arXiv:2304.12843v1 [econ.TH] 25 Apr 2023

策略无关规则的结构

Jorge Alcalde–Unzu*和 Marc Vorsatz†

2023年4月26日

摘要

我们证明，在严格偏好域中，所有策略无关社会选择规则都必然遵循一个两步程序。第一步要求代理人披露其偏好的某些特定信息。随后，必须应用一个独裁的或值域为2的策略无关子规则，而所选用的子规则可能因第一步的回答而有所不同。因此，文献中针对某些域所确定的策略无关规则，可以根据我们的程序重新进行诠释；更重要的是，该程序为确定尚未研究的域中策略无关规则的结构提供了指导。

关键词：偏好域、社会选择规则、策略无关性。

JEL分类号：D70、D71。

*纳瓦拉公立大学经济学系与INARBE，阿罗萨迪亚校区，31006 潘普洛纳，西班牙。电子邮箱：jorge.alcalde@unavarra.es。谨此感谢西班牙经济与竞争力部通过项目 PID2021-127119NB-I00 提供的经费支持。

†通讯作者。西班牙国立远程教育大学（UNED）经济分析系，Paseo Senda del Rey 11，28040 马德里，西班牙。电子邮箱：mvorsatz@cee.uned.es。谨此感谢西班牙经济与竞争力部通过项目 PID2021- 122919NB-I00 提供的经费支持。

1 引言

考虑这样一种集体选择问题：一组代理人必须从一个有限集合中选择一个备选项。由于通常代理人的偏好属于私人信息，且所选择的备选项取决于申报的偏好，因此一些代理人可能有动机歪曲自己的偏好。能够免受此类策略性操纵影响的社会选择规则被称为策略无关：具体而言，它们满足这样的条件——无论其他代理人的偏好如何，对某个代理人而言，申报其真实偏好始终是最优的。

构造策略无操纵社会选择规则的困难，体现在开创性的吉巴德-萨特思韦特不可能定理 [10, 18], 中：该定理表明，如果偏好不受限制，那么所有策略无关规则要么是独裁的，要么值域为2。对这一结果的一种解释是，全域包含数量极其庞大的策略，因此总有进行有利操纵的空间。因此，相关文献一直致力于确定不可能性消失的受限域。然而，迄今为止，还没有适用于所有受限域的共同结果；因此，在受限域中刻画策略无关规则可能是一项复杂的任务。

本文的主要目标是揭示一种一般程序，使其能够构造任意组合的严格偏好域的笛卡尔积上的所有策略无关规则。这一结构通过结合以下三个事实获得：（i）我们将严格偏好域划分为条件偏好域和非条件偏好域，从而提出一种新的分类；（ii）我们证明，当每个代理人的偏好域都是非条件的时，Gibbard-Satterthwaite不可能性仍然成立；以及（iii）我们确定了一种程序，通过该程序可以进一步限制任意条件偏好域，使其变为非条件偏好域。这三个事实共同使我们能够得出结论：任何策略无关规则都由两个步骤组成。首先，要求每个拥有条件偏好域的代理人披露有关其偏好的某些特定信息，以便我们应用（iii）中的程序，使其偏好域变为非条件的。第一步确保我们能够到达这样一种情形：我们的 Gibbard-Satterthwaite 扩展

不可能性在（ii）中适用。因此，第二步由一个独裁的子规则或值域为2的子规则组成。注意，第二步中所应用的子规则可能取决于第一步提供的信息。尽管所有策略无关规则都必然遵循这一两步程序，但具有这种结构的规则中也存在可操纵的规则。然而，如果第二步子规则要么是独裁的，要么是值域为2的策略无关规则，那么唯一可能的操纵就发生在第一步。于是，要完整刻画所有策略无关规则，唯一需要完成的任务就是分析能够避免第一步操纵的第二步子规则组合。

为通过一个例子说明我们的主要发现，设有三个备选项 x、 y 和 z ，使得普遍严格偏好域为 $\mathcal{R} = \{xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx\}$。[1]考虑以下两个受限偏好域。

(a) $\mathcal{R}'$ 包含所有（且仅包含）满足“x 优于 z”这一陈述的偏好。可以将这一特例理解为这样一种情形：众所周知，代理人偏好 x 而非 z，但对其余偏好结构，即 $\mathcal{R}' = \{xyz, yxz, xzy\}$，完全不了解。从普遍偏好域中固定一组二元比较而得到的受限偏好域，被称为非条件偏好域。在 $\mathcal{R}'$的情形下，唯一固定的比较是 (x， z)。

(b) $\mathcal{R}''$ 包括所有（且仅包括）满足以下陈述的偏好：“如果 x 优于 y，那么 y 优于 z”。因此，偏好 xzy 和 zxy 被排除在偏好域之外，即 $\mathcal{R}'' = \{xyz, yxz, yzx, zyx\}$。例如，当备选项表示实线上的位置，且$x < y < z$，而代理人对这些位置具有单峰偏好时，就会得到这个偏好域。如果某项成对比较要固定下来，必须满足一组前件，那么我们就称之为条件偏好域。在 $\mathcal{R}''$的情形下，只有当前件“x优于 y”成立时，才能推出结论“y 优于 z”。

[1]在这里，我们用一个有序列表表示每个偏好排序。例如， xyz 是这样一种偏好排序： x 优于 y ，且 y 优于 z。

为了了解如何在任意情形下构造所有策略无关规则，假设只有两位代理人 i 和 j，其中代理人 i 的偏好域等于 $\mathcal{R}'$，而代理人 j 的偏好域为 $\mathcal{R}''$。请注意，我们对不可能性结果的推广并不直接适用，因为代理人 j 的偏好域是条件性的。然而，关键的观察是，如果另外知道 j 是更偏好 x而非 y，还是更偏好 y 而非 x （也就是说，如果另外知道 j 的实际偏好排序是否满足条件限制的前件），那么她的偏好域也会是非条件的。如果 j 实际更偏好 x 而非 y，那么 $\mathcal{R}''$ 还可以进一步限制为 $\{xyz\}$；这是与固定比较集合 $\{(x,y)$、(y,z)、$(x,z)\}$相对应的非条件偏好域。如果 j实际更偏好 y而非 x，那么她的偏好域就是 $\{yxz, yzx, zyx\}$，这是与固定比较集合 $\{(y,x)\}$相对应的非条件偏好域。因此，一旦知道 j 对 x 和 y 之间的实际偏好，我们就得到这样一种情形：两位代理人的偏好域都是非条件的。由此，根据我们的不可能性结果，任何在代理人 j 对备选项对 $\{x,y\}$ 的偏好被如实揭示后实施的策略无关社会选择规则，都只能是值域为2的规则或独裁规则。因此，本例中的任何策略无关社会选择规则 f 都应先询问代理人 j 如何实际排列 x 和y。根据她的回答，社会选择规则 f 随后采用特定的子规则 f_x（若 j 表示她更偏好 x 而非 y）或 f_y （若 j 表示她更偏好 y 而非 x），使每个子规则都具有策略无关性，且要么值域为2，要么是独裁的。由于值域为2的策略无关子规则和独裁子规则的集合相当容易描述，唯一要做的就是检查：从该集合中选取的 f_x 和 f_y 的哪些组合可以适用，同时不会让代理人 j 有机会在第一步中通过虚报自己对 x和 y 之间的偏好来操纵结果。这一策略具有普遍性，可应用于任何情形，不受代理人数、备选项数量以及每位代理人特定严格偏好域的影响。

我们的论文从三个方面对现有关于策略无关性的文献作出了贡献。尽管一些作者通过关注

共同偏好域推广了吉巴德-萨特思韦特不可能性，但我们的不可能性同样适用于个性化偏好域（相关讨论请参见结论部分）。其次，Moulin[14], Sprumont [19], 以及 Barber`a、Sonnenschein 和 Zhou [8] 等具有影响力的研究，刻画了特定域上的有意义的策略无关规则（另请参见 Barber`a [5] 的综述）。这些规则可以根据我们的两步程序重新加以诠释。最后，也是最重要的一点，两步程序为确定尚未得到探索的域上的策略无关规则的结构提供了指导。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍记号并给出不可能性结果。我们还将这一不可能性结果应用于所有代理人均具有非条件偏好域的问题。第 3 节中，如果部分代理人的偏好域是条件偏好域，我们将推导出所有策略无关规则的结构。第 4 节总结全文。不可能性结果的证明见附录。

2 不可能性结果

设 N 和 X 分别为代理人和备选项的有限集合。每个代理人 $i \in N$ 对 X 的偏好由一个完备、反对称且传递的二元关系 R_i描述。设 P_i 为 R_i所诱导的严格偏好关系。普遍偏好域 $\mathcal{R}$ 包含对X上的所有完备、反对称且传递的偏好关系。我们将研究（可能）受限且因代理人而异的偏好域；即，我们用 $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}$ 表示代理人 $i \in N$的偏好域，并将 $_{i\in N}\mathcal{R}_i = \mathcal{D}$ 称为该域。偏好剖面 $R = (R_i)_{i\in N} \in \mathcal{D}$ 是代理人偏好的列表。

×

给定一个域 $\mathcal{D}$，社会选择规则是一个函数 $f: \mathcal{D} \to X$ 它为每个偏好剖面 $R \in \mathcal{D}$ 选择一个备选项 $f(R) \in X$。我们将 f 的值域记为 $r(f)$。令R_{-S} 表示从偏好剖面 R中消除代理人集合 S 后得到的子剖面。我们用R_{-i} 代替 $R_{-\{i\}}$。如果存在一个偏好剖面 $R \in \mathcal{D}$和一个备选偏好 $R_i' \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R_i', R_{-i})\ P_i\ f(R)$，则称 f 可被代理人 $i \in N$ 操纵。于是， f

如果它不受任何代理人操纵，则称其具有策略无关性（SP）。如果对于所有 $R \in \mathcal{D}$和所有 $x \in r(f)$ $f(R)$ $R_i x$，则称 f 是代理人 $i \in N$的独裁规则。于是，如果不存在某个代理人 $i \in N$ 使得 f 是代理人 i的独裁规则，则称 f是非独裁的（ND）。如果偏好不受限制，Gibbard [10] 和 Satterthwaite [18] 证明了：只要 $|r(f)| \neq 2$，就不可能同时满足策略无关性和非独裁性。[2]

命题1（Gibbard *[10]* 和 Satterthwaite *[18]*）如果对所有 $i \in N$都有 $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}$，那么不存在满足 $|r(f)| \neq 2$、且具有策略无关性和非独裁性的社会选择规则 f。

我们的不可能性结果推广了命题1。令 $X^* = \{(x, y) \in X^2 \mid x \neq y\}$ 为所有由不同备选项组成的有序对的集合。给定任意偏好域 $\mathcal{R}_i$，我们将对属于 $\mathcal{R}_i$ 的所有偏好都固定的有序对集合记为 $S(\mathcal{R}_i)$；即，对于所有 $R_i \in \mathcal{R}_i\}$，都有 $S(\mathcal{R}_i) = \{(x, y) \in X^* \mid x P_i y$。那么，当且仅当对所有 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_i)$都有 $R_i \in \mathcal{R}_i$ 和 $x P_i y$时，代理人i 的偏好域 $\mathcal{R}_i$ 是非条件的。否则， $\mathcal{R}_i$ 就是条件偏好域。我们还定义 $S^{-1}(\mathcal{R}_i) = \{\{x, y\} \in X^2 \mid (x, y)$、$(y, x) \notin S(\mathcal{R}_i)$ 和 $x \neq y\}$。 $S^{-1}(\mathcal{R}_i)$表示在 $\mathcal{R}_i$中可以自由排序的有序对集合。非条件偏好域的两个极端情形是普遍偏好域（因为 $S(\mathcal{R})$ 为空），以及仅包含一个可接受偏好排序的偏好域 $\mathcal{R}_i$（此时 $S^{-1}(\mathcal{R}_i)$ 为空）。我们的结果表明，无论偏好域是共同的还是个性化的，吉巴德-萨特思韦特不可能性都适用于非条件偏好域。[3]

定理1 假设对于所有 $i \in N$、 $\mathcal{R}_i$， f 是一个非条件偏好域。那么，不存在满足 $|r(f)| \neq 2$ 且具有策略无关性和非独裁性的规则。

[2]这一不可能性有时会以条件 $|r(f)| \geq 2$ 的形式表述。由于 $|r(f)| = 1$ 与非独裁不相容（如果 $|r(f)| = 1$，那么所有代理人都是独裁者），因此我们改用较弱的要求 $|r(f)| \neq 2$。不可能性结果的其他版本要求 $|X| > 2$，并且要求 f 是一致同意的（即，如果所有代理人的排序中的最高偏好备选项相同，那么该备选项必须由 f 选出）。这两个条件的组合再次强于要求 $|r(f)| \neq 2$。[3]如果对于所有 i、$j \in N$，$\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_j$，则一个域是共同的。否则，则称其为个性化的。

定理1 可以直接应用于这样的问题：其自然特征意味着代理人的偏好受到非条件限制。例如，考虑一组代理人N，他们希望将一件不可分物品分配给其中一名成员。标准经济学理论假设，每名代理人都偏好将该物品分配给自己，而不是分配给其他任何代理人，这意味着每名代理人 $i \in N$ 都具有一个非条件偏好域 $\mathcal{R}_i$，其中对于所有 $j \in N \setminus \{i\}\}$，固定的偏好对为 $S(\mathcal{R}_i) = \{(i, j)$。因此，根据我们的结果，吉巴德-萨特思韦特不可能性在该域中仍然成立，从而所有策略无关规则的值域为2，或者是独裁的。该应用与 Holzman 和 Moulin [11] 相关，他们假设每名代理人提名一名不同于自己的候选人。他们关注公正性这一性质（即，结果应当独立于获胜候选人的消息），并证明了若干可能性结果。由于在代理人报告严格偏好而非提名某一特定候选人的情况下，公正性弱于策略无关性（这是因为公正性只排除了使自己成为不可分物品接受者的操纵，而不考虑排序中更靠后的操纵），因此，由我们的不可能性结果可知，在该域中将公正性强化为策略无关性，会严重影响构造有意义的社会选择规则的可能性。在第二个应用中，该应用与 Amor´os [2, 3], 具有一些共同特征：一组具有公开已知先验偏见的陪审员必须选择一名获胜候选人。如果某名陪审员 $i \in N$ 偏好集合 $A_i \subset X$ 中的候选人而非集合 $B_i \subseteq X \setminus A_i$ 中的候选人，则可以将该陪审员的偏好域限制为非条件域 $\mathcal{R}_i$，其中对于所有 $x \in A_i$ 和 $y \in B_i\}$，固定的偏好对为 $S(\mathcal{R}_i) = \{(x, y)$。定理1表明，在这些情形下无法规避吉巴德-萨特思韦特不可能性。

条件定义域中的 3 条策略无关规则

定理1只能直接应用于非条件域。在本节中，我们将说明，定理1同样为其余域中所有策略无关规则的构造提供了一条路径；也就是说，当至少一个代理人的偏好域为条件偏好域时，情况亦是如此。

我们将论证分为三个部分。首先，虽然第 2 节将条件偏好域定义为任何不是非条件域的偏好域，但现在我们通过一组共同施加于普遍偏好域的特定限制来定义条件偏好域。其次，这使我们能够说明，任何条件偏好域都可以进一步受到限制，从而成为非条件域。最后，我们将详细说明这一将条件偏好域限制为非条件域的过程，结合定理1，如何确定任意严格偏好域组合的笛卡尔积上的策略无关规则的结构。

偏好域限制

我们介绍限制偏好域的两种方式。

定义 1 给定 $\mathcal{R}_i$、$\mathcal{R}'_i$，其中有 $\mathcal{R}'_i \subset \mathcal{R}_i$，以及有序对（$x$，$y$），

- $\mathcal{R}'_i$ 是 $\mathcal{R}_i$ 的（x，y）非条件限制，当且仅当对于任意 $R_i \in \mathcal{R}_i$，

$$R_i \notin \mathcal{R}'_i \text{ 当且仅当 } y \, P_i \, x.$$

- $\mathcal{R}'_i$ 是 $\mathcal{R}_i$ 的条件限制，当存在一个备选方案有序对集合 $\{（x_k，y_k）\}_{k=1}^{K}$，使得对于任意 $R_i \in \mathcal{R}_i$，

$$R_i \notin \mathcal{R}'_i \text{ 当且仅当 } x_k \, P_i \, y_k \text{ 对所有 } k \in \{1, \ldots, K\} \text{ 和 } y \, P_i \, x.$$

