arXiv:2304.12834v1 [math.FA] 25 Apr 2023

L^2上的紧强 Feller 半群的拟遍历性

Kamil Kaleta 和 René L. Schilling

摘要。我们研究 U_t $t > 0$上的紧强 Feller 半群的拟遍历性，其中 M 是赋予局部有限 Borel 测度 μ的局部紧波兰空间。算子 U_t 是超压缩的并保持正性，但不一定是自伴或正规算子。我们主要关注测度μ 为无限且半群不是本征超压缩的情形。我们将 $L^p(M,\mu)$上的拟遍历性以及拟平稳测度的唯一性，与半群热含量的有限性（当 t取较大值时）及渐进一致基态支配性质联系起来。后一个性质等价于拟遍历性的一种变体，该变体会随着 $t\uparrow\infty$的增加而在空间中逐步传播；传播速率由 $U_t\mathbb{1}_M(x)$的衰减决定。我们讨论了若干应用，并通过实例说明我们的结果。其中包括对一大类对应于带禁闭势的非局部薛定谔算子的半群的拟遍历性进行完整描述。

1. 引言

设 (M,d,μ) 为一个度量测度空间。我们研究的核心问题是：在 Lebesgue 空间$L^p(\mu) = L^p(M,\mu)$ 的尺度上作用的紧算子半群 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 是否具有某种“遍历”测度。更确切地说，我们考察如下形式的表达式

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\sigma(U_tf)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}-m(f)\right|=0\quad\text{where}\quad m(f):=\int f\,dm,\quad \sigma(g):=\int g\,d\sigma, \tag{1.1}$$

并建立关于 $\{U_t: t\geqslant 0\}$ 的条件，使得 (1.1) 中的极限 i) 存在，ii) 对某些测度 σ 和函数 f 的族一致存在，iii) 以某种速率（在时间和空间上）收敛，以及 iv) m 是唯一的拟平稳测度。在许多情况下，该速率可以明确给出，并且其时间速率甚至是指数型的 t。测度 m 有时称为拟遍历 测度，具有非常具体的形式

$$m(E)=\frac{\int_E\psi_0\,d\mu}{\int_M\psi_0\,d\mu}$$

其中 ψ_0 是 $L^2(\mu)$-伴随半群 $\{U_t^*:\ t\geqslant 0\}$ 对应于特征值$e^{-\lambda_0 t}$的特征函数。在薛定谔算子及其半群的背景下， λ_0 是基态特征值，而 ψ_0 是相应的特征函数（对于伴随算子）。如果 $\psi_0\in L^1(\mu)$，则测度 m 是有限测度，并且是半群 $\{U_t: t\geqslant 0\}$ 的拟平稳（或拟不变）测度。

由于我们不假设 $U_t\mathbb{1}_M\equiv\mathbb{1}_M$ ——也就是说，我们不假设守恒性——因此只能期待某种拟遍历行为。这一点反映在（1.1）的结构中：我们用总质量 $\sigma(U_t\mathbb{1}_M)$ 对 $\sigma(U_tf)$ 进行归一化；如果 U_t 是某个以初始分布 σ 开始的非守恒随机过程的转移半群，那么这可以看作是在条件于存活

2020 数学主题分类。主要分类 47D06；次要分类 37A30；47A35；47D08；60G53；60J35。关键词和短语。热含量；基态；渐进内在超收缩性；拟平稳测度；薛定谔算子；紧半群；Feller半群；Feynman-Kac半群；马尔可夫过程；马尔可夫链；Lévy过程；直接步进性质。K. Kaleta 获亚历山大·冯·洪堡基金会（德国）及国家科学中心（波兰）OPUS-18 项目 2019/35/B/ST1/02421 资助。R.L. Schilling 获 DFG-NCN Beethoven Classic 3项目 SCHI419/11-1 和 NCN 2018/31/G/ST1/02252 资助。我们感谢 David Berger（德累斯顿）、Krzysztof Bogdan（弗罗茨瓦夫）、Tomasz Klimsiak（托伦）和 Paweł Sztonyk（弗罗茨瓦夫）就本文主题展开的启发性讨论。

条件下，即 $\sigma(U_t f)/\sigma(U_t \mathbb{1}_M) = \int \mathrm{E}^x [f(X_t) \mid \zeta > t)] \, \sigma(dx)$，$\zeta = \inf\{s > 0 : \text{其中 } X_s \notin M\}$ 表示寿命。

大时间演化现象出现在数学和科学的诸多领域，例如偏微分方程、动力系统、随机过程、统计物理和量子物理中，通常可用算子半群进行建模。这些应用所需的状态空间差异很大，范围从离散空间（格、图等）到流形、分形，当然也包括经典欧几里得空间。为涵盖这些情形，我们采用相当一般的框架：在局部紧波兰空间 N 上，μ 是定义在 Borel 集 $\mathcal{B}(M)$ 上的局部有限 Borel 测度；我们考虑作用于 $L^2(M,\mu)$ 的足够正则的算子半群（但不要求其自伴或正规）。这包括最有趣的情形：M 无界和/或 μ 是无限测度。我们研究具有正性改善性质和超压缩性质、并满足强 Feller 性质的紧积分算子半群——精确表述见第 2 节中的 **(A0)–(A3)** 和 **(A4)**。这一框架适用于文献中通常讨论的许多情形。

我们重点研究薛定谔半群——其势函数为禁闭势，既基于局部算子（二阶微分算子） [16, 15, 58, 57, 56, 42, 43] ，也基于非局部动能项算子（Lévy算子、分数阶和相对论拉普拉斯算子等） [6, 22, 36, 39, 8, 25, 26] ——以及状态空间为一般局部紧波兰空间的马尔可夫过程的 Feynman–Kac半群；这包括分形上的过程 [19, 37] ，以及图和离散空间上的马尔可夫链 [4, 14, 46, 47]。第 7 节讨论了一些具体情形和各种例子。还有许多符合我们框架的其他例子，但本文不作详细讨论，例如由非齐次二阶微分算子（生成扩散过程）和具有禁闭系数的非局部 Lévy型算子（生成跳跃Lévy型过程） [1, 45, 44, 64, 55] 所生成的演化半群，或离开无界域即被杀死的马尔可夫过程 [3, 38, 8, 9]。

我们只知道少数几篇沿着类似方向开展研究的论文，即 Takeda [62], Knobloch & Partzsch [31] 以及 Zhang, Li & Song [65]。Takeda 采用狄利克雷形式方法，其过程和半群是对称的，主要目标是证明拟不变测度的存在性与唯一性。关键的技术假设是半群的预解式（核）满足紧性条件；从本质上说，这是一种弱于 IUC（内在超压缩性）的紧性条件。Knobloch & Partzsch 以及 Zhang 等人的工作在某种意义上代表了两个极端：Knobloch & Partzsch 力求在基本设定中实现高度的一般性，从一般的马尔可夫核出发，并假设他们所谓的“紧支配”条件。最终，他们证明了内在超压缩性（IUC）以指数型速率推出一致拟遍历性。需要指出的是，目前已知满足紧支配性质的例子只有 IUC 核和半群。另一方面，Zhang, Li & Song 研究马尔可夫过程；它们在拓扑上相当一般，但假设底层测度是有限的。

从应用的角度来看，IUC 以及底层测度的有限性都是相当严格的条件；对于具有禁闭势的薛定谔半群，IUC 要求势函数在无穷远处增长得非常快，见 [16, 2, 25, 10]。对于非自伴算子，Kim & Song 首先对 IUC 进行了研究 [29, 30]。

最近，我们在 [26] 中引入了渐进内在超收缩性这一概念，以便为非 IUC 或不一定具有 IUC 的半群获得精确的双侧热核估计；另见下文的定义 4.2 和注记 4.3。事实证明，正是这一概念帮助我们避免了 IUC 以及底层基础测度的有限性。因此，我们能够刻画相当一般的一类紧半群及其底层状态空间的拟遍历正则性，其中包括拟平稳测度存在性和唯一性的必要条件与充分条件。

我们简要总结一下本文的主要贡献。回顾一下，热含量定义为 $Z(t) = \|U_t \mathbb{1}_M\|_{L^1(\mu)} = \|U_t^* \mathbb{1}_M\|_{L^1(\mu)}$。

有限热含量与指数拟遍历性。 我们首先针对半群 $\{U_t : t \geqslant 0\}$ 给出一个相当一般但易于验证的充分条件，使得其中的收敛

(1.1) 关于时间是一致指数型的，对 $f \in L^p$、$\|f\|_p \leqslant 1$ 一致，适用于任意固定的 $p \in [1, \infty]$，并且对任意有限测度 σ 都成立。事实上（参见定理 3.4），如果对于某个 $t_1 > 0$ 半群的热含量是有限的，那么 ψ_0 可积，测度 m 是该半群唯一的拟平稳测度，并且 (1.1) 中出现的第一项由 $c_1 e^{-c_2 t} \sigma(U_{t_1} \mathbb{1}_M)/\sigma(\phi_0)\ \|f\|_p$ 控制——这里 $t \gg 1$ 很大，常数 c_1、$c_2 > 0$ 不依赖于 σ 或 $f \in L^p$，而 ϕ_0 是 $\{U_t$ 的基态：$t \geqslant 0\}$。类似的推理也适用于伴随半群 $\{U_t^*\colon t \geqslant 0\}$。取 $\sigma(dy) = \delta_x(dy)$ 为集中于 $x \in M$ 的狄拉克 δ 测度，我们便得到逐点收敛，并且具有在紧集上一致的显式空间速率，参见推论 3.5。我们将在第 7.1 节看到，对于一大类带有势函数$V(x)$ 的 Feynman–Kac 半群，如果函数 $\exp(-t_1 V(x))$ 在“无穷远处”可积，则热含量 $Z(t_1)$ 是有限的；这一条件通常也是必要条件。这意味着热含量的有限性与底层马尔可夫过程无关。由于我们的证明仅依赖于 Feynman–Kac 公式，参见 Demuth 和 van Casteren [17], ，因此它也适用于非常一般的薛定谔算子的演化半群 $H = -L + V$——在这种情况下，热含量的有限性完全由势函数 V 在无穷远处的行为决定，并且与动能项无关，即与自由 Feller 算子 L 无关。

根据定义，当 $U_t \mathbb{1}_M$ 可积时，热含量是有限的。后者由半群的渐近基态支配（aGSD）保证（即，对于某个 $t > 0$，有 $U_t \mathbb{1}_M \leqslant c e^{-t\lambda_0} \phi_0$），同时还需要基态 ϕ_0 的可积性。在 [26] 中，我们定义了渐进基态支配（pGSD）的概念，该概念只要求对于某个递增的紧集族 $K_t \uparrow M$，有 $\mathbb{1}_{K_t} U_t \mathbb{1}_M \leqslant c e^{-t\lambda_0} \phi_0$。在 [26] 中，pGSD 被作为薛定谔半群满足精确的双侧热核估计的必要条件而得到；现在我们将看到，pGSD 与拟遍历性密切相关。

aGSD/pGSD 与拟遍历性的等价性。如果对于某个紧集族 $K_t \uparrow M$，pGSD 成立，则可以证明，(1.1) 被某个速率 $\kappa(t)$ 支配，而该速率本质上由 $U_t \mathbb{1}_M(x)$ 和 $U_t^* \mathbb{1}_M(x)$ 在 $x \notin K_{bt}$（对于某个固定的 $b \in (0, 1/2)$）时的衰减给出。事实上，对于所有 $f \in L^p(\mu)$、$\|f\|_p \leqslant 1$ 以及所有支集包含于 K_{at} 中的测度 σ，界 $\kappa(t)$ 都是一致的（其中 $a \in (0, 1)$ 满足 $a + 2b = 1$），见定理 5.2。再次专门考虑 $\sigma = \delta_x$ 且满足 $x \in K_{at}$ 的情形，根据定理 5.4，我们看到，pGSD 等价于 (1.1) 收敛到零（对于 $x \in K_t$ 局部一致地）当 $t \to \infty$ 时的性质。后一个性质最好描述为“渐进一致拟遍历性”。作为推论，见定理 5.5，我们还看到，拟遍历测度必然由 m（分别为 m^*）给出，因此它是唯一的。

在第 4 节中，我们看到，热含量的有限性总是蕴含 pGSD，但无法对紧集族 $K_t \uparrow M$ 的增长进行良好控制。在这方面，比较定理 3.4 与定理 5.2 和 5.4 是很有意义的。定理 3.4 给出了指数型（关于时间的）拟遍历性的一个易于检验的充分条件（即：有限热含量），但我们可能无法控制空间行为。定理 5.2 和 5.4 给出了某种更强性质的一个充要条件（即：pGSD）；该性质在空间上是渐进一致的，并且具有依赖于半群的时间速率。第 7.3 节中的例子说明，热含量的有限性要求对生成元作出更强的假设——例如，对于薛定谔半群或 Feynman–Kac 半群，需要势函数 V 在无穷远处至少按对数速率增长。

假设热含量有限，我们的方法还可以得出紧半群及热含量在 $t \to \infty$ 时的渐近性结果，参见第 6 节。例如，可以看出，当 $t \to \infty$ 时，$Z(t)$ 与 $e^{-\lambda_0 t} \|\phi_0\|_1 \|\psi_0\|_1 / \mu(\psi_0 \phi_0)$ 指数型接近，参见推论 6.2。

最后一节（第 7 节）包含若干示例，说明了前几节结果的适用性及其局限性。第 7.1 节中的示例与定理 3.4 和推论 3.5 有关，而另外两节（第 7.2 节和第 7.3 节）中的示例主要说明定理 5.2 和 5.4 中的 pGSD 性质。事实上，第 7.3 节对一大类具有禁闭势的非局部薛定谔算子所对应的薛定谔半群的拟遍历正则性进行了完整刻画，给出了必要且充分条件；这可以视为我们近期工作的直接延续 [26]。

记号。 我们使用的大多数记号都是标准的或不言自明的。我们以非严格意义使用“正”，例如，若 $f \geqslant 0$ μ-几乎处处成立，则称函数 $f \in L^2(M,\mu)$ 为正；若 $f > 0$ μ-几乎处处成立，则称 f 为“严格正”。我们经常使用简写 $m(f)$ 表示$\int f\,dm$。我们用 $a \wedge b$ 和 $a \vee b$ 分别表示 $\min(a,b)$ 和 $\max(a,b)$；若对于所有 x（在给定范围内），存在某个固定常数 $c \in (0,\infty)$ 使得 $c^{-1}f(x) \leqslant g(x) \leqslant cg(x)$，则记为 $f \asymp g$。最后，若强连续压缩半群 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ 将无穷远处消失的连续函数 $C_\infty(M)$ 映入其自身，则称其为 ***Feller*半群**；若其将有界Borel可测函数 $B_b(M)$（或有时将集合$L^\infty(M)$）映入有界连续函数 $C_b(M)$，则称其为强***Feller*半群**。

2. 设置与基本假设

拓扑预备知识。 为方便读者，我们结合参考文献概述一些拓扑预备知识。我们将在一个波兰空间 M中工作，即一个完全可度量化拓扑空间，其中度量定义了该拓扑，且该拓扑具有可数基（第二可数）。作为度量空间， M 也是第一可数的（每个点都有一个可数邻域基），并且它是可分的，即包含一个可数稠密子集，参见 [18, 推论 1.3.8、定理 4.1.15]。如果每个 $x \in M$ 都有一个相对紧开邻域 $U(x)$，我们就称 M **局部紧**。如果一个波兰空间是局部紧的，那么它是 σ-紧的（或称无穷远处可数），即存在一个紧集 K_n 的递增序列，使得$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = M$，参见 [18, 定理 4.1.15.iii)]。在度量空间中，紧集是闭集，而σ-紧性允许我们将任意闭集写成紧集的可数并。因此，局部紧波兰空间的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(M)$由紧集生成。Borel测度 μ 是定义在 Borel集 $\mathcal{B}(M)$上的正测度。如果每个点 $x \in M$ 都有一个具有有限测度的开邻域，则称其为局部有限。这意味着 μ 在紧集上是有限的。因此，局部紧波兰空间上的局部有限测度是 σ-有限的。

设定与假设。在全文中，我们假设 M 是一个局部紧波兰空间， μ 是一个具有满拓扑支撑的正局部有限 Borel 测度。我们不假设空间 M 是紧的，也不假设测度 μ 是有限的。在 $L^2(M,\mu)$ 上，我们考虑一个有界线性算子的强连续半群 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ 及其伴随半群 $\{U_t^*\colon t \geqslant 0\}$，其定义为

$$\int U_t f(x)\cdot \overline{g(x)}\,\mu(dx) = \int f(x)\cdot \overline{U_t^* g(x)}\,\mu(dx), \quad f,g \in L^2(M,\mu),\ t>0.$$

此外，我们假设 U_t 和 U_t^* 是积分算子，它们由实值可测核 $u_t(x,y)$ 给出：

$$U_t f(x) = \int u_t(x,y) f(y)\,\mu(dy), \qquad U_t^* g(y) = \int u_t(x,y) g(x)\,\mu(dx), \quad t>0. \tag{2.1}$$

此外，我们采用以下假设：

假设。

(**A0**) 线性算子 $U_t\colon L^2(M,\mu) \to L^2(M,\mu)$、 $t>0$ 均为紧算子；对于某些

(**A1**) $t_0 > 0$，算子 U_{t_0} 具有正性改善性质：对于每个正的 $f \in L^2(M,\mu)$，$f \not\equiv 0$，都有 $U_{t_0} f(x) > 0$ 对 μ-几乎处处的 $x \in M$ 成立。半群 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon t \geqslant 0\}$ 具有强 Feller 性质：对于每个 $t>0$ 和 $f \in L^\infty(M,\mu)$，都有 $U_t f$、$U_t^* f \in C_b(M)$；对于某些 $t_0 > 0$，算子 U_{t_0}、$U_{t_0}^*\colon L^2(M,\mu) \to L^\infty(M,\mu)$ 有界，即为超压缩：

(**A2**)

(**A3**)

$$\int u_{t_0}^2(\cdot,y)\,\mu(dy) \in L^\infty(M,\mu) \quad \text{and} \quad \int u_{t_0}^2(x,\cdot)\,\mu(dx) \in L^\infty(M,\mu).$$

我们的第4节和第5节结果在考虑非紧空间 M 时，需要一个进一步的强衰减 条件。

(**A4**) 存在某个 $t_0 > 0$，使得对于每个 $t \geqslant t_0$ 和 $\epsilon > 0$，都存在一个紧集 $K \subset M$，满足

$$U_t \mathbb{1}_M(x) \leqslant \epsilon \quad \text{or} \quad U_t^* \mathbb{1}_M(x) \leqslant \epsilon, \quad \text{for every} \quad x \in M \setminus K.$$

我们来讨论假设（**A0**）–（**A4**）及其相互关系。

注 2.1.（**A0**）等价于假设伴随算子 U_t^* 在 $(L^2(M,\mu))^* = L^2(M,\mu)$ 上是紧的。

（**A1**）等价于假设对于某个 $t_0 > 0$，$U_{t_0}^*$ 是正性改善的。此外，U_{t_0} 和 $U_{t_0}^*$ 是正性改善的，当且仅当积分核 $u_{t_0}(x,y)$ 对于 $\mu \otimes \mu$ 几乎所有的 (x,y) 都严格为正。

（**A2**）等价于条件：$U_t \mathbb{1}_M(x)$ 和 $U_t^* \mathbb{1}_M(x)$ 是关于 x 的有界连续函数。这些函数将在我们的研究中发挥核心作用。

