arXiv:2304.12920v1 [math.CV] 24 Apr 2023

单叶函数类的对数系数的精确界

MILUTIN OBRADOVI´C 和 Nikola Tuneski

Abstract. 设 $\mathcal{U}(\alpha,\lambda)$, $0<\alpha<1$, $0<\lambda<1$ 为满足以下条件的函数$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$类

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1+\alpha}f'(z)-1\right|<\lambda$$

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中。对于 $f\in\mathcal{U}(\alpha,\lambda)$，我们给出了其初始对数系数 γ_1, γ_2, γ_3. 的精确界

1. Introduction and definitions

设 $\mathcal{A}$ 为在开单位圆盘 $\mathbb{D}=\{z$ 中解析的函数 f 类: $|z|<1\}$ 其形式为

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots, \tag{1}$$

并令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{A}$ 的子类，由在 $\mathbb{D}$中单叶的函数组成。

对于函数 $f\in\mathcal{S}$，我们将其对数系数定义为 γ_n、 $n=1$、2、.....，定义如下:

$$\log\frac{f(z)}{z}=2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_nz^n. \tag{2}$$

关于这些系数，目前已知的精确信息相对较少。受 Koebe函数启发的自然猜想 $|\gamma_n|\le 1/n$（其对数系数为 $1/n$）甚至在数量级上也是错误的（见 Duren [2]）。对于类 $\mathcal{S}$，单个对数系数的精确估计仅对 γ_1 和 γ_2已知，即:

$$|\gamma_1|\le 1 \quad\text{and}\quad |\gamma_2|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{e}=0.635\ldots,$$

而对于 $n\ge 3$，其结果尚不清楚。作者给出了目前已知的最佳估计 $|\gamma_3|\le 0.55661\ldots$（见 [7]）。对于单叶函数子类，情况也好不了多少。目前只有初始对数系数的估计。详情见 [1]。

在论文 [3] 中，通过条件引入了函数 $f\in\mathcal{A}$ 的类 $\mathcal{U}(\alpha,\lambda)$（$0<\alpha<1, 0<\lambda<1$）：

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1+\alpha}f'(z)-1\right|<\lambda,\quad z\in\mathbb{D}. \tag{3}$$

证明了，当满足以下条件时，来自 $\mathcal{U}(\alpha,\lambda)$ 的函数是星形的，即属于 $\mathcal{S}^\star$ 类函数；这类函数将单位圆盘映射到星形域,

$$0<\lambda\le\frac{1-\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)^2+\alpha^2}}\equiv\lambda_\star. \tag{4}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 30C45, 30C50.*Key words and phrases.* 单叶函数，对数系数，最佳界。

在极限情形下，当 $\lambda = 1$，且 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$ 时，类 $\mathcal{U}(0,1)$ 和 $\mathcal{U}(1,1)$ 中的函数满足

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad \text{and} \quad \left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z) - 1\right| < 1,$$

分别地。前者是 $\mathcal{S}^\star$ 的子类，因为星形函数的解析刻画为 $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ ($z \in \mathbb{D}$)，而后一个类中的~~函数~~是单叶的（见 [5, 6]）。

本文研究类 $\mathcal{U}(\alpha, \lambda)$ 的三个初始对数系数的估计，其中 $0 < \alpha < 1$、 $0 < \lambda \leq \lambda_\star$ 和 $\lambda_\star$ 由（4）定义。

我们需要下面的引理。

引理 1. [4] 设 $f \in \mathcal{U}(\alpha, \lambda)$ $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$. 则存在一个函数 ω，在 $\mathbb{D}$ 中解析，使得 $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立，并且

$$\left[\frac{z}{f(z)}\right]^\alpha = 1 - \alpha\lambda z^\alpha \int_0^z \frac{\omega(t)}{t^{\alpha+1}} dt. \tag{5}$$