我们强调，非条件限制会从偏好域中排除所有未按预先描述的方式对一对备选项进行排序的排序，而条件限制则由一个前件（有序对 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{K}$）和一个结论（有序对 (x, y)）组成：如果某个排序满足前件但不满足结论，该排序就会被排除。下面的算法1表明，任何偏好域都可以通过迭代应用这两类限制从普遍偏好域中获得。更准确地说，如果所考虑的偏好域是非条件的，则只需依次应用一系列非条件限制；而如果它是

条件的，则除了一些可能存在的非条件限制外，还必须应用一组条件限制。

算法1 考虑任意偏好域 $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_i^0$。

步骤 $t = 1, 2, \ldots, \frac{|X|(|X|-1)}{2}$：

取任意一对此前步骤中尚未考虑过的不同备选项的无序对 $\{x^t, y^t\}$。如果 $(x^t, y^t) \in S(\mathcal{R}_i)$，或者如果 $(y^t, x^t) \in S(\mathcal{R}_i)$，则转到步骤 $t.a$。如果 $\{x^t, y^t\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$，则转到步骤 $t.b$。

$(t.a)$ 如果 $(x^t, y^t) \in S(\mathcal{R}_i)$，则将 $\mathcal{R}_i^t$ 设为 $\mathcal{R}_i^{t-1}$ 的 (x^t, y^t) 非条件限制。如果 $(y^t, x^t) \in S(\mathcal{R}_i)$，则将 $\mathcal{R}_i^t$ 设为 $\mathcal{R}_i^{t-1}$ 的 (y^t, x^t) 非条件限制。$(t.b)$ 设 $\mathcal{R}_i^t = \mathcal{R}_i^{t-1}$。

如果 $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i^t$，则算法结束，并将 $\mathcal{R}_i$ 声明为非条件偏好域。如果 $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}_i^t$，则继续执行步骤 $t+1$。

步骤 $t > \frac{|X|(|X|-1)}{2}$：

任取 $R_i \in \mathcal{R}_i^{t-1} \setminus \mathcal{R}_i$ 以及一对不同备选项的无序对 $\{x^t, y^t\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$，使得 $y^t \, P_i \, x^t$。构造一个最小有序对集合 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^K$，使得对于所有满足 $x_k \, P_i' \, y_k$ 的 $R_i' \in \mathcal{R}_i^{t-1}$，对所有 $k \in \{1, \ldots, K\}$，

$$R_i' \in \mathcal{R}_i \Leftrightarrow x^t \, P_i' \, y^t.$$

对偏好域 $\mathcal{R}_i^{t-1}$ 应用以前件 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^K$ 和结论 (x^t, y^t) 给出的条件限制，并将所得偏好域记为 $\mathcal{R}_i^t$。如果 $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i^t$，则算法结束，并将 $\mathcal{R}_i$ 声明为条件偏好域。如果 $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}_i^t$，则继续执行步骤 $t+1$。

由于备选项集合 X 是有限的，算法1 总能终止，因此会将每个严格偏好域归类为条件的或非条件的。更重要的是，算法1 将条件偏好域描述为一组条件限制和非条件限制。

请注意，条件限制的集合可能并不唯一，因为在步骤 $t > {}^{|X|}{}_{(|X|-1)}\ 2$ 中改变偏好的选择 $R_i \in \mathcal{R}_i^{t-1} \setminus \mathcal{R}_i$ 和无序对 $\{x^t, y^t\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$，可能会导致定义同一偏好域的不同条件限制。例如，考虑三元组 $\{x, y, z\}$ 上、顺序为 $x < y < z$；[4] 的单峰偏好域，即排序集合 $\{xyz, yxz, yzx, zyx\}$。获得该偏好域的一种方式，是采用前件为 (x, y)、结论为 (y, z) 的条件限制。另一种方式，是采用前件为 (z, y)、结论为 (y, x) 的条件限制。这种多样性是一项优势，因为每种方式都为构造所有策略无关规则提供了不同但彼此独立的方法。

类似地，有时不同的非条件限制集合会产生相同的含义。例如，由于偏好是传递的，非条件限制集合 $\{(x, y), (y, z), (x, z)\}$ 和 $\{(x, y), (y, z)\}$ 描述了相同的非条件偏好域。此外，每个非条件限制都可以替换为一对具有逆前件的条件限制：例如，非条件限制 (x, y) 可以替换为两个条件限制的并集，其中一个的前件为 (z, w)，另一个的前件为 (w, z)，且二者的结论均为 (x, y)。不过，如果施加的条件限制较少，策略无关规则的构造会更简单，这正是算法1在最初几个步骤中优先处理非条件限制的原因。

为完成本小节，我们用算法1来定义任意偏好域。具体而言，$\mathcal{R}_i$ 通过一个映射 $f_{\mathcal{R}_i}$ 来定义：$2^{X^*} \cup \emptyset \to 2^{X^*} \cup \emptyset$，使得对于所有 $(x, y) \in X^*$，

当且仅当通过算法1对 $\mathcal{R}_i$ 进行分类时，已应用（x，y）非条件限制，$\bullet\, (x, y) \in f_{\mathcal{R}_i}(\emptyset)$。

$\bullet$ 对于任意 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^K \in 2^{X^*}$，我们有 $(x, y) \in f_{\mathcal{R}_i}(\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^K)$ 当且仅当该偏好是单峰的，即存在一个备选项 $s \in X$（称为峰值），使得对于所有t、$u \in X$、$[s \geq t > u$ 或 $u > t \geq s]$ 都能推出 $t\, P_i\, u$。

带有前件 $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{K}$ 和结论 (x, y) 的条件限制已通过算法1应用于对 $\mathcal{R}_i$ 进行分类。

映射 $f_{\mathcal{R}_i}$ 定义了偏好域 $\mathcal{R}_i$，但请注意，这一识别映射并不唯一，因为正如我们之前所论证的，可以应用不同的条件限制集合。对于每个这样的映射 $f_{\mathcal{R}_i}$，令 $C(f_{\mathcal{R}_i}) = \{(x, y) \in X^* \mid \exists A \in 2^{X^*}$，使得 $(x, y) \in A$，并令 $f_{\mathcal{R}_i}(A) \neq \emptyset\}$，表示根据 $f_{\mathcal{R}_i}$定义 $\mathcal{R}_i$ 的条件限制的前件中所包含的全部有序对的集合。因此，如果 $C(f_{\mathcal{R}_i}) = \emptyset$，则 $\mathcal{R}_i$ 是非条件的。否则， $\mathcal{R}_i$ 是条件的。

限制条件偏好域

接下来，我们说明如何进一步限制条件偏好域，使其成为非条件域。考虑由 $f_{\mathcal{R}_i}$识别的任意条件偏好域 $\mathcal{R}_i$ 。如果已知定义 $\mathcal{R}_i$ 的条件限制的前件是否得到满足（即，已知代理人 i 对属于 $C(f_{\mathcal{R}_i})$的有序对的实际偏好），那么就可以将代理人 i的偏好域从 $\mathcal{R}_i$ 进一步限制为非条件偏好域。特别地，如果已知代理人 $R_i \in \mathcal{R}_i$ 的真实偏好恰好满足前件中的有序对的 $B \subseteq C(f_{\mathcal{R}_i})$，那么就可以将 $\mathcal{R}_i$ 进一步限制为 $\mathcal{R}_i^B$，其中对于所有 $A \in 2^{X^*}$ 和 $f_{\mathcal{R}_i^B}(\emptyset) = f_{\mathcal{R}_i}(\emptyset) \cup B \cup (C(f_{\mathcal{R}_i}) \setminus B)^{-1} \cup \{f_{\mathcal{R}_i}(D)\}_{D \subseteq B}$，有 $f_{\mathcal{R}_i^B}(A) = \emptyset$，且 $(C(\mathcal{R}_i) \setminus B)^{-1} = \{(x, y) \in X^* \mid (y, x) \in (C(\mathcal{R}_i) \setminus B)\}$。注意， $C(f_{\mathcal{R}_i^B}) = \emptyset$，因此 $\mathcal{R}_i^B$是一个非条件域。作为说明，我们在两个示例中应用这一过程。

例1 假设算法1已确定， $\mathcal{R}_i$ 不包含任何非条件限制，且恰好包含两个条件限制；这两个条件限制的前件均为 (x, y)，结论分别为 (z, w) 和 (z, v)。也就是说， $f_{\mathcal{R}_i}(\{(x, y)\}) = \{(z, w), (z, v)\}$ 并且对于所有 $A \in 2^{X^*} \setminus \{(x, y)\}$， $f_{\mathcal{R}_i}(A) = f_{\mathcal{R}_i}(\emptyset) = \emptyset$。因此， $C(f_{\mathcal{R}_i}) = \{(x, y)\}$，且 $\mathcal{R}_i$ 是条件性的。于是，如果已知真实偏好 R_i 是否满足前件 (x, y)，就可以进一步限制 $\mathcal{R}_i$，使其变为非条件的。

(i) 如果 R_i 满足前件 $(x,\ y)$，那么 z 必须排在 w 和 v之前。因此，$\mathcal{R}_i^{(x,y)} \subset \mathcal{R}_i$ 仅具有非条件限制 $\{(x,\ y)、(z,\ w)、(z,\ v)\}$。也就是说，$f_{\mathcal{R}_i^{(x,y)}}(\emptyset) = \{(x,\ y)、(z,\ w)、(z,\ v)\}$，并且对于所有$A \in 2^{X^*}$，$f_{\mathcal{R}_i^{(x,y)}}(A) = \emptyset$。由于$C(f_{\mathcal{R}_i^{(x,y)}}) = \emptyset$，$\mathcal{R}_i^{(x,y)}$ 是非条件的。

(ii) 如果 R_i 不满足前件 $(x,\ y)$，那么 z 可能排在w 和 v之上，也可能不排在其上。因此，$R_i^{\emptyset} \subset \mathcal{R}_i$ 只有非条件限制 $\{(y,\ x)\}$。也就是说，$f_{\mathcal{R}_i^{\emptyset}}(\emptyset) = \{(y,\ x)\}$，并且对于所有$A \in 2^{X^*}$，$f_{\mathcal{R}_i^{\emptyset}}(A) = \emptyset$。由于 $C(f_{\mathcal{R}_i^{\emptyset}}) = \emptyset$，$\mathcal{R}_i^{\emptyset}$也是非条件的。□

例2 令 $\mathcal{R}_j$ 为在集合$\{v, w, x, y, z\}$ 上、具有序 $v < w < x < y < z$的所有单峰偏好的偏好域。函数 $f_{\mathcal{R}_j}$，其中 $f_{\mathcal{R}_j}(\{(v,\ w)\}) =\{(w,\ x)\}$，$f_{\mathcal{R}_j}(\{(w,\ x)\}) = \{(x,\ y)\}$，以及 $f_{\mathcal{R}_j}(\{(x,\ y)\}) = \{(y,\ z)\}$，且 $f_{\mathcal{R}_j}(A) = f_{\mathcal{R}_j}(\emptyset) = \emptyset$ 对于所有 $A \in 2^{X^*} \setminus [\{(v,\ w)\} \cup \{(w,\ x)\} \cup \{(x,\ y)\}]$，刻画了该偏好域，并且可以通过算法1得到。因此，$C(f_{\mathcal{R}_j}) = \{(v,\ w),\ (w,\ x),\ (x,\ y)\}$。为了了解代理人的真实偏好 R_j 满足这些前件的哪种组合，只需知道 R_j 的峰值位于 v、w、x，还是位于 x的右侧。

(i) 如果 R_j 的峰值位于 v，那么全部三个前件均得到满足。因此，偏好域 $\mathcal{R}_j^B \subset \mathcal{R}_j$（其中 $B = \{(v,w)、(w,x)、(x,y)\}$）仅具有非条件限制 $\{(v,w)、(w,x)、(x,y)、(y,z)\}$。因此，$f_{\mathcal{R}_j^B}(\emptyset) = \{(v,w)、(w,x)、(x,y)、(y,z)\}$，并且对于所有 $A \in 2^{X^*}$，$f_{\mathcal{R}_j^B}(A) = \emptyset$。因为 $C(f_{\mathcal{R}_j^B}) = \emptyset$，$\mathcal{R}_j^B$是非条件的。

(ii) 如果 R_j 的峰值位于 w，那么只有前件 (w,x) 和 (x,y) 得到满足。因此，$\mathcal{R}_j^B \subset \mathcal{R}_j$（其中 $B = \{(w,x)、(x,y)\}$）仅具有非条件限制$\{(w,v)、(w,x)、(x,y)、(y,z)\}$。因此，$f_{\mathcal{R}_j^B}(\emptyset) = \{(w,v)、(w,x)、(x,y)、(y,z)\}$，并且对于所有 $A \in 2^{X^*}$，$f_{\mathcal{R}_j^B}(A) = \emptyset$。因为 $C(f_{\mathcal{R}_j^B}) = \emptyset$，$\mathcal{R}_j^B$也是非条件的。

(iii) 如果 R_j 的峰值位于 x，那么只有前件 (x,y) 得到满足。因此，$\mathcal{R}_j^{(x,y)} \subset \mathcal{R}_j$仅有非条件限制 $\{(w,v)、(x,w)、(x,y)、(y,z)\}$。因此，$f_{\mathcal{R}_j^{(x,y)}}(\emptyset) = \{(w,v)、(x,w)、(x,y)、(y,z)\}$，且对所有 $A \in 2^{X^*}$，$f_{\mathcal{R}_j^{(x,y)}}(A) = \emptyset$。由于$C(\mathcal{R}_j^{(x,y)}) = \emptyset$，$\mathcal{R}_j^{(x,y)}$ 是非条件的。

(iv) 如果 R_j 的峰值位于 x的右侧，则没有前件得到满足。因此，偏好域 $\mathcal{R}_j^{\emptyset} \subset \mathcal{R}_j$ 仅有非条件限制 $\{(w,v)、(x,w)、(y,x)\}$。因此，$f_{\mathcal{R}_j^{\emptyset}}(\emptyset) = \{(w,v)、(x,w)、(y,x)\}$，且对所有$A \in 2^{X^*}$，$f_{\mathcal{R}_j^{\emptyset}}(A) = \emptyset$。由于$C(f_{\mathcal{R}_j^{\emptyset}}) = \emptyset$，$\mathcal{R}_j^{\emptyset}$ 也属于非条件的。□

策略无关规则的结构

前一小节确立了这样一点：如果获得了有关代理人偏好的某些特定信息，则可以进一步限制条件偏好域，使其变为非条件偏好域。此外，第 2 节表明，
Gibbard-Satterthwaite 不可能性同样适用于任意组合的非条件偏好域的笛卡尔积。因此，任意组合的严格偏好域的笛卡尔积上的任何策略无关社会选择规则，都可由以下两步程序刻画：

1. 根据算法1，从每位代理人 i 处提取信息，以便根据实际偏好推断定义其偏好域 $\mathcal{R}_i$ 的条件限制中的哪些前件得到满足。如果询问该个体如何对某个 $f_{\mathcal{R}_i}$ 的所有 $C(f_{\mathcal{R}_i})$ 进行排序，则始终可以获得这些信息。经过第一步后，每位代理人的偏好域都是非条件偏好域。

2. 对于第一步可能产生的每一种非条件偏好域组合，根据定理1，必须应用一个子规则；该子规则要么是独裁的，要么是值域为2的策略无关规则。

尽管这种两步分解是社会选择规则满足策略无关的必要条件，但它并未完整刻画所有策略无关规则的集合：第二步子规则取决于第一步提供的信息，因此，必须构造第二步中与第一步的真实偏好揭示相一致的子规则组合。正如我们接下来借助例子所展示的，尽管这一过程并非完整刻画，但除了适用于所有定义域之外，

它不仅大幅减少了可能满足策略无关的规则数量，还限制了为获得刻画而应检查的操纵行为。我们在假设 $N=\{1,2\}$ 和 $X=\{v,w,x,y,z\}$ 的情况下，对例1和例2作进一步说明。

