arXiv:2304.12838v1 [math.CV] 25 Apr 2023

广义调和函数的一阶偏导数

ADEL KHALFALLAH 和 MOHAMED MHAMDI

Abstract. 设 α、$\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ 满足 $\alpha+\beta>-1$ 和 $1\le p\le\infty$。令 $u=P_{\alpha,\beta}[f]$ 为定义在 $\mathbb{D}$（即 $\mathbb{C}$的单位圆盘）上的（α，β）-调和映射，其边界f绝对连续，且 $\dot{f}\in L^p(0,2\pi)$，其中 $\dot{f}(e^{i\theta}):=\frac{d}{d\theta}f(e^{i\theta})$。本文研究偏导数 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}}u$属于空间 $H^p_G(\mathbb{D})$（即广义 Hardy 空间）的情况。我们证明，当 $\alpha+\beta>0$时，$\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}}u$ 均属于 $H^p_G(\mathbb{D})$。对于 $\alpha+\beta<0$，我们证明，若 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\overline{z}}u\in H^1_G(\mathbb{D})$，则 $u=0$ 或 u 是多重调和函数。

1. Introduction

令 $\mathbb{D}$ 为复平面 $\mathbb{C}$中的开单位圆盘，令 $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$ 为单位圆，并记

$$\partial_z=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)\qquad\text{and}\qquad\partial_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y).$$

1.1. (α,β)-调和函数。考虑 $\mathbb{D}$ 上形如以下形式的二阶偏微分算子族

$$\Delta_{\alpha,\beta}:=(1-|z|^2)\left((1-|z|^2)\partial_z\partial_{\overline{z}}+\alpha z\partial_z+\beta\,\overline{z}\partial_{\overline{z}}-\alpha\beta\right),$$

其中 α、β 为实参数。这些算子已由 Geller [10] 和 Ahern 等人 [1, 2] 在高维空间中引入并研究，最近又在平面情形下于 [15]中进行了研究。

尤其值得关注的是 $\mathbb{D}$ 中相关齐次方程的解：

$$\Delta_{\alpha,\beta}\,u=0. \tag{1.1}$$

如果函数 u 在 $\mathbb{D}$ 中二阶连续可微，并且 u 满足 $\Delta_{\alpha,\beta}u=0$，则称其为 (α,β)-调和函数。我们注意到，如果 u 是 (α,β)-调和函数，那么 $\overline{u}$ 是 (β,α)-调和函数。$(0,\alpha)$-调和函数称为 α-调和函数。

一个有趣的（α，β）-调和函数示例是 $K_{\alpha,\beta}$ 定义为

$$K_{\alpha,\beta}(z)=\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}.$$

2020 数学主题分类。主要分类：31A30；次要分类：31A05、35J25 .
关键词和短语。Hardy 空间，(α,β)-调和函数，Poisson 积分。Date: 26-4-2023.

对于满足 $\alpha+\beta>-1$ 的 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$，（$\alpha,\ \beta$）–调和泊松核定义为

$$P_{\alpha,\beta}(z)=c_{\alpha,\beta}\,\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}},\quad c_{\alpha,\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},\tag{1.2}$$

其中 Γ 是伽马函数。

$f\in L^1(\mathbb{T})$ 的（α,β）–调和泊松积分定义为

$$P_{\alpha,\beta}[f](z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{\alpha,\beta}(ze^{-i\theta})f(e^{i\theta})d\theta,\quad z\in\mathbb{D}.$$

Let

$$M_{\alpha,\beta}(z):=P_{\alpha,\beta}[1](z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{\alpha,\beta}(ze^{-i\theta})\,d\theta.$$

于是 $M_{\alpha,\beta}$ 是一个径向函数，并且

$$M_{\alpha,\beta}(z)=c_{\alpha,\beta}F(-\alpha,-\beta;1;|z|^2),$$

其中 F 是高斯超几何函数。常数 $c_{\alpha,\beta}$ 的选取使得 $\lim_{|z|\to1}M_{\alpha,\beta}(z)=1$。我们指出，在 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$的情况下，函数 $M_{\alpha,\beta}$ 是常数，且 $M_{\alpha,\beta}(z)=1$。关于（α,β）-调和函数的更多性质及 H¨older 连续性，参见 [1, 5, 14, 15, 16]。

我们回顾一下如下定义的高斯超几何函数:

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n\geq0}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\qquad z\in\mathbb{D},$$

对于 $a,b,c\in\mathbb{C}$，满足 $c\neq-1,-2,...$，其中

$$(a)_n=\begin{cases}1 & \text{for}\quad n=0,\\ a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{for}\quad n=1,2,3,...\end{cases}$$

称为 Pochhammer 符号。

我们列出一些性质，参见例如（[3], 第 2 章）

$$\lim_{x\to1}F(a,b;c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\qquad\text{if}\quad c-a-b>0,\tag{1.3}$$

$$F(a,b;c;x)=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;x),\tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dx}F(a,b;c;x)=\frac{ab}{c}F(1+a,1+b;1+c;x),\tag{1.5}$$

$$F(a,b;a+b;x)\approx-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\log(1-x)\quad(x\to1^-).\tag{1.6}$$

渐近关系式 (1.6) 归功于 Gauss，其精细形式则归功于拉马努金 [4, p. 71]。

此外，我们还考虑满足方程 (1.1) 的函数 u 的相应狄利克雷边值问题，

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha,\beta} u &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{D}, \\ u &= f \quad \text{on} \quad \mathbb{T}. \end{cases} \tag{1.7}$$

函数 f 在 $\mathbb{T}$上连续，即 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$，且条件 (1.7) 是指在 $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ 中 $\lim_{r\to 1} u_r = f$，其中 $u_r(e^{i\theta}) := u(re^{i\theta})$。

定理 A（[10]）。设 α、$\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$ 满足 $\alpha+\beta > -1$。令 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$。那么，$u$ 在 $\mathbb{D}$ 中的函数满足 (1.7) 当且仅当其具有如下形式

$$u(z) = P_{\alpha,\beta}[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\alpha,\beta}(ze^{-i\gamma}) f(e^{i\gamma}) d\gamma,$$

对任意 $z \in \mathbb{D}$。

（α，β）-调和函数的齐次级数展开由以下定理给出。

定理 B（[1], [15]）。设 α、$\beta \in \mathbb{R}$。那么，u 是（α，β）-调和函数，当且仅当其具有如下形式

$$u(z) = \sum_{k\geq 0} c_k F(-\alpha, k-\beta; k+1; |z|^2) z^k + \sum_{k\geq 1} c_{-k} F(-\beta, k-\alpha; k+1; |z|^2)\overline{z}^k, \tag{1.8}$$