我们用 Ω 类表示 $\mathbb{D}$ 中的解析函数类:

$$\omega(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \tag{6}$$

满足 $\omega(0) = 0$，且对所有 $z \in \mathbb{D}$, $|\omega(z)| < 1$ 。

在其论文中， [8] Prokhorov 和 Szynal 对泛函

$$\Psi(\omega) = |c_3 + \mu c_1 c_2 + \nu c_1^3|$$

在所有 $\omega \in \Omega$ 类函数中给出了精确估计。对于我们的应用，只需要其中一部分结果。

引理 2。 [8] 设 $\omega(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \in \Omega$。对于 μ 和 ν 个实数，令

$$\Psi(\omega) = \left|c_3 + \mu c_1 c_2 + \nu c_1^3\right|,$$

and

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(\mu, \nu) : |\mu| \leq \frac{1}{2}, |\nu| \leq 1\right\}, \\
D_2 &= \left\{(\mu, \nu) : \frac{1}{2} \leq |\mu| \leq 2, \frac{4}{27}(|\mu| + 1)^3 - (|\mu| + 1) \leq \nu \leq 1\right\}, \\
D_3 &= \{(\mu, \nu) : |\mu| \leq 2, |\nu| \geq 1\}.
\end{aligned}$$

则精确估计 $\Psi(\omega) \leq \Phi(\mu, \nu)$ 成立，其中

$$\Phi(\mu, \nu) = \begin{cases} 1, & (\mu, \nu) \in D_1 \cup D_2 \cup \{(2, 1)\}; \\ |\nu|, & (\mu, \nu) \in D_3. \end{cases}$$

2. Main results

定理 1. 设 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ 属于类 $\mathcal{U}(\alpha, \lambda)$，且 $\lambda_\star$ 由式（4）定义。则以下结果是最佳可能的。

(*i*) $|\gamma_1| \leq \frac{\lambda}{2(1-\alpha)}$ 当 $0 < \lambda \leq \lambda_\star$ 且 $0 < \alpha < 1$. (*ii*) 令 $\lambda_1 = \frac{2(1-\alpha^2)}{\alpha\, 2-\alpha}$ 并令 $\alpha_1 = 0.4825\ldots$ 为方程的唯一实根

$$7\alpha^4 - 20\alpha^3 + 24\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 0$$

在区间 (0, 1) 上。于是

$$|\gamma_2| \leq \frac{\lambda}{2(2-\alpha)} \quad \textit{if} \quad 0 < \lambda \leq \begin{cases} \lambda_1, \ \alpha \in [\alpha_1, 1), \\ \lambda_\star, \ \alpha \in (0, \alpha_1], \end{cases}$$

and

$$|\gamma_2| \leq \frac{\alpha\lambda^2}{4(1-\alpha)^2} \quad \textit{if} \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_\star, \ \alpha \in [\alpha_1, 1).$$

(*iii*) 令 $\lambda_{1/2} = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)2\alpha}{(3-\alpha)}$ $\lambda_\nu = \sqrt{3}\frac{(1-\alpha^3)}{\alpha^2\, 3-\alpha}$ 且 $\alpha_{1/2} = 0.2512\ldots$ 和 $\alpha_\nu = 0.5337\ldots$ 分别为方程的唯一根

$$4 - 12\alpha - 19\alpha^2 + 14\alpha^3 - 2\alpha^4 = 0$$

and

$$3 - 9\alpha + 9\alpha^2 - 5\alpha^3 = 0,$$

分别在区间 (0, 1) 上。于是

$$|\gamma_3| \leq \frac{\lambda}{2(3-\alpha)} \quad \textit{if} \quad 0 < \lambda \leq \begin{cases} \lambda_\star, & \alpha \in (0, \alpha_{1/2}], \\ \lambda_{1/2}, & \alpha \in [\alpha_{1/2}, \alpha_2], \\ \lambda_\nu, & \alpha \in [\alpha_2, 1), \end{cases}$$

其中，$\alpha_2 = 0.9555\ldots$ 是方程 $11\alpha^2 - 44\alpha + 32 = 0$ 在 (0, 1) 上的唯一实根。此外，

$$|\gamma_3| \leq \frac{\alpha^2\lambda^3}{6(1-\alpha)^3} \quad \textit{if} \quad \lambda_\nu \leq \lambda \leq \lambda_\star, \ \alpha \in [\alpha_\nu, 1).$$

证明。设 $f \in \mathcal{U}(\alpha, \lambda)$ 和 $\omega \in \Omega$ 类分别由 (1) 和 (6) 给出。于是，由 (5) 积分可得

$$\left[\frac{z}{f(z)}\right]^\alpha = 1 - \alpha\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n-\alpha} z^n,$$

即，

$$\frac{f(z)}{z} = \left(1 - \alpha\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n-\alpha} z^n\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{7}$$

