A是由

c-局部搜索算法返回的（诱导）H-打包。设 $\mathcal{C} = A \cup O$，并注意到 $\mathcal{C}$是 $(2, r)$-浅层的。根据推论 5，打包图 $H = G[\mathcal{C}]$ 属于 $\mathcal{G}'$。根据引理 7，存在一个 H 的覆盖 $\mathcal{K}$，其超额至多为 $\frac{\varepsilon}{4}|V(H)| \leq \frac{\varepsilon}{4}(|A| + |O|) \leq \frac{\varepsilon}{2}|O|$，使得 $\mathcal{K}$ 中的每个元素的大小至多为 $p(4/\varepsilon) \leq c$。

考虑任意一个 $K \in \mathcal{K}$，并令 $A' = (A \setminus K) \cup (O \cap (K \setminus \partial K))$。我们声称 A' 是一个（诱导） π-打包。事实上，由于 A 和 O 都具有这一性质，唯一可能导致该结论不成立的情况是存在 $P \in A \setminus K$和 $P' \in O \cap (K \setminus \partial K)$，使它们相交（在诱导情形下，或包含相邻顶点）。然而，此时 $PP' \in E(H)$，这与$P' \in K \setminus \partial K$ 和 $P \notin K$矛盾。还要注意， $|A'| \leq |A|$，否则c-局部搜索算法会将 $A \setminus K$ 扩展为一个比 A 更大的解（如果$|A'| > |A|$，那么 $K \not\subseteq A$，因此可以通过删除少于 c 个元素，从 A 得到 $A \setminus K$）。

我们得出结论：

$$|A \cap K| \geq |O \cap (K \setminus \partial K)|$$

对于每个 $K \in \mathcal{K}$。因此，记 s 为 $\mathcal{K}$的超额，我们有

$$\begin{aligned} |A| &\geq \sum_{K \in \mathcal{K}} |A \cap (K \setminus \partial K)| \geq -s + \sum_{K \in \mathcal{K}} |A \cap K| \\ &\geq -s + \sum_{K \in \mathcal{K}} |O \cap (K \setminus \partial K)| \geq -2s + \sum_{K \in \mathcal{K}} |O \cap K| \\ &\geq -2s + |O| \geq (1 - \varepsilon)|O|, \end{aligned}$$

如所要求的。

□

致谢

我谨感谢 Abhiruk Lahiri 就这些问题展开讨论 .

参考文献

[1] Dvořák, Z., Král', D., and Thomas, R. 针对稀疏图子类的一阶性质测试。美国计算机协会期刊（JACM）60，5（2013），36。

[2] Dvořák, Z., and Norin, S. 强次线性分隔子与多项式扩张。SIAM 离散数学杂志 30（2016），1095–1101。[3] Har-Peled, S., and Quanrud, K. 关于多项式扩张图和低密度图的近似算法的注记。arXiv 1603.03098（2016）。[4] Har-Peled, S., and Quanrud, K. 多项式扩张图和低密度图的近似算法。SIAM 计算杂志 46，6（2017），1712–1744。[5] Zhu, X. 具有有界广义着色数的图着色。离散数学 309，18（2009），5562–5568。