其中 $c_k \in \mathbb{C}$，对所有 $k \in \mathbb{Z}$均成立。

因此，对于 α、$\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$，其中 $\alpha+\beta > -1$、$f \in \mathcal{C}$（$\mathbb{T}$），以及 $u = P_{\alpha,\beta}[f]$，(1.8) 中的系数 c_k 与 f（k）即 f 的傅里叶系数之间的关系为

$$c_k F(-\alpha, k-\beta; k+1; 1) = \hat{f}(k) \text{ for } k \geq 0, \tag{1.9}$$

and

$$c_{-k} F(-\beta, k-\alpha; k+1; 1) = \hat{f}(-k) \text{ for } k \geq 1. \tag{1.10}$$

令 $\lambda > -1$ 和 $r \in [0,1)$，记为

$$I_\lambda(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^\lambda}{|1-re^{-i\theta}|^{\lambda+1}}\, d\theta,$$

对于 $\lambda > 0$，我们有

$$\lim_{r\to 1} I_\lambda(r) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma^2(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})} =: c_\lambda. \tag{1.11}$$

下面的引理给出了关于 I_λ 的一些估计。

引理 1.1。（[13, 命题 1.1] 和 [17]）令 $r \in [0,1)$。

（1）如果 $\lambda > 0$，那么

$$I_\lambda(r) \leq c_\lambda.$$

（2）如果 $-1 < \lambda < 0$，那么

$$I_\lambda(r) \leq c_{-\lambda}(1-r^2)^\lambda.$$

1.2. Hardy型空间。对于 $p \in (0,\infty]$，广义 Hardy 空间 $H^p_G(\mathbb{D})$ 由所有从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{C}$ 的可测函数 u 组成，这些函数满足：对于所有 $r \in (0,1)$，$M_p(r,u)$ 存在，并且 $\|u\|_p < \infty$，其中

$$M_p(r,u) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$\|u\|_p = \begin{cases} \sup\{M_p(r,u) : 0 < r < 1\} & \text{if } p \in (0,\infty) \\ \sup\{|u(z)| : z \in \mathbb{D}\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

显然，对于每个 $p \in (0,\infty]$，$H^p_G(\mathbb{D}) \subset L^p(\mathbb{D})$。我们用 $h^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$ 表示相应的 (α,β)-调和函数 Hardy 空间。经典 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{D})$（分别为 $h^p(\mathbb{D})$）是 $H^p_G(\mathbb{D})$ 中在 $\mathbb{D}$ 上解析的（分别为调和的）所有元素的集合。（参见 [8, 9]）。

(α,β)-调和函数的 Hardy理论已在 [1] 中得到详细研究。作者证明了以下

定理C。 [1] 设 u 为一个 (α,β)-调和函数，并假设 $\alpha+\beta > -1$。那么：

(i) $u = P_{\alpha,\beta}[f]$ 对于某个 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$1 < p \leq \infty$ 当且仅当 $\|u\|_p < +\infty$。

(ii) $u = P_{\alpha,\beta}[\mu]$ 对于某个测度 μ，当且仅当 $\|u\|_1 < +\infty$。

1.3. Lebesgue空间。记 $L^p(\mathbb{T})$，其中 $p \in [1,\infty]$ 是所有从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{C}$ 的可测函数 f 所构成的空间，且满足

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty) \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(e^{i\theta})| : \theta \in [0,2\pi)\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

众所周知，若 f 绝对连续，则它具有有界变差。这意味着对于几乎所有的 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$，导数 $\dot{f}(e^{i\theta})$ 存在，且在 $(0,2\pi)$ 上可积，其中

$$\dot{f}(e^{i\theta}) := \frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}).$$

1.4. 调和共轭与 M. Riesz定理。若 u 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的调和函数，由下式给出

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

那么，其调和共轭定义为

$$\tilde{u}(re^{i\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

其中 $m_n = -i$符号为 n；特别地， $\tilde{u}(0) = 0$。此外，我们有

$$u(z) + i\tilde{u}(z) = -u(0) + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1.12}$$

表达式 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 称为 u的里斯投影，记作 P_+u，即

$$P_+ : h(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$$

定义为

$$P_+(u)(z) := \sum_{n\geq 0} c_n z^n.$$

因此，式 (1.12) 可改写为

$$u + i\tilde{u} = -u(0) + 2P_+(u).$$

自然会考虑以下问题：如果 u在 $\mathbb{D}$ 中是调和的，并且 $u \in h^p(\mathbb{D})$， $1 \leq p \leq \infty$，那么 $P_+(u) \in H^p(\mathbb{D})$ 吗?
对于所有 $1 < p < \infty$，这个问题的答案都是肯定的。这就是 M. Riesz 证明的著名定理的内容；另见 Rudin [19,定理 17.26]。

定理 D。（M. Riesz）对于 $1 < p < \infty$，里斯投影 P_+

$$P_+ : h^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$$

是一个有界的算子，即存在一个常数 A_p 使得

$$\|P_+(u)\|_p \leq A_p\|u\|_p$$

对任意 $f \in h^p(\mathbb{D})$。

事实证明，黎斯定理对 $p = 1$ 和 $p = \infty$并不成立。

本文考虑以下问题:

问题：边界函数 f 满足什么条件，才能确保其 (α, β)-调和延拓 $u = P_{\alpha,\ \beta}[f]$ 的偏导数，即 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\bar{z}} u$，属于空间 $H^p_G(\mathbb{D})$（或 $L^p(\mathbb{D})$），其中 $p \in [1, \infty]$?

在 [20], 中，Zhu 处理了调和函数的相应问题，并在 [7]中对其进行了改进。

定理 E（[20] 和 [7]）。假设 $u = P[f]$ 是定义在 $\mathbb{D}$和 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 中的调和映射，其中 f 是一个绝对连续函数。

- 如果 $p \in [1, \infty)$，那么 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\bar{z}} u$ 都属于 $L^p(\mathbb{D})$。.
- 如果 $p = \infty$，那么存在一个调和映射 $u = P[f]$，满足 $f \in L^\infty(\mathbb{T})$，使得 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\bar{z}} u$ 均不属于 $L^\infty(\mathbb{D})$。

此外，通过要求调和延拓是拟正则的 [20] 或更一般地是椭圆的 [7], ，他们证明偏导数属于 $H^p(\mathbb{D})$，对于

$p \in [1, \infty]$。

定理 F（[7]）。假设 $p \in [1, \infty]$ 和 $u = P[f]$ 是 $\mathbb{D}$ 中一个（K, K'）-椭圆的映射，且满足 $f \in L^p$（$\mathbb{T}$），其中 f 是绝对连续函数， $K \geq 1$和 $K' \geq 0$。那么 $\partial_z u$ 和$\overline{\partial_{\overline{z}} u}$ 均属于 H^p（$\mathbb{D}$）。

在 [12], 中，我们对前面两个定理进行了改进，证明了对于$1 < p < \infty$，无须对 u 附加任何条件， $\partial_z u$ 和 $\overline{\partial_{\overline{z}} u}$ 均属于 H^p（$\mathbb{D}$）。

定理 G。假设 f是 $\mathbb{T}$ 上的绝对连续函数，且 $u = P[f]$是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射，并且 $f \in L^p$（$\mathbb{T}$）。