(A3) 意味着，由于空间 $L^2(M,\mu)$ 的自反性，（二重对偶在 $L^1(M,\mu) \subset \big(L^\infty(M,\mu)\big)^*$ 上的限制）算子 U_{t_0} 和 $U_{t_0}^*$ 是从 $L^1(M,\mu)$ 到 $L^2(M,\mu)$ 的有界算子。由于半群性质，算子 U_{2t_0} 和 $U_{2t_0}^*$ 是从 $L^1(M,\mu)$ 到 $L^\infty(M,\mu)$ 的有界算子；这等价于说

$$u_{2t_0}(\cdot,\cdot) \in L^\infty(M \times M, \mu \otimes \mu). \tag{2.2}$$

利用半群性质，这些有界性结论可推广到所有的 $t \geqslant t_0$，分别为 $t \geqslant 2t_0$。反之，如果存在某个 $t_0 > 0$ 使得（2.2）成立，那么条件（**A3**）也得到满足。

设 $t > 2t_0$。由（A2）我们知道，U_t 和 U_t^* 是从 $L^\infty(M,\mu) \to L^\infty(M,\mu)$ 出发的连续算子，而（A3）意味着 U_t 和 U_t^* 是从 $L^2(M,\mu) \to L^\infty(M,\mu)$ 出发的连续算子；根据对偶性，我们看到 U_t 和 U_t^* 将 $L^1(M,\mu)$ 连续映射到 $L^2(M,\mu)$ 中，再次利用（A3）和半群性质，我们得出 U_t 和 U_t^* 是从 $L^1(M,\mu)$ 到 $L^\infty(M,\mu)$ 的连续算子。因此，标准的插值论证表明，对于任意 $p \in (1,\infty)$，U_t 和 U_t^* 都是连续的 $L^p(M,\mu) \to L^\infty(M,\mu)$，并且根据（A2），我们还有

$$U_t\big(L^p(M,\mu)\big), U_t\big(L^p(M,\mu)\big) \subseteq C_b(M), \quad t > 2t_0,\ p \in [1,\infty]. \tag{2.3}$$

令 A 和 A^* 分别表示半群 $\{U_t\colon\ t \in T\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t \geqslant 0\}$ 的生成元。Jentzsch 定理的一个版本，见 [50, 定理 V.6。6]，，表明 $\lambda_0 := \inf \operatorname{Re}\big(\operatorname{Spec}(-A)\big) = \inf \operatorname{Re}\big(\operatorname{Spec}(-A^*)\big)$ 是 $-A$ 和 $-A^*$ 的一个共同孤立且简单的特征值。此外，相应的归一化特征函数 ϕ_0、$\psi_0 \in L^2$（M、μ）可以假设为严格正的。特别地，

$$U_t\phi_0 = e^{-\lambda_0 t}\phi_0 \quad \text{and} \quad U_t^*\psi_0 = e^{-\lambda_0 t}\psi_0, \quad t > 0. \tag{2.4}$$

数 λ_0 被称为基态特征值，函数 ϕ_0、ψ_0 分别是 $-A$ 和 $-A^*$ 的基态。

由 (2.3) 可知 ϕ_0、$\psi_0 \in C_b(M)$，并且 (2.4) 中的两个特征方程在逐点意义下也成立。我们将经常使用下面这个常数

$$\Lambda := \int \phi_0(x)\psi_0(x)\,\mu(dx)$$

并令

$$\mathcal{N} := \{x \in M : \phi_0(x) = 0\} \cup \{x \in M : \psi_0(x) = 0\}. \tag{2.5}$$

如上所述，$\mu(\mathcal{N}) = 0$。由于 ϕ_0 和 ψ_0 的连续性，集合 $\mathcal{N}$ 是闭集。若对于某个 $t > 0$，核 $u_t(x,y)$是逐点定义的（例如，映射$(x,y) \mapsto u_t(x,y)$连续），且对所有 $x, y \in M$都严格为正，则 $\mathcal{N} = \emptyset$。我们主要关注来自随机过程理论的例子，而对于这些例子，$\mathcal{N} = \emptyset$总是成立。由于最初的问题源自 L^2理论，我们不想先验地假设$a\ priori$ $\mathcal{N} = \emptyset$。

以下结果是对 Zhang, Li & Song [65,引理 2.1]的直接改编，是 Kim & Song [28, 定理 2.7]最初针对内在半群得到的估计的一种变体。这一方向上最早的结果归功于 Pinsky [48,定理 3]，适用于 $\mathbb{R}^d$上的有界区域中的扩散半群。Zhang等人的结果适用于相当一般的非对称半群。这些作者使用了标准马尔可夫过程的次马尔可夫半群，其核为严格正的希尔伯特-施密特型，并满足（**A3**）。仔细考察他们的证明可以发现，只需要算子 U_t和 U_t^* 的紧性；而且该结果在更一般的情形下仍成立，这种情形由我们当前的条件（**A0**）–（**A3**）描述。注意，Zhang等人使用了 $t_0 = 1$，且他们的证明需要 $t/2 > 1 = t_0$。

引理 2.2 （[65, 引理 2.1]）。 如果 （**A0**）–（**A3**） 对某个 $t_0 > 0$成立，那么存在 C， $\gamma > 0$使得

$$\left| e^{\lambda_0 t} u_t(x,y) - (1/\Lambda)\phi_0(x)\psi_0(y) \right| \leqslant Ce^{-\gamma t}, \quad t > 2t_0, \quad \text{for } \mu\otimes\mu \text{ a.a. } x,y \in M. \tag{2.6}$$

这一估计给出了紧半群的收敛速率（当 $t \to \infty$ 时），可视为 Chavel & Karp [7], 经典结果的一个变体，另见 [59, 27]。

除非另有说明，我们在 （A1）、（A3） 和 （A4）中均取相同的 $t_0 > 0$ 。

现在我们简要讨论（**A4**）与（**A0**）之间的关系。

引理 2.3。 设对于某个 $t_0 > 0$， （**A2**） 、（**A3**）和 （**A4**） 成立。那么，对于所有 $t \geqslant t_0$，算子 U_t，U_t^*: L^2（M， μ） $\to L^2$（M， μ） 都是紧的。特别地，如果对每个$t_0 > 0$， （**A0**） 和 （**A4**） 均成立，则 （**A0**） 成立。

证明。 我们只考虑算子 U_t。对于 U_t^*的证明类似。对于紧集 $K \subset M$，我们定义：

$$U_t^K f(x) := \mathbb{1}_K(x) U_t f(x) = \int_M \mathbb{1}_K(x) u_t(x,y) f(y)\,\mu(dy), \quad f \in L^2(M,\mu),\ t > 0,$$

即，U_t^K是 核为 $u_t^K(x,y) = \mathbb{1}_K(x)u_t(x,y)$ 的积分算子。注意，根据（**A3** ），

$$\begin{aligned}\int_M \int_M u_t^K(x,y)^2\,\mu(dy)\,\mu(dx) &= \int_K \int_M u_t(x,y)^2\,\mu(dy)\,\mu(dx)\\ &\leqslant \mu(K)\cdot \operatorname{ess\,sup}_{x\in M} \int_M u_t(x,y)^2\,\mu(dy) < \infty, \quad t \geqslant t_0,\end{aligned}$$

这意味着 U_t^K、 $t \geqslant t_0$ 是希尔伯特–施密特算子。此外，对于 $f \in L^2(M,\mu)$，由柯西–施瓦茨不等式和托内利定理，

$$\begin{aligned}\int_M \left| U_t f(x) - U_t^K f(x) \right|^2 \mu(dx) &= \int_{M\setminus K} |U_t f(x)|^2\ \mu(dx)\\ &\leqslant \int_{M\setminus K} U_t \mathbb{1}_M(x) \int_M u_t(x,y) |f(y)|^2\,\mu(dy)\,\mu(dx)\\ &\leqslant \sup_{x\in M\setminus K} U_t\mathbb{1}_M(x)\, \|U_t^*\mathbb{1}_M\|_\infty\, \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

假设（**A2**）和（**A4**）表明，对于每个 $t > t_0$ 和 $\epsilon > 0$，我们都可以找到一个紧集 K，使得

$$\left\| U_t f - U_t^K f \right\|_2 \leqslant \epsilon \|f\|_2.$$

令 $\epsilon \to 0$，我们看到每个算子 U_t、 $t \geqslant t_0$ 都是紧算子的强极限，因此是紧算子。证明完毕。□

如果算子 U_t、 $t > 0$ 是自伴的，那么对某个 $t > 0$ 的紧性意味着对每个 $t > 0$ 都具有紧性——这是谱定理的结论。在这种情况下，即使 **(A3)**、**(A4)** 仅对某个 $t_0 > 0$ 成立，**(A4)** 也意味着 **(A0)**。对于非自伴算子，这一点并不明确。因此，在第4节和第5节中，我们必须同时假设 **(A0)** 和 **(A4)**。

在无界空间中，**(A0)** 和 **(A4)**（对所有 $t_0 > 0$ 成立）通常是等价的，参见例如 [38, 引理 1] 和 [23, 引理 9]。关于各种情形下紧性的若干一般充分条件，包括马尔可夫、薛定谔和 Feynman–Kac 半群，以及更一般的扰动，可参见 [63, 61, 40]。

3. 紧半群的热含量与指数拟遍历性

若 $\phi_0, \psi_0 \in L^1(M,\mu)$，[1] 则我们可以在 $(M, \mathcal{B}(M))$ 上定义概率测度，定义为

$$m(E) = \frac{\int_E \psi_0(x)\,\mu(dx)}{\int_M \psi_0(x)\,\mu(dx)} \quad \text{and} \quad m^*(E) = \frac{\int_E \phi_0(x)\,\mu(dx)}{\int_M \phi_0(x)\,\mu(dx)}. \tag{3.1}$$

不难验证，测度 m 和 m^* 是半群 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon t \geqslant 0\}$的拟平稳 (概率)测度。

定义 3.1 (关于 L^∞ 上的拟平稳测度)。令 **(A2)** 成立。在 $(M, \mathcal{B}(M))$ 上的概率测度 $\bar{m}$，如果对于所有 $t > 0$ 和 $f \in L^\infty(M,\mu)$，都有 $\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M) > 0$ 以及，则称其为半群 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ (在 $L^\infty(M,\mu)$ 上)的拟平稳测度。

$$\frac{\bar{m}(U_t f)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)} = \bar{m}(f). \tag{3.2}$$

由于 (2.3)——这是由 **(A2)**、**(A3)** 得出的——我们可以将准平稳性的定义扩展到任意 $p \in [1,\infty)$ 的 $L^p(M,\mu)$，至少对足够大的 t 如此。

引理 3.2. 假设对 $t_0 > 0$ 有 **(A2)**–**(A3)**，且 $p \in [1,\infty)$。设 $\bar{m}$ 是 $(M, \mathcal{B}(M))$ 上的概率测度，并设 $t > 2t_0$ 满足 $\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M) > 0$。那么

$$\forall_{g \in L^p(M,\mu)} \quad \frac{\bar{m}(U_t g)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)} = \bar{m}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{f \in L^\infty(M,\mu)} \quad \frac{\bar{m}(U_t f)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)} = \bar{m}(f).$$

证明。固定 $p \in [1,\infty)$ 和 $t > 2t_0$。只需证明两个蕴含对非负函数都成立。

'$\Leftarrow$' 设 $0 \leqslant g \in L^p(M,\mu)$，且 $f_n := g \wedge n \in L^\infty(M,\mu)$，$n \in \mathbb{N}$。我们有 $f_n \uparrow g$，因为 $n \to \infty$，$\frac{\bar{m}(U_t f_n)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)} = \bar{m}(f_n)$，$n \in \mathbb{N}$；由单调收敛定理可得所需蕴含。

'$\Rightarrow$' 令 $0 \leqslant f \in L^\infty(M,\mu)$，并设 $g_n := \mathbb{1}_{K_n} f \in L^p(M,\mu)$，$n \in \mathbb{N}$，其中 (K_n) 是一个递增的紧集序列，满足 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = M$，参见第 2 节开头关于拓扑预备知识的讨论。我们有 $g_n \uparrow f$ as $n \to \infty$，$\frac{\bar{m}(U_t g_n)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)} = \bar{m}(g_n), n \in \mathbb{N}$，并再次使用单调收敛。□

若 **(A3)** 对任意 $t_0 > 0$ 都成立，那么讨论在L^p上的拟平稳性也有意义
, $p < \infty$, 对所有 $t > 0$ 特别地 , 引理 3 中的蕴含关系 .2 对每个 $t > 0$ 都成立
我们回到式 (3.1) 中定义的测度 m, m^*。这里，条件 (3.2) 表示为

$$m(U_t f) = e^{-\lambda_0 t} m(f) \quad \text{and} \quad m^*(U_t^* f) = e^{-\lambda_0 t} m^*(f), \quad t > 0,\ f \in L^\infty(M,\mu). \tag{3.3}$$

由于我们假设 $\phi_0, \psi_0 \in L^\infty(M,\mu)$，因此 (3.3) 对 $f \in L^p(M,\mu)$，$p \in [1,\infty]$ 仍然成立。无需借助引理 3.2 即可轻松看出这一点。事实上，这由 Hölder不等式以及以下事实可得：对于任意 $q \in [1,\infty]$，$\phi_0, \psi_0 \in L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu) \subset L^q(M,\mu)$。

我们在第 3 节和第 5 节中的论证基于以下观察，而这一观察是引理 2.2 中估计的直接推论。

引理 3.3。令**(A0)**–**(A3)** 对某个 $t_0 > 0$ 成立，并用 C, γ 表示引理 *2.2* 中出现的常数。对于每个 $0 \leqslant s, r < t$ 满足 $t - s - r > 2t_0$

$$\left| e^{\lambda_0 t} u_t(x,y) - (1/\Lambda)\phi_0(x)\psi_0(y) \right| \leqslant C\kappa(t,s,r,x,y), \quad \mu\text{-a.e. } x, y \in M, \tag{3.4}$$

[1] 一般而言，$\phi_0, \psi_0 \in L^1(M,\mu)$ 未必成立，因为 μ 可能是无限测度。

对该函数成立

$$\kappa(t,s,r,x,y)=\begin{cases}e^{-\gamma t} & \text{if } s=r=0;\\ e^{-\gamma(t-s)}e^{\lambda_0 s}U_s\mathbb{1}_M(x) & \text{if } s>0, r=0;\\ e^{-\gamma(t-r)}e^{\lambda_0 r}U_r^*\mathbb{1}_M(y) & \text{if } s=0, r>0;\\ e^{-\gamma(t-s-r)}e^{\lambda_0 s}U_s\mathbb{1}_M(x)e^{\lambda_0 r}U_r^*\mathbb{1}_M(y) & \text{if } s>0, r>0.\end{cases}$$

证明。若 $s=r=0$，这正是引理 2.2 中的估计。我们只讨论 s、$r>0$ 的情形。其余两种情形可用非常相似的论证得到。利用特征方程

$$\phi_0(x)=e^{\lambda_0 s}\int_M u_s(x,z)\phi_0(z)\,\mu(dz)\quad\text{and}\quad\psi_0(y)=e^{\lambda_0 r}\int_M u_r(w,y)\psi_0(w)\,\mu(dw),$$

以及查普曼-科尔莫戈罗夫恒等式，我们得到

$$\begin{aligned}&e^{\lambda_0 t}u_t(x,y)-(1/\Lambda)\phi_0(x)\psi_0(y)\\ &=e^{\lambda_0 s}\int_M u_s(x,z)\left[e^{\lambda_0(t-s)}u_{t-s}(z,y)-(1/\Lambda)\phi_0(z)\psi_0(y)\right]\mu(dz)\\ &=e^{\lambda_0 s}\int_M u_s(x,z)\left[e^{\lambda_0 r}\int_M\left[e^{\lambda_0(t-s-r)}u_{t-s-r}(z,w)-(1/\Lambda)\phi_0(z)\psi_0(w)\right]u_r(w,y)\,\mu(dw)\right]\mu(dz).\end{aligned}$$

根据引理 2.2，我们有

$$\left|e^{\lambda_0(t-s-r)}u_{t-s-r}(z,w)-(1/\Lambda)\phi_0(z)\psi_0(w)\right|\leqslant Ce^{-\gamma(t-s-r)},$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\left|e^{\lambda_0 t}u_t(x,y)-(1/\Lambda)\phi_0(x)\psi_0(y)\right|\\ &\qquad\leqslant Ce^{-\gamma(t-s-r)}\left(e^{\lambda_0 s}\int_M u_s(x,z)\,\mu(dz)\right)\left(e^{\lambda_0 r}\int_M u_r(w,y)\,\mu(dw)\right).\end{aligned}$$

这就是所声称的界。 □

下面的定理是本节的第一个主要结果。它将半群 $\{U_t\colon t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon t\geqslant 0\}$ 的指数型拟遍历性与其热含量的有限性联系起来。它还表明，相应的拟平稳概率分布是唯一的。回顾

$$Z(t):=\int U_t\mathbb{1}_M(x)\,\mu(dx)=\int U_t^*\mathbb{1}_M(y)\,\mu(dy)=\iint u_t(x,y)\,\mu(dx)\,\mu(dy),\quad t>0,$$

是 $\{U_t\colon t\geqslant 0\}$ 或 $\{U_t^*\colon t\geqslant 0\}$的热含量。一般而言，$Z(t)\in(0,\infty]$。对于每个 $t>0$，条件 $Z(t)<\infty$ 等价于算子 $U_t, U_t^*\colon L^\infty(M,\mu)\to L^1(M,\mu)$的有界性。

除非另有说明，在所有后续陈述以及假设(A1)、(A3) 和(A4)中，我们均使用引理 3.3中的值 $t_0>0$，并且$\mathcal{N}$ 表示(2.5)中定义的例外集。

定理 3.4。设 M 是一个局部紧波兰空间，并假设(**A0**)–(**A3**) 成立。如果存在某个 $t_1\geqslant t_0$ 使得热含量有限，即

$$Z(t_1)<\infty,$$

那么我们有以下结论：

a) ϕ_0，$\psi_0\in L^1(M,\ \mu)$ 且 (3.1) 中的测度 m 和 m^* 均定义良好。

b) 对于每个 $p \in [1,\infty]$，存在 $C>0$，使得对于任意在 M 上的有限测度 σ，满足支集$\sigma \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$，我们对所有 $t > 6t_1$和 $t_1 \leqslant s \leqslant t/2$都有

$$\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}} \left| \frac{\sigma(U_t f)}{\sigma(U_t \mathbb{1}_M)} - m(f) \right| \leqslant C\, e^{-\gamma(t-s)}\, \frac{e^{\lambda_0 s}\sigma(U_s \mathbb{1}_M)}{\sigma(\phi_0)},$$

and

$$\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}} \left| \frac{\sigma(U_t^* f)}{\sigma(U_t^* \mathbb{1}_M)} - m^*(f) \right| \leqslant C\, e^{-\gamma(t-s)}\, \frac{e^{\lambda_0 s}\sigma(U_s^* \mathbb{1}_M)}{\sigma(\psi_0)}.$$

c) 测度 m 和 m^* 分别是 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 的唯一拟平稳概率测度，使得 $m(M \setminus \mathcal{N}) \cdot m^*(M \setminus \mathcal{N}) > 0$。