例1（续）：假设对于所有 $i\in\{1,2\}$, $f_{\mathcal{R}_i}((x,y))=\{(z,w),(z,v)\}$和 $f_{\mathcal{R}_i}(A)=f_{\mathcal{R}_i}(\emptyset)=\emptyset$对于任何 $A\in 2^{X^*}\setminus\{(x,y)\}$均成立。任何策略无关规则的第一步都会询问每位代理人，其真实偏好是否满足前件（x,y）。之后，必须应用一个子规则；该子规则可能取决于第一步的响应组合，并且要么是独裁的，要么是值域为2的策略无关规则。附录中的计算表明，这个两步程序将潜在策略无关规则的数量从总共 5^{6400} 个减少到仅 $37\cdot 46^2\cdot 59$个。除了大幅减少数量之外，我们的程序还将可能的操纵限制为仅在偏好对 $\{x,y\}$ 上虚报真实偏好。因此，要获得完整刻画，只需检查这些规则中哪些不会诱使代理人在该偏好对上虚报真实偏好。□

例2（续）：假设对于所有 $j\in\{1,2\}$, $f_{\mathcal{R}_j}(\{(v,w)\})=\{(w,x)\}$,$f_{\mathcal{R}_j}(\{(w,x)\})=\{(x,y)\}$, $f_{\mathcal{R}_j}(\{(x,y)\})=\{(y,z)\}$，以及所有 $A\in 2^{X^*}\setminus[\{(v,w)\}\cup\{(w,x)\}\cup\{(x,y)\}]$, $f_{\mathcal{R}_j}(A)=f_{\mathcal{R}_j}(\emptyset)=\emptyset$。任何策略无关规则的第一步都会询问每位代理人，她的峰值是否位于 v、 w、 x ，或位于 x 的右侧。随后，必须应用一个子规则；该子规则可以取决于第一步的响应组合，并且要么是独裁的，要么是值域为2的策略无关规则。附录中的计算表明，这一两步程序将潜在的策略无关规则数量从总计 5^{256} 个减少到仅 $21^2\cdot 17^3\cdot 16^2\cdot 14^2\cdot 9^4\cdot 8^2\cdot 5$ 个。此外，可能发生的唯一操纵是在第一步中虚报偏好。因此，要获得完整刻画，只需检查这些规则中哪些不会激励代理人在第一步中虚报真实偏好。□

请注意，例1和例2中的定义域是共同的。不过，即使定义域是个性化的，我们的方法也同样适用。Alcalde- Unzu 和 Vorsatz [1] 的研究是一个有趣的例子：他们考察了这样一种情形，即每个代理人要么具有单峰偏好，要么

具有单峰底偏好[5]，且偏好的类型属于私人信息，但其峰值/谷点的位置属于公共信息，并且可能因代理人而异。当社会必须选择一处公共设施的位置，而不同人对此有不同看法时，就会出现这种偏好域：喜欢/不喜欢该设施的代理人分别具有单峰/单峰底偏好，而代理人偏好的峰值/谷点自然与其自身位置一致，决策者知晓该位置。这些偏好域是条件性的；但如果代理人的偏好类型已知，偏好域就会变成非条件的。因此，根据我们的刻画策略，任何策略无关规则都会先询问每位代理人的偏好类型（单峰或单峰底）。随后，对于第一步的每一种响应组合，都必须在第二步采用独裁子规则或值域为2的策略无关子规则。因此，只需找出能够促使代理人在第一步如实报告其偏好类型的子规则组合。Alcalde-Unzu 和 Vorsatz [1] 正是采用这一方法，刻画该定义域中的所有策略无关规则。

4 结论

本文证明，定义在任意组合的严格偏好域的笛卡尔积上的所有策略无关社会选择规则，都必然可以用两步程序来描述。第一步，要求代理人披露有关其偏好的某些特定信息。随后，必须采用一个具有独裁性或值域为2的策略无关子规则。具体而言，具有条件偏好域的代理人首先需要说明，他们实际上如何排列属于定义其偏好域的条件限制前件的备选项对。由此，他们的条件偏好域便转变为非条件偏好域。第二步，我们针对非条件偏好域对吉巴德-萨特思韦特不可能性定理的扩展开始发挥作用，这也正是策略无关子规则只能是独裁制或值域为2的原因。

[5]偏好 R_i 是单峰底偏好，当且仅当存在一个备选项 $s \in X$ （称为谷点），使得对于所有 t、$u \in X$、$[s \geq t > u$ 或 $u > t \geq s]$ 蕴含 $u P_i t$。

我们的研究结果意味着，文献中已识别出的任何策略无关规则，都可以按照这一两步程序重新诠释；更重要的是，这一两步程序为确定尚未探索的定义域上策略无关规则的结构提供了指引。文献还考察了一些比策略无关性更强的性质，例如群体策略无关性（见 Barber`a、Berga 和 Moreno [6, 7]）或显然策略无关性（见 Li [13]）。我们的方法也可以用于刻画满足这些更强性质的规则集合。例如，群体策略无关规则必然遵循我们的两步程序；要实现完整刻画，只需分析第二步中的哪些子规则组合，能够在第一步中免受个体和群体操纵。

我们的主要形式化工具是定理1，它是吉巴德-萨特思韦特定理的推广。Kalai 和 Muller[12], Blair 和 Muller [9], Aswal、Chatterji 和 Sen [4], Sato [17], Reffgen [16], 以及 Pramanik [15]也对这一开创性结果作出了其他推广。定理1与这些文献的主要区别在于，这些其他推广聚焦于某些特定类别的共同域，而定理1也适用于个性化域。事实证明，这一区别至关重要。事实上，现有的一些推广（例如 Aswal、Chatterji 和 Sen [4]的结果）表明，即使所有代理人都具有相同的非条件偏好域，吉巴德-萨特思韦特不可能性仍然成立。然而，要构造任意域中所有策略无关规则的结构，我们的策略需要不可能性在各代理人的非条件偏好域不同时也成立。原因在于，在第一步获得有关条件限制前件的信息后，我们可能会遇到代理人具有不同非条件偏好域的情形。即使所有代理人起初共享某个特定的条件偏好域，这种情况也可能发生，因为代理人对条件限制前件的响应可能有所不同。

最后，并非 这意味着，对于某些域而言，两步程序未必是最

简洁地描述其策略无关规则的方式：例如，尽管单峰偏好域中的所有广义中位选民规则都可以按照例2中列出的结构来定义，但这很可能并不是最优雅的方法。因此，对于某些域，在通过两步程序得到所有策略无关规则之后，还必须进行一些额外工作，才能对这一规则族作出优雅的描述。然而，这是引入一种适用于所有域的一般结构所必须付出的代价。此外，还有一些域，例如 Alcalde-Unzu 和 Vorsatz [1], 所分析的域，在这些域中，我们的两步程序正是自然的刻画方法。

参考文献

1. Alcalde-Unzu, J., 和 M. Vorsatz (2018). 公共设施的策略无操纵选址。《博弈与经济行为》112: 21–48。 2. Amor´os, P. (2009). 从不公平陪审员处获取社会最优排序。《经济理论杂志》144: 1211–1226。 3. Amor´os, P. (2013). 挑选获胜者。《国际博弈论杂志》42: 845–865。 4. Aswal, N., Chatterji, S., 和 A. Sen (2003). 独裁域。《经济理论》22: 45–62。 5. Barber`a, S. (2011). 策略无操纵的社会选择。《社会选择与福利手册》第2卷（编者：Arrow, K.J., Sen, A., 和 K. Suzumura）。荷兰：North-Holland：731–831。 6. Barber`a, S., Berga, D., 和 B. Moreno (2010). 个体策略无关性与群体策略无关性：二者何时一致？《经济理论杂志》145: 1648–1674。 7. Barber`a, S., Berga, D., 和 B. Moreno (2016). 私人物品经济中的群体策略无操纵性。《美国经济评论》106: 1073–1099。

8. Barber`a, S., Sonnenschein, H., 和 L. Zhou (1991). 委员会投票。Econometrica 59: 595–609。 9. Blair, D., 和 E. Muller (1983). 偏好受限定义域上的本质聚合程序。《经济理论杂志》30: 34–53。 10. Gibbard, A. (1973). 投票方案操纵：一个一般性结果。Econometrica 41: 587–601。 11. Holzman, R., 和 H. Moulin (2013). 奖项的公正提名。Econometrica 81: 173–196。 12. Kalai, E., 和 E. Muller (1977). 可容纳非独裁社会福利函数和不可操纵投票程序的定义域刻画。《经济理论杂志》16: 457–469。 13. Li, S. (2017). 显然策略无关的机制。《美国经济评论》107: 3257–3287。 14. Moulin, H. (1980). 关于策略无关性与单峰性。《公共选择》35: 437–455。 15. Pramanik, A. (2015). 关于独裁域的进一步结果。《社会选择与福利》45: 379–398。 16. Reffgen, A. (2011). Gibbard–Satterthwaite定理的推广：部分偏好、操纵程度与多值性。《社会选择与福利》37: 39–59。 17. Sato, S. (2010). 循环域。《经济设计评论》14: 331–342。 18. Satterthwaite, M.A. (1975). 策略无关性与Arrow条件：投票程序和社会福利函数的存在定理与对应定理。《经济理论杂志》10: 187–217。

19. Sprumont, Y.（1991）。单峰偏好下的分配问题：一致规则的刻画。Econometrica 59：509–519。

附录

我们首先介绍一些记号。定义 $O_i(R_{-i},\ \mathcal{R}_i) = \{x \in X \mid \exists R_i \in \mathcal{R}_i$ 使得$f(R_i,\ R_{-i}) = x\}$ 为代理人 i 在偏好域 $\mathcal{R}_i$ 其他代理人具有偏好 R_{-i}时的选项集。我们还定义 $\mathcal{D}_{-i} = \times_{j\in N\setminus\{i\}}\mathcal{R}_j$。令 $R_i|_S$ 表示将 R_i 限制在备选项集合 $S \subset X$上所得到的偏好。那么，$\max\{R_i|_{O_i(R_{-i},\ \mathcal{R}_i)}\}$ 是代理人 i 在其选项集$O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)$中、具有偏好 R_i时最偏好的备选项。在证明定理1之前，我们将介绍三个有助于证明的引理。

引理 1　　如果 f在 $\mathcal{D}$上是策略无关的，则对所有 $R \in \mathcal{D}$以及所有 $i \in N$，$f(R) = \max\{R_i|_{O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)}\}$。

证明: 假设并非如此，即存在一名代理人 $i \in N$ 和一个偏好剖面 $R \in \mathcal{D}$，使得 $f(R) \neq \max\{R_i|_{O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)}\}$。由于 $\max\{R_i|_{O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)}\} \in O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)$，存在一个偏好 $R_i' \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R_i', R_{-i}) = \max\{R_i|_{O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)}\}$。根据定义，$f(R) \in O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)$，因此有 $\max\{R_i|_{O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)}\}\ P_i\ f(R)$。于是，代理人 i通过 R_i'操纵了 f 在 R 处的结果。这与 f 在 $\mathcal{D}$ 上是策略无关的相矛盾。□

由引理 1 可知，代理人 j 是定义在域 $\mathcal{D}$ 上的策略无关规则 f 的独裁者，当且仅当对于所有 $R_{-j} \in \mathcal{D}_{-j}$，$O_j(R_{-j},\mathcal{R}_j) = r(f)$。第二个引理表明，如果 f 在某个域 $\mathcal{D}$ 上是策略无关的，那么它在 $\mathcal{D}$ 的任意子域 $\mathcal{D}'$ 上仍然是策略无关的；也就是说，只要对于所有 $i \in N$都有 $\mathcal{R}_i' \subseteq \mathcal{R}_i$。我们将 f 从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}'$ 的限制记为 f'。

引理2 如果 f 在 $\mathcal{D}$ 上是策略无关的，且 $\mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}$的子域，那么 f' 在 $\mathcal{D}'$上是策略无关的。

证明: 反设 f' 在 $\mathcal{D}'$上不是策略无关的。于是，存在一个偏好剖面$R \in \mathcal{D}'$、一个代理人 $i \in N$以及一个偏好 $R_i' \in \mathcal{R}_i'$，使得 $f'(R_i', R_{-i})\ P_i\ f'(R)$。由于根据假设，$\mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}$ 的子域，因此由 $R \in \mathcal{D}'$ 可得 $R \in \mathcal{D}$，并且由 $(R_i', R_{-i}) \in \mathcal{D}'$ 可得 $(R_i', R_{-i}) \in \mathcal{D}$。然后，由于 f'是 f从 $\mathcal{D}$到 $\mathcal{D}'$的限制，$f(R_i', R_{-i}) = f'(R_i', R_{-i})\ P_i\ f'(R) = f(R)$。因此，代理人 i通过 R_i'在 R处操纵了 f。这与 f 在 $\mathcal{D}$上是策略无关的事实相矛盾。□

第三个引理表明，属于某个代理人选项集的所有备选项对，都是其偏好域中的自由对。

引理 3 假设 f 在 $\mathcal{D}$上是策略无关的。那么，对于所有 $i \in N$、所有 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$以及所有$x$， $y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$， $\{x, y\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$。

证明: 反设存在代理人 $i \in N$、其他代理人的偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$以及两个备选项 x、$y \in O_i$（R_{-i}、 $\mathcal{R}_i$），使得 $\{x, y\} \notin S^{-1}(\mathcal{R}_i)$。那么，根据 $S^{-1}(\mathcal{R}_i)$的定义，有 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_i)$ 或 $(y, x) \in S(\mathcal{R}_i)$。不失一般性地，假设 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_i)$。由于根据假设， x、$y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，因此存在两个偏好 R_i、 $R_i' \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R_i, R_{-i}) = x$，且 $f(R_i', R_{-i}) = y$。因此，代理人 i通过 R_i在 (R_i', R_{-i})处操纵了 f。这与 f 在 $\mathcal{D}$上是策略无关的相矛盾。□

定理1的证明

该证明基于归纳法。如果对于所有 $i \in N$都有 $S^{-1}(\mathcal{R}_i) = \emptyset$，那么任何规则 f的值域大小都是 $|r(f)| = 1$。因此，不存在满足 $|r(f)| \neq 2$且具有策略无关性和非独裁性的规则 f。这是归纳法的基础情形。接下来，假设对于某个非条件域 $\mathcal{D}' = \mathcal{R}_i' \times \mathcal{D}'_{-i}$，不可能性成立，并考虑一个更大的非条件域 $\mathcal{D} = \mathcal{R}_i \times \mathcal{D}'_{-i}$，该域满足以下条件：对于某些备选项 x、 $y \in X$，满足 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_i')$，并且不存在满足 (x, z)、$(z, y) \in S(\mathcal{R}_i')$、$S(\mathcal{R}_i) = S(\mathcal{R}_i') \setminus (x, y)$ 的 $z \in X$。归纳步骤要求我们证明，对于 $\mathcal{D}$，不可能性同样成立。[6]

反设存在一个定义在 $\mathcal{D}$ 上的规则 f，满足 $|r(f)| \neq 2$，且同时具有策略无关性和非独裁性。根据引理2， f' 在 $\mathcal{D}'$ 上具有策略无关性。根据假设， $\mathcal{D}'$ 上的不可能性成立，因此必然是 $|r(f')| = 2$ 或 f' 是独裁的。我们将证明分为三个部分。首先，我们证明两个关键引理，它们还表明 $|r(f')| \neq 1$。

[6]请注意，通过这一归纳论证，可以得到任意非条件域$\mathcal{D}$。

接着，我们证明 f' 不可能在 $|r(f')| \neq 1$ 的情况下成为独裁者。最后，我们证明 f' 不可能在 $|r(f')| = 2$ 的情况下具有非独裁性。