（1）如果 $p \in$ （$1, \infty$），那么 $\partial_z u$ 和 $\overline{\partial_{\overline{z}} u}$ 均属于 H^p（$\mathbb{D}$）。此外，存在一个常数 A_p，使得

$$\max(\|\partial_z u\|_p, \|\partial_{\overline{z}} u\|_p) \leq A_p \|\dot{f}\|_{L^p}.$$

（2）如果 $p = 1$ 或 $p = \infty$，那么 $\partial_z u$ 和 $\overline{\partial_{\overline{z}} u}$ 属于 $H^p(\mathbb{D})$ 当且仅当 $H(f) \in L^p(\mathbb{T})$。此外

$$2iz\partial_z u(z) = P[\dot{f} + iH(\dot{f})](z),$$

其中， $H(f)$ 表示 f的希尔伯特变换。

在 [11], 中，作者讨论了 α-调和函数的情形，并证明了以下结果。

定理 H. 设 $\alpha \in (-1, \infty)$，其中 $\alpha \neq 0$，且令 $u = P_\alpha[f]$ 和 f 是绝对连续的，使得 $f \in L^p(\mathbb{T})$，其中 $1 \leq p \leq \infty$。

（1）如果 $\alpha > 0$，那么 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}} u$ 属于 $H^p_G(\mathbb{D}) \subset L^p(\mathbb{D})$。（2）如果 $\alpha \in (-1, 0)$，那么对于 $p < -\frac{1}{\alpha}$， $\partial_z u$和 $\partial_{\overline{z}} u$属于 $L^p(\mathbb{D})$。（3）对于 $\alpha \in (-1, 0)$ 和 $p \geq -\frac{1}{\alpha}$，存在 u 一个 α-调和函数，使得$\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}} u \notin L^p(\mathbb{D})$；此外， $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}} u \notin H^1_G(\mathbb{D})$。（4）设 $\alpha \in (-1, 0)$。那么 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\overline{z}} u$ 属于 $H^p_G(\mathbb{D})$，当且仅当 u 是解析的。

回顾一下， P_α 是 α-调和函数的泊松核，其定义为

$$P_\alpha(z) := P_{0,\alpha}(z) = \frac{(1 - |z|^2)^{\alpha+1}}{(1 - z)(1 - \overline{z})^{\alpha+1}}.$$

本文旨在将先前关于(α, β)-调和函数的结果推广到 α, β为实数且满足 α, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ 和 $\alpha + \beta > -1$的情形。

2. Main results

回顾一下， u 关于 θ 的极坐标偏导数定义为

$$\partial_\theta u = i(z\partial_z u - \overline{z}\partial_{\overline{z}} u). \tag{2.1}$$

本节从估计（α, β）-调和函数的角导数开始。

定理 2.1. 假设 $\alpha+\beta>-1$ 和 $p\in[1,\infty]$。设 $u=P_{\alpha,\beta}[f]$ 是 $\mathbb{D}$ 上的（α,β）-调和映射，且函数 f 关于$f\in L^p$（$\mathbb{T}$）绝对连续。则

$$\partial_\theta u=P_{\alpha,\beta}[\dot{f}]\in h^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}),$$

and

$$\|\partial_\theta u\|_p\le|c_{\alpha,\beta}|\,c_{\alpha+\beta+1}\,\|\dot{f}\|_{L^p},\tag{2.2}$$

其中常数 $c_{\alpha,\ \beta}$ 和 $c_{\alpha+\beta+1}$ 分别在（1.2）和（1.11）中定义。

Proof. 根据假设，我们有

$$u(z)=P_{\alpha,\beta}[f](z)=\frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{\alpha,\beta}(ze^{-it})\,f(e^{it})\,dt.$$

设 $z=re^{i\theta}$，容易计算得到

$$\partial_\theta K_{\alpha,\beta}(ze^{-it})=-\partial_t K_{\alpha,\beta}(ze^{-it}).$$

通过分部积分可得

$$\partial_\theta u(z)=P_{\alpha,\beta}[\dot{f}](z),$$

根据詹森不等式，我们得到

$$|\partial_\theta u(z)|^p\le(|c_{\alpha,\beta}|\,I_{\alpha+\beta+1}(r))^{p-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|K_{\alpha,\beta}(ze^{-it})||\dot{f}(e^{it})|^p\,dt.$$

利用富比尼定理，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\partial_\theta u(re^{i\theta})|^p d\theta\le(|c_{\alpha,\beta}|\,I_{\alpha+\beta+1}(r))^p\|\dot{f}\|^p_{L^p}.$$

因此，利用引理 1.1，我们有

$$\|\partial_\theta u\|_p\le|c_{\alpha,\beta}|\,c_{\alpha+\beta+1}\|\dot{f}\|_{L^p}.$$

对于 $p=\infty$，可得

$$|\partial_\theta u(z)|\le|c_{\alpha,\beta}|\,|I_{\alpha+\beta+1}(r)\|\dot{f}\|_{L^\infty}\le|c_{\alpha,\beta}|c_{\alpha+\beta+1}\|\dot{f}\|_{L^\infty}.$$

□

引理 2.1。

$$\partial_z K_{\alpha,\beta}(z)=\frac{(\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+2}(1-\overline{z})^{\beta}}-\frac{\beta\,\overline{z}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}},\tag{2.3}$$

and

$$\partial_{\overline{z}} K_{\alpha,\beta}(z)=\frac{(\beta+1)(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha}(1-\overline{z})^{\beta+2}}-\frac{\alpha\,z(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}.\tag{2.4}$$

Proof. 对核 $K_{\alpha,\ q}$ 关于 z求导，得到

$$\partial_z K_{\alpha,\beta}(z) = \left(-(\alpha+\beta+1)\frac{\overline{z}}{1-|z|^2} + (\alpha+1)\frac{1}{1-z} \right) K_{\alpha,\beta}(z),$$

例如参见 [15, 引理 1.1]。接下来，注意到

$$-(\alpha+\beta+1)\frac{\overline{z}}{1-|z|^2} + (\alpha+1)\frac{1}{1-z} = \frac{(\alpha+1)(1-\overline{z})}{(1-z)(1-|z|^2)} - \frac{\beta\overline{z}}{(1-|z|^2)},$$

于是结论 (2.3) 立即得出。由核 $K_{\alpha,\ \beta}$的对称性，我们得到 (2.4)。□

命题 2.1。设 $u = P_{\alpha,\ \beta}[f]$ 是 $\mathbb{D}$ 上的 (α,β)-调和映射，且 f在 $\mathbb{T}$上绝对连续。则

$$z\partial_z u = -ic_{\alpha,\beta}\left(K_{\alpha.\beta-1}[\dot{f}] + i\beta\overline{z}\, K_{\alpha-1,\beta}[f_1] \right), \tag{2.5}$$

$$\overline{z}\partial_{\overline{z}} u = ic_{\alpha,\beta}\left(K_{\alpha-1.\beta}[\dot{f}] - i\alpha z K_{\alpha,\beta-1}[f_1] \right), \tag{2.6}$$