证明。回忆 $U_t \mathbb{1}_M$、$U_t^* \mathbb{1}_M \in L^1(M、\mu)$，$t \geqslant t_1$。因此，a) 由不等式 $e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x) \leqslant \|\phi_0\|_\infty U_t \mathbb{1}_M(x)$ 和 $e^{-\lambda_0 t}\psi_0(x) \leqslant \|\psi_0\|_\infty U_t^* \mathbb{1}_M(x)$，$x \in M$、$t>0$ 得出。

我们仅对半群 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 证明 b)。对于 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 的证明完全相同。设 $p\in[1,\infty]$，并设 σ 是 M 上的有限测度，使得 supp $\sigma \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$。注意到 $0<\sigma(\phi_0) \leqslant e^{\lambda_0 t}\|\phi_0\|_\infty \sigma(U_t \mathbb{1}_M)$ 以及 $0<\sigma(\psi_0) \leqslant e^{\lambda_0 t}\|\psi_0\|_\infty \sigma(U_t^* \mathbb{1}_M)$，$t>0$。对于每个 $f \in L^p(M、\mu)$ 和 $t > 6t_1$（特别是 $t - t_1 - s > 2t_0$），我们可以写成

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(U_t f)}{\sigma(U_t \mathbb{1}_M)} - m(f) &= \frac{e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t f) - m(f) e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M)}{e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M)} \\
&= \frac{e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t f) - (1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)}{e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M)} \\
&\quad + m(f)\,\frac{(1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M \psi_0(y)\,\mu(dy) - e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M)}{e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M)}.
\end{aligned}$$

由于对所有 $x \in M$,

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_0 t} U_t f(x) - (1/\Lambda)\,\phi_0(x)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy) \\
&\quad = \int_M f(y)\left(e^{\lambda_0 t} u_t(x,y) - (1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(y)\right)\mu(dy),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_0 t} U_t \mathbb{1}_M(x) - (1/\Lambda)\,\phi_0(x)\int_M \psi_0(y)\,\mu(dy) \\
&\quad = \int_M \left(e^{\lambda_0 t} u_t(x,y) - (1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(y)\right)\mu(dy),
\end{aligned}$$

我们可以应用引理 3.3（其中 $t_1 \leqslant s \leqslant t/2$ 和 $r = t_1$），并对 σ 积分，得到

$$\begin{aligned}
&\left| e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t f) - (1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy) \right| \\
&\quad \leqslant C e^{-\gamma(t-t_1-s)} e^{\lambda_0(t_1+s)}\sigma(U_s \mathbb{1}_M)\int_M |f(y)| U_{t_1}^* \mathbb{1}_M(y)\,\mu(dy),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left| e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M) - (1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M \psi_0(y)\,\mu(dy) \right| \\
&\quad \leqslant C e^{-\gamma(t-t_1-s)} e^{\lambda_0(t_1+s)}\sigma(U_s \mathbb{1}_M) Z(t_1).
\end{aligned}$$

注意,

$$e^{-\lambda_0 t}\sigma(\phi_0) = \sigma(U_t\phi_0) \leqslant \|\phi_0\|_\infty \sigma(U_t \mathbb{1}_M) \implies e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t \mathbb{1}_M) \geqslant \frac{\sigma(\phi_0)}{\|\phi_0\|_\infty}. \tag{3.5}$$

由此可得

$$\left|\frac{\sigma(U_tf)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}-m(f)\right|\leqslant \widetilde{C}e^{-\gamma(t-s)}\left(\int_M |f(y)|U_{t_1}^*\mathbb{1}_M(y)\,\mu(dy)+m(|f|)Z(t_1)\right)\frac{e^{\lambda_0 s}\sigma(U_s\mathbb{1}_M)}{\sigma(\phi_0)},$$

其中 $\widetilde{C}:=Ce^{(\lambda_0+\eta)t_1}\left\|\phi_0\right\|_\infty$，其中 C、γ 是引理 3.3 中的常数。最后，根据 Hölder不等式，

$$\left|\frac{\sigma(U_tf)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}-m(f)\right|\leqslant \widetilde{C}\left(\left\|U_{t_1}^*\mathbb{1}_M\right\|_q+Z(t_1)\frac{\left\|\psi_0\right\|_q}{\left\|\psi_0\right\|_1}\right)e^{-\gamma(t-s)}\frac{\sigma(U_s\mathbb{1}_M)}{\sigma(\phi_0)}\left\|f\right\|_p,$$

其中 q和 p是共轭指数。注意到$\left\|U_{t_1}^*\mathbb{1}_M\right\|_q<\infty$和 $\left\|\psi_0\right\|_q<\infty$。事实上，如果$p=1$，则 $q=\infty$，由 **(A2)** 和 **(A3)** 结合 (2.4) 即可得到该结论。如果 $p=\infty$且 $q=1$，则由以下事实可得该结论：$\left\|U_{t_1}^*\mathbb{1}_M\right\|_1=Z(t_1)<\infty$，以及 a)。如果$1<p<\infty$，则同样有 $1<q<\infty$，于是我们有

$$\left\|U_{t_1}^*\mathbb{1}_M\right\|_q^q=\int_M U_{t_1}^*\mathbb{1}_M(x)(U_{t_1}^*\mathbb{1}_M(x))^{q-1}\,\mu(dx)\leqslant\left\|U_{t_1}^*\mathbb{1}_M\right\|_\infty^{q-1}Z(t_1)<\infty$$

and

$$\left\|\psi_0\right\|_q^q=\int_M\psi_0(x)\psi_0^{q-1}(x)\,\mu(dx)\leqslant\left\|\psi_0\right\|_\infty^{q-1}\left\|\psi_0\right\|_1<\infty.$$

这就完成了 b) 的证明。

为了证明 c)，假设 m 和 $\bar{m}$ 都是拟平稳概率测度，且 supp $\bar{m}\cap(M\setminus\mathcal{N})\neq\emptyset$。由于 $\bar{m}$ 是有限的，我们可以在部分 b) 中使用 $\bar{m}=\sigma$，并由拟平稳性质 (3.2) 得到，

$$0=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\bar{m}(U_tf)}{\bar{m}(U_t\mathbb{1}_M)}-m(f)\right|=|\bar{m}(f)-m(f)|$$

对所有满足 $\left\|f\right\|_\infty\leqslant 1$的 $f\in L^\infty(M,\mu)$，（一致地）成立。根据我们的假设，μ 具有满拓扑支撑，且它是局部有限的——因此在所有紧集上都是有限的——并且紧集生成了 M 上的 Borel σ-代数。此外，M 是 σ-紧的，也就是说，存在一个递增的紧集序列 K_n，使得 $M=\bigcup_{n\geqslant 1}K_n$。对任意紧集 K 取 $f=\mathbb{1}_K$，可得 $m=\bar{m}$ 首先在紧集上成立，再利用测度的标准唯一性定理，可知其在所有 Borel 集上成立。关于 m^* 唯一性的证明类似。□

推论 3.5. 设 M 是一个局部紧波兰空间，并假设 (**A0**)–(**A3**) 成立，且存在某个 $t_1\geqslant t_0$ 使得 $Z(t_1)<\infty$。

a) 两个半群 $\{U_t:\,t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*:\,t\geqslant 0\}$ 均具有指数时间速率$e^{-\gamma t}$及空间速率 $U_{t_1}\mathbb{1}_M(x)/\phi_0(x)$和$U_{t_1}^*\mathbb{1}_M(x)/\psi_0(x)$的拟遍历性。更确切地说，对每个 $p\in[1,\infty]$，存在一个常数 $C>0$，使得对每个满足$\left\|f\right\|_p\leqslant 1$的 $f\in L^p(M,\mu)$

$$\left|\frac{U_tf(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)}-m(f)\right|\leqslant C\,e^{-\gamma t}\,\frac{U_{t_1}\mathbb{1}_M(x)}{\phi_0(x)},\quad t>6t_1,\ x\in M\setminus\mathcal{N},$$

and

$$\left|\frac{U_t^*f(x)}{U_t^*\mathbb{1}_M(x)}-m^*(f)\right|\leqslant C\,e^{-\gamma t}\,\frac{U_{t_1}^*\mathbb{1}_M(x)}{\psi_0(x)},\quad t>6t_1,\ x\in M\setminus\mathcal{N}.$$

此外，测度 m 和 m^*分别是半群 $\{U_t:\,t\geqslant 0\}$和 $\{U_t^*:\,t\geqslant 0\}$唯一满足 $m(M\setminus\mathcal{N})\cdot m^*(M\setminus\mathcal{N})>0$的拟平稳测度。b) 由于 $U_t\mathbb{1}_M,U_t^*\mathbb{1}_M\in C_b(M)$和 ϕ_0,ψ_0在 M上连续且严格为正，因此 *a)* 中的指数拟遍历性对 $M\setminus\mathcal{N}$ 的所有紧子集中的 x 均一致成立。

如果 $\mu(M)<\infty$，那么热含量在较长时间内自动有限，并且我们重新得到 [65] 中的一些结果。

4. 渐进基态支配与热含量

本节将需要半紧空间 和穷尽 集合族的概念。

定义 4.1。 若存在 M中的一个穷尽集族，则称空间 M 是半紧的，即存在一个族 $\{K_t:\ t\geqslant t_1\}$（定义于某个 $t_1\geqslant 0$上），其中各元素都是 M 的紧子集，并且:

a) 对每个 $t_1\leqslant t<s,\quad K_t\subset K_s$; b) $\bigcup_{t\geqslant t_1}K_t=M$; c) 对每个紧集 $K\subset M$，存在某个 $t\geqslant t_1$ 使得 $K\subset K_t$。

由于 M 是局部紧波兰空间， M 是半紧的；此外，在此类空间中， σ-紧性与半紧性的概念相同，参见例如 [18, 第 195]页。若 M 是紧的，则它也是半紧的，并具有平凡的穷尽族 $\{K_t:\ t\geqslant t_1\}$，使得对所有$t\geqslant t_1$均有 $K_t=M$。现假设（**A0**）–（**A3**）对于某个 $t_0>0$成立。本节研究的核心将是以下性质。

定义 4.2 （aGSD 和 pGSD）。设 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 是 $L^2(M,\mu)$ 上满足条件 **(A0)–(A3)** 的算子半群， λ_0 和 ϕ_0 分别为相应的基态特征值和归一化特征函数。

a) 若存在常数 C、$t_1>0$，使得下式成立，则称半群 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 为渐近基态支配（简称 aGSD）：

$$U_t\mathbb{1}_M(x)\leqslant Ce^{-\lambda_0 t}\phi_0(x),\quad t\geqslant t_1,\ x\in M. \tag{4.1}$$

b) 若存在常数 C、$t_1>0$ 以及紧集穷尽族 $\{K_t:\ t\geqslant t_1\}$，使得下式成立，则称半群 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 为渐进基态支配（简称 pGSD ）：

$$\mathbb{1}_{K_t}(x)\cdot U_t\mathbb{1}_M(x)\leqslant Ce^{-\lambda_0 t}\phi_0(x),\quad t\geqslant t_1,\ x\in M. \tag{4.2}$$

注 4.3。a) 由特征方程 $e^{-\lambda_0 t}\phi_0=U_t\phi_0$ 可知，(4.1) 存在某种反向不等式： $e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x)\leqslant\|\phi_0\|_\infty U_t\mathbb{1}_M(x)$, $x\in M$, $t>0$。

b）注意到， $U_t\mathbb{1}_M(x)$ 和 $\phi_0(x)$ 都是连续函数。由于 $\mu(\mathcal{N})=0$ 且由于μ 对每个开集都有非零测度， $\mathcal{N}$的内部为空且 $\overline{M\setminus\mathcal{N}}=M$。这意味着，在（4.1）和（4.2）中，我们可以将条件“$x\in M$”替换为“$x\in M\setminus\mathcal{N}$”。c）aGSD 曾在文献 [25, 24] 中结合内在超压缩性和超压缩性进行研究。 [26] 表明，对于较大的时间，aGSD 是比热含量有限性严格得多的条件。由引理 3.3 可直接推出， $\{U_t$ 的 aGSD： $t\geqslant 0\}$ 蕴含 $\phi_0\in L^1(M,\mu)$，并且蕴含较大时间下热含量的有限性；对于 $\{U_t^*:\ t\geqslant 0\}$ 和 ψ_0，这一结论同样成立。d）pGSD 最近在 [26] 中作为薛定谔半群的渐进内在超压缩性（ pIUC ）概念的直接结果被引入。在本节及下一节中，我们将解释 pGSD 对紧半群拟遍历行为的影响，并讨论 pGSD 与热含量有限性之间的关系。e）由定义可知，aGSD 总是蕴含 pGSD。回顾 $U_t\mathbb{1}_M$, $U_t^*\mathbb{1}_M$,ϕ_0, $\psi_0\in C_b(M)$。如果空间 M 是紧的，并且 ϕ_0, ψ_0 在处处严格为正（即 $\mathcal{N}=\emptyset$），那么 $\inf_M\phi_0>0$ 且 $\inf_M\psi_0>0$，因此 aGSD 总是成立。特别地，对于穷尽族 $\{K_t:\ t\geqslant t_1\}$，只要对所有 $t\geqslant t_1$ 都有 $K_t=M$，pGSD 就成立。

我们首先证明， $\{U_t$ 的 aGSD： $t\geqslant 0\}$ 意味着该半群在每个 $L^p(M,\mu)$、 $p\geqslant 1$上具有指数型一致（整个空间M）拟遍历性；与前文一样，这对$\{U_t^*:\ t\geqslant 0\}$也成立。特别是，这为在我们的框架下证明 [31, 定理 1、推论 2] 中的主要结果提供了一种相对简短且基础的方法。我们还给出一个逆命题。

推论 4.4。 设 M 为一个一般的局部紧（但不一定紧）波兰空间，并假设 （**A0**）–（**A3**）成立。则有以下断言。

a) 如果半群 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 对某个 $t_1\geqslant t_0$ 是 ***aGSD***，则对每个 $p\in[1,\infty]$ 存在常数 $C>0$，使得对于每个 $f\in L^p(M,\ \mu)$，满足 $\|f\|_p\leqslant 1$

$$\sup_{x\in M\setminus\mathcal{N}}\left|\frac{U_tf(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)}-m(f)\right|\leqslant C\,e^{-\gamma t},\quad t>6t_1. \tag{4.3}$$

b) 如果存在常数 $C>0$ 使得

$$\sup_{x\in M\setminus\mathcal{N}}\left|\frac{U_t\phi_0(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)}-C\right|\to 0\quad as\quad t\to\infty,$$

那么半群 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 是 ***aGSD***。

断言 a) 和 b) 对半群 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 及拟平稳测度 m^*同样成立。在 ***aGSD*** 条件下，测度 m 和 m^* 分别是 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 的唯一拟平稳测度，使得 $m(M\setminus\mathcal{N})\cdot m^*(M\setminus\mathcal{N})>0$。

证明。 断言 a) 直接由注4.3.c) 和推论 3.5.a) 的结合得到。下面证明 b)。由特征方程 $U_t\phi_0=e^{-\lambda_0 t}\phi_0$，可知存在某个 $t_1>0$ 使得

$$\left|\frac{e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)}-C\right|\leqslant\frac{C}{2},\quad t\geqslant t_1,\ x\in M\setminus\mathcal{N},$$

这意味着

$$\frac{e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)}\geqslant\frac{C}{2},\quad t\geqslant t_1,\ x\in M\setminus\mathcal{N}.$$

由于 $C>0$ 以及两个函数 ϕ_0 和 $U_t\mathbb{1}_M$ 均有界且连续，证明得以完成。□

如注4.3.e)中所述，如果空间 M 是紧空间（因此，由于 μ的局部有限性， $\mu(M)<\infty$），且基态处处严格为正，则半群$\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$、 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 自动具有 aGSD 性质，并且热含量在较大时间内有限。特别地，推论 4.4 表明，两个半群都是指数型一致（在整个空间 M上）拟遍历的。

如果空间 M 是非紧空间，那么 aGSD 是一个相当严格的条件。然而，正如 [26], 中所示，我们应当预期，在这种情况下，范围广泛的非 aGSD 紧半群仍然具有 pGSD 性质。下文我们将聚焦于非紧空间背景下 pGSD 半群的拟遍历性。

我们首先证明，热含量的有限性意味着 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$和 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$均满足 pGSD；因此，我们得到具有指数时间速率的渐进一致拟遍历性。为此，我们需要一个引理。为使证明简洁，我们在引理 4.5 和定理 4.6 中假设 $\mathcal{N}=\emptyset$，即基态处处严格为正。

引理 4.5。 设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间。假设 $(\mathbf{A0})$–$(\mathbf{A4})$ 成立， $\mathcal{N}=\emptyset$，并令 $\{K_t\colon\ t\geqslant t_0\}$ 是 M 中的紧集穷尽族。令

$$h(t):=\min\left\{\inf_{x\in K_t}\phi_0(x),\ \inf_{x\in K_t}\psi_0(x)\right\},\quad t\geqslant t_0,$$

并考虑 h 的广义逆，

$$h^{-1}(s):=\inf\left\{t\geqslant t_0:h(t)<s\right\},\quad s\in(0,h(t_0)].$$

定义函数 $\eta\colon\ [-\gamma^{-1}\log\,h(t_0)\ \infty)\to[t_0,\infty)$ 如下：

$$\eta(t):=h^{-1}(s)\big|_{s=e^{-\gamma t}}=h^{-1}(e^{-\gamma t}). \tag{4.4}$$

因此， η 在 $[-\gamma^{-1}\log\,h(t_0)\ \infty)$、 $\eta(t)\to\infty$ 时递增，其中 $t\to\infty$ 且

$$e^{\gamma t}\min\left\{\inf_{x\in K_{\eta(t)}}\phi_0(x),\ \inf_{x\in K_{\eta(t)}}\psi_0(x)\right\}=e^{\gamma t}h(\eta(t))=1,\qquad t\geqslant-\gamma^{-1}\log h(t_0).$$

证明。由于特征方程、我们的假设（A1）–（A3）以及 $\mathcal{N}=\emptyset$，基态特征函数 ϕ_0 和 ψ_0 在 M上连续且严格为正。结合注4.3.a)中的不等式和假设（A4），可知函数 h 在 $[t_0,\infty)$上连续、严格为正且递减，并且 $h(t)\to 0$，其中 $t\uparrow\infty$。特别地，其广义逆函数 h^{-1} 在$(0,h(t_0)]$, $h^{-1}(s)\to\infty$ 上递减，其中 $s\downarrow 0$，且对于每个 $s\in(0,h(t_0)]$，都有 $h(h^{-1}(s))=s$。因此， η 在 $[-\gamma^{-1}\log h(t_0)\ \infty)$上递增，因为它是两个递减函数 h^{-1} 和 $t\mapsto e^{-\gamma t}$的复合函数，且 $\eta(t)\to\infty$，其中 $t\to\infty$，以及$e^{\gamma t}h(\eta(t))=e^{\gamma t}h(h^{-1}(e^{-\gamma t}))=e^{\gamma t}e^{-\gamma t}=1$。证明完毕。□

在下述定理中，我们用记号 $\mathcal{M}^1(K)$ 表示满足 supp $\sigma\subset K$ 的 $(M,\mathcal{B}(M))$ 上的所有概率测度σ。回顾定理 3.4，我们已经知道，长时间下热含量有限意味着 $\phi_0,\psi_0\in L^1(M,\mu)$，并且在 (3.1) 中定义的测度 m 和 m^*，分别是半群 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 在各个 $L^p(M,\mu)$, $p\in[1,\infty]$ 上唯一的拟平稳测度。