第一部分：两个引理

我们首先介绍一些记号。考虑任意一对备选项 w、$z \in X$，并定义与该对备选项相关联的一个置换 $\pi_{w、z}$，其满足对于所有 X，$\pi_{w、z}(w) = z$、π_w，以及 $_z(z) = w$，并且 $\pi_{w、z}(v) = v$。随后，对于某个代理人 $j \in N$ 的每个偏好关系 R_j，我们构造偏好 R^{π_w}、$_j{}^z$，使得对于所有 u、$v \in X$，$u\,R_j\,v \Leftrightarrow \pi_{w、z}(u)\ R^{\pi_w}$、$_j{}^z\,\pi_{w、z}(v)$。因此，$R^{\pi_w}$、$_j{}^z$ 可由 R_j 仅通过交换备选项 w 和 z 得到。当 $w\,P^{\pi_w}$、$_j{}^z z$ 时，我们将 R^{π_w}、$_j{}^z$ 记为$R_j(w、z)$；当 $z\,P^{\pi_w}$、$_j{}^z w$ 时，则记为 $R_j(z、w)$。对于满足 $w\,P_j\,z$ 的给定偏好 R_j，令 $K(w、z、R_j) = \{v \in X \mid w\,R_j\,v\,R_j\,z\}$ 表示这样一个备选项集合：其中的备选项至少不劣于 z，但不严格优于 w 在 R_j 处的排序（即，w 和 z 包含在该 ^ 集合中）；令 $K(w、z、R_j) = \{v \in X \mid w\,P_j\,v\,P_j\,z\}$ 表示在 R_j 处严格排序于 w 和 z 之间的备选项集合。最后，$T(\mathcal{R}_j、w、z) = \{v \in X \mid \{w, v\}, \{z, v\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)\}$ 表示在偏好域 $\mathcal{R}_j$ 下，代理人 $j \in N$ 可以相对于 w 和 z 自由排序的备选项集合。

考虑任意偏好 $R_i \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}'_i$。由于根据归纳假设，$S(\mathcal{R}_i) = S(\mathcal{R}'_i) \setminus (x, y)$，$R_i \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}'_i$ 意味着 $y\,P_i\,x$。引理 4 随即表明：(a) 偏好$R_i(x, y)$仅通过置换 x 和 y即可由 R_i 得到，因此必属于 $\mathcal{R}'_i$；(b) 对于任意备选项 z，若其在 R_i 中的排序严格介于 y 和 x 之间，则在偏好域 $\mathcal{R}'_i$ 下，$\{x, z\}$ 和 $\{y, z\}$ 都是自由对。

^ 引理 4 若 $R_i \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}'_i$，则 $K(y, x, R_i) \subseteq T(\mathcal{R}'_i, x, y)$，且 $R_i(x, y) \in \mathcal{R}'_i$。

^ 证明：我们首先证明，对于每个 $R_i \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}'_i$，$K(y, x, R_i) \subseteq T(\mathcal{R}'_i, x, y)$。假设存在矛盾，即存在一个备选项 $z \in K(y, x, R_i) \setminus T(\mathcal{R}'_i, x, y)$。那么，根据定义，$\{x, z\}$ 或 $\{y, z\}$ 中至少有一个不属于 $S^{-1}(\mathcal{R}'_i)$。假设 $\{x, z\} \notin S^{-1}(\mathcal{R}'_i)$（另一种情况的证明类似）。存在两种可能。首先，如果 $(z, x) \in S(\mathcal{R}'_i)$，那么根据传递性，$(z, y) \in S(\mathcal{R}'_i)$，因此，$(z, y) \in S(\mathcal{R}_i)$。这与 $z \in$

ˆ$K(y,x,R_i)$ 矛盾。其次，如果 $(x,z) \in S(\mathcal{R}_i')$，那么 $(x,z) \in S(\mathcal{R}_i)$，这再次与 ˆ ˆ $z \in K(y,x,R_i)$ 矛盾。最后，由 $K(y,x,R_i) \subseteq T(\mathcal{R}_i',x,y)$ 可知，$R_i(x,y) \in \mathcal{R}_i'$。□

注意，对于所有子偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，$O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i') \subseteq O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)$。下一个关键引理分析这些选项集在不同时的关系。

引理 5 对于每个 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，只要 $O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)$，就有 $\{x,y\} \cap O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i') = x$ 且 $O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i) = O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i') \cup \{y\}$。

证明: 设 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 满足 $O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i)$，并设 $z \in X$ 满足$z \in O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i) \setminus O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i')$。由于 $z \in O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i) \setminus O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i')$，存在一个偏好$R_i \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i'$，使得 $f(R_i,R_{-i}) = z$。现在，考虑偏好 $R_i(x,y)$。根据引理 4，$R_i(x,y) \in \mathcal{R}_i'$。因此，按照构造，$f(R_i(x,y)\ R_{-i}) \neq z$。记 $f(R_i(x,y)\ R_{-i}) = w$。我们将在剩余情形中通过导出矛盾证明 $z = y$ 和 $w = x$。证明分为三个步骤。

1. 假设 $\{w,z\} \cap \{x,y\} = \emptyset$ 或 $\{w,z\} \not\subseteq K(y,x,R_i)$。

   如果 $\{w,z\} \cap \{x,y\} = \emptyset$ 或 $\{w,z\} \not\subseteq K(y,x,R_i)$，那么 $w\,P_i\,z \Leftrightarrow w\,P_i(x,y)\ z$。因此，只要 $w\,P_i\,z$，代理人 i就可以通过 $R_i(x,y)$ 在 (R_i,R_{-i}) 处操纵 f，并且在 $(R_i(x,y)\ R_{-i})$ 处通过 R_i 进行操纵，只要 $z\,P_i\,w$（因此，$z\,P_i(x,y)\ w$）。这与 f 是策略无关的相矛盾。

2. 假设 $[w = y$ 且 $z \in K(y,x,R_i) \setminus \{y\}]$，或 $[z = x$ 且 $w \in K(y,x,R_i) \setminus \{x\}]$。假设 $w = y$ 且 $z \in K(y,x,R_i) \setminus \{y\}$（另一种情况的证明类似）。鉴于 $z \in K(y,x,R_i) \setminus \{y\}$，$z \in K(x,y,R_i(x,y)) \setminus \{y\}$。于是，$z\,P_i(x,y)\ y = w$。因此，代理人 i 通过 R_i 在 $(R_i(x,y)\ R_{-i})$ 处操纵 f。这与 f 是策略无关的相矛盾。

ˆ ˆ 3. 假设 $[z = y$ 和 $w \in K(y,x,R_i)]$ 或 $[w = x$ 和 $z \in K(y,x,R_i)]$。

ˆ 假设 $z = y$ and $w \in K(y,x,R_i)$（另一种情况的证明类似）。ˆ ˆ 考虑偏好 R_i，使得 (a) 对所有 $u,v \in X \setminus \{y\}$, $u\,R_i(x,y)\ v \Leftrightarrow u\,R_i\,v$ˆ ˆ，且 (b) 对所有 $s \in X \setminus \{y\}, y\,P_i\,s \Leftrightarrow w\,R_i(x,y)\ s$。也就说，$R_i$ 是通过将备选项 y 放置在 w 的正上方，由 $R_i(x,y)$ 得到的。根据引理 4，$\{y,v\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$ for

^ ^ 对所有 $v \in K(y, x, R_i)$。于是，由于 $R_i(x, y) \in \mathcal{R}'_i$，我们有 $R_i \in \mathcal{R}'_i$。由于根据假设，$z = y$^ ^ ^ 和 $z \notin O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i)$，我们知道 $f(R_i, R_{-i}) \neq y$。如果 $y\, P_i\, f(R_i, R_{-i})$，^ ^ ^ 那么代理人 i 通过 R_i 在 (R_i, R_{-i}) 处操纵 f。然而，如果 $f(R_i, R_{-i})\ P_i\, y$，那么^ ^$f(R_i, R_{-i})\ P_i(x, y)\ w$，且代理人 i 通过 R_i 在 $(R_i(x, y)\ R_{-i})$ 处操纵 f。在这两种情况下，都与策略无关相矛盾。

引理的证明到此结束。 □

由于 $r(f) = \bigcup_{R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}} O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$ 且 $r(f') = \bigcup_{R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}} O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i)$，我们可以由引理 5推出以下推论。

推论1 如果 $r(f) \neq r(f')$，那么 $x \in r(f')$ 且 $r(f) = r(f') \cup \{y\}$。

如果 $|r(f')| = 1$，则推论1意味着 $|r(f)| \leq 2$。由于根据 $|r(f)| = 1$ 可知，f是独裁的（任何代理人都充当独裁者），并且根据假设，$|r(f)| = 2$ 也已被排除，因此不可能有 $|r(f')| = 1$。所以，从现在起，假设 $|r(f')| \geq 2$，从而 $|r(f)| > 2$。

第 2 部分：假设 f' 是独裁的，并且 $|r(f')| \geq 2$。

由于 $|r(f')| \geq 2$，f' 不可能有多个独裁者。我们根据独裁者的身份对证明进行分类。

第 2.1 部分：假设 f' 中的独裁者是代理人 i。

由于代理人 i 是 f' 中的独裁者，因此对于所有 $R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$、$O_i$（$R_{-i}$、$\mathcal{R}'_i$），都有 $= r$（f'）。如果 r（f）$= r$（f'），那么对于所有 $R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$，$O_i$（$R_{-i}$、$\mathcal{R}_i$）$= r$（$f$）；根据引理 1，这意味着代理人 i 是 f 中的独裁者。这与 f 是非独裁相矛盾。因此，设 r（f）$\neq r$（f'）。根据推论1，r（f）$= r$（f'）$\cup \{y\}$。根据引理 5，集合 $\mathcal{D}'_{-i}$ 可以划分为两个子集：集合 U，其中包含所有满足 O_i（R_{-i}、$\mathcal{R}_i$）$= r$（f'）的子偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$；以及集合 V，其中包含其余的子偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$，对于 ¯，有 O_i（R_{-i}、$\mathcal{R}_i$）$= r$（f）。注意，$V \neq \emptyset$。如果 $U = \emptyset$，则对于所有 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，有 O_i（R_{-i}、$\mathcal{R}_i$）$= r$（f）；根据引理 1，这意味着 f 是代理人 i 的独裁，因此再次与 f 是非独裁相矛盾。因此，设 $U \neq \emptyset$。

¯考虑一对子偏好剖面 $R_{-i} \in U$ 和 $R_{-i} \in V$。然后，从 R_{-i} 开始，逐一改变所有代理人 $j \neq i$¯ ¯的偏好，将其从 R_j 变为 R_j ，从而构造出一个 $\mathcal{D}'_{-i}$ 的子偏好剖面序列，并使该序列最终到达 R_{-i}。于是，存在一个集合 $S \subset N \setminus \{i\}$¯ ¯和一个代理人 $k \notin S \cup \{i\}$ ，使得（R_S、$R_{-(S\cup\{i\})}$）$\in U$，且（$R_{S\cup\{k\}}$、$R_{-(S\cup\{i,k\})}$）$\in V$。也就是说，如果属于 S 的所有代理人的偏好都已改变，则代理人 i 的选项集为 $r(f')$；但如果 $S \cup \{k\}$ 中所有代理人的偏好都被切换，则其选项集为 $r(f)$。鉴于 $|r(f')| \geq 2$ 且 $r(f') \cap \{x, y\} = \{x\}$，存在一个备选项 $z \neq y$，使得 $z \in r(f') \setminus \{x\}$。由于 $O_i(\bar{R}_{-i}, \mathcal{R}_i) = r(f)$，根据引理 3，对于所有 v、$w \in r(f)$，都有 $\{v, w\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$。接着，考虑代理人 i 的两个偏好 R_i、$R'_i \in \mathcal{R}_i$，使得对于所有 $v \in r(f') \setminus \{z\}$，都有 $y\, P_i\, z\, P_i\, v$，并且对于所有 $w \in r(f') \setminus \{x\}$，都有 $y\, P'_i\, x\, P'_i\, w$。

1. 我们证明 $\{(y,x),(z,y),(z,x)\} \cap S(\mathcal{R}_k) \neq \emptyset$ 以及 $\{(x,y),(y,z),(x,z)\} \cap S(\mathcal{R}_k) \neq \emptyset$。我们只证明 $\{(y,x),(z,y),(z,x)\} \cap S(\mathcal{R}_k) \neq \emptyset$，因为另一个命题的证明类似。反设 $\{(y,x),(z,y),(z,x)\} \cap S(\mathcal{R}_k) = \emptyset$。那么，存在一个偏好 $R'_k \in \mathcal{R}_k$ 使得 $x\, P'_k\, y\, P'_k\, z$。

¯ ¯如果 $(R_S, R_{-(S\cup\{i,k\})}, R'_k) \in U$，那么 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i,k\})}, R'_k)\ \mathcal{R}_i) = r(f')$。由于 $z\, P_i\, v$对¯所有 $v \in r(f')\setminus\{z\}$均成立，根据引理 1，$f(R_S, R_{-(S\cup\{k\})}, R'_k) = z$。注意，由 $(R_{S\cup\{k\}}, R_{-(S\cup\{i,k\})}) \in V$可¯ ¯推出 $O_i((R_{S\cup\{k\}}, R_{-(S\cup\{i,k\})})\ \mathcal{R}_i) = r(f') \cup \{y\}$。¯ 鉴于 $y\, P_i\, v$对所有 $v \in r(f')$均成立，根据引理 1，$f(R_{S\cup\{k\}}, R_{-(S\cup\{k\})}) = y$。¯ ¯于是，代理人 k 通过 R_k在 $(R_S, R_{-(S\cup\{k\})}, R'_k)$ 处操纵了 f。

¯ ¯如果（R_S、$R_{-(S\cup\{i,k\})}$、R'_k）$\in V$，那么 O_i（（R_S、$R_{-(S\cup\{i,k\})}$、R'_k）$\mathcal{R}_i$）$= r(f') \cup \{y\}$。由于¯$y\, P'_i\, w$对所有 $w \in r(f')$ 均成立，根据引理 1，我们有 f（R_S、$R_{-(S\cup\{i,k\})}$、$R'_{\{i,k\}}$）$= y$。¯ ¯同样可由（R_S、$R_{-(S\cup\{i\})}$）$\in U$推出 O_i（（R_S、$R_{-(S\cup\{i\})}$）$\mathcal{R}_i$）$= r(f')$。鉴于¯$x\, P'_i\, w$对所有 $w \in r(f') \setminus \{x\}$均成立，根据引理 1，我们有 f（R_S、$R_{-(S\cup\{i\})}$、R'_i）$= x$。¯然后，代理人 k 通过 R_k在（R_S、$R_{-(S\cup\{i,k\})}$、$R'_{\{i,k\}}$）处操纵了 f。

无论如何，这都与策略无关相矛盾。

2. 我们证明 $\{(x,y),(z,y),(y,x),(y,z)\} \cap S(\mathcal{R}_k) = \emptyset$。

用反证法，假设 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_k)$；其他配对的证明遵循¯类似的推理，因此省略。请记住， $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) =_r(f')$，且 $O_i((R_{S\cup\{k\}}, R_{-(S\cup\{i,k\})})\ \mathcal{R}_i) = r(f') \cup \{y\}$是按构造得到的。鉴于_$y\, P_i'\, x\, P_i'\, w$对所有 $w \in r(f') \setminus \{x\}$均成立，根据引理 1 可得 $f(R_S, R_{-(S\cup\{i\})}, R_i') =$ _x，且 $f(R_{S\cup\{k\}}, R_{-(S\cup\{i,k\})}, R_i') = y$。由于 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_k)$， $x\, P_k\, y$。因此，代理人 k在 $(R_{S\cup\{k\}}, R_{-(S\cup\{i,k\})}, R_i')$处通过 R_k操纵了 f ¯。这与 f 是策略无关的相矛盾。

由 1. 和 2. 可得 $\{(x, z), (z, x)\} \subseteq S(\mathcal{R}_k)$。这与 $S(\mathcal{R}_k)$ 是反对称的相矛盾。

第2.2部分：假设 f' 中的独裁者是代理人 $j \neq i$。

根据假设，代理人 $j \neq i$ 是 f' 中的独裁者，因此我们可以得出，对于所有 $R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$, $|O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i')| = 1$。如果对于所有 $R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$， $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，那么代理人 j 也是 f 中的独裁者，这与 f 是非独裁相矛盾。因此，存在一个子剖面$R_{-i} \in \mathcal{D}'_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。然后，根据引理 5， $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = x$，并且$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$。由于 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = x$，且 f' 是代理人 j 的独裁，因此对于所有 $z \in r$, $x\, P_j\, z(f') \setminus \{x\}$。令 $R_i \in \mathcal{R}_i'$ 和 $R_i' \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i'$。由于根据构造， $x\, P_i\, y$ 和 $y\, P_i'\, x$，由引理 1 可知， $f(R) = x$，且 $f(R_i', R_{-i}) = y$。我们分两种情况讨论。