其中， f_1 由 $\mathbb{T}$ 上的 $f_1(e^{it}) = e^{it}f(e^{it})$ 定义。

Proof. u 关于 z 的偏导数为

$$\partial_z u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_z P_{\alpha,\beta}(ze^{-it})e^{-it}f(e^{it})dt.$$

由 (2.3)，我们有

$$\partial_z K_{\alpha,\beta}(z) = \frac{(\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+2}(1-\overline{z})^{\beta}} - \frac{\beta\,\overline{z}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_{\alpha,\beta}}\partial_z u(z) &= \frac{1}{2\pi}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}\int_0^{2\pi}\frac{(\alpha+1)f(e^{it})e^{-it}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+2}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta}}\,dt \\ &- \frac{1}{2\pi}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}\int_0^{2\pi}\frac{\beta\overline{z}f(e^{it})}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}}\,dt.\end{aligned}$$

引入定义在 $\mathbb{T}$ 上的函数 h_1 和 h_2，其中

$$h_1(e^{it}) := \frac{(\alpha+1)e^{-it}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+2}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta}}$$

and

$$h_2(e^{it}) := \frac{\beta\overline{z}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}},$$

从而得到以下表达式

$$\frac{1}{c_{\alpha,\beta}}\partial_z u(z) = \frac{1}{2\pi}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}\left(\int_0^{2\pi} h_1(e^{it})f(e^{it})dt - \int_0^{2\pi} h_2(e^{it})f(e^{it})dt \right). \tag{2.7}$$

考虑由以下公式定义的函数 g on $\mathbb{T}$

$$g(e^{it}) := \frac{1}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta}},$$

其导数 $\dot{g}$ 为

$$\dot{g}(e^{it}) = \frac{-ize^{-it}(\alpha+1)}{(1-ze^{-it})^{\alpha+2}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta}} + \frac{i\overline{z}\beta e^{it}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}},$$

即

$$\dot{g}(e^{it}) \ = -izh_1(e^{it}) + ie^{it}h_2(e^{it}). \tag{2.8}$$

利用（2.7）和（2.8），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{iz\partial_z u(z)}{c_{\alpha,\beta}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(-\dot{g}(e^{it}) + ie^{it}h_2(e^{it})\big)f(e^{it})\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} izh_2(e^{it})f(e^{it})\,dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{g}(e^{it})f(e^{it})dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(e^{it}-z\big)h_2(e^{it})f(e^{it})dt\end{aligned}$$

对第一个积分进行分部积分，并利用 $e^{it}-z = e^{it}(1-ze^{-it})$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{iz\partial_z u(z)}{c_{\alpha,\beta}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\dot{f}(e^{it})}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta}}\,dt \\ &+ \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\beta\overline{z}e^{it}f(e^{it})}{(1-ze^{-it})^{\alpha}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}}\,dt.\end{aligned}$$

最后，我们推得

$$iz\partial_z u = c_{\alpha,\beta}\left(K_{\alpha.\beta-1}[\dot{f}] + i\beta\overline{z}K_{\alpha-1,\beta}[f_1]\right).$$

通过考虑为（β,α）-调和的 $\overline{u}$，即可得到方程（2.6）。 □

现在，我们可以陈述第一个主要结果。

定理 2.2。假设 $\alpha+\beta > -1$ 和 $1 \le p \le \infty$。令 $u = P_{\alpha,\beta}[f]$ 为 $\mathbb{D}$ 上的一个 (α,β)-调和映射，其中 f 是绝对连续的，并且 $f \in L^p(\mathbb{T})$。则

$$M_p(r, z\partial_z u) \le |c_{\alpha,\beta}|\, I_{\alpha+\beta}(|z|)\left(\|\dot{f}\|_{L^p} + |\beta|\|f\|_{L^p}\right), \tag{2.9}$$

and

$$M_p(r, \overline{z}\partial_{\overline{z}} u) \le |c_{\alpha,\beta}|\, I_{\alpha+\beta}(|z|)\left(\|\dot{f}\|_{L^p} + |\alpha|\|f\|_{L^p}\right). \tag{2.10}$$

特别地

(i) 若 $\alpha+\beta > 0$，则 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}} u$ 属于 $H^p_G(\mathbb{D})$，且

$$\|z\partial_z u\|_p \le |c_{\alpha,\beta}|\, c_{\alpha+\beta}\big(\|\dot{f}\|_{L^p} + |\beta|\|f\|_{L^p}\big), \tag{2.11}$$

and

$$\|\overline{z}\partial_{\overline{z}}u\|_p \le |c_{\alpha,\beta}|\, c_{\alpha+\beta}\big(\|\dot{f}\|_{L^p} + |\alpha|\|f\|_{L^p}\big). \tag{2.12}$$

(ii) 若 $\alpha+\beta<0$ 和 $p<-\frac{1}{\alpha+\beta}$，则 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}}u$ 属于 $L^p(\mathbb{D})$。**(iii)** 若 $\alpha+\beta<0$ 和 $p\ge-\frac{1}{\alpha+\beta}$，则存在一个 (α,β)-调和函数 u，使得 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}}u\notin L^p(\mathbb{D})$。此外，$\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}}u\notin\mathcal{H}^1_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$。

Proof. 利用 (2.5)，我们得到

$$M_p(r,z\partial_z u)\le|c_{\alpha,\beta}|\left(M_p(r,K_{\alpha.\beta-1}[\dot{f}])+|\beta||z|M_p(r,K_{\alpha-1,\beta}[f_1])\right).$$

类似于定理 2.1 的证明，利用詹森不等式和富比尼定理，我们有

$$M_p(r,K_{\alpha.\beta-1}[\dot{f}])\le I_{\alpha+\beta}(|z|)\|\dot{f}\|_{L^p}\quad\text{and}\quad M_p(r,K_{\alpha-1.\beta}[f_1])\le I_{\alpha+\beta}(|z|)\|f\|_{L^p}.$$

因此，我们得到所需结果（2.9）。方程（2.11）、（2.12）以及断言（ii）是（2.9）、（2.10）和引理 1.1 的直接推论。

(iii) 令 $k\in\mathbb{Z}$ 和

$$M_{\alpha,\beta,k}(z):=P_{\alpha,\beta}[e^{ik\theta}](z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{\alpha,\beta}(ze^{-i\theta})e^{ik\theta}d\theta,\quad z\in\mathbb{D}.$$

由该恒等式可知，例如参见 [15]

$$\begin{aligned}\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\bar{z})^{\beta+1}}&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_m}{m!}F(-\alpha,m-\beta;m+1;|z|^2)z^m\\&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\beta+1)_m}{m!}F(-\beta,m-\alpha;m+1;|z|^2)\bar{z}^m,\end{aligned}$$