（此处取主值）。此外，由 (7)，注意到

$$(1-\alpha z)^{-1/\alpha} = 1 + z + \frac{1+\alpha}{2} z^2 + \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{6} z^3 + \cdots,$$

经过一些计算，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda c_n}{n-\alpha} z^n + \frac{1+\alpha}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda c_n}{n-\alpha} z^n\right)^2 + \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{6} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda c_n}{n-\alpha} z^n\right)^3 + \cdots.$$

通过比较系数，我们得到

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{\lambda}{1-\alpha}c_1,\\
a_3 &= \frac{\lambda}{2-\alpha}c_2 + \frac{(1+\alpha)\lambda^2}{2(1-\alpha)^2}c_1^2,\\
a_4 &= \frac{\lambda}{3-\alpha}c_3 + \frac{(1+\alpha)\lambda^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}c_1c_2 + \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)\lambda^3}{6(1-\alpha)^3}c_1^3.
\end{aligned} \tag{8}
$$

另一方面，通过比较关系式 (2) 中的系数，对于对数系数，我们得到

$$
\gamma_1 = \frac{1}{2}a_2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{4}(2a_3 - a_2^2), \quad \gamma_3 = \frac{1}{2}(a_4 - a_2a_3 + \frac{1}{3}a_2^3). \tag{9}
$$

利用关系式 (8) 和 (9)，经过一些计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\lambda}{2(1-\alpha)}c_1,\\
\gamma_2 &= \frac{1}{4}\left[\frac{2\lambda}{2-\alpha}c_2 + \frac{\alpha\lambda^2}{(1-\alpha)^2}c_1^2\right],\\
\gamma_3 &= \frac{\lambda}{2(3-\alpha)}\left(c_3 + \mu c_1c_2 + \nu c_1^3\right),
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中

$$
\mu = \frac{\alpha(3-\alpha)\lambda}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \quad \text{and} \quad \nu = \frac{\alpha^2(3-\alpha)\lambda^2}{3(1-\alpha)^3}. \tag{11}
$$

由于对数系数是为单叶函数定义的，为了保证 f 在所有情况下都是单叶的，我们需要 $0 < \lambda \leq \lambda_\star$，其中 $\lambda_\star$ 定义于 (4) 中。

(*i*) 由 (10) 得$|\gamma_1| \leq {}_2{}^{\lambda}{}_{(1-\alpha)}$, ~~其中~~ $0 < \lambda \leq \lambda_\star$ 和 $0 < \alpha < 1$. 。由下式定义的函数 f_1 给出了最佳可能结果

$$
f_1(z) = z\left(1 - \frac{\alpha\lambda}{1-\alpha}z\right)^{-1/\alpha} = z + \frac{\lambda}{1-\alpha}z^2 + \dots
$$

得证。

(*ii*) 利用 Ω 类的 $\omega \in$ 所满足的不等式 $|c_1| \leq 1, |c_2| \leq 1 - |c_1|^2$ 以及 (10)，我们得到

$$
\begin{aligned}
|\gamma_2| &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{2\lambda}{2-\alpha}|c_2| + \frac{\alpha\lambda^2}{(1-\alpha)^2}|c_1|^2\right]\\
&\leq \frac{1}{4}\left[\frac{2\lambda}{2-\alpha}(1-|c_1|^2) + \frac{\alpha\lambda^2}{(1-\alpha)^2}|c_1|^2\right]\\
&\leq \frac{1}{4}\left[\frac{2\lambda}{2-\alpha} + \left(\frac{\alpha\lambda^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{2\lambda}{2-\alpha}\right)|c_1|^2\right] \equiv H_1(|c_1|).
\end{aligned}
$$

若 ${}_2{}^{\alpha\lambda}{}_{(1-\alpha)^2} - {}_{\frac{2\lambda}{2-\alpha}} \leq 0$，或等价地，

$$
\lambda \leq \frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha(2-\alpha)} \equiv \lambda_1,
$$

那么 $|\gamma_2| \leq H_1(0) = {}_2{}^{\lambda}{}_{(2-\alpha)}$。还需要满足

$$
\lambda \leq \lambda_\star = \frac{1-\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2}}.
$$