定理 4.6. 设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间。假设 $(\mathbf{A0})$–$(\mathbf{A4})$ 成立，令 $\{K_t:\ t\geqslant t_0\}$ 为 M 中紧集的一个穷尽族，并假设$\mathcal{N}=\emptyset$。令 $\widetilde{t}_0=\max\left\{0,-\gamma^{-1}\log h(t_0)\right\}$，并令 η 为 (4.4) 中定义的函数。若存在某个 $t_1\geqslant t_0$，使得热含量 $Z(t_1)<\infty$，则以下断言成立。

a) 两个半群 $\{U_t:\ \ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*:\ \ t\geqslant 0\}$ 对于穷尽集族$\left\{K_{\eta(t)}:\ \ t\geqslant\widetilde{t}_0\right\}$均满足 *pGSD*。b) 两个半群 $\{U_t:\ \ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*:\ \ t\geqslant 0\}$ 均为指数渐进一致拟遍历，即对于每个 $p\in[1,\infty]$，都存在某个 $C>0$，使得

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{\eta(t/2)})}\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|\frac{\sigma(U_tf)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}-m(f)\right|\leqslant C\,e^{-(\gamma/2)t},\quad t>6t_1,$$

and

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{\eta(t/2)})}\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|\frac{\sigma(U_t^*f)}{\sigma(U_t^*\mathbb{1}_M)}-m^*(f)\right|\leqslant C\,e^{-(\gamma/2)t},\quad t>6t_1.$$

证明。回顾一下，$\psi_0(x)\leqslant\|\psi_0\|_\infty e^{\lambda_0 t}U_t^*\mathbb{1}_M(x)$，且 $\phi_0(x)\leqslant\|\phi_0\|_\infty e^{\lambda_0 t}U_t\mathbb{1}_M(x)$。由于 $Z(t_1)<\infty$，可得 $\phi_0,\psi_0\in L^1(M,\mu)$。因此，结合引理 3.3（取 $s=0$ 和 $r=t_1$）及引理 4.5，可得

$$\begin{aligned}\left|e^{\lambda_0 t}U_t\mathbb{1}_M(x)-(1/\Lambda)\phi_0(x)\|\psi_0\|_1\right|&\leqslant\int_M\left|e^{\lambda_0 t}u_t(x,y)-(1/\Lambda)\phi_0(x)\psi_0(y)\right|\mu(dy)\\&\leqslant Ce^{-\gamma(t-t_1)}Z(t_1)\\&\leqslant Ce^{\gamma t_1}Z(t_1)\frac{\phi_0(x)}{e^{\gamma t}\inf_{x\in K_{\eta(t)}}\phi_0(x)}\\&\leqslant c_1\phi_0(x),\end{aligned}$$

对于每个 $x\in K_{\eta(t)}$ 以及足够大的 t；由于函数 η 是递增的，并且 $\eta(t)\to\infty$ as$t\to\infty$，族 $\left\{K_{\eta(t)}:\ \ t\geqslant\widetilde{t}_0\right\}$ 确实是穷尽的。这给出

$$U_t\mathbb{1}_M(x)\leqslant(c_1+(1/\Lambda)\|\psi_0\|_1)e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x),\quad x\in K_{\eta(t)},$$

对于足够大的 t，这表明半群 $\{U_t:\ \ t\geqslant 0\}$ 具有 pGSD 性质。半群 $\{U_t^*:\ \ t\geqslant 0\}$ 的 pGSD 性质可以完全以相同的论证得到。至此，a) 的证明完成。

部分 b) 由定理 3.4.b) 得出，其中 $s=t/2$ 和支集位于 $K_{\eta(t/2)}$ 中的概率测度 σ，通过应用我们已在部分 a) 中确立的 pGSD 性质即可得到。□

5. 渐进基态支配与拟遍历性

正如我们在上一节已经注意到的，在非紧空间 M 中，aGSD 强于大时间下的热含量有限性。然而，大时间下热含量有限性蕴含具有某个穷尽集族的 pGSD。回顾一下，这些性质——aGSD、pGSD、有限热含量——在紧空间中自动成立。因此，我们还具有指数时间速率下的一致拟遍历性，见注4.3.e)、推论 4.4 以及推论后面的评论。

另一方面，参见 [26], pGSD 是紧非 aGSD 半群的一般正则性性质，可以单独进行研究；特别地，对于在较大时间下具有无限热含量的广泛紧半群，pGSD 仍然成立。在本节中，我们沿着这一思路，引入渐进一致拟遍历性的概念，并研究其与 pGSD 的关系。

令 a、$b \in (0,1)$ 为满足 $a+2b=1$ 的任意数。我们首先证明，在非紧空间 M 且满足（**A4**）的条件下，对于穷尽族 $\{K_t\colon\ t \geqslant t_0\}$，pGSD 蕴含穷尽族 $\{K_{at}\colon\ t \geqslant t_0/a\}$ 的渐进一致拟遍历性；其时间速率为

$$\kappa_b(t) := e^{-\gamma bt} + \sup_{x\in K_{bt}^c} U_{t_0}\mathbb{1}_M(x) + \sup_{x\in K_{bt}^c} U_{t_0}^*\mathbb{1}_M(x). \tag{5.1}$$

注意到 $\kappa_b(t) \downarrow 0$ 当 $t\uparrow\infty$ 时。正如示例中所见，κ_b 通常以指数型衰减至无穷 y.

我们需要确保 ϕ_0、$\psi_0 \in L^1(M,\mu)$，这意味着 (3.1) 中的两个测度 m 和m^* 都有明确定义。如果空间 M 是紧的，则根据 **(A3)**，由 $\mu(M) < \infty$ 和ϕ_0、$\psi_0 \in L^\infty(M,\mu)$可知这一点。对于局部紧（但非紧）的波兰空间 M，在 aGSD 下这一结论仍然成立，见注4.3.c)。现在我们证明，如果两个半群 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 都具有 pGSD 性质，则 ϕ_0、$\psi_0 \in L^1(M,\mu)$ 成立。

引理 5.1。设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间，并假设 (**A0**)–(**A3**)。如果半群 $\{U_t\colon\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t\geqslant 0\}$ 具有 *pGSD* 性质，则 ϕ_0，$\psi_0 \in L^1(M,\mu)$。

证明。假设对于紧集穷尽族 $\{K_t$，pGSD成立：$t\geqslant t_0\}$。我们只证明 $\phi_0 \in L^1(M,\mu)$。ψ_0 的证明类似。根据引理 3.3（取 $t_0 < s < t$使得 $t-s > 2t_0$ 且 $r=0$）以及 $\{U_t$的pGSD：$t\geqslant 0\}$，对于 μ-几乎处处的 $x\in K_s$和$y\in K_s\setminus\mathcal{N}$，有

$$\begin{aligned} e^{\lambda_0 t}u_t(x,y) &\geqslant (1/\Lambda)\phi_0(x)\psi_0(y) - Ce^{-\gamma(t-s)}U_s\mathbb{1}_M(x) \\ &\geqslant \Big((1/\Lambda)\psi_0(y) - c_1e^{-\gamma(t-s)-\lambda_0 s}\Big)\,\phi_0(x). \end{aligned}$$

我们对 $x\in K_s$ 中不等式的两边进行积分，并使用 $\{U_t^*$的pGSD：$t\geqslant 0\}$，得到

$$\int_{K_s}\phi_0(x)\,\mu(dx) \leqslant \frac{e^{\lambda_0 t}U_t^*\mathbb{1}_M(y)}{(1/\Lambda)\psi_0(y) - c_1e^{-\gamma(t-s)-\lambda_0 s}} \leqslant \frac{c_2\psi_0(y)}{(1/\Lambda)\psi_0(y) - c_1e^{-\gamma(t-s)-\lambda_0 s}},$$

当 t充分大时。令 $t\to\infty$，我们得到

$$\int_{K_s}\phi_0(x)\,\mu(dx) \leqslant c_2\Lambda \quad \text{for all} \quad s > t_0,$$

最后由单调收敛即可证明 $\phi_0\in L^1(M,\mu)$。 □

定理 *5.2.* 设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间。假设 *(A0)–(A4)* 成立，并且对于紧集穷尽族 $\{K_t\colon t\geqslant t_0\}$，两个半群 $\{U_t\colon t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon t\geqslant 0\}$ 都是 ***pGSD***。则有 $\phi_0,\psi_0\in L^1(M,\mu)$；并且，对于满足 $a+2b=1$ 的每个 $a,b\in(0,1)$，两个半群 $\{U_t\colon t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon t\geqslant 0\}$ 对于紧集穷尽族 $\{K_{at}\colon t\geqslant t_0/a\}$ 都是渐进一致拟遍历的，其时间速率为 $\kappa_b(t)$，由 *(5.1)* 给出，即对于每个 $p\in[1,\infty]$，存在某个 $C>0$，使得对于所有 $t > (4/(a\wedge b))t_0$

$$\sup_{\substack{\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{at})\\ \operatorname{supp}\sigma\cap(M\setminus\mathcal{N})\neq\emptyset}}\ \sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|\frac{\sigma(U_tf)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)} - m(f)\right| \leqslant C\kappa_b(t),$$

and

$$\sup_{\substack{\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{at})\\ \operatorname{supp}\sigma\cap(M\setminus\mathcal{N})\neq\emptyset}}\ \sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|\frac{\sigma(U_t^*f)}{\sigma(U_t^*\mathbb{1}_M)}-m^*(f)\right|\leqslant C\kappa_b(t).$$

证明。根据引理 5.1，我们有 $\phi_0,\psi_0\in L^1(M,\mu)$。我们按照定理 3.4 的证明进行。由于对偶半群的证明类似，我们将注意力限制在 $\{U_t\colon t\geqslant 0\}$ 上。固定 $p\in[1,\infty]$。对于每个 $f\in L^p(M,\mu)$，所有满足 $\operatorname{supp}\sigma\cap(M\setminus\mathcal{N})\neq\emptyset$ 的 $t>(4/(a\wedge b))t_0$ 和 $\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{at})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(U_tf)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}-m(f)&=\frac{e^{\lambda_0t}\sigma(U_tf)-m(f)e^{\lambda_0t}\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}{e^{\lambda_0t}\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}\\&=\frac{e^{\lambda_0t}\sigma(U_tf)-(1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)}{e^{\lambda_0t}\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}\\&\quad+m(f)\,\frac{(1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M\psi_0(y)\,\mu(dy)-e^{\lambda_0t}\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}{e^{\lambda_0t}\sigma(U_t\mathbb{1}_M)}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

以及

$$\begin{aligned}&e^{\lambda_0t}U_tf(x)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\\&\quad=\int_M\Big(e^{\lambda_0t}u_t(x,y)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(y)\Big)\,f(y)\,\mu(dy),\end{aligned}\tag{5.3}$$

and

$$\begin{aligned}&e^{\lambda_0t}U_t\mathbb{1}_M(x)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\int_M\psi_0(y)\,\mu(dy)\\&\quad=\int_M\Big(e^{\lambda_0t}u_t(x,y)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(y)\Big)\,\mu(dy),\end{aligned}\tag{5.4}$$

我们首先估计（5.3）。利用查普曼–柯尔莫哥洛夫方程和特征方程，可得

$$\begin{aligned}&e^{\lambda_0t}U_tf(x)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\\&=\int_M\left[\Big(e^{\lambda_0(t-2t_0)}u_{t-2t_0}(x,w)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(w)\Big)\,e^{2\lambda_0t_0}\int_M u_{2t_0}(w,y)f(y)\,\mu(dy)\right]\mu(dw)\\&=\int_{K_{bt}}\Big(\dots\Big)e^{2\lambda_0t_0}U_{2t_0}f(w)\,\mu(dw)+\int_{K_{bt}^c}\Big(\dots\Big)e^{2\lambda_0t_0}U_{2t_0}f(w)\,\mu(dw).\end{aligned}$$

由于

$$|U_{2t_0}f(x)|\leqslant\|U_{t_0}\|_{p,\infty}\,\|f\|_p\,U_{t_0}\mathbb{1}_M(x),\quad x\in M,$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\left|e^{\lambda_0t}U_tf(x)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\right|\\&\quad\leqslant e^{2\lambda_0t_0}\,\|U_{t_0}\|_{p,\infty}\,\|f\|_p\left(\|U_{t_0}\mathbb{1}_M\|_\infty\,I_1(t,x)+\sup_{w\in K_{bt}^c}U_{t_0}\mathbb{1}_M(w)I_2(t,x)\right),\end{aligned}$$

其中

$$I_1(t,x):=\int_{K_{bt}}\left|e^{\lambda_0(t-2t_0)}u_{t-2t_0}(x,w)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(w)\right|\mu(dw),$$

and

$$I_2(t,x):=\int_{K_{bt}^c}\left|e^{\lambda_0(t-2t_0)}u_{t-2t_0}(x,w)-(1/\Lambda)\,\phi_0(x)\psi_0(w)\right|\mu(dw).$$

根据引理 3.3（取 $s = at$ 和 $r = bt$；特别地， $t - 2t_0 - s - r = bt - 2t_0 > 2t_0$）以及 pGSD，我们看到对于所有 $x \in K_{at}$

$$I_1(t,x) \leqslant e^{-\gamma(bt-2t_0)} e^{\lambda_0 at} U_{at}\mathbb{1}_M(x) e^{\lambda_0 bt} \int_{K_{bt}} U^*_{bt}\mathbb{1}_M(w)\,\mu(dw) \leqslant c_1(t_0) e^{-\gamma bt}\phi_0(x)\,\|\psi_0\|_1\,.$$

再次由 pGSD，对于 $x \in K_{at} \subset K_{t-2t_0}$，我们得到

$$I_2(t,x) \leqslant e^{\lambda_0(t-2t_0)} U_{t-2t_0}\mathbb{1}_M(x) + (1/\Lambda)\,\phi_0(x)\,\|\psi_0\|_1 \leqslant (c_2 + (1/\Lambda)\,\|\psi_0\|_1)\phi_0(x).$$

综上，对于任意满足 $\operatorname{supp}\,\sigma \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$ 的测度 $\sigma \in \mathcal{M}^1(K_{at})$，可得估计

$$\left| e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t f) - (1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\right| \leqslant c_3\left(e^{-\gamma bt} + \sup_{w\in K^c_{bt}} U_{t_0}\mathbb{1}_M(w)\right)\|f\|_p\,\sigma(\phi_0).$$

若将上述关于 $p = \infty$ 的估计应用于 $f = \mathbb{1}_M \in L^\infty(M,\mu)$，即可得到 (5.4) 的估计；也就是说，对于所有满足 $\operatorname{supp}\,\sigma \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$ 的 $\sigma \in \mathcal{M}^1(K_{at})$，我们有

$$\left| e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t\mathbb{1}_M) - (1/\Lambda)\,\sigma(\phi_0)\,\|\psi_0\|_1\right| \leqslant c_4\left(e^{-\gamma bt} + \sup_{w\in K^c_{bt}} U_{t_0}\mathbb{1}_M(w)\right)\sigma(\phi_0).$$

需要注意的是，常数 c_3 和 c_4 不依赖于 σ。最后，利用 (5.2)、(3.5) 以及上述估计，我们得到

$$\left|\frac{\sigma(U_t f)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_M)} - m(f)\right| \leqslant c_4\left(e^{-\gamma bt} + \sup_{w\in K^c_{bt}} U_{t_0}\mathbb{1}_M(w)\right)\|f\|_p\,,$$

这对所有满足 $\operatorname{supp}\,\sigma \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$ 的测度 $\sigma \in \mathcal{M}^1(K_{at})$ 均成立。证明至此完成。□

备注 5.3. 在定理 5.2 中，我们证明了对于任意的 $a \in (0,1)$，具有穷尽族 $\{K_t\colon t \geqslant t_0\}$ 的 pGSD 蕴含具有 $\{K_{at}\colon t \geqslant t_0/a\}$ 的渐进拟遍历性。我们将在第 7.2 节看到，这一结果是尖锐的，因为不能期望针对原穷尽族 $\{K_t\colon t \geqslant t_0\}$ 的渐进拟遍历性具有一致性。

接下来的定理表明，pGSD 实际上等价于一种渐进一致拟遍历性，参见推论 4.4。

定理 5.4. 设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间。假设 $(\mathbf{A0})$–$(\mathbf{A4})$ 成立。那么以下条件等价:

a) </style}两个半群 $\colon t \geqslant 0\}$ 和 $\{U^*_t\colon t \geqslant 0\}$ 均满足 ***pGSD***。b) 存在概率测度 $\rho, \rho^* \in \mathcal{M}_1(M)$，使得 支集 $\rho \cap (M\setminus\mathcal{N}) \neq \emptyset$、支集 $\rho^* \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$，并且在 M 中存在一个穷尽集族 $\{K_t\colon t \geqslant t_0\}$，满足

$$\sup_{x\in K_t\setminus\mathcal{N}}\ \sup_{\substack{f\in L^\infty(M,\mu)\\ \|f\|_\infty\leqslant 1}}\left|\frac{U_t f(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)} - \rho(f)\right| \to 0 \quad as \quad t\to\infty,$$

and

$$\sup_{y\in K_t\setminus\mathcal{N}}\ \sup_{\substack{f\in L^\infty(M,\mu)\\ \|f\|_\infty\leqslant 1}}\left|\frac{U^*_t f(y)}{U^*_t\mathbb{1}_M(y)} - \rho^*(f)\right| \to 0 \quad as \quad t\to\infty.$$

证明。 蕴含关系“a)⇒b)”可直接由前述定理得到。为证明逆向蕴含，我们检验半群 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ 是 pGSD。对于$\{U^*_t$而言，论证类似: $t \geqslant 0\}$ 。

由于支集 $\rho \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$，我们有 $\rho(\phi_0) > 0$。回忆一下， $\phi_0 \in L^\infty(M,\mu)$。由 b) 可知，存在某个 $t_1 > t_0$ ，使得

$$\left|\rho(\phi_0) - \frac{U_t\phi_0(x)}{U_t\mathbb{1}_M(x)}\right| \leqslant \frac{1}{2}\rho(\phi_0), \quad t \geqslant t_1,\ x \in K_t.$$

因此，我们有

$$U_t\mathbb{1}_M(x) \leqslant \frac{2}{\rho(\phi_0)}U_t\phi_0(x) = \frac{2}{\rho(\phi_0)}e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x), \quad t \geqslant t_1,\ x \in K_t.$$

这表明半群 $\{U_t\colon\ t \geqslant 0\}$ 具有 pGSD 性质，证明完毕。 □

我们已经知道，对于较大的 t，热含量有限意味着两个半群 $\{U_t\colon\ t \geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t \geqslant 0\}$ 的拟平稳概率测度唯一，参见定理 3.4.c)。现在我们将证明一个强得多的结果：pGSD 性质以及关于算子 U_t 和 U_t^* 在较大时间下算子范数的一些附加信息，也能推出拟平稳测度的唯一性。附加条件可以表述如下：存在 $t_2 > 0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant t_2}\left(e^{\lambda_0 t}\sup_{x\in M}\left(U_t\mathbb{1}(x) + U_t^*\mathbb{1}(x)\right)\right) < \infty. \tag{5.5}$$

由于

$$\sup_{x\in M}U_t\mathbb{1}(x) = \|U_t\|_{\infty,\infty} \quad \text{and} \quad \sup_{x\in M}U_t^*\mathbb{1}(x) = \|U_t^*\|_{\infty,\infty},$$