它对于 $k\in\mathbb{N}$ 得出

$$M_{\alpha,\beta,k}(z)=c_{\alpha,\beta}\frac{(\alpha+1)_k}{k!}\,F(-\alpha,k-\beta;k+1;|z|^2)z^k.$$

分别对 $M_{\alpha,\ \beta,\ k}$ 关于 $\overline{z}$ 求导，利用（1.5）和（1.4），可得

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}M_{\alpha,\beta,k}(z)&=-c_{\alpha,\beta}\frac{(k-\beta)(\alpha)_{k+1}}{(k+1)!}\,F(1-\alpha,1+k-\beta;k+2;|z|^2)z^{k+1}\\&=-c_{\alpha,\beta}\frac{(k-\beta)(\alpha)_{k+1}}{(k+1)!}\,(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}F(k+\alpha+1,\beta+1;k+2;|z|^2)z^{k+1}.\end{aligned}$$

由（1.3），注意到

$$\lim_{|z|\to1}F(k+\alpha+1,1+\beta;k+2;|z|^2)=\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1-\beta)}.$$

接下来，我们将选取 $k\neq\beta$，以确保 $\lim_{|z|\to1}F(k+\alpha+1,1+\beta;\,k+2;\,|z|^2)$ 非零，即 $1-\alpha$ 和 $k+1-\beta$ 不是负整数。在这种情况下，我们有

$$|\partial_{\bar{z}}M_{\alpha,\beta,k}(z)|\approx(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}\quad(|z|\to1^-).$$

因此，对于 $p \geq -\frac{1}{\alpha+\beta}$，有 $\partial_{\bar{z}} M_{\alpha,\ \beta,\ k} \notin L^p(\mathbb{D})$。此外，由于 $\alpha+\beta<0$，我们有$\partial_{\bar{z}} M_{\alpha,\ \beta,\ k} \notin H^1_G(\mathbb{D})$。

对于 k 的选择，我们将考虑以下三种情况：

(i) 对于 $\beta \in \mathbb{N}$，取 $k=\beta+1$。我们有 $1-\alpha>1+\beta\geq 1$，可见 $\lim_{|z|\to 1} F(\alpha+\beta+1,\beta;\ \beta+2;\ |z|^2)$ 非零。(ii) 情况 $\alpha\in\mathbb{N}$ 的处理类似。(iii) 对于 α 和 β 均为非整数的情形，取 $k=0$。显然，当 $\beta\notin\mathbb{N}$ 时，我们有 $1-\beta\notin\mathbb{Z}^-$。

□

引入这些例子是为了在 [14] 中说明：当 $\alpha+\beta\in(-1,0)$ 时，(α,β)-调和函数具有 Lipschitz连续性质的稳定性失败。

2.1. 情形 $-1<\alpha+\beta<0$。

在本节中，我们给出关于 u 的必要条件，使得一个 (α,β)-调和函数满足 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\bar{z}} u$ 属于 $H^1_G(\mathbb{D})$。我们证明 u 为零，或者 u 是多重调和的。

由于 u 是 (α,β)-调和的，我们考虑其级数展开，见 (1.8)

$$u(z)=\sum_{k\geq 0} c_k F(-\alpha,k-\beta;k+1;|z|^2)z^k+\sum_{k\geq 1} c_{-k}F(-\beta,k-\alpha;k+1;|z|^2)\overline{z}^k.$$

对于 $n\in\mathbb{Z}$，令

$$u_n(z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta. \tag{2.13}$$

Thus

$$u_{-n}(z)=c_{-n}F(-\beta,n-\alpha;n+1;|z|^2)\overline{z}^n,\quad \text{for } n\geq 1, \tag{2.14}$$

and

$$u_n(z)=c_n F(-\alpha,n-\beta;n+1;|z|^2)z^n,\quad \text{for } n\geq 0. \tag{2.15}$$

对 (2.13) 应用积分号下求导，我们得到

$$\partial_z u_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_z u(ze^{i\theta})e^{i(1-n)\theta}d\theta, \tag{2.16}$$

$$\partial_{\bar{z}} u_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_{\bar{z}} u(ze^{i\theta})e^{-i(1+n)\theta}d\theta.$$

对方程 (2.14) 和 (2.15) 关于 z求导，并利用 (1.4)，得到

$$\partial_z u_{-n}(z)=c_{-n}\frac{(-\beta)(n-\alpha)}{n+1}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}F(n+\beta+1,\alpha+1;n+2;|z|^2)\overline{z}^{n+1}, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\partial_z u_n(z) &= c_n\frac{(-\alpha)(n-\beta)}{n+1}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}F(n+\alpha+1,\beta+1;n+2;|z|^2)\overline{z}z^n\\ &+ nc_nF(-\alpha,n-\beta;n+1,|z|^2)z^{n-1}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

定理 2.3. 设 α 和 β 为非整数，满足 $-1<\alpha+\beta<0$，并设 u 为一个 (α,β)-调和函数。若 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\overline{z}}u$ 属于 $H^1_G(\mathbb{D})$，则 u 为零。

Proof. 假设 $\partial_z u\in H^1_G(\mathbb{D})$。利用（2.16），我们得出，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，$\partial_z u_n$ 在 $\mathbb{D}$ 上是有界的。

一方面，根据（2.17），对于 $n\geq 1$，我们有

$$\partial_z u_{-n}(z)=c_{-n}\frac{(-\beta)(n-\alpha)}{n+1}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}F(n+\beta+1,\alpha+1;n+2;|z|^2)\overline{z}^{n+1},$$

根据性质（1.3），我们有

$$\lim_{|z|\to 1}F(n+\beta+1,\alpha+1;n+2;|z|^2)=\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(n+1-\alpha)}.\tag{2.19}$$

由于 α 和 β 是非整数，我们推知（2.19）中的极限非零，因此对于 $n\geq 1$，除非 $c_{-n}=0$，否则 $\partial_z u_{-n}$ 不可能是有界的。

另一方面，根据（2.18），u_n 关于 z 的偏导数为

$$\begin{aligned}\partial_z u_n(z) &= c_n\frac{(-\alpha)(n-\beta)}{n+1}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}F(n+\alpha+1,\beta+1;n+2;|z|^2)\overline{z}z^n\\ &+ nc_nF(-\alpha,n-\beta;n+1,|z|^2)z^{n-1}.\end{aligned}$$

由于 $\alpha+\beta>-1$，注意到函数 $F(-\alpha,n-\beta;\ n+1;\ |z|^2)$在 $|z|$趋近于1时存在有限极限，因此它在 $\mathbb{D}$上是有界的。此外，注意到 $\lim_{|z|\to 1}F(n+\alpha+1,\beta+1;\ n+2;\ |z|^2)$ 如 (2.19) 中所示非零。因此，由于 $\partial_z u_n$有界，可得 $c_n=0$，其中 $n\geq 0$。最后，我们得出 $u=0$。

