arXiv:2304.12948v1 [cs.LO] 25 Apr 2023

使用对数数量词深度模拟对数空间递归

Steffen van Bergerem*、Martin Grohe†、Sandra Kiefer‡和Luca Oeljeklaus†
*柏林洪堡大学，柏林，德国 电子邮箱：
steffen.van.bergerem@informatik.hu-berlin.de
†亚琛工业大学，亚琛，德国 电子邮箱：{
grohe,oeljeklaus}@informatik.rwth-aachen.de
‡牛津大学，牛津，英国 电子邮箱：
sandra.kiefer@cs.ox.ac.uk

摘要

不动点逻辑 $\mathrm{LREC}_=$ 由 Grohe 等人（CSL 2011）在寻求一种能够刻画所有可在对数空间内判定的问题的过程中提出。它通过一个将有限形式的递归形式化的算子扩展了 FO+C，即带计数的一阶逻辑。我们证明，对于关系结构上每个由 $\mathrm{LREC}_=$定义的性质，都存在一个常数 k，使得带计数量词的一阶逻辑的 k 变量片段能够通过具有对数量词深度的公式表达该性质。由此可得，任何一对可由该性质区分的图，都可以通过 k 维 Weisfeiler–Leman 算法在对数次迭代内加以区分。特别地，这意味着该算法的某个常数维度能够在对数次迭代内识别每个区间图和每个弦无爪图，因为每个此类图都具有由 $\mathrm{LREC}_=$ 定义的规范化。

索引词

计数逻辑、Weisfeiler–Leman 算法、图同构、区间图

I. 引言

根据 Fagin 关于 [12],所有有限结构的著名定理，复杂性类 NP 恰好是所有能够通过存在二阶逻辑中的公式表达的计算问题所组成的类。这意味着，判断一个结构是否具有某种性质的问题属于 NP，当且仅当存在一个存在二阶逻辑中的公式能够定义该性质。该定理可以被视为描述复杂性理论领域的起点； [31, 17],该领域旨在通过逻辑来描述或刻画复杂性类。重要里程碑包括：在有序结构上，不动点逻辑 FP 刻画 PTIME， [29, 46] 而确定性传递闭包逻辑 DTC 刻画对数空间。 [30]然而，在一般的无序结构上，这两个结果都不

* 本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——项目编号 431183758（gef¨ordert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) — Projektnummer 431183758）。‡ 本研究得到牛津大学 Glasstone 慈善基金 [Violette 和 Samuel Glasstone 科学研究奖学金 2022]的支持。† 由欧盟（ERC、SymSim，101054974）资助。但文中表达的观点和意见仅代表作者个人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会的立场。欧盟或资助机构均不对上述观点和意见承担责任。

成立；对于这两个复杂性类，寻找能够刻画它们的逻辑仍在继续，并且可能已经成为该领域最重要的问题。

关于 LOGSPACE，即使在 DTC 中加入计数算子，目前也尚不能在树上刻画该复杂性类 [10]。为解决这一问题，Grohe 等人在 [24]中设计了逻辑 LREC。该逻辑能够在有向树上刻画 LOGSPACE，且严格包含于 FP+C（即通过计数量词扩展 FP 得到的逻辑）之中。LREC 通过一个算子扩展了带计数的一阶逻辑，该算子支持有限形式的递归。其背后的思想是：与不动点逻辑一样，应该允许使用一定程度的不动点算子，但可能进行的递归次数不能使表达能力超出对数空间计算的范围。

通过进一步将 LREC 扩展为逻辑 $\mathrm{LREC}_{=}$，人们找到了能够在所有无向树和所有区间图上刻画 LOGSPACE 的逻辑 [24]。$\mathrm{LREC}_{=}$ 严格包含于 FP+C [7] 和无选择对数空间逻辑之中 [15]。