(5.5) 等价于以下两个条件 (5.6) 和 (5.7) 的组合：

$$\sup_{t\geqslant t_2}\frac{\|U_t\|_{\infty,\infty}}{\|U_t\|_{2,2}} < \infty, \quad \sup_{t\geqslant t_2}\frac{\|U_t^*\|_{\infty,\infty}}{\|U_t^*\|_{2,2}} < \infty; \tag{5.6}$$

$$\sup_{t\geqslant t_2}e^{\lambda_0 t}\|U_t\|_{2,2} < \infty \quad (\text{or, equivalently,} \quad \sup_{t\geqslant t_2}e^{\lambda_0 t}\|U_t^*\|_{2,2} < \infty). \tag{5.7}$$

如果半群 $\{U_t\colon\ t \geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t \geqslant 0\}$ 对紧集穷尽族 $\{K_t\colon\ t \geqslant t_2\}$ 具有 pGSD 性质，则条件 (5.5) 等价于

$$\sup_{t\geqslant t_2}\left(e^{\lambda_0 t}\sup_{x\in K_t^c}\left(U_t\mathbb{1}(x) + U_t^*\mathbb{1}(x)\right)\right) < \infty. \tag{5.8}$$

下一个定理表明，对于具有无限热含量的一大类紧半群，拟平稳测度的唯一性仍然成立。

定理 5.5。设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间。假设 (**A0**)–(**A4**) 成立，并且两个半群 $\{U_t\colon\ t \geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t \geqslant 0\}$ 都是 *pGSD* 半群并满足 (5.5)。那么，在 (3.1) 中定义的测度 m 和 m^* 分别是 $\{U_t\colon\ t \geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*\colon\ t \geqslant 0\}$ 的唯一拟平稳概率测度，并且满足 $m(M \setminus \mathcal{N}) \cdot m^*(M \setminus \mathcal{N}) > 0$。

证明。我们仅对测度 m 给出证明；关于 m^* 的论证类似。设 $\bar{m}$ 是 $\{U_t\colon\ t \geqslant 0\}$ 的一个拟平稳概率测度，满足 $\operatorname{supp}\bar{m} \cap (M \setminus \mathcal{N}) \neq \emptyset$。沿用定理 3.4.c) 证明中的论证，只需证明对于 $f \in L^\infty(M,\mu)$，有 $m(f) = \bar{m}(f)$。

对于满足 $\bar{m}(\mathbb{1}_K\phi_0) > 0$ 的紧集 $K \subset M$（特别是，$\bar{m}(K) > 0$），我们定义

$$\sigma_K(dx) = \frac{\mathbb{1}_K(x)\bar{m}(dx)}{\bar{m}(K)}.$$

固定 $f \in L^\infty(M,\mu)$。我们有

$$|m(f) - \bar{m}(f)| \leqslant \left|m(f) - \frac{\sigma_K(U_t f)}{\sigma_K(U_t\mathbb{1}_M)}\right| + \left|\frac{\sigma_K(U_t f)}{\sigma_K(U_t\mathbb{1}_M)} - \bar{m}(f)\right|.$$

利用定理 5.2 关于概率测度 $\sigma = \sigma_K$ 的收敛断言，我们看到，右端第一项在 $t \to \infty$ 时趋于零。现在我们将证明，对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，都存在一个紧集 $K \subset M$，使得第二项小于 ϵ，并且对足够大的 t 一致成立。

固定 $\epsilon \in (0,1)$。由（5.5）可得,

$$c := \sup_{t \geqslant t_2} \left(e^{\lambda_0 t} \sup_{x \in M} U_t \mathbb{1}(x) \right) < \infty.$$

Since $\bar{m}$ 是一个有限测度，存在一个紧集 $K = K(\epsilon) \subset M$ 如上所述，使得 at

$$\bar{m}(K^c) \leqslant \frac{\bar{m}(\phi_0)}{c \, \|\phi_0\|_\infty \, (1 + \bar{m}(f) + \|f\|_\infty)} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}. \tag{5.9}$$

该集合的存在性源于空间 M 的 σ-紧性。根据 $\bar{m}$ 的拟平稳性，参见（3.2），我们有

$$\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t f) + \bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t f) = \bar{m}(f)\big(\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t \mathbb{1}_M) + \bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)\big),$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\sigma_K(U_t f)}{\sigma_K(U_t \mathbb{1}_M)} - \bar{m}(f) \right| &= \left| \frac{\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t f)}{\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t \mathbb{1}_M)} - \bar{m}(f) \right| \\
&= \left| \frac{\bar{m}(f)\big(\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t \mathbb{1}_M) + \bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)\big) - \bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t f)}{\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t \mathbb{1}_M)} - \bar{m}(f) \right| \\
&= \left| \frac{\bar{m}(f)\bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M) - \bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t f)}{\bar{m}(\mathbb{1}_K U_t \mathbb{1}_M)} \right| \\
&\leqslant (\bar{m}(f) + \|f\|_\infty) \frac{\bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M) - \bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)} \\
&= (\bar{m}(f) + \|f\|_\infty) \frac{\frac{\bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)}}{1 - \frac{\bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)}}.
\end{aligned}$$

由（3.5）可推得

$$\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M) \geqslant e^{-\lambda_0 t} \frac{\bar{m}(\phi_0)}{\|\phi_0\|_\infty}, \quad t > 0.$$

将这个不等式与 pGSD 性质及（5.9）结合可得

$$\frac{\bar{m}(\mathbb{1}_{K^c} U_t \mathbb{1}_M)}{\bar{m}(U_t \mathbb{1}_M)} \leqslant c \, \frac{\|\phi_0\|_\infty}{\bar{m}(\phi_0)} \, \bar{m}(K^c) \leqslant \frac{1}{1 + \bar{m}(f) + \|f\|_\infty} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \quad t \geqslant t_2.$$

由于函数 $(0,1) \ni x \mapsto x/(1-x)$ 是递增的，我们最终得到

$$|m(f) - \bar{m}(f)| \leqslant \limsup_{t \to \infty} \left| \frac{\sigma_K(U_t f)}{\sigma_K(U_t \mathbb{1}_M)} - \bar{m}(f) \right| \leqslant \epsilon,$$

这就完成了证明。 □

6. 紧半群的大时间渐近行为

作为我们对拟遍历性研究的副产品，我们还得到了关于 L^p 空间上紧 L^2-半群的渐近行为的一些结论。在这种一般性下，这类结果似乎是新的。

推论 6.1。 设 M 是一个局部紧波兰空间，并假设 (**A0**)–(**A3**) 成立。若存在某个 $t_1 \geqslant t_0$ 使得热含量有限，即

$$Z(t_1) < \infty,$$

那么我们有如下结论:

a) 对于每个 $p \in [1, \infty]$，都存在 $C > 0$，使得对于 M 上的每个有限测度 σ，以及任意 $t > 6t_1$ 和 $t_1 \leqslant s \leqslant t/2$，均有

$$\sup_{\substack{f \in L^p(M,\mu) \\ \|f\|_p \leqslant 1}} \left| e^{\lambda_0 t} \sigma(U_t f) - \frac{1}{\Lambda} \sigma(\phi_0) \int_M f(y) \psi_0(y) \, \mu(dy) \right| \leqslant C \, e^{-\gamma(t-s)} \, e^{\lambda_0 s} \sigma(U_s \mathbb{1}_M),$$

and

$$\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t^*f)-\frac{1}{\Lambda}\,\sigma(\psi_0)\int_M f(x)\phi_0(x)\,\mu(dx)\right|\leqslant C\,e^{-\gamma(t-s)}\,e^{\lambda_0 s}\sigma(U_s^*\mathbb{1}_M).$$

特别地，取 $\sigma=\delta_z$、 $z\in M$ 和 $s=t_1$，我们得到一致估计

$$\sup_{x\in M}\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|e^{\lambda_0 t}U_tf(x)-\frac{1}{\Lambda}\,\phi_0(x)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\right|\leqslant \widetilde{C}\,e^{-\gamma t},$$

and

$$\sup_{y\in M}\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|e^{\lambda_0 t}U_t^*f(y)-\frac{1}{\Lambda}\,\psi_0(y)\int_M f(x)\phi_0(x)\,\mu(dx)\right|\leqslant \widetilde{C}\,e^{-\gamma t}.$$

b) 对于每个 p， $r\in[1,\infty]$ 都存在 $C>0$，使得对于所有 $t>6t_1$，我们都有

$$\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left\|e^{\lambda_0 t}U_tf-\frac{1}{\Lambda}\,\phi_0\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\right\|_r\leqslant C\,e^{-\gamma t},$$

and

$$\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left\|e^{\lambda_0 t}U_t^*f-\frac{1}{\Lambda}\,\psi_0\int_M f(x)\phi_0(x)\,\mu(dx)\right\|_r\leqslant C\,e^{-\gamma t}.$$

上述界直接由定理 3.4 证明中的估计得到。部分 a) 中的情形 $p=1$ 以及部分 b) 中的情形 $p=1$、$r=\infty$ 是特殊情形——它们直接由（**A2**）推出，并且在该情形下实际上需要热含量是有限的。

令 $\{K_t:\ t\geqslant t_0\}$ 为 M中的一个穷尽集族。考虑测度序列（σ_n），满足 $\sigma_n(\cdot):=\mu(\cdot\cap K_n)$， $n\in\mathbb{N}$，并利用推论 6.1.a)，我们得到热含量的如下渐近性。

推论 6.2。设 M 为一个局部紧波兰空间，并假设（**A0**）–（**A3**）成立。如果存在某个 $t_1\geqslant t_0$ 使得热含量有限，即

$$Z(t_1)<\infty,$$

那么存在某个 $C>0$ 使得

$$\left|e^{\lambda_0 t}Z(t)-\frac{\|\phi_0\|_1\,\|\psi_0\|_1}{\Lambda}\right|\leqslant Ce^{-\gamma t},\quad t>6t_1.$$

如果对于较大的 t， $Z(t)=\infty$，我们不能期望渐近估计像推论 6.1.a) 中那样具有一致性。不过，我们可以证明一个类似于定理 5.2 的渐进版本。以下结果可以直接通过检查该定理的证明得到。

推论 6.3。设 M 是一个局部紧但非紧的波兰空间。假设 (**A0**)–(**A4**) 成立，并且两个半群 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t^*:\ t\geqslant 0\}$ 对于紧集穷尽族 $\{K_t:\ t\geqslant t_0\}$ 都是 ***pGSD***。于是，对于满足 $a+2b=1$ 的每个 a， $b\in(0,\ 1)$，以及每个 $p\in[1,\infty]$，存在某个 $C>0$，使得对于所有 $t>(4/(a\wedge b))t_0$

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{at})}\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|e^{\lambda_0 t}\sigma(U_tf)-\frac{1}{\Lambda}\,\sigma(\phi_0)\int_M f(y)\psi_0(y)\,\mu(dy)\right|\leqslant C\kappa_b(t),$$

and

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{M}^1(K_{at})}\sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}}\left|e^{\lambda_0 t}\sigma(U_t^*f)-\frac{1}{\Lambda}\,\sigma(\psi_0)\int_M f(x)\phi_0(x)\,\mu(dx)\right|\leqslant C\kappa_b(t),$$

其中，时间速率 $\kappa_b(t)$ 由 (5.1) 给出。通过考察 $\sigma=\delta_z$、 $z\in K_{at}$，我们得到当 $t\to\infty$ 时，在集合 K_{at} 上逐步的一致估计。

7. 示例与应用

7.1. Feynman–Kac半群与 Feller 过程。 设 (M,d) 是一个局部紧波兰空间， μ 是定义在 Borel 集 $\mathcal{B}(M)$ 上、具有满拓扑支撑的正局部有限测度。我们假设空间 (M,d) 是无界的（特别地，它不是$\widehat{}$紧的），且测度 μ 不是有限测度。设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $(\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ 是取值于 M 中的马尔可夫过程，其转移半群如下:

$$P_tf(x)=\mathbb{E}^x f(X_t)\quad\text{and}\quad \widehat{P}_tf(y)=\widehat{\mathbb{E}}^y f(\widehat{X}_t),\quad f\in L^2(M,\mu);$$

在本节中，我们始终假设 P_t 和 $\widehat{P}_t$ 是 $L^2(M,\mu)$ 上的压缩算子，并且$\widehat{}$半群 $\{P_t:\ t\geqslant 0\}$, $\{P_t:\ t\geqslant 0\}$ 都具有 Feller 性质和强 Feller 性质，即按照 Chung [11] 的意义，它们是“双重 Feller” 的。此外，我们假设相应的 Markov 预解式关于测度 μ 满足弱对偶关系，见 [12, 定义 13.1]。根据 [12,命题 13.6] ，我们有

$$\int f(x)\cdot P_tg(x)\,\mu(dx)=\int \widehat{P}_tf(x)\cdot g(x)\,\mu(dx),\quad f,g\in L^2(M,\mu),\ t>0,$$

这意味着，在空间 $L^2(M,\mu)$ 中， $\widehat{P}_t$是 P_t 的（泛函分析意义下的）伴随算子 P_t^*。最后，我们假设，对于每个 $t>0$ ，算子 P_t 和 P_t 都具有正性改善性质，且是从 $L^2(M,\mu)$ 到 $L^\infty(M,\mu)$ 的有界算子。

$\widehat{}$特别地，“自由”半群 $\{P_t,t\geqslant 0\}$ 和 $\{P_t,t\geqslant 0\}$ 满足我们的假设（**A1**）–（**A3**）。接下来，我们将给出充分判据，使相应的 Feynman–Kac 半群 $\{U_t,t\geqslant 0\}$和 $\{U_t^*,t\geqslant 0\}$ 满足（**A0**）–（**A4**）。

设 V 是 M 上的局部有界势函数，且下有界，即 $V=V_+-V_-$，其中 $V_+\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(M,\mu)$ 和 $V_-\in L^\infty(M,\mu)$，据此我们定义 *Feynman–Kac*半群

$$U_tf(x)=\mathbb{E}^x\left[e^{-\int_0^t V(X_s)\,ds}f(X_t)\right],\quad f\in L^2(M,\mu),\ t>0.$$

由 [12, 定理 13.25] 可知，弱对偶半群或伴随半群由以下算子构成

$$\widehat{U}_tf(x)=U_t^*f(x)=\widehat{\mathbb{E}}^x\left[e^{-\int_0^t V(\widehat{X}_s)\,ds}f(\widehat{X}_t)\right],\quad f\in L^2(M,\mu),\ t>0.$$

我们首先验证假设（**A1**）–（**A3**），并证明 U_t 和U_t^*是积分算子。若$(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个随机过程，我们记 $\tau_B:=\inf\{t>0:\ X_t\in B^c\}$ 为首次离开集合 B的时间。

引理 7.1. 以下断言成立。

a) 算子 U_t, $t>0$具有正性改善性质。*b)* 两个半群 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 和$\{U_t^*:\ t\geqslant 0\}$ 均为 *Feller* 半群和强 *Feller* 半群。*c)* 对每个 $t>0$，算子 U_t,U_t^*: $L^2(M,\mu)\to L^\infty(M,\mu)$均有界。特别地，对每个 $t>0$ ，都存在一个可测核 $u_t(x,y)$，使得（*2.1*）成立，并且$\widehat{}$半群 $\{U_t:\ t\geqslant 0\}$ 和 $\{U_t:t\geqslant 0\}$ 关于测度 μ对偶。

证明。 a) 设 $0\neq f\in L^2(M,\mu)$ 为正，且 $t,r>0$。我们有

$$U_tf(x)=\mathbb{E}^x\left[e^{-\int_0^t V(X_s)\,ds}f(X_t)\right]\geqslant e^{-t\|\mathbb{1}_{B_r(x)}V_+\|_\infty}\mathbb{E}^x\left[f(X_t);t<\tau_{B_r(x)}\right].$$

右侧出现的期望趋于 $\mathrm{E}^x f(X_t)=P_tf(x)$，当 $r\to\infty$ 时。由于 P_t 具有正性改善，且 V 局部有界，对于充分大的 $r>0$，右侧的表达式对 μ-几乎处处的 x 严格为正。为此，任取满足 $P_tf(x)>0$ 的 x 。由于 $\mathrm{E}^x\left[f(X_t);t<\tau_{B_r(x)}\right]$ 递增收敛到 $P_tf(x)=\mathrm{E}\left[f(X_t)\right]$，当 $r\uparrow\infty$ 时，存在某个 $r=r(x)$ 使得 $\mathrm{E}^x\left[f(X_t);t<\tau_{B_r(x)}\right]>0$，因此 $U_tf(x)>0$。由此得到所述结论。

部分 b) 可直接由 Chung [11, 定理 2]得出。Chung 定理的假设 (a)–(c) 很容易验证，因为 V既下有界又局部有界。

我们仍需证明 c)。首先注意，对每个 $t>0$，算子 U_t, U_t^*: $L^2(M,\mu) \to L^\infty(M,\mu)$ 都是有界的。事实上，对于 $f \in L^2(M,\mu)$ 和 $t>0$，我们有

$$U_t f(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t) \right] \leqslant e^{t\|V_-\|_\infty} \mathbb{E}^x f(X_t) = e^{t\|V_-\|_\infty} P_t f(x),$$

这意味着 $\|U_t\|_{2,\,\infty} \leqslant e^{t\|V_-\|_\infty} \|P_t\|_{2,\,\infty}$。同理可得 $\|U_t^*\|_{2,\,\infty} \leqslant e^{t\|V_-\|_\infty} \|P_t^*\|_{2,\,\infty}$。结合部分 b) 和半群性质可知，对于每个 $t>0$，算子 U_t、U_t^*将 $L^2(M,\mu) \cap \{P_t, t\geqslant 0\}$、$\left\{\widehat{P}_t, t\geqslant 0\right\}$映射到 $L^2(M,\mu) \cap C_b(M)$ 中，因此我们可以应用 [21, 定理 1。6] 来证明 U_t、U_t^*、$t>0$ 是积分算子。也就是说，存在非负可测核 $u_t(x,y)$ 和 $u_t^*(x,y)$，使得

$$U_t f(x) = \int_M f(y) u_t(x,y)\mu(dy), \quad U_t^* f(x) = \int_M f(y) u_t^*(x,y)\mu(dy), \quad f \in L^2(M,\mu),\ t>0.$$

由于算子 U_t 和 U_t^* 互为伴随算子，因此有 $u_t^*(x,y) = u_t(y,x)$。 □

现在我们给出算子 U_t、U_t^*、$t>0$ 紧性的充分条件（参见假设（**A0**）），以及热含量在大时间下有限的充分条件。回忆一下，热含量定义为

$$Z(t) = \int_M U_t \mathbb{1}(x)\mu(dx) = \int_M U_t^* \mathbb{1}(y)\mu(dy), \quad t>0.$$

引理 7.2。对于 $x \in M$ 和 $t>0$，我们有

$$e^{-t\cdot \operatorname{ess\,sup}_y \left(\mathbb{1}_{B_1(x)}(y) V_+(y)\right)} \mathbb{P}^x(t \leqslant \tau_{B_1(x)}) \leqslant U_t\mathbb{1}(x) \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t P_s(e^{-tV(\cdot)})(x)ds \tag{7.1}$$

（对 $U_t^*\mathbb{1}$（x））作显然的修改即可得到类似的估计。特别地，

$$\inf_{x\in M} \mathbb{P}^x(t \leqslant \tau_{B_1(x)}) \int_M e^{-t\cdot \operatorname{ess\,sup}_y \left(\mathbb{1}_{B_1(x)}(y) V_+(y)\right)} \mu(dx) \leqslant Z(t) \leqslant \int_M e^{-tV(x)}\mu(dx). \tag{7.2}$$