T情形 $\partial_{\overline{z}}u\in H^1_G(\mathbb{D})$ 的处理类似，我们得出 u 必须为零 . □

定理 2.4. 设 α 为正整数，β 为实数，且满足 $-1<\alpha+\beta<0$。设 u 为一个 (α,β)-调和映射。

若 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\overline{z}}u$ 属于 $H^1_G(\mathbb{D})$，则对于 $n>\alpha$，有 $c_{-n}=0$，其中 c_{-n} 是 (1.8) 中 u 的级数展开的系数。

事实上，u 是 $(\alpha+1)$-调和的，并且

$$u(z)=K_0(z)+K_1(z)|z|^2+\ldots+K_\alpha(z)|z|^{2\alpha},$$

其中，对于 $i=0$，有 $K_i=h_i+\overline{g_i}$，.....，$\alpha-1$，且 K_α是解析的，g_i是多项式，h_i在 $i=0$，.....，$\alpha-1$上是解析的。

令 n 为正整数，回顾一下，如果 $\Delta^n u=0$，则称函数 u 为 n-调和函数。

Proof.

(a) 假设 $\partial_z u\in H^1_G(\mathbb{D})$，则由 (2.16) 可推出，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，$\partial_z u_n$ 都有界。利用 (2.17)，我们可以看出，当 $n>\alpha$ 时，(2.19) 中的极限不可能为零

因为根据假设， β 非零，且 $1-\beta$ 不可能为零或负整数。因此我们得出，对于 $n>\alpha$, $c_{-n}=0$ 。所以

$$u(z)=\sum_{k\geq 0}c_kF(-\alpha,k-\beta;k+1;|z|^2)z^k+\sum_{k=1}^{\alpha}c_{-k}F(-\beta,k-\alpha;k+1;|z|^2)\overline{z}^k.$$

应注意，函数 $F(-\alpha,k-\beta;\ k+1;\ x)$ 和 $F(-\beta,k-\alpha;\ k+1;\ x)$ 分别是次数为 α 和 $\alpha-k\,(1\leq k\leq\alpha)$ 的多项式，并且有

$$\sum_{k\geq 0}c_kF(-\alpha,k-\beta;k+1;|z|^2)z^k=h_0(z)+h_1(z)|z|^2+\ldots+h_\alpha(z)|z|^{2\alpha},$$

其中，当 $i=0$，……，α 时， h_i 是解析的。此外，

$$\sum_{k=1}^{\alpha}c_{-k}F(-\beta,k-\alpha;k+1;|z|^2)\overline{z}^k=\overline{g_0(z)}+\overline{g_1(z)}|z|^2+\ldots+\overline{g_{\alpha-1}(z)}\,|z|^{2(\alpha-1)},$$

其中，当 $i=0$，……，$\alpha-1$ 时， g_i 是多项式。因此，我们得到了所需的结果。

(b) 假设 $\partial_{\overline{z}}u\in H^1_G(\mathbb{D})$。与前一种情形一样，我们推得当 $n\geq 1$ 时， $\partial_{\overline{z}}u_{-n}$ 是有界的。

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}}u_{-n}(z) &= c_{-n}\frac{\beta(\alpha-n)}{n+1}(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}F(n+\beta+1,1+\alpha;n+2;|z|^2)\overline{z}^n z\\ &+ nc_{-n}F(-\beta,n-\alpha;n+1;|z|^2)\overline{z}^{n-1}.\end{aligned}$$

由于 $\alpha+\beta>-1$，注意到当 $|z|$ 趋于 1 时，函数 $F(-\beta,n-\alpha;\ n+1;\ |z|^2)$ 存在有限极限，因此它在 $\mathbb{D}$ 上有界。与前一种情形类似，当 $n>\alpha$ 时，$\lim_{|z|\to 1}F(n+\beta+1,\alpha+1;\ n+2;\ |z|^2)$ 非零。因此，当 $n>\alpha$ 时， $c_{-n}=0$。□

反过来，我们证明如下

定理 2.5。设 α 为正整数， β 为实数，且 $\alpha+\beta\in(-1,0)$。假设 $f\in\mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathbb{T})$, 其中 $f^{(\alpha-1)}$ 绝对连续，并且对某个 $p\in(1,\infty)$， $f_{(\alpha)}\in L^p(\mathbb{T})$ 以及 $u=P_{\alpha,\beta}[f]$ 满足 $c_{-n}=0$ 对于 $n>\alpha$。则 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}}u$ 属于 $H^p_G(\mathbb{D})$。

Here $f^{(0)}=f$ and $f^{(\alpha)}(e^{i\theta}):=\frac{d}{d\theta}f^{(\alpha-1)}(e^{i\theta})$.

Proof. 由于对于 $n>\alpha$ 有 $c_{-n}=0$， u 可以写成

$$u(z)=\sum_{n\geq 0}c_nF(-\alpha,n-\beta;n+1;|z|^2)z^n+\sum_{n=1}^{\alpha}c_{-n}F(-\beta,n-\alpha;n+1;|z|^2)\overline{z}^n.$$

备注：对于 $n\in[\![1..\alpha]\!]$，超几何函数 $F(-\beta,n-\alpha;\ n+1;\ |z|^2)$ 是一个多项式，因此映射 $z\mapsto\sum_{n=1}^{\alpha}c_{-n}F(-\beta,n-\alpha;\ n+1;\ |z|^2)\overline{z}^n$ 是

在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上光滑。因此，当且仅当 $\partial_{\overline{z}} u_1 \in H^p(\mathbb{D})$ 时，$\partial_{\overline{z}} u \in H^p(\mathbb{D})$，其中

$$u_1(z) = \sum_{n\geq 0} c_n F(-\alpha, n-\beta; n+1; |z|^2) z^n.$$

由于

$$F(-\alpha, n-\beta; n+1; |z|^2) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-\alpha)_k (n-\beta)_k}{(n+1)_k k!} |z|^{2k},$$

我们写作

$$u_1(z) = H_0(z) + H_1(z)|z|^2 + \ldots + H_\alpha(z)|z|^{2\alpha},$$

其中，对于 $k \in [\![0..\alpha]\!]$, H_k ，是解析的，且

$$H_k(z) = \frac{(-\alpha)_k}{k!} \sum_{n\geq 0} \frac{(n-\beta)_k}{(n+1)_k} c_n z^n.$$

此外，由 (1.9) 可得

$$c_n \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)} = \hat{f}(n) \text{ for } n \geq 0.$$

因此，当

$$\frac{(n+1)_\alpha}{(n+1)_k} = (n+k+1)_{\alpha-k} \text{ for } k \in [\![0..\alpha]\!],$$

我们得到

$$H_k(z) = \frac{(-\alpha)_k \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)k!} \sum_{n\geq 0} (n-\beta)_k (n+1+k)_{\alpha-k} \hat{f}(n) z^n,$$