更常见的“一阶”逻辑（例如传递闭包逻辑及其片段）对输入图的顶点进行量化。在一个含n个元素的图中，定位单个顶点需要对数数量的比特。因此，为了保持在 LOGSPACE 内，这类逻辑在任一时刻只能存储有限个顶点。这极大地限制了其表达能力。LREC 的有限递归算子明确地进行资源管理，使其能够更有效地利用对数空间，并同时考察更多顶点。以下是一个简单示例，说明这可能如何实现：假设我们已存储一个度数为d的顶点v 。那么，要定位它的任一邻点，只需 $\log d$ 比特。由于d 可能远小于n，这或许能节省空间。从这个意义上说，逻辑 LREC 类似于无选择多项式时间（CPT） [4, 14], ，后者也具有明确的资源控制机制，不过其目的是更有效地利用多项式时间。正如 CPT 严格强于 FP+C，且不属于有限变量逻辑的标准框架，LREC 也比带计数的确定性传递闭包逻辑和对称传递闭包逻辑更强；它甚至不包含于完整的带计数传递闭包逻辑之中，而后者能够在有序结构上刻画非确定性对数空间。诸如 AC^1, 这样描述并行对数时间复杂性的更大复杂性类，自然可以用经过对数次迭代的不动点逻辑来描述。虽然已知 LREC 包含于 FP+C，但它能否通过对数次不动点迭代来模拟，并非显而易见，因为 LREC 的有限递归深度可能达到多项式级别。这正是本文要探讨的问题。

为了理解带计数的不动点逻辑的表达能力，将其嵌入带计数的一阶逻辑有限变量逻辑中已被证明非常有益[5, 44]。这样，不动点迭代的次数自然对应于量词深度。

经过数十年的研究，这些计数逻辑片段已显示出与计算机科学中许多其他实践和理论领域的联系 [1, 2, 5, 8, 22, 18, 43]。其中一个引人注目的联系是 Weisfeiler–Leman 算法：这是一种以迭代且同构不变的方式计算并细化输入图中颜色的过程。对于每个 $k \in \mathbb{N}_{>0}$, 其 k 维版本都能在多项式时间内运行，并且所计算的着色通常可用于检测图的非同构性。事实证明，k 维 Weisfeiler–Leman 算法（k-WL）与逻辑 C^{k+1} 同样具有表达能力，即带有计数量词的一阶逻辑的 $(k+1)$-变量片段：当且仅当存在一个用于区分它们的

C^{k+1} 中的公式时，它才会在两个输入图上计算出不同的着色。此外，算法为获得不同着色所需的迭代次数，与区分公式的量词深度相对应。根据这一对应关系，从描述复杂性理论的角度来看，算法的维度以及其生成输出所需的迭代次数，都是值得研究的参数。

关于区分两个图所需算法的维度，过去几年中，人们获得了许多新的认识，其中也利用了与计数逻辑的联系。例如，森林可以由 1-WL 识别，区间图可以由 2-WL [11], 识别，平面图可以由 3-WL [36]识别。对于许多其他自然图类，人们也已知解决该图类中同构问题所需维度的界 [19, 21, 16, 34]。

关于迭代次数，我们所知甚少。F¨urer 证明了 k-WL [13], 迭代次数的线性下界，该下界后来被改进为 $n^{\Omega(k/logk)}$ [3] ，最近又被改进为 $n^{\Omega(k)}$ [26] ，适用于 k 元关系结构。至于上界，对于 $k = 2$，人们在 [35], 中首次取得进展，突破了平凡上界 $\Theta(n^k)$；目前已知的最佳上界是：对于阶为 n 的图，迭代次数为 $O(n \log n)$ [41]。在 [26]中，这一结果被推广为对所有 $k \geq 2$ 均成立的 $O(n^{k-1} \log n)$ 上界。迭代次数对算法的并行化至关重要。对于 $\ell \geq \log n$，可以在具有 $O(n^k)$ 个处理器的并行随机存取机上，用 $\mathcal{O}(\ell)$ 步模拟 k-WL 的 ℓ 次迭代。这意味着，如果 k-WL 在 $\mathcal{O}(\log n)$ 次迭代内能够区分某个图类 $\mathcal{C}$ 中所有阶为 n 的图对，那么判定 $\mathcal{C}$ 的同构问题就属于复杂度类 TC^1。对于所有树宽有界的图类、所有图 [23] 以及所有平面图 [20], 情况都是如此。