对于 $t>0$。因此，以下断言成立。

a) 如果

$$\lim_{d(x,x_0)\to\infty} V(x) = \infty, \tag{7.3}$$

那么算子 U_t、U_t^*、$t>0$ 是紧的；特别地，（**A0**）成立。

b) 固定 $t>0$。则：

$$\int_M e^{-tV(x)}\mu(dx) < \infty \implies Z(t) < \infty.$$

另一方面，如果 下确界$_{x\in M}\, \mathbb{P}^x(t \leqslant \tau_{B_1(x)}) > 0$，则：

$$Z(t) < \infty \implies \int_M e^{-t\cdot \operatorname{ess\,sup}_y \left(\mathbb{1}_{B_1(x)}(y) V_+(y)\right)} \mu(dx) < \infty.$$

证明。固定 $t>0$。对于 (7.1) 中上界的证明，只需使用詹森不等式和托内利定理

$$U_t\mathbb{1}(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^t V(X_s)\,ds} \right] \leqslant \mathbb{E}^x \left[\frac{1}{t}\int_0^t e^{-tV(X_s)}\,ds \right] = \frac{1}{t}\int_0^t P_s(e^{-tV(\cdot)})(x)\,ds$$

并且，(7.2) 中的上界估计可通过关于 $\mu(dx)$ 的积分和对偶性得到。(7.1) 和 (7.2) 中的下界由定义得出。注意到，部分 b) 直接由后一个不等式推出。

为得到部分 a)，我们对每个 $t_0>0$ 证明（**A4**），然后使用引理 2.3。由 (7.3) 可知，存在一个函数 $g \in C_\infty(M)$，使得

$$e^{-tV(x)} \leqslant g(x), \quad \text{for } \mu \text{ almost every } x \in M.^2 \tag{7.4}$$

因此，由 (7.1) 和 (7.4) 可得，

$$0 \leqslant U_t \mathbb{1}(x) \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t P_s g(x)ds, \quad x \in M.$$

根据 Feller 性质，函数 $x \mapsto (1/t)\int_0^t P_s g(x)\,ds$ 属于 $C_\infty(M)$，这意味着 **(A4)** 对任意 $t \geqslant t_0$ 和任意 $t_0 > 0$ 都成立。

伴随算子 U_t^* 的 **(A4)** 证明是类似的。 □

特别地，引理 7.2.b) 表明，热含量的有限性完全独立于自由过程。

现在我们将讨论一些具体的 Feller过程类别，它们属于上述框架的适用范围。为使论述简洁，我们在每种情况下都给出关于符号和进一步结果的标准参考文献。

7.1.1. *Lévy*过程。 标准参考文献：Sato [49], Jacob [20, 第 1 卷，Schilling [51]。在本节中，参考测度 μ 是 d 维勒贝格测度， $d(\cdot,\cdot)$ 表示欧几里得距离。

一个*Lévy*过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的随机过程，其轨道具有 càdlàg（右连续且左极限存在）性质，并且具有平稳增量和独立增量。Lévy过程可以用其特征指数 $\psi(\xi) = -\log \mathbb{E}\, e^{i\xi\cdot X_1}$ 来描述。已知 ψ 由 Lévy–Khintchine 公式唯一确定

$$\psi(\xi) = -i\xi\cdot b + \frac{1}{2}\xi\cdot Q\xi + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left(1 - e^{i\xi\cdot y} + i\xi\cdot y\mathbb{1}_{(0,1)}(|y|)\right)\nu(dy), \quad \xi\in\mathbb{R}^d, \tag{7.5}$$

或者由相应的 Lévy 三元组 (b, Q, ν) 确定，该三元组由 $b\in\mathbb{R}^d$（漂移项）、 Q 一个对称的半正定 $d\times d$ 矩阵（高斯协方差矩阵）以及 ν 一个定义在 $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ 上的测度给出，并满足 $\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}(1\wedge|x|^2)\nu(dx) < \infty$（*Lévy* 测度）。

Lévy过程是马尔可夫过程，并且在平移下保持不变，即转移半群是一个卷积半群，形式为

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right] = \mathbb{E}^0\left[f(X_t + x)\right] = f * \widetilde{\mu}_t(x)$$

其中 $\widetilde{\mu}_t(dy) = \mathbb{P}^0(X_t \in -dy)$ 是 $-X_t$ 的分布。Lévy过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的对偶过程 $(\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ 由 $\widehat{X}_t = -X_t$ 给出，其转移半群 $\left\{\widehat{P}_t:\ t\geqslant 0\right\}$ 也相应定义。 P_t 的卷积结构表明，对于任意 $p\in[1,\infty)$， $(P_t)_{t\geqslant 0}$ 既是定义在 $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ 上的 Feller半群，也是一个 $L^p(\mathbb{R}^d, dx)$ 马尔可夫半群。

过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是强 Feller 过程，即 P_t 将 $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ 映射到 $C_b(\mathbb{R}^d)$，当且仅当 $\mu_t(dy) = p_t(y)\,dy$ 关于勒贝格测度绝对连续，参见 Jacob [20, 第 1 卷，引理 4.8.19、4.8.20]; 特别地，对偶过程也是强 Feller 过程。密度 $p_t(x)$， $t > 0$存在的一个充分条件是 $Q \neq 0$ ，或者 ν 是无穷的且关于勒贝格测度绝对连续，参见例如 [49, 定理 27.7], 另见 [32]中的讨论。如果此外存在某个 $t_0 > 0$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t_0\mathrm{Re}\,\psi(\xi)}d\xi < \infty$，那么得益于傅里叶反演公式，$\sup_{t\geqslant t_0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} p_t(x) < \infty$。因此，对于每个 $t\geqslant t_0$，算子 P_t、 $\widehat{P}_t$： $L^2(\mathbb{R}^d, dx) \to L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ 都是有界的。一般而言，如果对于每个 $t_0 > 0$，积分 $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t_0\mathrm{Re}\,\psi(\xi)}d\xi$ 都是有限的，那么我们便得到对于每个 $t > 0$ 都存在有界且关于 (t, x) 联合连续的密度，参见 [32, 引理 2.1]。

为了看出正性改善性，只需证明[2]对于每个 Borel 集 $B\subset\mathbb{R}^d$，若 $\mathrm{Leb}(B) > 0$，则 $\mathbb{P}^0(X_t\in B) = \mathbb{P}^0(\widehat{X}_t\in -B) = \int_B p_t(x)\,dx > 0$。固定这样一个 Borel 集 B。利用 Lévy–Khintchine 公式，我们可以将一个 Lévy过程分解为

[2]事实上：任取 $x_0\in M$，令 $h(r) := \text{本性下确界}_{\{x\in M:\, d(x,x_0)\geqslant r\vee 0\}} V_+(x)$，其中 $r\in\mathbb{R}$，并使用一个在 $[0,1]$ 中具有支集的连续函数 $\phi\geqslant 0$，且满足 $\int_0^1\phi(s)\,ds = 1$，可得 $h_\phi(r) := h * \phi(r) \leqslant h(r+1)$， $r\in\mathbb{R}$。于是 $V_+(x) \geqslant h(d(x,x_0)) \geqslant h_\phi(d(x,x_0) - 1)$， $x\in M$。由于 t 固定， $g(x) := \exp\left(t\left(\|V_-\|_\infty - h_\phi(d(x,x_0) - 1)\right)\right)$ 是一个在无穷远处消失的连续函数。

一组独立莱维过程之和 $X_t = W_t + Y_t$，它们的三元组分别为 $(b, Q, 0)$ 和 $(0, 0, \nu)$。如果 $\det(Q) \neq 0$，那么我们总能得到一个非退化的高斯部分，不难看出

$$\mathbb{P}^0(X_t \in B) = \int \mathbb{P}^0(W_t + y \in B)\, \mathbb{P}^0(Y_t \in dy) > 0$$

因为对所有 $y \in \mathbb{R}^d$，$\mathrm{P}^0(W_t + y \in B) > 0$。

设 $\det(Q) = 0$。如果 Lévy 测度 ν 满足 $\nu(dy) \geqslant h(y)\, dy$，且具有密度 $h(y)$，该密度在 $0 \in \mathbb{R}^d$ 的某个邻域（例如 $B_\epsilon(0)$）内严格为正，那么我们可以将 $X_t = Z_t + C_t$ 分解为两个相互独立的 Lévy过程，其三元组分别为 $(b, Q, \nu(dy) - h(y)\, dy)$ 和 $(0, 0, h(y)\, dy)$。由于 C_t 是复合泊松过程，根据 [51, Cor. 3.5]可知

$$\mathbb{P}^0(C_t \in B) = e^{-ht}\delta_0(B) + e^{-ht} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_B h^{*k}(x)\, dx, \quad h = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\, dx.$$

由于 k重卷积 $h^{*k}(x)$ 在 $B_{\epsilon k}(0)$ 中严格为正，我们得出对于任意 $z \in \mathbb{R}^d$，$\mathrm{P}^0(C_t \in B + z) > 0$，因此 $\mathrm{P}^0(X_t \in B) = \int \mathrm{P}^0(C_t + z \in B)\, \mathrm{P}^0(Z_t \in dz) > 0$。进一步进行一些推导后，上述论证甚至表明，$X_t$ 的密度满足 $p_t(x) > 0$，对所有 $t > 0$ 以及勒贝格几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^d$均成立。

还需检查引理 7.2 中所述的紧性条件以及热含量的有限性。令 $x_0 = 0$。选择势函数 V，使得当 $|x| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$，我们得到 Feynman–Kac半群算子 $U_t, U_t,\ t > 0$ 是作用于 $L^2(M, \mu)$ 上的紧算子。此外，如果我们知道

$$\liminf_{|x| \to \infty} \frac{V(x)}{\log |x|} > 0,$$

那么存在 $t > 0$ 使得 $Z(t) < \infty$。

7.1.2. 莱维型过程。标准参考文献：Jacob [20, 第 1]，卷，Böttcher 等人 [5]。莱维型或 Feller 过程是一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的马尔可夫过程 X_t，其局部行为类似于 Lévy过程。特别地，转移半群 $P_t u(x) = \mathrm{E}^x u(X_t)$ 是 Feller半群，并且可以证明，其无穷小生成元是如下形式的伪微分算子$Au(x) = -F^{-1}_{\xi \to x}(p(x, \xi)\mathcal{F}u(\xi))$（$\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换，u 是一个足够光滑的函数，例如测试函数 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$），其符号 $p(x, \xi)$ 对固定的 x 而言，是某个 Lévy过程的特征指数。因此，$p(x, \xi)$ 由 Lévy–Khintchine 公式（7.5）给出，其中 Lévy 三元组依赖于 x，即 $(b, Q, \nu(dy)) = (b(x)\ Q(x)\ \nu(x, dy))$。因此，$A$ 是一个“具有变系数的 Lévy 生成元”。一个典型例子是如下形式的稳定型生成元 $Au(x) = (-\Delta)^{\alpha(x)} u(x)$，其中 $\alpha : \mathbb{R}^d \to [0, 2]$ 是可变微分阶数，且其符号具有如下形式 $p(x, \xi) = |\xi|^{\alpha(x)}$

给定一个可容许符号 $p(x, \xi)$，或者等价地，给定一个依赖于 x 的 Lévy 三元组，构造一个 Lévy 型过程是一个重大问题。Jacob [20, 第 3]卷以及 Böttcher 等人 [5], 对此进行了全面讨论；迄今为止，最一般的结果可能要归功于 Kühn [34]以及 Knopova等人 [33]。

下面我们将介绍一些条件，在这些条件下，第 7.1 节所需的假设得以满足。我们的主要目的并非涵盖最一般的情形，而是说明在 Lévy 型过程这一类别中可以找到许多实例。以下关于符号的假设经常被采用

$$C_1|\xi|^{\alpha_0} \leqslant \mathrm{Re} p(x, \xi) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\xi| \geqslant 1, \qquad \text{(minimal growth)} \tag{7.6}$$

$$|p(x, \xi) - p(y, \xi)| \leqslant C_2|x - y|^\gamma |\xi|^\alpha \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\xi| \geqslant 1, \qquad \text{(Hölder condition)} \tag{7.7}$$

$$|p(x, \xi)| \leqslant C_3(1 + |x|^\gamma)|\xi|^\beta \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\xi| \leqslant 1, \qquad \text{(growth of coefficients)} \tag{7.8}$$

whe其中 C_1、C_2、C_3 为常数，α_0、α、$\beta \in (0, 2]$ 和 $\gamma \in (0, \beta)$ 为适当的指数 .

假设 $p(x,\xi)$ 是 Lévy 型过程的符号。如果 $\alpha \geqslant \gamma > \frac{\alpha}{\alpha_0}\left(\alpha - \alpha_0 + \frac{1}{2}\right)$ 或 $\alpha \leqslant \gamma < \frac{2}{\alpha_0} - \frac{1}{2}$，那么 X_t 具有转移密度 $p_t(x,y)$，使得 $\sup_x \int p_t^2(x,y)\, dy < \infty$，即自由半群 P_t 满足 **(A3)**，参见定理 2.14]。

给定符号 $p(x,\xi)$ 的 Lévy 型过程是否存在，是一个更为微妙的问题。这里，我们仅提及稳定类情形：$p(x,\xi) = |\xi|^{\alpha(x)}$其中 $\alpha\colon \mathbb{R}^d \to [a_1,a_2] \subset (0,2)$ 为 Hölder 连续时，具有连续密度的稳定类过程 $(t,x,y) \mapsto p_t(x,y) > 0$ 已在 [34, 定理 3.8、定理 3.11] 以及 [33, 第 3]节中得到证明。特别地，我们得到了 Feller 过程和强 Feller 过程。显然，稳定类符号满足假设 (7.6)–(7.8)。还需指出，这些论文中介绍的方法远不止适用于稳定类情形：它们 [34] 涵盖了如下类型的符号：$p(x,\xi) = \psi_{a(x)}(|\xi|)$，其中 $z \mapsto \psi_a(z)$ 在复平面的领结形区域上具有全纯延拓（并满足某些多项式有界性假设）；而[33] 则主要关注非旋转对称符号。因此，**(A1)** 和 **(A2)** 也成立。

一般来说，确定 A 的（形式）伴随算子的符号非常困难。基于[53], , 论文 [54]给出了适用于一大类符号的伴随算子符号的一般形式（第 3 节），并对 $p(x,\xi) = |\xi|^{\alpha(x)}$ 这一情形进行了详尽讨论。如果 $\alpha(x)$ 是 Hölder 连续的，取值于 $[a_1,a_2] \subset (0,2)$，并满足 (7.6)–(7.8)，那么伴随符号$p^*(x,\xi)$ 也具有这些性质；其由 Lévy–Khintchine 公式给出，三元组为 $(0,0,w(x)|x-y|^{-d-\alpha(x)}\, dy)$，对应权函数 $w(x) = \alpha(x)2^{\alpha(x)-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha(x) + \frac{1}{2}d\right)/\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\alpha(x)\right)$。这意味着在此情形下，伴随自由半群 P_t 也满足假设$\widehat{\ }$**(A1)–(A3)**。当然，其他符号则需要逐一研究，例如可以参考上述文献。

7.1.3. 可数无限一致离散度量空间上的连续时间马尔可夫链。标准参考文献：Murugan & Saloff–Coste [46, 47]和 Cygan, Kaleta & Śliwiński [14]。设 (M,d) 是一个可数无限、无界且完备的度量空间，同时也是一致离散的；这意味着存在一个数 $a > 0$，使得对于任意两个不同的点 x、$y \in M$，都有 $d(x,y) \geqslant a$，见 [46, 47]。底层测度 $\mu\colon M \to (0,\infty)$ 被假设为具有指数 $d_M > 0$ 的 *Frostman*测度，即存在常数 $c > 0$，使得对于任意 $x \in M$ 和 $r > 0$，都有 $\mu(B_r(x)) \leqslant cr^{d_M}$。

特别地，对于所有 $\gamma > d_M$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B_1(x_0)^c} d(x,x_0)^{-\gamma}\, \mu(dx) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n \leqslant d(x,x_0) < 2^{n+1}} d(x,x_0)^{-\gamma}\, \mu(dx)\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma n}\mu(B_{2^{n+1}}(x_0)) \leqslant c2^{d_M} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(\gamma-d_M)n} < \infty.\end{aligned}$$

在这些假设下，我们可以给出函数$x \mapsto e^{-tV(x)}$ 可积的一个充分条件；该函数的可积性是热含量有限所必需的，见引理 7.2.b)。事实上，如果存在 c_0、$R > 0$ 和 $x_0 \in M$，使得

$$\frac{V(x)}{\log d(x,x_0)} \geqslant c_0 > 0, \quad d(x,x_0) \geqslant R,$$

那么对每个 $t > d_M/c_0$，我们都有

$$\int_M e^{-tV(x)}\mu(dx) \leqslant e^{\|V_-\|_\infty}\mu(B_R(x_0)) + \int_{B_R(x_0)^c} d(x,x_0)^{-c_0 t}\mu(dx) < \infty.$$

考虑两个概率核 $Q, Q\colon M \times M \to [0,1]$，$\sum_{y\in M} Q(x,y) = 1 = \sum_{y\in M} Q(x,y), x \in M$，它们关于测度 μ 满足对偶关系，即

$$\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)\widehat{Q}(y,x), \quad x,y \in M. \tag{7.9}$$

因此，有两个齐次马尔可夫链 $\{Z_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{Z_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$，其取值于 M，一步转移概率分别由 Q 和 Q 给出。我们用 $\mathbb{P}^x$, $\mathbb{P}^x$ 表示从 $x \in M$ 出发的链的分布，即 $\mathbb{P}^x(Z_n = y) = \mathbb{P}(Z_n = y \mid Z_0 = x)$ 和 $\mathbb{P}^x(Z_n =$

我们有 $\mathrm{P}^x(Z_n = y) = Q_n(x,y)$ 和 $\mathrm{P}^x(Z_n = y) = Q_n(x,y)$，其中$Q_0(x,y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y)$，$Q_1(x,y) = Q(x,y)$，且 $Q_{n+1}(x,y) = \sum_{z\in M} Q_n(x,z)Q_1(z,y)$，$n \geqslant 1$，而$Q_n$'s 的定义类似。关于 μ 的密度为

$$q_n(x,y) = \frac{\mathbb{P}^x(Z_n = y)}{\mu(y)} = \frac{Q_n(x,y)}{\mu(y)} \quad \text{and} \quad \widehat{q}_n(x,y) = \frac{\widehat{\mathbb{P}}^x(\widehat{Z}_n = y)}{\mu(y)} = \frac{\widehat{Q}_n(x,y)}{\mu(y)}.$$

显然，(7.9) 可推广为 $\mu(x)Q_n(x,y) = \mu(y)Q_n(y,x)$，$x,y \in M$, $n \in \mathbb{N}$，且有 $\widehat{q}_n(x,y) = q_n(y,x)$。相应的 n 步转移算子为

$$Q_n f(x) = \sum_{y\in M} Q_n(x,y)f(y) = \sum_{y\in M} q_n(x,y)f(y)\mu(y)$$

当级数有限时； $Q_n f$ 的定义方式类似。

主要研究对象是连续时间链 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 和 $\{X_t : t \geqslant 0\}$，它们分别由$X_t := Z_{N_t}$、$X_t := Z_{N_t}$定义，其中 $\{N_t : t \geqslant 0\}$ 是参数为 $\lambda = 1$ 的独立泊松过程。显然，有 $\mathrm{P}^x(X_t \in A) = \sum_{y\in A} P_t(x,y)$，$A \subset M$，其中

$$P_t(x,y) = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(x,y), \quad t > 0,\ x \in M.$$