且 H_k 是 $Q_\ell(z)$ 的线性组合：$= \sum (in)^\ell \hat{} f(n) z^n$ 对于 $\ell = 0$、.....、 α。$n\geq 0$

我们断言

$$Q_\ell \in \bigcap_{1<q<\infty} H^q(\mathbb{D}) \text{ for } \ell = 0 \ldots \alpha - 1 \text{ and } Q_\alpha \in H^p(\mathbb{D}).$$

事实上，考虑如下定义的调和函数：将 f 的泊松延拓定义为，即

$$U(z) = P[f] = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) z^n + \sum_{n\geq 1} \hat{f}(-n) \overline{z}^n.$$

对于 $\ell = 1$、.....、 α，我们有

$$\frac{d^\ell}{d\theta^\ell} U(z) = P[f^\ell] = \sum_{n\geq 0} (in)^\ell \hat{f}(n) z^n + \sum_{n\geq 1} (-in)^\ell \hat{f}(-n) \overline{z}^n.$$

因此， $Q_\ell = P_+(\frac{d^\ell U}{d\theta^\ell})$ 是调和函数 $\frac{d^\ell U}{d\theta^\ell}$ 的里斯投影。于是，根据里斯关于共轭函数的定理，该断言成立。由于 $\partial_{\overline{z}} u_1 = z H_1(z) + \ldots + \alpha z^\alpha H_\alpha(z) \overline{z}^{\alpha-1}$，这意味着 $\partial_{\overline{z}} u \in H^p_G(\mathbb{D})$。

另一方面，由于 $\partial_\theta u = i(z\partial_z u - \overline{z}\partial_{\overline{z}} u) \in H^p_G(\mathbb{D})$，我们得出 $\partial_z u \in H^p_G(\mathbb{D})$。□

我们希望通过放宽边界函数 f 的假设，得到定理 2.5 的一个更强版本。对于 $\alpha = 1$, 它给出

推论 2.1. 设 $\beta \in (-2,-1)$ 和 $p \in (1,\infty)$，且 $u = P_{1,\,\beta}[f]$ 其中 f 在 $\mathbb{T}$ 上绝对连续，且满足 $f \in L^p(\mathbb{T})$。

当且仅当 $\hat{f}(-n) = 0$ 对 $n > 1$成立时， $\partial_z u$ 或 $\partial_{\overline{z}} u$ 属于 $H^1_G(\mathbb{D})$。特别地， u是双调和的。

2.2. 情形 $\alpha + \beta = 0$。

定理 2.6. 设 α, β 是 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ 中的非零数，满足 $\alpha + \beta = 0$，并令 u 为一个（α, β）-调和函数。若 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\overline{z}} u$ 属于 $H^1_G(\mathbb{D})$，则 u 为零。

Proof. 假设 $\partial_z u \in H^1_G(\mathbb{D})$。利用 (2.13)，我们得出 $\partial_z u_n$ 在 $\mathbb{D}$上有界。根据 (2.17)，有

$$\partial_z u_{-n}(z) = c_{-n} \frac{\alpha(n-\alpha)}{n+1} F(n-\alpha+1, \alpha+1; n+2; |z|^2) \overline{z}^{n+1},$$

并且由 (1.6) 可得

$$F(n-\alpha+1, \alpha+1; n+2; x) \approx \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \log(1-x), \quad (x \to 1^-). \tag{2.20}$$

由于 α 不是整数，我们推知 (2.20) 中超几何函数的极限为 ∞，当 $x \to 1$时，因此除非 $c_{-n} = 0$，否则 $\partial_z u_{-n}$ 不可能是有界的，其中 $n \geq 1$。

此外，根据 (2.18)， u_n 关于 z 的偏导数为

$$\begin{aligned} \partial_z u_n(z) &= c_n \frac{(-\alpha)(n+\alpha)}{n+1} F(n+\alpha+1, 1-\alpha; n+2; |z|^2) \overline{z} z^n \\ &+ n c_n F(-\alpha, n+\alpha; n+1, |z|^2) z^{n-1}. \end{aligned}$$

注意，函数 $F(-\alpha, n+\alpha;\ n+1;\ |z|^2)$ 在 $|z|$ 趋于 1 时有有限极限，因此它在 $\mathbb{D}$上有界。另外，注意到与 (2.20) 中一样，$\lim_{|z|\to 1} F(n+\alpha+1, 1-\alpha;\ n+2; |z|^2) = \infty$。因此，除非 $c_n = 0$，否则 $\partial_z u_n$是有界的，其中 $n \geq 0$。最后，我们得出结论： $u = 0$。 □

最后，给定 $u = P_{\alpha,\,\beta}[f]$一个具有 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 的拟正则（α, β）-调和函数，我们证明对于 $p \in [1, \infty]$， $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}} u$ 均属于 $H^p_G(\mathbb{D})$。

回顾一下，如果映射 $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 被称为 K–拟正则映射，则

$$|\partial_z u(z)| + |\partial_{\overline{z}} u(z)| \leq K(|\partial_z u(z)| - |\partial_{\overline{z}} u(z)|),$$

在 $\mathbb{D}$ 上，其中 $K \in [1, \infty)$ 是一个常数。

定理 2.7. 设 $1 \leq p \leq \infty$、 α、 $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$，使得 $\alpha + \beta > -1$ 且 $u = P_{\alpha,\,\beta}[f]$ 是 α、β-调和拟正则映射， $\mathbb{D}$ 的边界函数 f 绝对连续并满足 $f \in L^p(\mathbb{T})$。则 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\overline{z}} u$ 属于 $H^p_G(\mathbb{D})$。

Proof. 令 $z = re^{i\theta}$，利用恒等式 (2.1) 和不等式 (2.2)，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(|z\partial_z u(re^{i\theta})|-|\overline{z}\partial_{\overline{z}}u(re^{i\theta})|\big)^p d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\partial_\theta u(re^{i\theta})|^p d\theta \le (|c_{\alpha,\beta}|\, c_{\alpha+\beta+1})^p\|\dot{f}\|_{L^p}^p,$$

其中，由于 u 是拟正则的，因此存在一个常数$K \ge 1$，使得

$$|\partial_z u(z)| + |\partial_{\overline{z}}u(z)| \le K\big(|\partial_z u(z)| - |\partial_{\overline{z}}u(z)|\big).$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(|z\partial_z u(re^{i\theta})| + |\overline{z}\partial_{\overline{z}}u(re^{i\theta})|\big)^p d\theta \le (K|c_{\alpha,\beta}|c_{\alpha+\beta+1})^p\|\dot{f}\|_{L^p}^p,$$

可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|z\partial_z u(re^{i\theta})|^p d\theta \le (K|c_{\alpha,\beta}|c_{\alpha+\beta+1})^p\|\dot{f}\|_{L^p}^p$$

and

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\overline{z}\partial_{\overline{z}}u(re^{i\theta})|^p d\theta \le \left(\frac{K-1}{2}|c_{\alpha,\beta}|c_{\alpha+\beta+1}\right)^p\|\dot{f}\|_{L^p}^p.$$