在本文中，我们将这一结果推广到所有区间图类；作为副产品，我们还得到了弦无爪图的相同结果。

我们的结果： 我们研究 Weisfeiler–Leman 算法在迭代次数限制为对数数量时的表达能力。此限制最初是为了证明有界树宽图的图同构问题属于 TC^1 [23] 而提出的。实际上，我们从算法转向逻辑视角，并证明：对于每个可由逻辑 $\mathrm{LREC}_=$ 定义的关系结构上的性质，都存在一个数 $k \in \mathbb{N}$ ，使得逻辑 C^k 能够通过一个对数数量词深度的公式族来表达该性质；这等价于 $(k-1)$-WL 能够在对数次数的迭代中检测该性质。也就是说，直观而言，我们可以通过适当维度的 Weisfeiler–Leman 算法进行对数次数的迭代，或者等价地，通过 C^k 中对数量词深度，来模拟对数空间递归。

该结果的正式表述如下。

定理 I.1 对于每个词汇表 τ 以及每个 $\mathrm{LREC}_=[\tau]$-公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{\kappa})$，存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个由 $C^{\mathcal{O}(\log n)}$ k 个公式组成的族 $\left(\psi_{\bar{m}}(\bar{x})\right)_{\bar{m} \in [n]^{|\bar{\kappa}|}}$，使得对于所有大小为 $|\mathcal{A}| \leq n$ 的 τ-结构 $\mathcal{A}$、所有 $\bar{v} \in \left(V(\mathcal{A})\right)^{|\bar{x}|}$ 以及所有 $\bar{m} \in [|\mathcal{A}|]^{|\bar{\kappa}|}$，均有

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{v}, \bar{m}) \iff \mathcal{A} \models \psi_{\bar{m}}(\bar{v}).$$

在证明中，我们重构 $\mathrm{LREC}_=$-算子的递归计算，以获得一个具有对数高度和较小袋重叠的计算树。随后，所需公式的构造类似于 [20] 中介绍的方法：我们沿着树分解从底向上构造公式，从而得到对数量词深度。在这里，我们需要注意确保变量的数量确实保持为常数。

作为该结果实用性的一个例子，我们随后将其应用于所有区间图组成的类。该图类最初促使我们研究对数 Weisfeiler–Leman 算法的能力。区间图类与许多应用领域相关，例如生物学 [47] 和运筹学[6],，并且已知许多通常在计算上困难的问题在区间图上是可处理的 [28, 32]。K¨obler 等人 [37] 为区间图上的同构问题给出了一个 LOGSPACE 算法。然而，他们的结果完全是算法性的，无法转化为逻辑方面的结果，因此无法与我们的定理直接比较。由于根据 [24],，每个区间图都有一个能够识别它的 $\mathrm{LREC}_{=}$-公式，我们可以推导出：对于每个区间图，只需使用常数个变量和一个具有对数量词深度的 C-句子，就足以识别该区间图。

定理 I.2 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个阶为 n 的区间图 G，都存在一个公式 $\Phi^G \in \mathsf{C}^{\mathcal{O}(\log n)}\, k$，能够将 G 描述至同构意义下。

作为一个推论，利用 [27], 我们可以为弦无爪图这一类得到一个类似的结论。

定理 I.3 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个阶为 n 的弦无爪图 G，都存在一个公式 $\Phi^G \in \mathsf{C}^{\mathcal{O}(\log n)}\, k$，能够将 G 描述至同构意义下。

随后，我们将更详细地分析区间图，并概述第二种直接证明，以说明这类图的同构类型可以在 C 中用常数个变量和对数级量词深度定义。该证明避免翻译 $\mathrm{LREC}_{=}$-公式，而是直接通过图的分解进行证明。