最后一个不等式成立的条件是 $\lambda_1 \le \lambda_\star$，等价地，条件是

$$7\alpha^4 - 20\alpha^3 + 24\alpha^2 - 16\alpha + 4 \le 0,$$

即，若 $\alpha \in [\alpha_1, 1)$，其中 $\alpha_1 = 0.4825\ldots$ 是方程的唯一实根

$$7\alpha^4 - 20\alpha^3 + 24\alpha^2 - 16\alpha + 4 = 0$$

在区间 $(0, 1)$ 上。如果 $\alpha \in (0, \alpha_1]$，那么 $\lambda_1 \ge \lambda_\star$，并且我们有 $0 < \lambda \le \lambda_\star$ 将推出相同的结果。

最后，如果 $\alpha \in [\alpha_1, 1)$，即 $\lambda_1 \le \lambda_\star$，且 $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_\star$，那么根据前面的讨论，我们得到

$$|\gamma_2| \le H_1(1) = \frac{\alpha\lambda^2}{4(1-\alpha)^2}.$$

由式（7）给出的函数在 $c_2 = 1 (c_1 = c_3 = \cdots = 0)$ 或 $c_1 = 1$ ($c_2 = c_3 = \cdots = 0$) 时表明，这些结果是最佳可能结果。

(*iii*) 由（10）式可得

$$|\gamma_3| \le \frac{\lambda}{2(3-\alpha)} \left|c_3 + \mu c_1 c_2 + \nu c_1^3\right| = \frac{\lambda}{2(3-\alpha)} \Psi(\omega), \tag{12}$$

其中 μ 和 ν 由（11）给出。

接下来，我们希望应用引理 2 的结果；为此，需要区分集合 D_1、D_2 和 D_3 的定义中的各种情形。

首先，我们注意到 μ 和 ν 都为正 e.

此外，$\mu = {}^{\alpha}\underline{(3-\alpha)\ \lambda\ (1-\alpha)\ (2-\alpha)} \le \frac{1}{2}$ 等价于

$$0 < \lambda \le \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha(3-\alpha)} \equiv \lambda_{1/2}.$$

必须有 $\lambda \le \lambda_\star$，其中 $\lambda_\star$ 由（4）定义。经过一些计算，$\lambda_{1/2} \le \lambda_\star$ 等价于

$$4 - 12\alpha - 19\alpha^2 + 14\alpha^3 - 2\alpha^4 \le 0,$$

即 $\alpha \in [\alpha_{1/2}, 1)$，其中 $\alpha_{1/2} = 0.2512\ldots$ 是方程的唯一实根

$$4 - 12\alpha - 19\alpha^2 + 14\alpha^3 - 2\alpha^4 = 0$$

在区间 $(0, 1)$ 上。由此我们得到

$$0 < \mu \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \le \begin{cases} \lambda_{1/2}, & \alpha \in [\alpha_{1/2}, 1), \\ \lambda_\star, & \alpha \in (0, \alpha_{1/2}]. \end{cases} \tag{13}$$

另一方面，根据 (11)，$\nu = {}^{\alpha^2}\!\left(\frac{3-\alpha\ \lambda^2\ )()_3}{3\ 1-\alpha}\right. \le 1$ 等价于

$$0 < \lambda \le \sqrt{\frac{3(1-\alpha)^3}{\alpha^2(3-\alpha)}} \equiv \lambda_\nu.$$

同样必须满足 $\lambda \le \lambda_\star$。

接下来，$\lambda_\nu \le \lambda_\star$ 经过一些计算后等价于

$$3 - 9\alpha + 9\alpha^2 - 5\alpha^3 \le 0,$$

当 $\alpha \in [\alpha_\nu, 1)$ 时成立，其中 $\alpha_\nu = 0.5337\ldots$ 是方程的唯一实根

$$3 - 9\alpha + 9\alpha^2 - 5\alpha^3 = 0.$$

这意味着

$$0<\nu\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\le \begin{cases} \lambda_\nu, & \alpha\in[\alpha_\nu,1),\\ \lambda_\star, & \alpha\in(0,\alpha_\nu]. \end{cases} \tag{14}$$

此外， $\lambda_{1/2}\le\lambda_\nu$ 等价于 $11\alpha^2-44\alpha+32\ge 0$，即等价于 $\alpha\in[\alpha_2,1)$，其中 $\alpha_2=0.9555\ldots$ 是方程的唯一实根

$$11\alpha^2-44\alpha+32=0$$

在区间 (0, 1) 上。

利用上述所有事实，我们可以得出，如果

$$0<\lambda\le\begin{cases} \lambda_\star, & \alpha\in(0,\alpha_{1/2}],\\ \lambda_{1/2}, & \alpha\in[\alpha_{1/2},\alpha_2],\\ \lambda_\nu, & \alpha\in[\alpha_2,1), \end{cases}$$