1. 假设 $r(f) = = r(f')$。

由于 f'是代理人 j的独裁，因此对于所有 $R_{-j} \in \mathcal{D}'_{-j}$, $O_j(R_{-j}, \mathcal{R}_j) =r(f') = r(f)$。由引理 3 以及 $|r(f)| > 2$可知，对于所有 $z \in r(f) \setminus \{x, y\}$, $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。因此，存在一个偏好 ˆ $R_j \in \mathcal{R}_j$ ˆ ˆ，使得对于所有 $z \in r(f) \setminus \{x, y\}$, $x\, P_j\, z\, P_j\, y$。由于代理人 j在 f'中是独裁者，且 $(R_j, R_{-j}) \in \mathcal{D}'$, $f(R_j, R_{-j}) = x$以及 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = x$。根据引理 5， $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$，因此， $f(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}}) \in \{x, y\}$。ˆ如果 $f(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}}) = y$, 考虑任意偏好 $R_j' \in \mathcal{R}_j$，使得对于某个 $z \in r(f) \setminus \{x, y\}$且对于所有 $v \in r(f) \setminus \{z\}$, $z\, P_j'\, v$。由于代理人 j在 f'中是独裁者，且 $(R_j', R_{-j}) \in \mathcal{D}'$, $f(R_j', R_{-j}) = z$以及 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = z$。于是，根据引理 5， $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = z$。这意味着 $f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = z$。代理人 j随后

^ ^通过 R'_j在 $(R'_i, R_j, R_{-\{i,j\}})$ 处操纵 f。如果 $f(R'_i, R_j, R_{-\{i,j\}}) = x$，那么代理人 j^通过 R_j 在 (R'_i, R_{-i}) 处操纵 f，此时结果为 y（注意，对于所有 $z \in r(f') \setminus \{x\}$，$x P_j z$ 意味着 $x P_j y$）。无论哪种情况，都与策略无关性相矛盾。

2. 假设 $r(f) \neq r(f')$。

根据推论1，$r(f) = r(f') \cup \{y\}$。由于 f' 是代理人 j的独裁，因此对于所有 $R_{-j} \in \mathcal{D}'_{-j}$，$O_j(R_{-j}, \mathcal{R}_j) = r(f')$。于是，根据引理 3，对于所有 v，$\{v, w\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$，$w \in r(f')$。我们将分析分为两种情况。

a. 假设存在一个备选项 $z \in r(f')$，使得 $(y, z) \in S(\mathcal{R}_j)$。

考虑任意 $w \in r(f') \setminus \{z\}$。我们已经知道，对于所有$v \in r(f') \setminus \{w\}$，$\{v, w\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。此外，对于所有 $v \in r(f')$，我们有 $(v, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$，因为否则根据传递性，我们将得到 $(v, z) \in S(\mathcal{R}_j)$，这与 $\{v, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$ 矛盾。于是，存在一个偏好 $R'_j \in \mathcal{R}_j$，使得对于所有$v \in r(f') \setminus \{w\}$，$y P'_j w P'_j v$。

为完成证明的这一部分，注意到 $O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}'_i) = w$，因为$j$是 $\mathcal{D}'$处的独裁者。然后，根据引理 5，$O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) = w$。因此，$f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = w$。代理人 j于是通过 R_j 在 $(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}})$ 处操纵 f，以获得 y。这与 f 是策略无关的相矛盾。

b. 假设对于所有备选项 $z \in r(f')$，$(y, z) \notin S(\mathcal{R}_j)$。

考虑任意 $z \in r(f') \setminus \{x\}$。由于对于所有 ^ ^ ^ ^$u, v \in r(f')$，$(y, v) \notin S(\mathcal{R}_j)$ 且 $\{u, v\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$，存在一个偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$ 使得对于所有 $w \in$^$r(f') \setminus \{x, z\}$。因此，由于 f' 是代理人 j的独裁，$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}'_i) =$^$x$。根据引理 5，$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$，因此我们有 ^ ^$f(R'_i, R_j, R_{-\{i,j\}}) \in \{x, y\}$。如果 $f(R'_i, R_j, R_{-\{i,j\}}) = y$，考虑任意偏好$R'_j \in \mathcal{R}_j$，使得对于所有 $v \in r(f') \setminus \{z\}$，$z P'_j v$。由于代理人 j在 f'中是独裁者，且 $(R'_j, R_{-j}) \in \mathcal{D}'$，$O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}'_i) = z$。然后，根据引理 5，$O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) = z$。因此，$f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = z$。代理人 j随后通过 f进行操纵

ˆ ˆ在 $(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}})$处通过 R_j'。因此我们可以得出， $f(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}}) = x$。如果 $x\, P_j\, y$，则代理人 j 通过 ˆR_j在 (R_i', R_{-i})处操纵 f，其中结果为 y。因此， $y\, P_j\, x$。根据假设，$(y, x) \notin S(\mathcal{R}_j)$， $\{x, y\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。我们根据对于所有 $w \in r(f') \setminus \{x\}$是否有 $(w, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$来分别讨论证明。

如果对于所有 $w \in r(f') \setminus \{x\}$ 都有 $(w, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$，那么存在一个偏好 $R_j'' \in \mathcal{R}_j$，使得对于所有 $w \in r(f') \setminus \{z\}$ 都有 $y\, P_j''\, z\, P_j''\, w$。由于代理人 j 在 f' 处是独裁者，且 $(R_j'', R_{-j}) \in \mathcal{D}'$，因此 $O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}}) \ \mathcal{R}_i') = z$。于是，根据引理 5，$O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}}) \ \mathcal{R}_i) = z$。这意味着 $f(R_j'', R_i', R_{-\{i,j\}}) = z$。随后，代理人 j 在该偏好剖面下通过 R_j 操纵 f，从而获得 y，这与 f 是策略无关的事实相矛盾。

如果对于某个 $w \in r(f') \setminus \{x\}$ 有 $(w, y) \in S(\mathcal{R}_j)$，那么存在一个偏好 $R_j'' \in \mathcal{R}_j$，使得对于所有 $v \in r(f) \setminus \{w\}$ 都有 $w\, P_j''\, v$。由于代理人 j 在 f' 处是独裁者，且 $(R_j'', R_{-j}) \in \mathcal{D}'$，因此 $O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}}) \ \mathcal{R}_i') = w$。于是，根据引理 5，$O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}}) \ \mathcal{R}_i) = w$。这意味着 $f(R_j'', R_i', R_{-\{i,j\}}) = w$。根据假设，$(w, y) \in S(\mathcal{R}_j)$，因此 $w\, P_j\, y$。于是，代理人 j 在 (R_i', R_{-i}) 处通过 R_j'' 操纵 f，此时结果为 y。这再次与 f 是策略无关的事实相矛盾。

第 2 部分的证明到此结束。

第3部分：假设 f'是非独裁的，且 $|r(f')| = 2$。

根据推论1， $r\ (f') = \{x, z\}$ 以及 $r\ (f) = \{x, y, z\}$。证明主要基于以下观察：在策略无关（SP）条件下，不存在这样的子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i\ (R_{-i},\ \mathcal{R}_i') = r\ (f')$，并且 $O_i\ (R_{-i},\ \mathcal{R}_i) = r\ (f)$。也就是说，不存在这样的子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使代理人 i在偏好域 $\mathcal{R}_i'$ 和 $\mathcal{R}_i$中都“充当独裁者”。为了得到这一结果（该结果在引理 11中予以证明），我们首先必须建立总共五个引理。第一个引理假设存在一个子剖面 R_{-i}，在该子剖面中，当代理人 i 的偏好域得到扩展时，其选项集发生变化。于是，根据引理 5，我们知道 x 属于代理人 i 在较小偏好域中的选项，而 y 进入了

代理人 i 在扩展偏好域中的选项集。具体而言，在这一系列引理中的第一个引理里，我们分析另一名代理人 j 从 R_j 偏离到任意其他偏好时会发生什么。研究表明， x 仍属于代理人 i 在较小偏好域中的选项；也就是说，该选项集不可能只包含 z。

引理6 考虑任意 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。那么，对于所有 ^ ^ 代理人 $j \neq i$ 以及所有偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$, $x \in O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$。

证明: 考虑任意 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，并反证法假设存在一个代理人 $j \neq i$ 和一个偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$ 使得 ^ ^ $x \notin O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\, \mathcal{R}_i')$。那么，由于 $r(f') = \{x, z\}$, $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\, \mathcal{R}_i') = z$。由于根据假设 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$, 由引理 5可知 $x \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i')$ 且 $y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。考虑一个偏好 $R_i \in \mathcal{R}_i'$ ，使得对于所有满足 $\{x, w\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$ 的 $w \in X \setminus \{x\}$, $x\, P_i\, w$。再考虑任意 $R_i' \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i'$, 使得对于所有 $v \in X \setminus \{x\}$ 满足 $\{y, v\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$ 的情况， $y\, P_i'\, v$。根据引理 3, $x = \max\{R_i | O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i')\}$ 以及 $y = \max\{R_i' | O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)\}$。然后，根据引理 1， $f(R) = x$ 且 $f(R_i', R_{-i}) = y$。同样地， ^ ^ 由于 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = z$, 由引理 5可知 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = z$。因 ^ ^ ^ 此， $f(R_j, R_{-j}) = f(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$。由于 $f(R_i', R_{-i}) = y$ 且 $f(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$, ^ 我们有 $y, z \in O_j((R_i', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_j)$。又由于 $f(R) = x$ 且 $f(R_j, R_{-j}) = z$, 我们有 $x, z \in O_j(R_{-j}, \mathcal{R}_j)$。然后，根据引理 3， $\{y, z\}, \{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。我们根据 (x, y) 是否 $\in S(\mathcal{R}_j)$ 来区分证明。

1. 假设 $(x, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$。

   由 $\{x, z\}, \{y, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$ 和 $(x, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$ 可知，存在一个偏好$R_j' \in \mathcal{R}_j$使得 $y\, P_j'\, z\, P_j'\, x$。由于 $x, z \in O_j(R_{-j}, \mathcal{R}_j)$、$(R_j', R_{-j}) \in \mathcal{D}'$，且 $r(f') = \{x, z\}$，我们可以得出 $O_j(R_{-j}, \mathcal{R}_j) = \{x, z\}$。然后，根据引理 1， $f(R_j', R_{-j}) = z$。因此， $z \in O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$。

   接下来我们证明， $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = z$。反证法假设， $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') \neq z$。由于我们已经证明了 $z \in O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$，因此可以得出 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$。根据引理 3， $\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$

并且随后，根据 $R_i \in \mathcal{R}_i'$的构造， $x P_i z$。由于 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i') =$ $_{-\{x,z\}}$，存在一个偏好 $R_i \in \mathcal{R}_i'$，使得 $f(R_i, R_j', R_{-\{i,j\}}) = x$。因此，代理人 i¯通过 R_i在(R_j', R_{-j})处操纵了 f，其中结果为 z。这与 f是策略无关的事实相矛盾。因此， $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i') = z$。

由 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i') = z$和引理 5 可知， $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) = z$。因此， $f(R_{\{i,j\}}', R_{-\{i,j\}}) = z$。代理人 j随后在此偏好剖面下通过 R_j操纵 f，以获得 y。这再次与 f 是策略无关的相矛盾。

2. 假设 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_j)$。

由 $\{x, z\}, \{y, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$ 和 $(x, y) \in S(\mathcal{R}_j)$ 可知，存在一个偏好$R_j' \in \mathcal{R}_j$，使得 $x P_j' z P_j' y$。注意，$(R_j', R_{-j}) \in \mathcal{D}'$且 $r(f') = \{x, z\}$，这意味着 $f(R_j', R_{-j}) \in \{x, z\}$。若 $f(R_j', R_{-j}) = z$，代理人 j便可在此偏好剖面下通过 R_j操纵 f，以获得 x。因此， $f(R_j', R_{-j}) = x$。

由于 $r(f) = \{x, y, z\}$, $f(R_{\{i,j\}}', R_{-\{i,j\}}) \in \{x, y, z\}$。另请注意， $x P_j y$，因为根据假设，$(x, y) \in S(\mathcal{R}_j)$。如果 $f(R_{\{i,j\}}', R_{-\{i,j\}}) = x$，那么代理人 j通过 R_j'在 (R_i', R_{-i})处操纵 f，其中结果为 y。如果 $f(R_{\{i,j\}}', R_{-\{i,j\}}) = y$，那么代理人 j^ 通过 R_j在此偏好剖面处操纵 f，以获得 z。因此， $f(R_{\{i,j\}}', R_{-\{i,j\}}) = z$。

由于 $f(R_j', R_{-j}) = x$且 $f(R_{\{i,j\}}', R_{-\{i,j\}}) = z$，我们有 $x, z \in O_i((R_j', R_{-\{i,j\}}, \mathcal{R}_i)$。于是，根据引理 3， $\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$。我们根据 $(z, y) \in S(\mathcal{R}_i)$ 是否成立，将证明的其余部分分情况讨论。

a. 假设 $(z, y) \notin S(\mathcal{R}_i)$。

由于 $\{x, y\}, \{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$ 且 $(z, y) \notin S(\mathcal{R}_i)$，存在一个偏好 $R_i'' \in \mathcal{R}_i \backslash \mathcal{R}_i'$使得 $y P_i'' x P_i'' z$。因此，根据 $r(f) = \{x, y, z\}$, $y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$、^以及引理 1，可得 $f(R_i'', R_{-i}) = y$。同样，根据 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) = z$^可得 $f(R_i'', R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$。

考虑 $f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}})$。如果 $f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) = x$，那么代理人 j通过 R_j'在 (R_i'', R_{-i}) 处操纵 f，其中结果为 y（记住，$(x, y) \in$

$S(\mathcal{R}_j)$ 根据假设成立，因此 $x\,P_j\,y$)。如果 $f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) = y$，那么代理人 j^ 通过 R_j 在此偏好剖面处操纵 f，以获得 z。如果 $f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) = z$，那么代理人 i 通过 R_i 在此偏好剖面处操纵 f，以获得 x。由于 $r(f) = \{x, y, z\}$且 f 是策略无关的，这就产生了矛盾。

b. 假设 $(z, y) \in S(\mathcal{R}_i)$。

由于 $\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i)$ 且 $(z, y) \in S(\mathcal{R}_i)$，我们有 $\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$ 且 (x, y)、$(z, y) \in S(\mathcal{R}_i')$。因此，存在一个偏好 $R_i'' \in \mathcal{R}_i'$ 使得$z\,P_i''\,x\,P_i''\,y$。由于 $r(f') = \{x, z\}$ 且 $(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) \in \mathcal{D}'$，$f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) \in \{x, z\}$。如果 $f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) = x$，那么代理人 i 通过R_i'在该偏好剖面上操纵 f以获得 z。因此，$f(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}}) = z$。

考虑 $f(R_i'', R_{-i})$。一方面，如果 $f(R_i'', R_{-i}) = z$，那么代理人 i会通过 R_i''在 (R_i', R_{-i}) 处操纵 f，此时结果为 y（请记住，根据假设，$(z, y) \in S(\mathcal{R}_i)$，因此 $z\,P_i'\,y$）。另一方面，如果 $f(R_i'', R_{-i}) = x$，那么代理人 j 会通过 R_j 在 $(R_i'', R_j', R_{-\{i,j\}})$ 处操纵 f，此时结果为 z。由于 $r(f') = \{x, z\}$ 且 $(R_i'', R_{-i}) \in \mathcal{D}'$，这与 f是策略无关的相矛盾。

引理6的证明至此完成。 □

^ 我们在前一个引理中得出结论：$x \in O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$。在相同假设下，接下来我们证明，如果 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$，那么 $\{y, z\}$ 是代理人 i的自由对。

引理7 设 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 满足 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。若存在一个代理人$j \neq i$和一个偏好 ^ $R_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((\hat{}R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}, \{y, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$。

证明: 任取 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，再任取代理人 ^ ^$j \neq i$ 以及一个偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$。根据引理 3，我们有 $\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$。我们首先证明 $(y, z) \notin S(\mathcal{R}_i')$。用反证法，假设 $(y, z) \in S(\mathcal{R}_i')$。由于根据构造，$(x, y) \in S(\mathcal{R}_i')$，根据传递性，$(x, z) \in S(\mathcal{R}_i')$。这与 $\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$ 相矛盾。