II. 预备知识

我们将元素元组 $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k)$ 记作 $\bar{\mathrm{x}}$。若两个元组 $\bar{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k)$、$\bar{\mathrm{y}} = (\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\ell)$ 满足 $\mathrm{k} = \ell$，从而有 $|\bar{\mathrm{x}}| = |\bar{\mathrm{y}}|$，则称它们是相容的。元组 $\bar{\mathrm{x}}$ 的第 i 个位置记作 $\bar{\mathrm{x}}_i$。对于所有 $\mathrm{k}, \ell \in \mathbb{N}$，定义 $[\mathrm{k}, \ell] := \{\mathrm{i} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{k} \leq \mathrm{i} \leq \ell\}$ 以及$[\mathrm{k}] := [1,\mathrm{k}]$。

A. 结构

词汇表是一个非空有限的关系符号集合。每个符号 $\mathrm{R} \in \tau$ 都有一个固定的元数 $\mathrm{a}_R \in \mathbb{N}$。一个 τ-结构 $\mathcal{A}$ 由一个论域——一个非空有限集合 V(A)——以及对每个 $\mathrm{R} \in \tau$所对应的关系 $\mathrm{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{V}(\mathcal{A})^{a_R}$组成。结构的阶指的是其基数 $|\mathcal{A}|$。我们可以将 $\mathrm{a}_1 \ldots \mathrm{a}_k \in \mathrm{R}(\mathcal{A})$写作 $(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k) \in \mathrm{R}(\mathcal{A})$。$\tau$- 结构 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的同构是一个保持关系的双射 $\mu\colon \mathrm{V}(\mathcal{A}) \to \mathrm{V}(\mathcal{B})$，即对于所有 k 元关系 $\mathrm{R} \in \tau$ 以及所有 $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k \in \mathrm{V}(\mathcal{A})$，必须满足 $(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k) \in \mathrm{R}(\mathcal{A}) \iff (\mu(\mathrm{a}_1), \ldots, \mu(\mathrm{a}_k)) \in \mathrm{R}(\mathcal{B})$。此时我们称 $\mathcal{A}$与 $\mathcal{B}$同构，记作 $\mu\colon \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$。如果我们不关心具体的映射，可以省略 μ。

对于一个 τ-结构 $\mathcal{A}$，我们定义扩展 $\mathcal{A}$ 的双排序结构 $\mathcal{A}^+$ s

$$\mathcal{A}^+ := \big(V(\mathcal{A}), \{R(\mathcal{A})\}_{R\in\tau}, N(\mathcal{A}), \leq, S, \min, \max\big),$$

其中$N(\mathcal{A}) := \{0, \ldots, |\mathcal{A}|\}$, $\leq$是相应的线性序，min、max 是定义 $\leq$最小值和最大值的一元单元素关系，而S 是二元后继关系。随后，每个域变量 都在宇宙$V(\mathcal{A})$ 上取值，并来自集合$x_1, x_2, \ldots$；而每个数变量 都在$N(\mathcal{A})$ 上取值，并来自集合 $\iota_1, \iota_2 \ldots$. 我们也可以偏离这一约定，使用符号x、y、$z \ldots$ 表示论域变量，分别

使用 ι、κ、λ... 表示数变量。不过，应将这些符号理解为来自x_1,... 分别为 ι_1、... 中的值的占位符，这是为了提高可读性。为了表示$V(\mathcal{A})$ 中的元素，分别以及$N(\mathcal{A})$中的元素，我们分别使用u、v、w、... 以及i、j、p、q、... 中的符号。

如果两个双排序结构的底层 τ结构同构，则称它们同构。

尽管仅限于自然数的初始段，我们仍可以通过元组 $\bar{i} \in N(\mathcal{A})^k$表示更大的数；随后将这些元组解释为以$(|\mathcal{A}|+1)$为基数的数，即

$$\langle \bar{i} \rangle_{\mathcal{A}} := \sum_{j=1}^{k} \bar{i}_j \cdot (|\mathcal{A}|+1)^{j-1}.$$