那么$0<\mu\le\frac{1}{2}$ 和 $0<\nu\le 1$。根据引理 2（情形 D_1），这意味着$\Psi(\omega)\le 1$，因此由 (12) 得：

$$|\gamma_3|\le\frac{\lambda}{2(3-\alpha)}.$$

由 (7) 中针对 $c_3=1$ ($c_1=c_2=c_4=\cdots=0$)得到的函数可知，该结果是最佳的。

若 $\lambda_{1/2}\le\lambda\le\lambda_\nu$ $\alpha_\nu\le\alpha\le\alpha_2$，则 $0<\nu\le 1$ 且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\le\mu&=\frac{\alpha(3-\alpha)\lambda}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\le\frac{\alpha(3-\alpha)\lambda_\nu}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\\ &=\frac{\sqrt{3(1-\alpha)(3-\alpha)}}{2-\alpha}\le 1.2667\ldots.\end{aligned}$$

最后一个结果是在 $\alpha=\alpha_\nu=0.5337\ldots$ 时得到的，因为 $\frac{\sqrt{3(1-\alpha)(3-\alpha)}}{2-\alpha}$ 是区间（α_ν， α_2）上的递减函数。

为了研究集合 D_2，我们注意到函数

$$\phi(\mu)\equiv\frac{4}{27}(1+\mu)^3-(1+\mu)$$

对于 $\frac{1}{2}\le\mu\le 2$，它是一个递增函数，且

$$\phi(\mu)\le\phi(1.2667\ldots)=-0,541\ldots<0<\nu\le 1.$$

这意味着 $\Psi(\omega)\le 1$ （由引理 2 的情形 D_2 可知），并且与前一种情形一样，得到相同的~~精确~~估计 $|\gamma_3|\le{}_2{}^{\lambda}{}_{(3-\alpha)}$。

最后，由于对于所有 $0<\lambda\le\lambda_\star$，我们都有 $0<\mu\le 2$ （容易验证），并且若 $\lambda_\nu\le\lambda\le\lambda_\star$， $\alpha\in[\alpha_\nu,1)$，则根据引理 2（情形 D_3），有： $\Psi(\omega)\le\nu$，由式（12）可得

$$|\gamma_3|\le\frac{\lambda}{2(3-\alpha)}\frac{\alpha^2(3-\alpha)\lambda^2}{3(1-\alpha)^3}=\frac{\alpha^2\lambda^3}{6(1-\alpha)^3}.$$

该结果是最佳可能结果，因为由（7）给出的函数和 $c_1=1$($c_2=c_3=\cdots=0$)可以看出这一点。

□

References

1. N.E. Cho、B. Kowalczyk、O.S. Kwon等，《关于某些近凸函数子类的第三对数系数》，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报：A辑，数学》，114，52（2020年）。2. P.L. Duren，《单叶函数》，施普林格出版社，纽约，1983年。3. M. Obradovi´c，《一类单叶函数》，《北海道数学杂志》27（1998年），第2期，329–335。4. M. Obradovi´c，《一类单叶函数》II，《北海道数学杂志》28（1999年），第3期，557–562。5. M. Obradovi´c、S. Ponnusamy，《关于类 $\mathcal{U}$》，查谟数学学会第21届年会论文集及分析及其应用全国研讨会，11-26，2011年。6. Obradovi´c M.、Tuneski N.，《类 $\mathcal{U}$的一些性质》，《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学学报：A辑——数学》，73 1（2019年），49–56。7. M. Obradovi´c、N. Tuneski，《Grunsky系数在单叶函数理论中的一些应用》，已投稿。arXiv:2009.11945。8. D. V. Prokhorov和J. Szynal，《(α, β)-凸函数的逆系数》，《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学学报：A辑》35（1981年），125–143（1984年）。

Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11000, Belgrade, Serbia*Email address*: obrad@grf.bg.ac.rs

Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Mechanical Engineering, Ss. Cyril and Methodius University in Skopje, Karpoš II b.b., 1000 Skopje, Republic of North Macedonia.

Email address: nikola.tuneski@mf.edu.mk