该过程的转移半群 $\{P_t : t \geqslant 0\}$ 定义为

$$P_t f(x) = \sum_{y\in M} f(y)P_t(x,y) = \sum_{y\in M} f(y)p_t(x,y)\mu(y), \quad \text{with} \quad p_t(x,y) := \frac{P_t(x,y)}{\mu(y)},$$

对所有 f 上的可容许函数 M均成立。转移概率 $P_t(x,y)$、核 $\widehat{p}_t(x,y)$以及 该过程的转移半群 $\{P_t : t \geqslant 0\}$，均相应地定义。由柯西–施瓦茨不等式可容易看出，所有算子 P_t 和 P_t 都是 $L^2(M,\mu)$上的压缩算子；同样地，我们有 $\widehat{p}_t(x,y) = p_t(y,x)$，这意味着第 7.1 节开头所述的弱对偶关系成立。此外，直接可以看出，两个转移半群都是双重 Feller。特别地，由于(M,d)是一致离散的，强 Feller 性质也随之成立。还可以验证，这些半群的超压缩性等价于核 $q_1(x,y)$的有界性，例如当 $\inf_{x\in M}\mu(x) > 0$时。正性改善性质源于 核 $P_t(x,y)$和 $P_t(x,y)$的严格正性。当链 $\{Z_n : n \in \mathbb{N}_0\}$、$\{Z_n : n \in \mathbb{N}_0\}$不可约时，即对任意 x、$y \in M$，存在 $n = n(x,y) \in \mathbb{N}$，使得 $P_n(x,y)\ P_n(x,y) > 0$，即属于此情形。

现在我们可以明确估计具有禁闭势的 Feynman–Kac 半群的拟遍历行为的空间速率（见推论 3.5）。这些速率的形式为 $U_{t_1}\mathbb{1}_M(x)/\phi_0(x)$ 和 $U^*_{t_1}\mathbb{1}_M(x)/\psi_0(x)$，其中 $t_1 > 0$。函数 $U_{t_1}\mathbb{1}_M(x)$ 和 $U^*_{t_1}\mathbb{1}_M(x)$ 可以用常数或利用 (7.1) 中的上界进行估计。 [13] 将给出一大类过程的更精确估计。另一方面， [14] 中可以找到对相当一般的一类过程及相当一般的禁闭势的基态的精确下界估计。

如果我们有基态的良好下界估计，那么就可以应用引理 4.5 和定理 4.6，根据大时间下热含量的有限性推导出渐进 GSD 和渐进指数拟遍历性。例如， [14] 中可以找到这类估计。

7.1.4. 无限图上的连续时间简单随机游走。 标准参考文献：Barlow [4]。这是上一节示例的一个特例：设 M 为可数无限集， $\Gamma = (M,E)$ 为其上的连通局部有限图。我们赋予 M 测地度量 $d : M \times M \to \mathbb{N}_0$；图上简单随机游走的底层测度和转移概率由 Γ上的电导网络定义。例如，测度 $\mu = (\mu_x)_{x\in M}$ 的 Frostman 性质可由以下条件保证：存在常数 $c_1 > 0$，使得 $\mu_x \leqslant c_1$，$x \in M$，且测地球 $B_n(x)$ 的基数受某个幂型函数控制，即对某个 $d_M > 0$，$\sup_{x\in M}\sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-d_M}|B_n(x)| < \infty$。

7.1.5. 简单嵌套分形上的布朗运动。 标准参考文献：Lindstrøm [41], Kusuoka[37], Fukushima [19], Kumagai [35]。设 $M \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ 是一个（无界）简单嵌套分形，并设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为状态空间为 M的布朗运动。关于简单嵌套分形的定义及其上的布朗运动的各种构造，请参阅[41, 37, 19] 。集合 M 继承了 $\mathbb{R}^d$上的欧几里得拓扑，测度 μ 是 M 上的豪斯多夫测度（特别地， μ 是一个 d_M-Frostman测度，其中 d_M 是 M的豪斯多夫维数）。已知 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个马尔可夫过程，其转移密度对称、联合连续且有界，并满足次高斯估计 [35,第 5] 节。因此，过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的转移半群是一个双重 Feller、超压缩且正性改善的半群。

7.1.6. 从属过程。 标准参考文献：Sato [49], Schilling、Song 和 Vondraček [52]。我们的结果还涵盖另一类过程，即从属过程。回忆一下，子ordinator 是一种取值于 $[0,\infty)$、从 0 开始的递增 Lévy 过程。它由其拉普拉斯变换唯一确定：我们有 $\mathbb{E}e^{-\lambda S_t} = e^{-t\phi(\lambda)}$, $t > 0$，其中指数$\phi\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ 是如下形式的伯恩斯坦函数

$$\phi(\lambda) = b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u})\,\rho(du).$$

这里 $b \geqslant 0$ 是漂移项， ρ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的测度，满足 $\int_0^\infty (1\wedge u)\rho(du) < \infty$ （Lévy 测度）。

设 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 和 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 是第 7.1 节中的马尔可夫过程，并设 $\{S_t : t \geqslant 0\}$是一个与 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ 和 $\{X_t : t \geqslant 0\}$独立的子ordinator。我们通过公式 $X_t^\phi := X_{S_t}$, $\widehat{X}_t^\phi := \widehat{X}_{S_t}$分别定义从属过程 $\{X_t^\phi : t \geqslant 0\}$, $\{\widehat{X}_t^\phi : t \geqslant 0\}$。由独立性可知，它们的转移半群 $\{P_t^\phi : t \geqslant 0\}$和 $\{\widehat{P}_t^\phi : t \geqslant 0\}$由下式给出

$$P_t^\phi f(x) = \int_{[0,\infty)} P_s f(x)\,\mathbb{P}(S_t \in ds), \quad \widehat{P}_t^\phi f(x) = \int_{[0,\infty)} \widehat{P}_s f(x)\,\mathbb{P}(S_t \in ds),$$

对于 $f \in L^2(M,\mu)$ 或 $f \in L^\infty(M,\mu)$。显然，这些公式在 $f \in L^2(M,\mu)$ 上定义了压缩算子，并且第 7.1 节中描述的弱对偶关系成立。此外，这些半群继承了半群 $\{P_t : t \geqslant 0\}$ 和 $\{P_t : t \geqslant 0\}$ 的 Feller 性质、强 Feller 性质（前提是 S_t 不是复合泊松子 ordinator ）以及正性改善性质。唯一需要额外假设的正则性性质是超压缩性：假设对于每个 $t > 0$， $P_t, \widehat{P}_t$ 都是从 $L^2(M,\mu)$ 到 $L^\infty(M,\mu)$ 的有界算子。根据注 2.1，这等价于对于任意 $t > 0$，从 $L^1(M,\mu)$ 到 $L^\infty(M,\mu)$ 的有界性。因此，只要满足以下假设，从属半群及其对偶的超压缩性便得以保证：

$$\left\|P_t^\phi\right\|_{1,\infty} \leqslant \int_{[0,\infty)} \|P_s\|_{1,\infty}\,\mathbb{P}(S_t \in ds) < \infty, \quad t > 0.$$

7.2. **谐振子的渐进一致指数准遍历性**。设 $H = -\Delta + |x|^2$ 为作用于 $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ 中的薛定谔算子，并以 $U_t = e^{-tH}$,$t \geqslant 0$表示相应薛定谔半群的算子。众所周知，对于每个 $t > 0$， U_t 都是一个紧、自伴且保正的积分算子，其核为

$$u_t(x,y) = (2\pi\sinh(2t))^{-d/2} \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\tanh(t)|x+y|^2 + \coth(t)|x-y|^2\right)\right), \tag{7.10}$$

例如参见 [60, (1.4)]。特别地，假设条件（**A0**）–（**A3**）均得到满足。基态特征函数和特征值由下式给出

$$\phi_0(x) = \pi^{-d/4} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad \text{and} \quad \lambda_0 = d, \tag{7.11}$$

以及（参见 [60, 命题 3.3][3]）

$$U_t\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) = (\cosh(2t))^{-d/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2\coth(2t)}\right), \quad t>0. \tag{7.12}$$

容易验证，半群 $\{U_t : t \geqslant 0\}$ 不是 aGSD，参见 [24, 例 4.4]；特别地，利用推论 4.4 可知，它不是一致拟遍历的，另见 [31, 第 4 节3]中的讨论。我们将证明，当前的结果可以直接用于描述该半群真正的拟遍历性质。

首先，注意到 (7.12) 表明，对于每个 $t>0$，热含量 $Z(t) = \int_{\mathbb{R}_d} U_t\mathbb{1}(x)dx$ 都是有限的，因此我们在第 3 节中的结果适用。特别地，定理 3.4 确保半群 $\{U_t : t \geqslant 0\}$ 对于每个有限初始分布都是指数拟遍历的，并且极限测度

$$m(dx) = \frac{\phi_0(x)}{\|\phi_0\|_1}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,dx$$

是 $\{U_t : t \geqslant 0\}$的唯一拟平稳测度。根据推论 3.5，我们还可得到具有显式空间速率的逐点版本

$$\frac{U_1\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x)}{\phi_0(x)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\cosh 2}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{e^4-1}\right),$$

它在紧集上一致。

我们将证明拟遍历性是渐进一致的。注意，半群$\{U_t : t \geqslant 0\}$ 是 pGSD，参见定义 4.2.b)。

命题 7.3。设 $x \in \mathbb{R}^d$，$t>0$ 且 $C>0$。则：

$$U_t\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) \leqslant Ce^{-\lambda_0 t}\phi_0(x) \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leqslant \sqrt{(e^{4t}+1)\left(\log C - \frac{d}{2}\log(2\sqrt{\pi}) + \frac{d}{2}\log(1+e^{-4t})\right)}.$$

特别地，若 $C < (2\sqrt{\pi})^{d/2}$，则当 t 足够大时右端为空；若 $C = (2\sqrt{\pi})^{d/2}$，则当 t 足够大时，右侧的不等式定义了一个 x 的有界集。

证明。 由 (7.11) 和 (7.12)，左侧的不等式可写为

$$\exp\left[|x|^2\left(\frac{e^{-2t}}{e^{2t}+e^{-2t}}\right)\right] \leqslant C\pi^{-\frac{d}{4}}\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right)^{\frac{d}{2}}e^{-dt} = C(2\sqrt{\pi})^{-\frac{d}{2}}(1+e^{-4t})^{\frac{d}{2}},$$

这也可以等价地改写为

$$|x|^2 \leqslant \left(1+e^{4t}\right)\left(\log C - \frac{d}{2}\log(2\sqrt{\pi}) + \frac{d}{2}\log(1+e^{-4t})\right). \qquad \square$$

现在假设 $C > (2\sqrt{\pi})^{d/2}$ 并记

$$\rho(t) := Ke^{2t}\sqrt{(1+e^{-4t})\left(1+\frac{d}{2K^2}\log(1+e^{-4t})\right)}, \quad t \geqslant 1,$$

其中 $K = \sqrt{\log\left(C/(2\sqrt{\pi})^{d/2}\right)}$。显然，我们有 $\rho(t) = Ke^{2t}(1+o(1))$，因为 $t\to\infty$。由命题 7.3 可知，半群 $\{U_t : t \geqslant 0\}$ 是 pGSD，其穷尽族为$\{K_t : t \geqslant 1\}$，其中 $K_t = \overline{B}_{\rho(t)}(0)$，即

$$U_t\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) \leqslant Ce^{-\lambda_0 t}\phi_0(x), \quad \text{for} \quad |x| \leqslant \rho(t), \ t \geqslant 1. \tag{7.13}$$

因此，我们可以应用定理 5.2，证明渐进指数型一致拟遍历性在任意空间 L^p 上成立；由(7.12)很容易看出，假设 (A4) 对

[3]该参考文献中的结果表述包含一个小的排印错误：缺少因子 2π 在双曲余弦之前 $(2t)$，但证明是正确的

每个 $t_0 > 0$ 都成立。更确切地说，对于每个 $a \in (0,1)$ 和 $p \in [1,\infty]$，存在常数 C_1、$C_2 > 0$，使得

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{M}^1\left(\overline{B}_{\rho(at)}(0)\right)} \sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}} \left|\frac{\sigma(U_t f)}{\sigma(U_t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d})} - m(f)\right| \leqslant C_1 e^{-C_2 t}, \tag{7.14}$$

当 $t > 1$ 足够大时。

值得注意的是，我们可以利用 (7.10) 和 (7.12) 验证以下结论：对于由 $\sigma_t = \delta_{x_t}$ 给出的测度族 $\{\sigma_t\}_{t\geqslant 1}$，其中 $x_t = (e^{2t}x_0)/2$，$x_0 \in \mathbb{R}^d$ 固定；对于 $f = \mathbb{1}_K$，其中 K 是有限勒贝格测度的 Borel 集，我们有

$$\frac{U_t f(x_t)}{U_t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x_t)} = \frac{\sigma_t(U_t f)}{\sigma_t(U_t \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d})} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_K e^{\frac{(y-x_0)^2}{2}}\, dy. \tag{7.15}$$

这一点最早由 [31, 第 135] 页在 $d = 1$ 中指出；其目的是证明谐振子的拟遍历性并非关于 $\mathbb{R}$ 一致（请注意，该文作者研究的是动能项经过缩放的薛定谔算子，即 $Hf = (1/2)f'' + |x|^2 f$）。

现在我们可以看得更深入。事实上，(7.15) 表明，(7.14) 中的收敛不可能在由 pGSD 性质 (7.13) 得到的集合 K_t 上一致——可以选择 x_0，使得当 t 足够大时，$x_t \in K_t$。这意味着定理 5.2 在如下意义下是最优的：一般而言，具有穷尽族 $\{K_t : t \geqslant t_0\}$ 的 pGSD 性质蕴含具有 $\{K_{at}$ 的渐进指数拟遍历性 $t \geqslant t_0/\theta\}$，但仅当 $a < 1$ 时成立，参见备注 5.3。

7.3. DJP 情形下的非局部薛定谔算子半群。 本文的主要动机之一，是描述近期论文 [26] 中所研究的薛定谔半群的拟遍历性质。这些演化半群属于形如 $H = -L + V$ 的非局部薛定谔算子，其中 L 是对称 Lévy 过程 $\{X_t$ 的生成元：$t \geqslant 0\}$（所谓的*Lévy 算子*），该过程在 $\mathbb{R}^d$，$d \geqslant 1$ 中具有直接跳跃性质（简称 DJP），而 V 是一个充分正则的禁闭势。在这种一般性框架下，我们在 [26] 中发现了 L^2 中紧半群的一种新的正则性性质，并将其称为渐进内在超收缩性（简称 pIUC）。这意味着，随着 $t \to \infty$，半群的正则性不断提高。现在，我们希望理解 pIUC 对半群拟遍历性质的影响。

本节考虑的过程类由对称（自对偶）的强 Feller Lévy 过程组成（参见第 7.1.1 节，记号也见该节）。此外，我们还必须对密度 $p_t(x)$ 和 Lévy 测度 ν 施加一些额外的正则性条件（[26] 中的假设 (A1)–(A2)；此处不详述）。关键性质如下：我们假设 Lévy 测度 $\nu(dx)$ 具有密度 $\nu(x)\,dx$，并且存在一个递减的“剖面”函数 $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$，使得 $\nu(x) \asymp f(|x|)$，$x \neq 0$，且

$$f_1 * f_1(x) \leqslant c f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{7.16}$$

其中 $c > 0$ 为常数，$f_1 := f \wedge 1$。这一条件具有非常直观的概率解释，因此称为直接跳跃性质（DJP）。注意，该类包含许多跳跃莱维过程及其相应的 Lévy算子，它们在各种应用中发挥着重要作用。例如，它包含

- 分数阶拉普拉斯算子 $L = -(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha \in (0,2)$（作为各向同性α-稳定过程的生成元）；这里 $\nu(x) = c_{d,\alpha}|x|^{-d-\alpha}$;
- 相对论算子 $L = -(-\Delta + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} + m$, $\alpha \in (0,2)$, $m > 0$（作为各向同性相对论 α-稳定过程的生成元）；这里 $\nu(x) \asymp e^{-m^{1/\alpha}|x|}(1 \wedge |x|)^{-\frac{d+\alpha-1}{2}}|x|^{-\frac{d+\alpha+1}{2}}$。

我们假设 $V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, dx)$ 是一个禁闭势（即，当 $|x| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$），并且存在一个递增剖面函数 $g\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$，其在无穷远处的增长不快于指数型函数；此外，存在常数 c_1，$c_2 \geqslant 1$，使得对所有 $|x| \geqslant c_2$，都有 $c_1^{-1} g(|x|) \leqslant V(x) \leqslant c_1 g(|x|)$，详见 [26, 假设 (A3)]。

薛定谔算子 $H = -L + V$ 是良定义的、下有界的，并且在 $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ 中自伴。我们用 $U_t = e^{-tH}$，$t \geqslant 0$ 表示相应演化

半群 群的算子。已知它们具有如下概率论意义下的 Feynman–Kac 表示 n

$$U_t f(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^t V(X_s)\, ds} f(X_t) \right], \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, dx),\ t > 0. \tag{7.17}$$

算子 U_t 是自伴的；根据 [26, 引理 2.3]（或引理 7.1）和引理 7.2.a)，所有正则性假设（**A0**）–（**A3**）均得到满足，而（**A4**）可由引理 7.2.a) 的证明推出。关于自伴薛定谔算子和 Feynman–Kac 半群，我们通常参考专著 [17]。

现在我们将说明本文的结果如何应用于这些半群。讨论将分为三个部分。

(1) 热含量与指数拟遍历性。首先，由于引理 7.2.b)，我们知道

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{\log|x|} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, t_1 > 0 \,:\, Z(t_1) < \infty, \tag{7.18}$$

因此，我们在第 3 节中的结果适用。更确切地说，根据定理 3.4，半群 $\{U_t :\ t \geqslant 0\}$对任意有限初始分布都是指数拟遍历的，且极限测度

$$m(dx) = \frac{\phi_0(x)}{\|\phi_0\|_1}\, dx,$$

其中 $\phi_0(x)$ 是算子 H 的基态，是 $\{U_t$ 的唯一拟平稳测度：$t \geqslant 0\}$。此外，在推论 3.5 中，我们得到了一个逐点版本，其空间速率为 $U_{t_1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x)/\phi_0(x)$，且在紧集上一致。根据 [25, 推论 2.2]，存在常数 $c_3 > 0$，使得

$$\phi_0(x) \geqslant c_6 \left(1 \wedge \frac{\nu(x)}{V(x)}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

（对于没有径向轮廓的势函数，这一点仍然成立）。另一方面，我们总有

$$U_{t_1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) \leqslant e^{\|V_-\|_\infty t_1}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

由此得到速率的以下显式估计

$$\frac{U_{t_1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x)}{\phi_0(x)} \leqslant c_3 \frac{V(x)}{\nu(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{7.19}$$

右侧的函数在 $|x| \to \infty$ 趋于无穷时也趋于无穷，但在紧集上有界。关于 $U_{t_1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x)$，更好的估计可见 [26, 定理 4.8]。注意，(7.18) 中的充分条件不依赖于 ν。

(2) *aGSD* 区域和一致指数拟遍历性。根据 [25,定理 2。6],

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} > 0 \iff \exists\, t_1, c_4 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d \,:\, U_{t_1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) \leqslant c_4 \phi_0(x). \tag{7.20}$$