我们将解释（或赋值）定义为一种映射 α ： 它为每个域变量 x_i 赋予 $\mathrm{V}(\mathcal{A})$ 中的一个值，并为每个数变量 ι_i 赋予 $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ 中的一个值。由于我们只将解释与具体公式一同考虑，因此只需为公式中出现的每个变量赋予一个值即可。给定域变量元组和数变量元组 $\bar{\mathrm{x}}$ 以及 $\bar{\iota}$ ，还有相容的域元组和数元组 $\bar{\mathrm{v}} \in \mathrm{V}(\mathcal{A})^k$ 和 $\bar{\mathrm{p}} \in \mathrm{N}(\mathcal{A})^\ell$，我们将 $\alpha[\bar{\mathrm{v}}/\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{p}}/\bar{\iota}]$ 记作如下赋值：α 将其修改为，对于所有 $\mathrm{i} \in [\mathrm{k}]$ 和 $\mathrm{j} \in [\ell]$，$\bar{\mathrm{x}}_i$ 被赋予值 $\bar{\mathrm{v}}_i$ ，而 $\bar{\iota}_j$ 被赋予值 $\bar{\mathrm{p}}^j$。

如果变量出现在相应量词的辖域内，我们称其为约束变量；否则称其为自由变量。特别地，给定公式 φ，我们写作 $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ ，以表示自由$(\varphi) \subseteq \{x_1,\ldots,x_k\}$ 彼此不同，并且它们正是可能在 φ 中自由出现的变量。所有变量均以约束形式出现的公式称为句子。

B. 图

一个（有向）图是论域为顶点 $V(G)$、具有二元边关系$E(G)$的 $\{E\}$-结构$G := (V(G), E(G))$。G 的阶为 $|G| := |V(G)|$。

如果 $\mathrm{E(G)}$ 是对称且非自反的，则称图为无向图；在这种情况下，我们将元素 $\mathrm{vw} \in \mathrm{E(G)}$ 视为无序的。对于这样的 G 以及 $\mathrm{v} \in \mathrm{V(G)}$，我们用 $\mathrm{N_G(v)} := \{\mathrm{w} \in \mathrm{V(G)} \mid \mathrm{vw} \in \mathrm{E(G)}\}$ 分别表示 v 在 G 中的开邻域，用 $\mathrm{N_G[v]} := \mathrm{N_G(v)} \cup \{\mathrm{v}\}$ 表示其闭邻域。令 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V(G)}$，我们将 G 中由 W 诱导的子图定义为 $\mathrm{G[W]} := (\mathrm{W}, \{\mathrm{vw} \in \mathrm{E(G)} \mid \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{W}\})$。

如果不存在某个$k \in \mathbb{N}$ ，使得存在一个互不相同的边序列(v_1, v_2)、$(v_2, v_3)\ldots$，(v_{k-1}, v_k)，其中对于互不相同的i、$j \in [$和$k-1]$，满足$v_1 = v_k$，则称一个有向图是无环的。我们将有向无环图 称为DAG。DAG 的高度 是其中最长路径的长度。

现在，设图 G 是一个阶为 n 的有向图：$= |\mathrm{G}|$。对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V(G)}$，令 $\mathrm{N^+\,G\,(v)} := \{\mathrm{w} \in \mathrm{V(G)} \mid \mathrm{vw} \in \mathrm{E(G)}\}$，以及 $\mathrm{N^-\,G\,(v)} := \{\mathrm{u} \in \mathrm{V(G)} \mid \mathrm{uv} \in \mathrm{E(G)}\}$，分别表示 v 的出邻居集和入邻居集；令 $\mathrm{deg^+\,G\,(v)} := |\mathrm{N^+\,G\,(v)}|$ 和 $\mathrm{deg^-\,G\,(v)} := |\mathrm{N^-\,G\,(v)}|$，分别表示 v 的出度和入度。