接下来我们证明 $(z,y) \notin S(\mathcal{R}_i')$。用反证法，假设 $(z,y) \in S(\mathcal{R}_i')$。由于 $\{x,z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_i')$ 且 (x,y)，$(z,y) \in S(\mathcal{R}_i')$，因此对于每个 $R_i'' \in \mathcal{R}_i'$，$x\, P_i''\, z\, P_i''\, y$ 或 $z\, P_i''\, x\, P_i''\, y$。令 R_i^1，$R_i^2 \in \mathcal{R}_i'$ 使得 $x\, P_i^1\, z\, P_i^1\, y$ 且 $z\, P_i^2\, x\, P_i^2\, y$。于是，由 $O_i((\hat{}R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x,z\}$ 和引理 1 可得，$f(R_i^1, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = x$ 且 $f(R_i^2, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$。

现在考虑 $\mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i'$ 中的偏好。根据假设，由于 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，根据引理 5 可知，$y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) \setminus O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i')$，因此存在一个偏好 $R_i' \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i'$，使得 $f(R_i', R_{-i}) = y$。根据假设，由于 $(z,y) \in S(\mathcal{R}_i')$，所以 $(z,y) \in S(\mathcal{R}_i)$，进而每个 $R_i'' \in \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_i'$ 都满足 $z\, P_i''\, y\, P_i''\, x$。因此，$z\, P_i'\, y\, P_i'\, x$。如果 $f(R_i', \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) \in \{x,y\}$，那么代理人 i 在该偏好剖面下通过 R_i^2 操纵 f，从而获得 $\hat{}z$。所以，$f(R_i', R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$。因此，我们可以得出结论：$y, z \in O_j((R_i', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_j)$。根据引理 3，$\{y,z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。

现在考虑 $f(R_i^2, R_{-i})$。如果 $f(R_i^2, R_{-i}) = z$，那么代理人 i 在 (R_i', R_{-i}) 处通过 R_i^2操纵 f，此时结果为 y。然后，由于 $(R_i^2, R_{-i}) \in \mathcal{D}'$ 且 $r(f') = \{x,z\}$，$f(R_i^2, R_{-i}) = x$。由于 $f(R_i^2, R_{-i}) = x$ 且 $f(R_i^2, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$，我们有 $x, z \in O_j((R_i^2, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_j)$。根据引理 3，$\{x,z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。最后考虑 $f(R_i^1, R_{-i})$。如果 $f(R_i^1, R_{-i}) = z$，那么代理人i 通过 R_i^2在此偏好剖面上操纵 f，从而得到 x。由于 $(R_i^1, R_{-i}) \in \mathcal{D}'$ 且 $r(f') = \{x,z\}$，我们有 $f(R_i^1, R_{-i}) = x$。我们进一步根据 (x,y) 是否属于 $S(\mathcal{R}_j)$ 来划分情形。

a. 假设 $(x,y) \in S($v4)。

根据假设，$(x,y) \in S(\mathcal{R}_j)$，且 $\{x,z\}, \{y,z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$，因此存在一个偏好 $R_j' \in \mathcal{R}_j$使得 $x\, P_j'\, z\, P_j'\, y$。鉴于 $(R_i^2, R_j', R_{-\{i,j\}}) \in \mathcal{D}'$ 且 $r(f') =\{x,z\}$，$f(R_i^2, R_j', R_{-\{i,j\}}) \in \{x,z\}$。如果 $f(R_i^2, R_j', R_{-\{i,j\}}) = z$，那么代理人 j在该偏好剖面下通过 R_j操纵 f，从而获得 x。因此，$f(R_i^2, R_j', R_{-\{i,j\}}) = x$。现在考虑 $f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}})$。由于 $r(f) = \{x,y,z\}$，$f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) \in \{x,y,z\}$。如果$f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = x$，那么代理人 j在 (R_i', R_{-i}) 处通过 R_j'操纵 f，此时结果为 y（请记住，根据假设，$(x,y) \in S(\mathcal{R}_j)$，因此 $x\, P_j\, y$）。如果 $\hat{}f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = y$，那么代理人 j在该偏好剖面下通过 R_j操纵 f，从而获得 z。

如果 $f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = z$，那么代理人 i在 $(R_i^2, R'_j, R_{-\{i,j\}})$ 处通过 R'_i操纵 f，此时结果为 x。这与 f 是策略无关的事实相矛盾。

b. 假设 $(x, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$。

根据假设，$(x, y) \notin S(\mathcal{R}_j)$，且 $\{x, z\}, \{y, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$，因此存在一个偏好 $R'_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $y\, P'_j\, z\, P'_j\, x$。鉴于 $(R_i^2, R'_j, R_{-\{i,j\}}) \in \mathcal{D}'$ 且 $r(f') = \{x, z\}$，$f(R_i^2, R'_j, R_{-\{i,j\}}) \in \{x, z\}$。如果 $f(R_i^2, R'_j, R_{-\{i,j\}}) = x$，那么代理人 j会在此偏好剖面上通过 ˆ R_j操纵 f，以获得 z。因此，$f(R_i^2, R'_j, R_{-\{i,j\}}) = z$。现在考虑$f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}})$。如果 $f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) \in \{x, y\}$，那么代理人 i会在此偏好剖面上通过 R_i^2操纵 f，以获得 z。如果 $f(R'_{\{i,j\}}, R_{-\{i,j\}}) = z$，那么代理人 j会在此偏好剖面上通过 R_j操纵 f，以获得 y。由于 $r(f) = \{x, y, z\}$，这与 f是策略无关的相矛盾。

引理7的证明至此结束。 □

注意，在引理7的假设下（存在一个子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，当代理人 i 的域从 $\mathcal{R}'_i$ 扩大到 $\mathcal{R}_i$ 时，其选项集会发生变化；并且，对于某个代理人 j，存在一种备选偏好，只改变这一偏好，代理人 i 的选项集在$\mathcal{R}'_i$下便为 $\{x, z\}$ ），我们可以证明$\{x, z\}$，$\{y, z\} \in S^{-1}$（$\mathcal{R}_i$）。事实上，由于 $\{x, z\}$是某个子剖面中代理人 i 的选项集，根据引理 3可知 $\{x, z\} \in S^{-1}$（$\mathcal{R}_i$）。并且，根据引理7，我们知道 $\{y, z\} \in S^{-1}$（$\mathcal{R}_i$）。那么，考虑任意偏好 R_i^1、R_i^2、.....、R_i^6，使得$x\, P_i^1\, y\, P_i^1\, z$、$x\, P_i^2\, z\, P_i^2\, y$、$z\, P_i^3\, x\, P_i^3\, y$、$z\, P_i^4\, y\, P_i^4\, x$、$y\, P_i^5\, z\, P_i^5\, x$、$y\, P_i^6\, x\, P_i^6\, z$，且对于所有的（$v$，$w$）$\in S$（$\mathcal{R}_i$）和所有 $l \in \{1, 2, \ldots, 6\}$，都有 $v\, P_l\, w$。那么，在上述假设下，R_i^1、R_i^2、$R_i^3 \in \mathcal{R}'_i$，并且 R_i^4、R_i^5、$R_i^6 \in \mathcal{R}_i \backslash \mathcal{R}'_i$。在接下来两个引理的证明中，我们将始终使用这些偏好。

在与之前相同的假设下，我们证明存在一个偏好 $R'_j \in \mathcal{R}_j$，使得对于代理人 j，代理人 i 的选项集在其原始偏好域和扩展偏好域中都等于整个值域。因此，该引理确立了：对于 $\mathcal{R}'_i$ 和 $\mathcal{R}_i$，代理人 i 在子剖面 $(R'_j, R_{\{i,j\}})$ 上都“充当独裁者”。

引理 8 令 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 满足 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。如果存在一个代理人 $\hat{}\hat{}j \neq i$ 以及一个偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$，那么存在一个偏好 $R_j' \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f')$，并且 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。

证明: 任取 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，再任取代理人 $j \neq i$ 以及偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$。注意，由于根据引理 5，$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，$y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。假设存在矛盾，即不存在 $R_j' \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f') = \{x, z\}$ 且 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f) = \{x, y, z\}$。若 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$，则根据引理 5，$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = r(f')$ 且 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = r(f)$，令 R_j' 等于 R_j，即可得到矛盾。因此，$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq \{x, z\}$。于是，根据引理 5，$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = x$ 且 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$。引理 1 随即推出，$f(R_i^3, R_{-i}) = x$ 且 $f(R_i^6, R_{-i}) = y$。此外，若 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$，则令 R_j' 等于 R_j，即可得到矛盾。因此，$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f') = \{x, z\}$。引理 1 随即推出，$f(R_i^3, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$ 且 $f(R_i^6, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = x$。

由 $f(R_i^3, R_{-i}) = x$ 和 $f(R_i^3, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$ 可得 $x, z \in O_j((R_i^3, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_j)$。因此，根据引理 3，$\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。此外，由 $f(R_i^6, R_{-i}) = y$ 和 $f(R_i^6, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = x$ 可得 $x, y \in O_j((R_i^6, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_j)$。因此，根据引理 3，$\{x, y\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。由于 $\{x, z\}$，$\{x, y\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$，任取 $\bar{R}_j \in \mathcal{R}_j$ 使得 $y\, \bar{P}_j\, x$ 和 $z\, \bar{P}_j\, x$。¯我们首先证明，$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f') = \{x, z\}$。根据引理6，$x \in$ _$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$。因此，只需证明 $z \in O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$。¯反设，即 $z \notin O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\, \mathcal{R}_i')$。于是必有 $O_i((\bar{R}_j, R_{-\{i,j\}})\, \mathcal{R}_i') = x$。这意味着 $f(R_i^3, \bar{R}_j, R_{-\{i,j\}}) = x$。由 $O_i((\hat{}R_j, R_{-\{i,j\}})\, \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$ 和引理 1还可推出 $f(R_i^3, \hat{}R_j, R_{-\{i,j\}}) = z$。因此，代理人 j 通过 $\hat{}\ R_j$ 在 $(R_i^3, \bar{R}_j, R_{-\{i,j\}})$ 处操纵了 f。由于这与 f 是策略无关相矛盾，我们得出结论：¯ $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f')$。

¯接下来我们证明，$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。根据假设，$r(f) = \{x, y, z\}$。由于 _$\mathcal{R}_i' \subset \mathcal{R}_i$ 且 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\, \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$，因此只需证明 $y \in$ _$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。反之，假设 $y \notin O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。因此，

$O_i((\bar{R}_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, z\}$。于是，根据引理 1，$f(R_i^6, \bar{R}_j, R_{-\{i,j\}}) = x$。由 $y \in O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$、$r(f) = \{x, y, z\}$ 以及引理 1 还可推出，$f(R_i^6, R_{-i}) = y$。代理人 j因此通过 R_j在 $(R_i^6, \bar{R}_j, R_{-\{i,j\}})$ 处操纵了 f。由于这再次与 f是策略无关的事实相矛盾，我们¯得出结论，$O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。接着，令 $R_j'^{-}$等于 R_j，便得到矛盾。□

为引出下一个引理，我们需要以下定义。若存在一个备选项 $v \in \{x, y, z\}$ 和另一个备选项 $w \in \{x, y, z\} \setminus \{v\}$，使得 $v\, P_j\, w$、$w\, P_j'\, v$，并且对于所有满足 $\{s, t\} \neq \{v, w\}$、$s\, P_j\, t \Leftrightarrow s\, P_j'\, t$ 的备选项对 $\{s, t\} \subset \{x, y, z\}$，我们称两个偏好 R_j、$R_j' \in \mathcal{R}_j$ 是相邻的。非正式地说，如果两个偏好在备选项 $\{x, y, z\}$ 的集合上仅在一个二元比较中有所不同，则称它们是相邻的。

保持与之前相同的假设（即，代理人 i 的选项集在其偏好域于子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 处扩展时发生变化，并且代理人 j 的偏离可能导致代理人 i 在其较小域中的选项集等于 f' 的整个值域），接下来我们证明：如果存在某个备选偏好 $R_j' \in \mathcal{R}_j$，使得代理人 i 在子剖面（R_j'，$R_{-\{i,j\}}$）处，对于其较小的偏好域和扩展后的偏好域都“充当独裁者”，那么只要代理人 j 的偏好 R_j'' 与 R_j'相邻，代理人 i 在这两个偏好域中仍然“充当独裁者”。

引理9 设 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。如果存在一名代理人 ˆ ˆ$j \neq i$ 以及偏好 R_j、R_j'、$R_j'' \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = \{x, z\}$，且 R_j'和 R_j''相邻，并且 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f')$，以及 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$，那么 $O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f')$，且 $O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。

证明: 任取 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$，并任取一名 ˆ 代理人 $j \neq i$ 以及三个偏好 R_j、R_j'、$R_j'' \in \mathcal{R}_j$，使得 R_j'和 R_j''相邻，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i') = r(f') = \{x, z\}$，并且使得 $O_i((R_j', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f) = \{x, y, z\}$。于是，根据引理 1，$f(R_i^3, R_j', R_{-\{i,j\}}) = f(R_i^4, R_j', R_{-\{i,j\}}) = z$，且 $f(R_i^5, R_j', R_{-\{i,j\}}) = f(R_i^6, R_j', R_{-\{i,j\}}) = y$。

根据引理6，$x \in O_i((R_j'', R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i')$。因此，根据引理

5，只需证明 $z \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i)$以及 $y \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。由于根据假设， R'_j 和 R''_j相邻，因此它们在集合 $\{x, y, z\}$ 上必须具有相同的最大备选项或相同的最小备选项（二者不能同时相同）。假设最大元素相同（另一种情况的证明类似），即max $\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\}$。分两种情况讨论。

1. 假设 $\max\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\} \in \{x, z\}$。首先通过反证法假设 $z \notin O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i)$。那么， $O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = x$。因此， $f(R^3_i, R''_j, R_{-\{i,j\}}) = x$。第一，如果 $\max\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\} = z$，那么代理人 j在 $(R^3_i, R''_j, R_{-\{i,j\}})$ 处通过 R'_j操纵 f以获得 z。第二，如果 $\max\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\} = x$，那么代理人 j在 $(R^3_i, R'_j, R_{-\{i,j\}})$ 处操纵 f，其结果为 z，通过 R''_j实现。在任何情况下，这都与 f 是策略无关的事实相矛盾，因此， $z \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i)$。

接下来，采用反证法，假设 $y \notin O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。因此，我们有 $O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, z\}$，从而根据引理 1， $f(R^5_i, R''_j, R_{-\{i,j\}}) = z$以及 $f(R^6_i, R''_j, R_{-\{i,j\}}) = x$。首先，如果 $\max\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\} = z$，那么代理人 j在 $(R^5_i, R'_j, R_{-\{i,j\}})$ 处通过 R''_j操纵 f，此时结果为 y。其次，如果 $\max\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\} = x$，那么代理人 j在 $(R^6_i, R'_j, R_{-\{i,j\}})$ 处通过 R''_j操纵 f，此时结果为 y。无论哪种情况，这都与 f是策略无关的相矛盾，因此， $y \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。

2. 假设 $\max\{R'_j|_{\{x,y,z\}}\} = \max\{R''_j|_{\{x,y,z\}}\} = y$。首先用反证法，假设 $y \notin O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。因此，我们有 $f(R^5_i, R''_j, R_{-\{i,j\}}) \in \{x, z\}$。代理人 j 因此在此偏好剖面下通过 R'_j 操纵 f，以获得 y。这与 f 是策略无关的相矛盾，因此， $y \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$。

接下来，反证假设 $z \notin O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i)$。因此，我们有 $O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = x$。由于 $y \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i)$，根据引理 5可得 $O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$。接着，根据引理 1， $f(R^4_i, R''_j, R_{-\{i,j\}}) = y$。因此，代理人 j通过 R''_j在 $(R^4_i, R'_j, R_{-\{i,j\}})$处操纵 f，其结果为 z。这再次与 f是策略无关的相矛盾，因此 $z \in O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i)$。

至此，引理的证明完成。 □

在与所有前述引理相同的假设下，接下来将证明，对于任意$R'_j \in \mathcal{R}_j$，在所有子剖面$(R'_j, R_{-\{i,j\}})$上，代理人 i 对她的两个偏好域都“表现得像一位独裁者”。

引理10 设 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 满足 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$。若存在一位代理人$\hat{}\hat{} j \neq i$和一个偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = \{x, z\}$，则对所有$R'_j \in \mathcal{R}_j$，$O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = r(f')$且 $O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。