请回忆，右侧的性质称为 aGSD，参见定义 4.2.a)。如果我们处于 aGSD 区域——也就是说，如果势函数的增长相对于 $|\log\ \nu(x)|$ 足够大——那么上文在推论 3.5 中讨论的指数拟遍历性将在整个空间 R^d 上变为一致的。这正是我们在推论 4.4.a) 中看到的结论。同样的结论也可由 [31, 定理 1、推论 2]推出。然而，现在我们可以得到更多结论。结合推论 4.4 和 (7.20)，我们得到半群 $\{U_t$ 的一致拟遍历性：$t \geqslant 0\}$等价于以下条件

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} > 0.$$

如果 $\nu(x)$在无穷远处呈多项式衰减（例如分数阶拉普拉斯算子的情形），那么当 ν足够大时，$|\log\ \nu(x)| \asymp \log\ |x|$，且（7.18）和（7.20）中的性质等价。另一方面，如果 ν 在无穷远处的衰减快于任何多项式，那么（7.20）比（7.18）限制更严格。例如，如果 $\nu(x)$在无穷远处呈指数型（例如相对论算子的情形），那么当 $|x|$足够大时，$|\log\ \nu(x)| \asymp |x|$。

(3)*pGSD* 与渐进一致拟遍历性。最后，我们刻画薛定谔半群 $\{U_t$ 的拟遍历行为： $t \geqslant 0\}$ 对于上述禁闭势，无论势函数在无穷远处增长得多么缓慢，只要它们不满足（7.20），就会使我们脱离 aGSD 区域。值得注意的是，这个问题此前完全悬而未决。为了尽可能精确地处理这一问题，我们必须准确把握 aGSD 区域与非 aGSD 区域之间的阈值。因此，我们遵循 [26, 假设（A4）]，并对势函数 V的剖面 g 施加一个额外的技术条件。更具体地说，我们要求 g 以足够规则的方式依赖于 Lé维密度 ν 的剖面 f： 我们考虑满足 $f(R_0) < 1$的 $R_0 > 0$，并假设 $g(r) = h(|\log f(r)|)$， $r \geqslant R_0$，其中增函数h 满足： $[|\log f(R_0)|, \infty) \to (0,\infty)$，且 $h(s)/s$ 单调。在此假设下，具有 Lé维密度 ν 和势函数 V的薛定谔半群 $\{U_t : t \geqslant 0\}$ 分为两类：

a) **（aGSD 区域）：** 下极限$_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} > 0$，即（7.20）成立；b) **（非 aGSD 区域）：** 极限$_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{|\log \nu(x)|} = 0$，

参见 [26, 注 5.1]。我们已经从第（2）部分得知，在 aGSD 区域，薛定谔半群是一致指数拟遍历的；事实上，这两个性质是等价的。

本节其余部分将致力于分析非 aGSD 区域中的拟遍历行为。当然，如果（7.18）成立，那么根据上面的第（1）部分，我们知道具有半显式速率的指数拟遍历性，并且该速率在紧集上一致。借助[26, 推论 5.6 b)]，现在我们可以为速率（7.19）给出更好的估计

$$\frac{U_{t_1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x)}{\phi_0(x)} \leqslant c_5\left(1 \vee \frac{e^{-c_5 V(x)}}{\nu(x)}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

对于某些 c_4、 $c_5 > 0$。第 5 节中的定理现在给出了强得多的结果。在该论文[26]中，我们确定了紧半群的一种新的大时间正则性性质，并将其称为渐进内在超收缩性（pIUC）。本文所考虑的半群具有这一性质。在 [26, 推论 5.6 b)] 中，我们证明 pIUC 蕴含以下双边尖锐估计：存在 $\theta \in (0,1)$、 $t_2 > 0$ 以及一个增函数 $\rho\colon [t_2,\infty) \to (0,\infty)$，使得 $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \infty$，从而

$$U_t\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) \asymp e^{-\lambda_0 t}\phi_0(x) \asymp e^{-\lambda_0 t}\left(1 \wedge \frac{\nu(x)}{V(x)}\right), \quad |x| \leqslant \rho(\theta t),\ t \geqslant t_2/\theta \tag{7.21}$$

（注意，比较常数关于 x 和 t是一致的！）。函数 ρ 是 $r \mapsto |\log f(r)|/g(r)$ 的右连续广义逆函数，见 [26, 引理 5.2]。注意，（7.21）正是渐进基态支配 （pGSD）性质，参见定义 4.2.b)。

因此，我们看到 $\{U_t\colon t \geqslant 0\}$ 是 pGSD，其穷尽族为 $\{K_t\colon t \geqslant t_2/\theta\}$，其中$K_t = \overline{B}_{\rho(\theta t)}(0)$，并且可以应用定理 5.2 来证明，在任意空间 L^p 上都成立渐进一致准遍历性。我们得到，存在 γ，$t_0 > 0$，使得对于每个$a, b \in (0,1)$，若 $a + 2b = 1$且 $p \in [1,\infty]$，则存在常数 $c_6 > 0$，使得

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{M}^1\left(\overline{B}_{\rho(a\theta t)}(0)\right)} \sup_{\substack{f\in L^p(M,\mu)\\ \|f\|_p\leqslant 1}} \left|\frac{\sigma(U_t f)}{\sigma(U_t\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d})} - m(f)\right| \leqslant c_6\kappa_b(t), \quad t > (4/(a\wedge b))t_0,$$

其中

$$\kappa_b(t) := e^{-\gamma b t} + \sup_{|x|\geqslant\rho(b\theta t)} U_{t_0}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x).$$

根据定理 5.5，测度 m 是薛定谔半群 $\{U_t$ 的唯一拟平稳分布： $t \geqslant 0\}$ ——无论 V 在无穷远处增长得多么缓慢。我们只需验证条件 (5.5)。为此，我们注意到，根据推论 5.6 b)，存在常数 c_7、 $c_8 > 0$，使得

$$e^{\lambda_0 t}U_t\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}(x) \leqslant c_7 e^{-(c_8 V(x)-\lambda_0)t}, \quad |x| \geqslant \rho(\theta t),$$

当 t 足够大时成立。由于当 $|x| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$，且当 $t \to \infty$ 时，$\rho(t) \to \infty$，这便推出 (5.8)，而它等价于 (5.5)。

例 7.4。下面针对两类具体的 Lévy 测度和势函数说明这些结果。符号说明见第 7.1.1 节。

a) （**多项式 Lévy 密度**，参见 [26,第 5.4 节，例 5.7]）：令

$$\nu(x) \asymp |x|^{-d-\alpha}(e \vee |x|)^{-\delta}, \quad \alpha \in (0,2),\ \delta \geqslant 0,$$

并令 $V(x) = (1 \vee \log |x|)^{\beta}$, $\beta > 0$。则有如下结论：

- 若 $\beta \geqslant 1$，则相应的薛定谔半群处于 aGSD 区域，并且成立指数一致拟遍历性，参见上文第（2）部分；
- 若 $\beta \in$ （0, 1），则该半群处于非 aGSD 区域；它是 pGSD，并且成立渐进一致拟遍历性，参见第（3）部分。我们有

$$\rho(t) = \exp\left(t^{1/(1-\beta)}\right) \quad \text{and} \quad \kappa_b(t) \asymp \exp\left(-c_9\left(t \wedge t^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)\right), \tag{7.22}$$

当 t 取较大值时，下界和上界中的常数 c_9 不同。对于 $\beta \geqslant 1/2$，速率 $\kappa_b(t)$ 是指数型的；对于 $\beta < 1/2$，则是次指数型的（拉伸指数型）。

b) （**指数型莱维密度**，参见 [26, 第 5.5 节、例 5.10]）：令

$$\nu(x) \asymp e^{-m|x|}(1 \wedge |x|)^{-d-\alpha}(1 \vee |x|)^{-\delta}, \quad m > 0,\ \alpha \in (0,2),\ \delta > (d+1)/2,$$

并令 $V(x) = (1 \vee |x|)^{\beta}$, $\beta > 0$。则有如下结论：

- 若 $\beta \geqslant 1$，则相应的薛定谔半群处于 aGSD 区域，并且具有指数一致拟遍历性，参见上文第 (2) 部分；
- 若 $\beta \in$ (0, 1)，则该半群处于非 aGSD 区域；它具有 pGSD，并且具有渐进一致拟遍历性，参见第 (3) 部分。我们有

$$\rho(t) = t^{1/(1-\beta)}$$

当 t 取较大值时，但速率 $\kappa_b(t)$ 与 (7.22) 中的形式相同。

定理 4.6 还表明，任何具有有限热含量（在较大时间下）的半群 $\{U_t : t \geqslant 0\}$ 都自动具有 pGSD；此外，渐进一致拟遍历性以指数型时间速率成立。对于多项式 Lévy 密度，这一结果并无新意，因为我们已经知道，在这种情形下，(7.18) 等价于 (7.20)。然而，对于衰减更快的情形，定理中的断言并非平凡结论。例如，在指数情形下，可以验证定理 4.6 推出 pGSD 和渐进一致拟遍历性，其穷尽族为 $\{K_t : t \geqslant t_0\}$，其中 $K_t = \overline{B}_{ct}(0)$，对某个常数 $c > 0$。

参考文献

[1] D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux：《马尔可夫扩散算子的分析与几何》。Springer，柏林，2013年。[2] R. Bañuelos：薛定谔算子的内在超压缩性与特征函数估计。《泛函分析杂志》**100** (1991) 181–206。[3] R. Bañuelos, M. van den Berg：角状区域的狄利克雷特征函数与截面上的拉普拉斯算子。《伦敦数学学会杂志》(2) **53** (1996) 503–511。[4] M. Barlow：《图上的随机游走与热核》。剑桥大学出版社（伦敦数学学会讲义系列 **458**），剑桥，2017年。[5] B. Böttcher, R. Schilling, J. Wang：《Lévy 型过程：构造、逼近与样本路径性质》。Springer，数学讲义 **2099**（Lévy 专题 III），尚，2013年。[6] R. Carmona, W.C. Masters, B. Simon：相对论薛定谔算子：特征函数的渐近行为。《泛函分析杂志》**91** (1990) 117–142。[7] I. Chavel, L. Karp：热核的大时间行为：抛物型 λ势函数的两择性。《瑞士数学评论》**66** (1991) 541–556。[8] X. Chen, P. Kim, J. Wang：无界开集上非局部狄利克雷形式的内在超压缩性与基态估计。《数学物理通讯》366 (2019) 67–117。[9] X. Chen, P. Kim, J. Wang：角状区域上对称稳定过程的双侧狄利克雷热核估计。《数学年刊》**384** (2022) 1–46。

[10] X. Chen and J. Wang：对称跳跃过程的Feynman–Kac半群的内在超压缩性。《泛函分析杂志》270 (2016) 4152–4195。[11] K.L. Chung：带乘法泛函的双重Feller过程。载于：E. Çinlar 等（编）《随机过程研讨会》。Birkhäuser，《概率与统计进展》12，波士顿（MA），1986年，第63–78页。[12] K.L. Chung, J.B. Walsh：马尔可夫过程、布朗运动与时间对称性。Springer，《数学科学基础丛书》249，纽约，2005年（第2版）。[13] W. Cygan, K. Kaleta, M. Śliwiński, R.L. Schilling。进行中。[14] W. Cygan, K. Kaleta, M. Śliwiński：带限制势的离散时间Feynman–Kac算子的调和函数衰减。ALEA，《拉丁美洲概率与数理统计杂志》19 (2022) 1071–1101。[15] E.B. Davies：《热核与谱理论》。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[16] E.B. Davies, B. Simon：薛定谔算子与狄利克雷拉普拉斯算子的超压缩性和热核。《泛函分析杂志》59 (1984) 335–395。[17] M. Demuth, J.A. van Casteren：《自伴Feller算子的随机谱理论：泛函分析方法》。Birkhäuser，巴塞尔，2000年。[18] R. Engelking：《一般拓扑学》。修订完整版。Heldermann出版社，柏林，1989年（第1版，PWN，华沙，1976年）。[19] M. Fukushima：嵌套分形上的狄利克雷形式、扩散过程与谱维数。载于：《随机分析中的思想与方法》，《随机性与应用》。剑桥大学出版社，剑桥，1992年，第151–161页。[20] N. Jacob：《伪微分算子与马尔可夫过程：马尔可夫过程与应用》1、2、3。帝国理工学院出版社，伦敦，2001–2005年。[21] N. Jacob, R.L. Schilling：迈向次马尔可夫半群的 L^p势理论：核与容量。《数学学报》22 (2006) 1227–1250。[22] N. Jacob, F.-Y. Wang：非局部薛定谔算子的高阶特征值。《纯粹与应用分析通讯》17 (2018) 191–208。[23] K. Kaleta, T. Kulczycki：基于分数阶拉普拉斯算子的薛定谔算子的内在超压缩性。《势分析》33 (2010) 313–339。[24] K. Kaleta, M. Kwaśnicki, J. Lőrinczi：非局部薛定谔算子的压缩性与基态支配性质。《谱理论杂志》8 (2018) 165–189。[25] K. Kaleta, J. Lőrinczi：一类Lévy过程的Feynman-Kac半群的逐点特征函数估计与内在超压缩性型性质。《概率年刊》43 (2015) 1350–1398。[26] K. Kaleta, R.L. Schilling：非局部薛定谔算子的渐进内在超收缩性与热核估计。《泛函分析杂志》278 (2020) 108606（69页）。[27] M. Keller, D. Lenz, H. Vogt, R. Wojciechowski：关于热核大时间行为基本特征的注记。《纯粹与应用数学杂志》2015 (2015) 73–95。[28] P. Kim, R. Song：有界区域上非对称扩散半群的内在超压缩性。《东北数学杂志》60 (2008) 527–-547。[29] P. Kim, R. Song：具有测度值漂移和势的非对称扩散过程的内在超压缩性，《概率年刊》36 (2008) 1904–-1945。[30] P. Kim, R. Song：非对称Lévy过程的内在超压缩性。《数学论坛》21 (2009) 43–-66。[31] R. Knobloch, L. Partzsch：一致条件遍历性与内在超压缩性。《势分析》33 (2010) 107–136。[32] V. Knopova, R.L. Schilling：关于Lévy过程转移概率密度存在性的一则注记。《数学论坛》25 (2013) 125–149。[33] V. Knopova, A. Kulik, R.L. Schilling：一般稳定型马尔可夫过程的构造与热核估计。《数学论文集》（2021）569，86页。[34] F. Kühn：Lévy 型过程：矩、构造与热核估计。Springer，数学讲义2187（Lévy 专题 VI），柏林，2017年。[35] T. Kumagai：嵌套分形上布朗运动转移密度的估计。《概率论及相关领域》96 (1993) 205–224。[36] T. Kulczycki, B. Siudeja：相对论稳定过程的Feynman-Kac半群的内在超压缩性。《美国数学会会刊》358 (2006) 5025–5057。[37] S. Kusuoka：嵌套分形上扩散过程讲义。载于：《统计力学与分形》。Springer 数学讲义1567，柏林，1993年。[38] M. Kwaśnicki：无界开集上稳定半群的内在超压缩性。《势分析》31 (2009) 57–77。[39] M. Kwaśnicki, J. Mucha：拉普拉斯算子的完全伯恩斯坦函数的延拓技术。《演化方程杂志》18 (2018) 1341–1379。[40] D. Lenz, P. Stollmann, D. Wingert：薛定谔半群的紧性。《数学新闻》283 (2010) 94–103。

[41] T. Lindstrøm：嵌套分形上的布朗运动。《美国数学会回忆录》83（1990）。[42] G. Metafune、D. Pallara、A. Rhandi：薛定谔算子的核估计。《演化方程杂志》6（2006）433–457。[43] G. Metafune、C. Spina：一类薛定谔半群的核估计。《演化方程杂志》7（2007）719–742。[44] El M. Ouhabaz、A. Rhandi：某些二阶椭圆算子的核估计与特征函数估计。《数学分析与应用杂志》387（2012）799–806。[45] El M. Ouhabaz：与椭圆算子和薛定谔算子相关的半群的尖锐高斯界及 L^p增长。《美国数学会会刊》134（2006）3567–3575。[46] M. Murugan、L. Saloff-Coste：长程随机游走的转移概率估计。《纽约数学杂志》21（2015）723–757。[47] M. Murugan、L. Saloff-Coste：反常重尾随机游走的热核估计。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》55（2019）697–719。[48] R.G. Pinsky：条件扩散过程的寿命。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》26（1990）87–99。[49] K. Sato：《Lévy过程与无穷可分分布》。剑桥大学出版社，剑桥，2013（修订版）。[50] H.H. Schaefer：《Banach格与正算子》。Springer，纽约，1974。[51] R. Schilling：Lévy过程与Feller过程导论。载于：D. Khoshnevisan、R. Schilling：《从Lévy型过程到抛物型随机偏微分方程》。Birkhäuser，尚，2016。[52] R. Schilling、R. Song、Z. Vondraček：《伯恩斯坦函数》。Walter de Gruyter，2012（第2版）。[53] R.L. Schilling、T. Uemura：关于由伪微分算子生成的Dirichlet型的Feller性质。《东北数学杂志》（2007）59 401–422。[54] R.L. Schilling、J. Wang：与Lévy型算子相关的下有界半Dirichlet型。载于：Z-Q. Chen、N. Jacob、M. Takeda、T. Uemura：《Masatoshi Fukushima纪念文集：致敬Masatoshi Fukushima的三寿》。World Scientific，新泽西，2015，第25章，第507–526页。[55] Y. Shiozawa、J. Wang：具有无界系数的对称非局部Dirichlet型所生成半群的紧性。《势分析》58（2023）373–392。[56] A. Sikora：薛定谔半群核和约化热核的对角估计。《数学物理通讯》188（1997）233–249。[57] B. Simon： N体量子系统中特征函数和波包的逐点界。III。《美国数学会汇刊》（1975）317–329。[58] B. Simon：薛定谔半群。《美国数学会通报》7（1982）447–526。[59] B. Simon：热核的大时间行为：关于Chavel和Karp的一个定理。《美国数学会会刊》118（1993）513–514。[60] K. Stempak、J.L. Torrea：与厄米特展开相关算子的BMO结果。《伊利诺伊数学杂志》49（2005）1111–1131。[61] M. Takeda、Y. Tawara、K. Tsuchida：马尔可夫半群和薛定谔半群的紧性：一种概率方法。《大阪数学杂志》54（2017）517–532。[62] M. Takeda：具有紧性性质的对称马尔可夫过程的拟平稳分布的存在性与唯一性。《理论概率杂志》32（2019）2006–2019。[63] F.-Y. Wang、J.-L. Wu：具有下无界势的薛定谔半群的紧性。《数学科学通报》132（2008）679–689。[64] J. Wang：加权分数阶热半群的紧性与密度估计。《理论概率杂志》32（2019）2066–2087。[65] J. Zhang、S. Li、R. Song：一般马尔可夫过程的拟平稳性与拟遍历性。《中国科学：数学》57（2014）2013–2024。

（K. Kaleta）弗罗茨瓦夫科技大学，纯粹与应用
数学学院，维斯皮扬斯基大道27号，50-370 弗罗茨瓦夫，波兰。电子邮箱：kamil.kaleta@pwr.edu.pl

（R.L. Schilling）德累斯顿工业大学，数学学院，数学随机性研究所，01062 德累斯顿，德国。电子邮箱：rene.schilling@tu-dresden.de