Thus

$M_p(r, z\partial_z u) \le K|c_{\alpha,\ \beta}|c_{\alpha+\beta+1}\|\dot{f}\|_{L^p}$且 $M_p(r, \overline{z}\partial_{\overline{z}}u) \le \dfrac{K-1}{2}c_{\alpha+\beta+1}|c_{\alpha,\ \beta}|\|\dot{f}\|_{L^p}$.因此

$\partial_z u$和 $\partial_{\overline{z}}u$ 属于 $H_G^p(\mathbb{D})$。 □

3. T_α-HARMONIC FUNCTIONS

令 $\alpha \in \mathbb{R}$ 并记

$$\omega_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha; \quad z \in \mathbb{D},$$

为单位圆盘 $\mathbb{D}$上的相应标准权重。相关的加权拉普拉斯算子定义为

$$L_\alpha = \partial_z\omega_\alpha^{-1}\partial_{\overline{z}} \quad \text{and } L_\alpha^* = \partial_{\overline{z}}\omega_\alpha^{-1}\partial_z \text{ in } \mathbb{D}.$$

可以验证

$$L_\alpha = \alpha(1-|z|^2)^{-\alpha-1}\overline{z}\partial_{\overline{z}} + (1-|z|^2)^\alpha\partial_z\partial_{\overline{z}}.$$

Let

$$T_\alpha := -\frac{\alpha^2}{4}\omega_{\alpha+1}^{-1} + \frac{1}{2}(L_\alpha + L_\alpha^*),$$

也就是说,

$$T_\alpha = -\frac{\alpha^2}{4}(1-|z|^2)^{-\alpha-1} + \frac{\alpha}{2}(1-|z|^2)^{-\alpha-1}\overline{z}\partial_{\overline{z}} + \frac{\alpha}{2}(1-|z|^2)^{-\alpha-1}z\partial_z + (1-|z|^2)^{-\alpha}\partial_z\partial_{\overline{z}}.$$

Thus

$$T_\alpha = (1-|z|^2)^{-\alpha-2}\Delta_{\alpha/2,\alpha/2}.$$

对于 $\alpha > -1$，我们记

$$M_\alpha := M_{\alpha/2,\alpha/2} = P_{\alpha/2,\alpha/2}[1].$$

回顾一下，函数 u 是 T_α-调和的，当且仅当 $T_\alpha u = 0$。注意， T_α-调和函数恰好是 $(\alpha/2, \alpha/2)$-调和函数。因此，结合定理 2.2 和定理 2.3，我们得到

推论 3.1. 设 $\alpha > -1$ 和 f 为一个绝对连续的，使得 $f \in L^p(\mathbb{T})$，其中 $1 \le p \le \infty$ 和 $u = P_{\alpha/2,\ \alpha/2}[f]$。则

(i) 若 $\alpha > 0$，则 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\bar{z}} u$ 属于 $H^p_G(\mathbb{D})$。(ii) 若 $\alpha < 0$，则 $\partial_z u$ 或 $\partial_{\bar{z}} u$ 在 $H^1_G(\mathbb{D})$ 中，当且仅当 u 为零。(iii) 若 $\alpha < 0$ 和 $p < -\frac{1}{\alpha}$，则 $\partial_z u$ 和 $\partial_{\bar{z}} u$ 属于 $L^p(\mathbb{D})$。(iv) 若 $\alpha < 0$ 和 $p \ge -\frac{1}{\alpha}$，则 $\partial_z M_\alpha$ 和 $\partial_{\bar{z}} M_\alpha \notin L^p(\mathbb{D})$。

我们的结果简化了 Chen 等人在 [6] 中得到的结果。

References

1. Ahern, P.; Bruna, J. 和 Cascante, C.：单位球中广义 M-调和函数的 H^p 理论，《印第安纳大学数学杂志》45，第 1 期，103–135（1996）。2. Ahern P., Cascante C.： $\mathbb{C}^n$ 中单位球面上位势的泊松积分的例外集， $p \le 1$ 《太平洋数学杂志》153，1–13（1992）。3. Andrews.G.E、Askey. R. 和 Roy. R.：《特殊函数》，剑桥大学出版社，Cambridge，1999。4. Berndt B. C.：《拉马努金笔记》第二部分。纽约等地：施普林格出版社，1989。5. Chen X.：$\overline{\alpha}$-泊松方程的解的利普希茨连续性，《中国科学：数学》，第 60 卷，第 2 期（2017）。6. Chen, J.、Chen, S.、Huang, M. 和 Zheng, H.：由加权拉普拉斯微分算子诱导的映射的等周型不等式。arXiv 预印本 arXiv:2302.08311（2023）。7. Chen, S.L.、Ponnusamy, S.、Wang, X.T.：关于“调和映射和调和拟正则映射的偏导数范数估计”的备注。《几何分析杂志》31，11051–11060（2021）。8. Duren, P.：《 H^p 空间理论》，第 2 版，多佛出版社，Mineola，纽约，2000。9. Duren, P.：《平面调和映射》，剑桥大学出版社，2004。10. Geller D.：海森堡群上的 H^p 理论的一些结果。《杜克数学杂志》47(2)：365-390（1980）。11. Khalfallah A., Mateljevi´c M.： α-调和函数的偏导数范数估计与施瓦茨引理。《复变函数与椭圆方程》1-13（2023）。12. Khalfallah A., Mateljevi´c M.：单位圆盘上调和函数的偏导数估计，已投稿。13. Khalfallah. A、Mateljevi´c. M 和 Mohamed. M.：容许一般泊松表示的映射的一些性质。《地中海数学杂志》18(5)，1-19（2021）。14. Khalfallah, A.、Mhamdi, M.：单位圆盘中广义调和函数的 H¨older 连续性。《复分析与算子理论》16，第 7 期，101（2022）。15. Klintborg, M.、Olofsson, A.：广义调和函数的级数展开，《分析、数学物理》11，第 3 期，论文编号 122（2021）。16. Li, P.、Wang, X.： α-调和函数的利普希茨连续性。《北海道数学杂志》48，第 1 期，85–97（2019）。17. Olofsson A.、Wittsten J.：单位圆盘中标准加权拉普拉斯算子的泊松积分，《日本数学会杂志》65，447–486（2013）。18. Riesz M.：关于共轭函数，《数学杂志》27，218-244（1927）。19. Rudin W.：《实分析与复分析》，麦格劳-希尔图书公司，1966。20. Zhu J. F.：调和映射和调和拟正则映射的偏导数范数估计，《几何分析杂志》31，5505–5525（2021）

Department of Mathematics,
King Fahd University of Petroleum and Minerals,Dhahran 31261, Saudi Arabia电子邮箱地址：khelifa@kfupm.edu.sa
Ecole supérieure des Sciences et de la Technologie de Hammam Sousse (ESSTHS),
Université de Sousse电子邮箱地址：mhamdimed7@gmail.com