证明：任取满足 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) \neq O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i)$的 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，再任取一位代理人$\hat{}\hat{}\ j \neq i$和一个偏好 $R_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = r(f') = \{x, z\}$。根据引理 8，存在一个偏好 $R''_j \in \mathcal{R}_j$，使得 $O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = r(f')$且$O_i((R''_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。接下来注意，任何非条件域 $\mathcal{R}_j$都满足˜ ˜以下性质：对于每个 $R''_j, R'_j \in \mathcal{R}_j$，都存在一条从 $\tilde{R}''_j$到 $\tilde{R}'_j$, $\tilde{R}''_j = \tilde{R}^1_j, \tilde{R}^2_j, \ldots, \tilde{R}^n_j = \tilde{R}'_j$的偏好排序路径，使得对于每个 $l \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\tilde{R}^l_j \in \mathcal{R}_j$，偏好 $\tilde{R}^l_j$ 和$\tilde{R}^{l+1}_j$ 相邻。[7]

考虑任意 $R'_j \in \mathcal{R}_j$。根据前述性质，存在一条从R''_j到 R'_j, $R''_j = \tilde{R}^1_j, \tilde{R}^2_j, \ldots, \tilde{R}^n_j = R'_j$ 的排序路径，使得对于每个 $l \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$，$\tilde{R}^l_j \in \mathcal{R}_j$，且 $\tilde{R}^l_j$ 和 $\tilde{R}^{l+1}_j$ 相邻。反复应用引理9可得$O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}'_i) = r(f')$ 且 $O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = r(f)$。□

最后，我们可以证明不存在这样的子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) = \{x, z\}$ 且 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y, z\}$。

引理 11 不存在这样的子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) = r(f') = \{x, z\}$ 且$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = r(f) = \{x, y, z\}$。

[7]这一路径的构造很简单：$\tilde{R}^l_j$ 由 $\tilde{R}^{l-1}_j$ 构造而成，具体做法是将 R_j 和 R'_j 的排序不同于 R_j 中所确定的该对元素排序的一个二元比较˜ ˜ ˜，改为 R'_j中所确定的该对元素排序˜。

证明: 反证法。假设存在这样的子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 使得$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) = r(f') = \{x, z\}$ 且 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = r(f) = \{x, y, z\}$。考虑任意代理人$j \in N \setminus \{i\}$。根据假设， $O_i((R_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}'_i) = r(f')$，因此我们可以应用引理10^（其中 R_j 在该引理前件中扮演 R_j 的角色）来得出：对于所有 $R'_j \in \mathcal{R}_j$， $O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}'_i) = r(f')$ 且 $O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) = r(f)$。

接下来，考虑任意代理人 $k \in N \setminus \{i, j\}$。既然我们已经知道，对于所有 $R'_j \in \mathcal{R}_j$,$O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}'_i) = r(f')$ 和 $O_i((R'_j, R_{-\{i,j\}}) \mathcal{R}_i) = r(f)$，我们可以再次应用引理10（这次令 $(R'_j, R_{-\{i,j\}})$ 扮演 R_{-i} 的角色，令 k 扮演 j 的角色，并令 ^ 与 R_k 扮演 R_j 的角色），从而得出对于所有 $R'_k \in \mathcal{R}_k$, $O_i((R'_{\{j,k\}}, R_{-\{i,j,k\}}) \mathcal{R}'_i) = r(f')$ 和 $O_i((R'_{\{j,k\}}, R_{-\{i,j,k\}}) \mathcal{R}_i) = r(f)$。如此迭代下去，我们便得到，对于所有 $R'_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}, O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}'_i) = r(f') = \{x, z\}$ 以及 $O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}_i) = r(f) = \{x, y, z\}$。因此， f'是独裁的，代理人 i 是独裁者。这与第3部分的初始假设相矛盾，因为该假设认为 f' 是非独裁。□

现在引入如下记号：对于任意 $i \in N$、任意 $S \subseteq X$和任意 R、$R' \in \mathcal{D}$，定义 $D_S(R_{-i}, R'_{-i}) = \{j \in N \setminus \{i\} : R_j|_S \neq R'_j|_S\}$ 以及 $d_S(R_{-i}, R'_{-i}) = |D_S(R_{-i}, R'_{-i})|$。也就是说，$D_S(R_{-i}, R'_{-i})$ 对应于这样一组代理人：他们在 S 于 R_{-i} 和 R'_{-i} 时具有不同的偏好；而 $d_S(R_{-i}, R'_{-i})$ 是该集合的基数。

现在我们已经准备好完成第3部分的证明。根据引理 11，不存在这样的子偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) = r(f') = \{x, z\}$ 且 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = r(f) = \{x, y, z\}$。因此，根据 $r(f') = \{x, z\}$、 $r(f) = \{x, y, z\}$以及引理 5，存在两个子偏好剖面 R'_{-i}、$R''_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}'_i) = x$、 $O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$ 且 $O_i(R''_{-i}, \mathcal{R}'_i) =$ ^$O_i(R''_{-i}, \mathcal{R}_i) \in \{\{z\}, \{x, z\}\}$。于是，考虑任意两个子偏好剖面 R_{-i}、 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得

(a) $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) = x$和 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$。

(b) $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}'_i) = O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) \in \{\{z\}, \{x, z\}\}$.

(c) 对于所有满足 $O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}'_i) = x$、 $O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$ 的 R'_{-i}、$R'_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，以及满足 ^ ^ ^ $O_i(R'_{-i}, \mathcal{R}'_i) = O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) \in \{\{z\}, \{x, z\}\}$ 的情形，我们有 $d_{r(f)}(R'_{-i}, R'_{-i}) \geq d_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$。

(d) 对所有 $j \notin D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$, $R_j = R_j$。

显然，存在两个具有特征（a）、（b）和（c）的子偏好剖面。鉴于根据策略无关，值域之外的备选项上的偏好无法改变 f 的结果，因此也无法改变选项集，我们可以假设（d）。下一个引理证明，在 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 和 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$ 处对 $r(f)$ 具有不同偏好的所有代理人，都将 $\{x, y\}$ 和 $\{x, z\}$ 作为其自由对。

引理 12 对所有 $j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$, $\{x, y\}, \{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。

证明：我们首先证明，对于代理人的所有非空子集 $S \subset D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$, $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\mathcal{R}'_i) = O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) = x$。反证法：假设存在 个非空子集 $S \subset D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$，使得 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i) \neq x$ 或 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) \neq x$。

- 假设 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})}))\ \mathcal{R}'_i) \neq x$。由于 $r(f') = \{x, z\}$，我们有 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i) \in \{\{z\}, \{x, z\}\}$。若 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) = O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i)$，则 $d_r(f)(R_{-i}, (R_S, R_{-(S\cup\{i\})})) < d_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$。这与 (c) 矛盾。若 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) \neq O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i)$，则根据引理 5，$O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) = \{x, z\}$ 且 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i) = \{x, y, z\}$。这与引理 11 矛盾。

- 假设 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i) = x$ 且 $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) \neq x$。根据引理 5，$O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$。于是我们得到 $d_r(f)((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ R_{-i}) < d_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$。这与 (c) 矛盾。

由此我们得出结论：对于所有非空的 $S \subset D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$, $O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}'_i) = O_i((R_S, R_{-(S\cup\{i\})})\ \mathcal{R}_i) = x$。任取代理人 $j \in D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$。首先，令 $S = D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i}) \setminus \{j\}$，并考虑到根据条件 (d), $R_k = R_k$ 对所有 $k \notin D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$ 均成立，我们可以看到 $O_i((R_{N\setminus\{i,j\}}, R_j)\ \mathcal{R}_i) = x$。因此，对于所有 $R_i \in \mathcal{R}_i$, $f(R_{N\setminus\{i,j\}}, R_j, R_i) = x$。由于根据假设，$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) \in \{\{z\}, \{x, z\}\}$，存在一个偏好 $R'_i \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R_{-i}, R'_i) = z$。因此，$\{x, z\} \subseteq O_j((R_{N\setminus\{i,j\}}, R'_i)\ \mathcal{R}_j)$。

由引理 3 可知，$\{x, z\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。其次，令 $S = \{j\}$，并考-⁻ ˆ⁻ˆ 虑到根据条件 (d)，$R_k = R_k$ 对所有 $k \notin D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i})$ 均成立，我们可以看到 ˆ⁻ ˆ⁻ $O_i((R_j, R_{N\setminus\{i,j\}})\ \mathcal{R}_i) = x$。因此，对于所有 $R_i \in \mathcal{R}_i$，$f(R_j, R_{N\setminus\{i,j\}}, R_i) = x$。由于根据假设，⁻ ⁻$O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_{-i}) = \{x, y\}$，存在一个偏好 $R_i'' \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R_{-i}, R_i'') = y$。因此，$\{x, y\} \subseteq O_j((\bar{R}_{N\setminus\{i,j\}}, R_i'')\ \mathcal{R}_j)$。于是，由引理 3 可知，$\{x, y\} \in S^{-1}(\mathcal{R}_j)$。□

对于每个代理人 $j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$，考虑两个偏好 R_j^4和 R_j^5，使得对于所有 $(v, w) \in S(\mathcal{R}_j) \setminus \{(y, z), (z, y)\}$，都有 $z\, P_j^4\, y\, P_j^4\, x$、$y\, P_j^5\, z\, P_j^5\, x$和 $v\, P_l\, w$，$l \in \{4, 5\}$。根据引理 12，R_j^4或 R_j^5（或二者）属于 $\mathcal{R}_j$。将 $D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$ 的代理人分为以下四组：

$$S_1 = \{j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i}) : y\, \bar{P}_j\, z \text{ and } y\, \hat{P}_j\, z\}.$$

$$S_2 = \{j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i}) : y\, \bar{P}_j\, z \text{ and } z\, \hat{P}_j\, y\}.$$

$$S_3 = \{j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i}) : z\, \bar{P}_j\, y \text{ and } y\, \hat{P}_j\, z\}.$$

$$S_4 = \{j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i}) : z\, \bar{P}_j\, y \text{ and } z\, \hat{P}_j\, y\}.$$

注意，如果 $j \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$，那么 $R_j^5 \in \mathcal{R}_j$。类似地，如果 $j \in S_2 \cup S_3 \cup S_4$，那么 $R_j^4 \in \mathcal{R}_j$。⁻首先，构造如下子剖面序列。从 R_{-i} 开始，依次将所有代理人 $j \in S_1 \cup S_2$ 的偏好从 $\bar{R}_j$ 改为 R_j^5；之后，再依次将所有代理人 $j \in S_3 \cup S_4$ 的偏好从 $\bar{R}_j$ 改为 R_j^4。我们证明，在该序列的所有子剖面中，偏好域 $\mathcal{R}_i$ 中代理人 i 的选项集必定为 $\{x, y\}$。反设并非如此。考虑该序列中最后一次出现代理人 i 在偏好域 $\mathcal{R}_i$ 中的选项集为 $\{x, y\}$ 的子剖面，以及序列中的下一个子剖面。也就是说，考虑该序列中的一个子剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$，并且存在代理人 $j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$，其偏好为 $\tilde{R}_j' \in \{R_j^4, R_j^5\}$，满足 ˜ ˜ ˜ ˜$O_i((R_{-\{i,j\}}, R_j')\ \mathcal{R}_i) \neq \{x, y\}$。由引理˜ ˜ ˜ ˜5，既然 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$，那么 $O_i(R_{-i}, \mathcal{R}_i') = x$。接着，由引理6，$x \in O_i((R_{-\{i,j\}}, R_j')\ \mathcal{R}_i')$。因此，由引理 5，$x \in O_i((R_{-\{i,j\}}, R_j')\ \mathcal{R}_i)$。由假设，既然 $O_i((R_{-\{i,j\}}, R_j')\ \mathcal{R}_i) \neq \{x, y\}$，我们可以得出

$\in \{\{x\},\{x,z\}\{x,y,z\}\}$。首先，假设 $O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i) = \{x,y,z\}$。由引理 5 可得 $O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}'_i) = \{x,z\}$。这与引理 11 矛盾。其次，假设 $O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i) = \{x,z\}$。那么，由引理 5，$O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}'_i) = \{x,z\}$。既然我们已经看到 $O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i) = \{x,y\}$，并且 $O_i(R_{-i},\mathcal{R}'_i) = \{x\}$，就可以应用引理10，得到 $O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i) = \{x,y,z\}$。这与引理 11 矛盾。第三，假设 $O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i) = x$。那么，对所有 $R_i \in \mathcal{R}_i$，$f(R_i,R_{-\{i,j\}},R'_j) = x$。此外，由 $O_i(R_{-i},\mathcal{R}_i) = \{x,y\}$ 可知，存在一个偏好 $R'_i \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R'_i,R_{-i}) = y$。因此，代理人 j 通过 R_j 在 $(R'_i,R_{-\{i,j\}},R'_j)$ 处操纵 f。这与 f 是策略无关的相矛盾。因此，在该序列的所有子剖面中，偏好域 $\mathcal{R}_i$ 内代理人 i 的选项集均为 $\{x,y\}$。

第二，构造如下不同的子偏好剖面序列。从 R_{-i}开始，将所有代理人 $j \in S_1 \cup S_3$ 的偏好逐一从 R_j 改为 R^5_j；之后，将所有代理人 $j \in S_2 \cup S_4$ 的偏好逐一从 R_j 改为 R^4_j。我们证明，在该序列的所有子偏好剖面中，偏好域 $\mathcal{R}_i$ 下代理人 i 的选项集必须包含 z，但不包含 y。首先，假设通过反证法，序列中某个子偏好剖面下，代理人i 的选项集中不包含 z。考虑序列中这样一个子偏好剖面：在此之后，代理人 i 在域 $\mathcal{R}_i$ 下的选项集最后一次包含 z，而是序列中的下一个子偏好剖面。也就是说，考虑一个子偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得$z \in O_i(\tilde{R}_{-i},\mathcal{R}_i)$，以及一个代理人 $j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i},R_{-i})$，其偏好 $\tilde{R}'_j \in \{R^4_j,R^5_j\}$ 满足，使得 $O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i) \subseteq \{x,y\}$。那么，根据引理 5，$O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}'_i) = x$，且 $z \in O_i(R_{-i},\mathcal{R}'_i)$。因此，对所有 $R_i \in \mathcal{R}'_i$，$f(R_i,R'_j,R_{-\{i,j\}}) = x$。此外，存在一个偏好 $R'_i \in \mathcal{R}'_i$，使得 $f(R'_i,R_{-i}) = z$。因此，代理人 j在 $(R'_i,R'_j,R_{-\{i,j\}})$ 处通过R_j操纵 f。这与 f 是策略无关的相矛盾，因此我们可以得出结论：在该序列的所有子偏好剖面中，偏好域 $\mathcal{R}_i$ 下代理人 i 的选项集必须包含 z。接下来，假设通过反证法，序列中某个子偏好剖面下，偏好域$\mathcal{R}_i$ 中的代理人 i 的选项集包含 y。也就是说，考虑一个子偏好剖面 $R_{-i} \in \mathcal{D}_{-i}$，使得$y \notin O_i(\tilde{R}_{-i},\mathcal{R}_i)$，以及一个代理人 $j \in D_{r(f)}(\bar{R}_{-i},R_{-i})$，其偏好 $\tilde{R}'_j \in \{R^4_j,R^5_j\}$ 满足，使得 $y \in O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i)$。那么，根据引理 5，$x \in O_i((R_{-\{i,j\}},R'_j)\ \mathcal{R}_i)$。由于我们已经

看到，在整个子偏好剖面序列中，代理人 i 在其偏好域为 $\mathcal{R}_i$~ ~时的选项集包含 z，因此， $O_i((R_{-\{i,j\}}, R'_j)\ \mathcal{R}_i) = \{x, y, z\}$。那么，根据引理~ ~5， $O_i((R_{-\{i,j\}}, R'_j)\ \mathcal{R}'_i) = \{x, z\}$，这与引理 11 相矛盾。因此，我们可以得出结论：在该序列的所有子偏好剖面中，偏好域 $\mathcal{R}_i$ 下代理人 i 的选项集为$\{z\}$ 或 $\{x, z\}$。那么，根据引理 5，该选项集与代理人 i在偏好域 $\mathcal{R}'_i$下的选项集一致。

- ˆ 为简化记号，下面将 $S_i \cup S_j \equiv S_{ij}$ and $D_{r(f)}(R_{-i}, R_{-i}) \equiv S$。注意，第一个序列在子剖面（$\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}$）处结束，而第二个序列在子剖面（ˆ$R_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}}$）处结束。因此，我们已经证明了

$$O_i\ (\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}})\ \ \mathcal{R}'_i)\ = x,\ \ O_i\ (\ (\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}})\ \ \mathcal{R}_i)\ = \{x, y\} \text{以及}$$

$$O_i((\hat{R}_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}}), \mathcal{R}'_i) = O_i((\hat{R}_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}}), \mathcal{R}_i) \in \{\{z\}, \{x, z\}\}.$$

还可以验证， $d_{r(f)}\ (\ (\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}})\ ,\ \ (\hat{}R_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}})\ )\ \leq d_{r(f)}\ (\bar{R}_{-i}, \hat{}R_{-i})$ 。如果 $S_2 = S_3 = \emptyset$，那么（$\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}$）$=$（ˆ$R_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}}$）。这与 O_i（（$\bar{R}_{-S}$, $R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}$） $\mathcal{R}_i$）$\neq O_i$（（ˆ$R_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}}$） $\mathcal{R}_i$）相矛盾。因此， $S_2 \cup S_3 \neq \emptyset$。

首先，假设 $|S_2 \cup S_3| = 1$。假设 $S_2 = \{j\}$ 且 $S_3 = \emptyset$（如果$S_2 = \emptyset$且 $S_3 = \{j\}$，证明类似）。注意到，子偏好剖面（$\bar{R}_{-S}$、 $R^5_{S_{12}}$、 $R^4_{S_{34}}$）和（ˆR_{-S}、 $R^5_{S_{13}}$、 $R^4_{S_{24}}$）仅因代理人 j而不同，因此，（$\bar{R}_{-S}$、 $R^5_{S_{12}}$、 $R^4_{S_{34}}$）$=$（ˆR_{-S}、 $R^5_{S_{13}\cup\{j\}}$、 $R^4_{S_{24}\setminus\{j\}}$）。鉴于 $z \in O_i$（（ˆR_{-S}、 $R^5_{S_{13}}$、 $R^4_{S_{24}}$） $\mathcal{R}'_i$），存在一个偏好 $R_i \in \mathcal{R}'_i$，使得 f（R_i、ˆR_{-S}、$R^5_{S_{13}}$、$R^4_{S_{24}}$）$= z$。随后，我们可以利用以下事实： O_i（（$\bar{R}_{-S}$、 $R^5_{S_{12}}$、 $R^4_{S_{34}}$） $\mathcal{R}'_i$）$= x$，从而看出 f（R_i、 $\bar{R}_{-S}$、 $R^5_{S_{12}}$、 $R^4_{S_{34}}$）$= f$（R_i、ˆR_{-S}、 $R^5_{S_{13}\cup\{j\}}$、 $R^4_{S_{24}\setminus\{j\}}$）$= x$。然后，代理人 j通过 R^4_j在（R_i、ˆR_{-S}、 $R^5_{S_{13}\cup\{j\}}$、 $R^4_{S_{24}\setminus\{j\}}$）处操纵 f。

现在假设 $|S_2 \cup S_3| > 1$。考虑任意代理人 $j \in S_2$（如果 $S_2 = \emptyset$ 和 $j \in S_3$，证明类似），以及子剖面（$\bar{R}_{-S}$、 $R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}$、 $R^4_{S_{34}\cup\{j\}}$）。由于 r（f）$= \{x, y, z\}$，根据引理 5 可得 O_i（$\bar{R}_{-S}$、 $R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}$、 $R^4_{S_{34}\cup\{j\}}$） $\mathcal{R}_i$） $\in \{\{x\}, \{z\}, \{x, z\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$。

- 假设 $O_i((\ \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}_i)\ \in \{\{z\}, \{x, z\}\}$。那么，根据引理 5， $O_i((\ \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}'_i)\ = O_i((\ \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}_i)$。我们可以观察到， $d_{r(f)}((\ \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}), (\ \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}}))\ = 1$，并且该值

严格小于 $d_{r(f)}((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}), (\hat{R}_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}})) = |S_2 \cup S_3|$。因此，$d_{r(f)}((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}), (\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})) < d_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$ 和 $d_{r(f)}(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$ 不是最小的，这与条件 (c) 矛盾。

- 假设 $O_i((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$。由引理 5 可知，$O_i((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}'_i) = x$。此时我们可以观察到，$d_r(f)((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}}), (\hat{R}_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}})) = d_r(f)((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}), (\hat{R}_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}})) - 1$。于是，$d_r(f)((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}}), (\hat{R}_{-S}, R^5_{S_{13}}, R^4_{S_{24}})) < d_r(f)(\bar{R}_{-i}, \hat{R}_{-i})$。因此，$d_r(f)(R_{-i}, R_{-i})$ 不是最小的，这与条件 (c) 矛盾。

- 假设 $O_i((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, y, z\}$。由引理 5 可知，$O_i((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, z\}$。这与引理 11 矛盾。

- 假设 $O_i((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})\ \mathcal{R}_i) = \{x\}$。因此，我们可以得出结论：对于所有 $R_i \in \mathcal{R}_i$，$f(R_i, \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}}) = x$。由于 $O_i((\bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}})\ \mathcal{R}_i) = \{x, y\}$，存在一个偏好 $R'_i \in \mathcal{R}_i$，使得 $f(R'_i, \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}}, R^4_{S_{34}}) = y$。于是，代理人 j通过 R^5_j 在 $(R'_i, \bar{R}_{-S}, R^5_{S_{12}\setminus\{j\}}, R^4_{S_{34}\cup\{j\}})$ 操纵 f。这与 f是策略无关的这一点矛盾。

至此，第3部分的证明以及定理的证明均告结束。

例1的计算

由于 $|X| = 5$，$\mathcal{R}$ 中有 5! 个 $= 120$ 排序。包含 $y\,P\,x$ 的 60 种排序都包含在 $\mathcal{R}_i$ 中；但若 $x\,P\,y$，则只有 z 是三元组 $\{z, w, v\}$ 中最高偏好备选项的那些排序才属于 $\mathcal{R}_i$（60 种排序的 1/3）。由于 $\mathcal{R}_i$ 包含 80 种排序，且$|N| = 2$，因此有 $80^2 = 6400$ 种可能的偏好剖面和 5^{6400} 条社会选择规则。

要计算有多少个 5^{6400} 规则符合两步程序，可以注意到，第一步询问两位代理人关于她对 x 和 y之间的偏好。因此，在第一步中有四种可能的响应剖面。接下来，我们确定可能的子规则中有多少属于独裁的情形，或属于值域为2的策略无关情形。

两位代理人都报告称，他们更偏好 y 而非 x：59 条子规则

- *5* 值域为1的独裁子规则。这是因为 $|X| = 5$。

- *36* 值域为2的策略无关子规则。由于 $|X| = 5$，共有10个备选项对。值域不能是 $\{x, y\}$，因为该备选项对上的偏好已在第一步中确定。对于9个可行对中的每一个，都有4条可能的子规则：2条独裁子规则，以及2条在两位代理人均同意 $t \in \{x, y\} \setminus s$ 优于 s 时才选择 $s \in \{x, y\}$ 的子规则。

- *14* 值域为3的独裁子规则。共有2位可能的独裁者和10组三个备选项的组合。值域不能是 $\{x, y, z\}$、$\{x, y, w\}$ 或 $\{x, y, v\}$，因为当存在 y 时，独裁者不会选择 x。

- *4* 值域为4的独裁子规则。共有2位可能的独裁者和5组四个备选项的组合。值域不能是 $\{x, y, z, v\}$、$\{x, y, z, w\}$ 或 $\{x, y, w, v\}$，因为当存在 y 时，独裁者不会选择 x。

- *0* 值域为5的独裁子规则。这是因为独裁者不会选择 x。

两位代理人都报告说，他们更偏好 x 而非 y：37条子规则

- *5* 值域为1的独裁子规则。这是因为 $|X| = 5$。

- *28* 值域为2的策略无关子规则。值域不能是 $\{x, y\}$、$\{z, w\}$或 $\{z, v\}$，因为这些可行对上的偏好已在第一步确定（对 $\{x, y\}$ 而言是直接确定的，对其他情况则是间接确定的）。对于7个可行对中的每一个，都有4种可能的子规则：2条独裁子规则，以及2条在两位代理人都认同 $t \in \{x, y\} \setminus s$ 优于 s时才不选择 $s \in \{x, y\}$ 的子规则。

- *4* 值域为 3 的独裁子规则。有 2 个可能的独裁者，以及 10 个可能的三个备选项的组合。由于在有 x 的情况下，独裁者不选择 y，在有 z 的情况下也不选择 w 或 v，因此值域只能是 $\{x, w, v\}$ 或 $\{y, w, v\}$。

- *0* 值域为 4 或 5 的独裁子规则。这是因为在有 x 的情况下，独裁者不选择 y，在有 z 的情况下也不选择 w 或 v。

两位代理人的报告不同：46 个子规则

假设代理人1报告说，她更偏好 x 而非 y。

- *5* 值域为1的独裁子规则。这是因为 $|X| = 5$。

- *30* 值域为2的策略无关子规则。由于 $|X| = 5$，共有10对备选项。值域不能是 $\{x, y\}$，因为在第一步中已经确定了对这对备选项的偏好。如果值域是 $\{z, w\}$ 或 $\{z, v\}$，代理人2必然是独裁者，因为代理人1已在第一步中间接透露，她更偏好 z，而非 w和 v。对于其余7个可行对，每一对有4种可能的子规则：2种独裁子规则，以及另外2种子规则；在这两种规则中，除非两位代理人都认为 $t \in \{x, y\} \setminus s$ 优于 s，否则会选出 $s \in \{x, y\}$。

- *9* 值域为3的独裁子规则。有2位可能的独裁者和10组三个备选项的组合。如果代理人1是独裁者，那么在有 x 的情况下不会选择 y，在有 z的情况下也不会选择 w 或 v。因此，值域只能是 $\{x, w, v\}$ 或$\{y, w, v\}$。如果代理人2是独裁者，那么在有 y 的情况下不会选择 x。因此，值域不能是 $\{x, y, z\}$、 $\{x, y, v\}$或 $\{x, y, w\}$。

- *2* 值域为4的独裁子规则。有2位可能的独裁者和5组四个备选项的组合。如果代理人1是独裁者，那么在有 x 的情况下不会选择 y，在有 z的情况下也不会选择 w 或 v。这排除了所有四元组。如果代理人2是独裁者，那么在有 y的情况下不会选择 x。因此，值域可以是 $\{x, z, w, v\}$ 或$\{y, z, w, v\}$。

- *0* 值域为 5 的独裁子规则。这是因为 x 和 y 不能同时位于值域中。

我们得出结论， $59 \cdot 37 \cdot 46^2$ 规则与两步程序一致。

例2的计算

由于 $|X| = 5$， $\mathcal{R}$中有5!个 $= 120$ 排序。其中有1个单峰排序的峰值位于 v ，另有1个峰值位于 z；峰值分别位于w 和 y 的单峰排序各有4个，峰值位于 x的单峰排序有6个。因此， $\mathcal{R}_j$包括16个排序。鉴于 $|N| = 2$，共有 $16^2 = 256$ 个偏好剖面和 5^{256}个社会选择规则。

为了计算有多少条 5^{256} 规则符合两步程序，请注意，第一步询问两位代理人的峰值。4种可能的回答是：位于 v、位于 w、位于 x，或位于 x的右侧。因此，在第一步中有16种可能的响应剖面。请注意，在这16种情形中的每一种情形下，都有5条值域为1的独裁子规则，并且不存在值域至少为3的独裁子规则。后者是因为不存在一个备选项三元组，使得对于该三元组，某位代理人有三种排序，其中每个备选项分别是该三元组的最优备选项。为完成计算，我们确定每种情形下有多少条值域为2的逐情形策略无关子规则。

主体报告相同的峰值。

峰值位于 v时的• *0* 条子规则。这是因为两位代理人的偏好在第一步中已被完全确定。

• *12* 峰值位于 w时的子规则。值域只能是 $\{v, x\}$、 $\{v, y\}$或 $\{v, z\}$。对于 3 个可行对中的每一个，都有 4 种可能的子规则：2 种独裁子规则，以及另外 2 种子规则；在这两种规则中，除非两个代理人都认为 $t \in \{x, y\} \setminus s$ 优于 s，否则会选择 $s \in \{x, y\}$ 。

• *16* 在 x处达到峰值的子规则。值域只能是 $\{v, y\}$、 $\{v, z\}$、 $\{w, y\}$或 $\{w, z\}$。对于4个可行对中的每一个，都有4种可能的子规则：2个独裁子规则，以及2个这样的子规则：除非两个代理人都同意$t \in \{x, y\} \setminus s$ 优于 s，否则选择 $s \in \{x, y\}$ 。

- *16* 峰值位于 x右侧的子规则。值域只能是 $\{v,z\}$、 $\{w,z\}$、 $\{x,z\}$或 $\{y,z\}$。对于4个可行对中的每一个，都有4种可能的子规则：2个独裁子规则，以及2个这样的子规则：除非两个代理人都同意 $t \in \{x,y\} \setminus s$ 优于 s，否则选择 $s \in \{x,y\}$ 。

代理人报告不同的峰值

假设代理人1报告的峰值位于代理人2报告的峰值左侧。

- *3* 峰值位于 v 和 w时的子规则。值域只能是 $\{v,x\}$、 $\{v,y\}$或 $\{v,z\}$。每个值域唯一可能的子规则是由代理人2担任独裁者。

- *4* 峰值位于 v 和 x时的子规则。值域只能是 $\{v,y\}$、 $\{v,z\}$、 $\{w,y\}$或$\{w,z\}$。每个值域唯一可能的子规则是由代理人2担任独裁者。

- *4* 峰值位于 v 以及 x右侧时的子规则。值域只能是 $\{v,z\}$、 $\{w,z\}$、$\{x,z\}$或 $\{y,z\}$。每个值域唯一可能的子规则是由代理人2担任独裁者。

- *11* 峰值位于 w 和 x时的子规则。值域不能是 $\{v,w\}$、 $\{w,x\}$、 $\{x,y\}$、 $\{x,z\}$或 $\{y,z\}$。如果值域是 $\{v,x\}$，则代理人1是独裁者。如果值域是 $\{w,y\}$ 或$\{w,z\}$，则代理人2是独裁者。最后，如果值域是 $\{v,y\}$ 或 $\{v,z\}$，则有4种可能的子规则：2种独裁子规则，以及2种在除非两位代理人都同意 $t \in \{x,y\} \setminus s$ 优于 s时选择 $s \in \{x,y\}$ 的子规则。

- *9* 峰值位于 w 以及 x右侧的独裁子规则。值域不能是 $\{v,w\}$、 $\{w,x\}$、$\{w,y\}$或 $\{x,y\}$。如果值域是 $\{v,x\}$ 或 $\{v,y\}$，则代理人1是独裁者。如果值域是 $\{w,z\}$、 $\{x,z\}$或 $\{y,z\}$，则代理人2是独裁者。如果值域是 $\{v,z\}$，则有4种可能的子规则：2种独裁子规则，以及2种在以下情况下选择 $s \in \{x,y\}$的子规则：除非两位代理人都同意 $t \in \{x,y\} \setminus s$ 优于 s。

- *12* 在 x 及其右侧峰值处的子规则。值域不能是 $\{v,w\}$、 $\{v,x\}$、$\{w,x\}$ 或 $\{x,y\}$。如果值域是 $\{v,y\}$ 或 $\{w,y\}$，那么代理人1就是独裁者。如果值域是

$\{x, z\}$ 或 $\{y, z\}$，那么代理人2就是独裁者。如果值域是 $\{v, z\}$ 或 $\{w, z\}$，则有 4 个可能的子规则：2 个独裁子规则，以及在两个代理人都同意 $t \in \{x, y\} \setminus s$ 优于 s 之前选择 $s \in \{x, y\}$ 的 2 个子规则。

我们得出结论：$(5+0) \cdot (5+3)^2 \cdot (5+4)^4 \cdot (5+9)^2 \cdot (5+11)^2 \cdot (5+12)^3 \cdot (5+16)^2$ 规则与两步程序一致。