令 $\trianglelefteq_G$ 表示$E(G)$的自反传递闭包。在这些及类似的记号中，如果图G 由上下文可明确确定，我们会省略下标G 。我们将出度为 0 的节点称为G的叶节点。如果 $\trianglelefteq$ 具有唯一的极小元r ，且我们将其称为G的根，则称G *rooted* 为有根的。注意，对于每个r，$V(G)$ 中的节点$v \in$都可从r到达。

C. 逻辑

本节假定读者熟悉一阶逻辑（FO）和标准模型论记号，关于这些内容的适当概述可参见 [9, 40]。给定一个公式 φ,

一个结构 $\mathcal{A}$ 和一个赋值 α，我们写作 $(\mathcal{A}, \alpha) \models \varphi$，表示公式 φ 在给定 $\mathcal{A}$ 且变量已按照 α 进行赋值的情况下为真。特别地，我们使用以下简写：$\top := \forall x\ (x = x)$ 以及 $\bot := \neg\top$。

我们来介绍 FO 的一个扩展，即带计数的一阶逻辑 (FO+C)，它作用于上文所述的双排序结构（另见 [17]）。它在第二个论域上扩展了 FO，并增加了两个量词，我们现在对其进行递归定义。在本节其余部分，设 τ 为任意词汇表。此外，设 $\mathcal{A}^+$ 为一个双排序 τ结构，φ 为一个 FO+C$[\tau]$公式，α 为一个解释，ι 为一个数变量。那么 $\exists\iota\,\varphi$ 是一个 FO+C$[\tau]$公式，并且当且仅当 $(\mathcal{A}^+, \alpha)$ 满足它时，

$$\left\{i \in N(\mathcal{A}) \mid (\mathcal{A}^+, \alpha[i/\iota]) \models \varphi\right\} \neq \varnothing$$

成立。

FO+C 还增加了 # 量词，其取值为某个自然数。设x 为一个域变量，κ 为另一个数变量。那么 $\#x\ \varphi = \kappa$ 和 $\#\iota\,\varphi = \kappa$ 都是 FO+C$[\tau]$公式，并且

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^+ \models \#x\,\varphi = \kappa \\ \iff &\left|\left\{v \in V(\mathcal{A}) \mid (\mathcal{A}^+, \alpha[v/x]) \models \varphi\right\}\right| = \alpha(\kappa) \end{aligned}$$

分别为。

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^+ \models \#\iota\,\varphi = \kappa \\ \iff &\left|\left\{i \in N(\mathcal{A}) \mid (\mathcal{A}^+, \alpha[i/\iota]) \models \varphi\right\}\right| = \alpha(\kappa). \end{aligned}$$

给定一个 公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{\iota})$，我们将满足 φ 的论域/数元组集合定义为

$$\begin{aligned} &\varphi[\mathcal{A}^+, \alpha; \bar{x}, \bar{\iota}] := \\ &\left\{\bar{v}\bar{i} \in V(\mathcal{A})^{|\bar{x}|} \times N(\mathcal{A})^{|\bar{\iota}|} \mid (\mathcal{A}^+, \alpha[\bar{v}/\bar{x}, \bar{i}/\bar{\iota}]) \models \varphi(\bar{x}, \bar{\iota})\right\}. \end{aligned}$$

现在我们转而介绍 LREC 和 LREC$_=$，它们是 FO+C 的两个扩展，最初在 [24] 中提出，旨在寻找一种能够刻画 LOGSPACE 的逻辑。所有 LREC$[\tau]$-公式的集合，是通过以下规则扩展 FO+C$[\tau]$ 的语法得到的。设 $\bar{}x$、$\bar{}y1$、$\bar{}y_2$ 是相容的域变量 k-元组，$\bar{\iota}$、$\bar{\kappa}$ 是非空数变量元组。那么，如果 φ_{E}、φ_{C} 是 LREC$[\tau]$-公式，

$$\varphi := [\mathsf{lrec}_{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{\iota}} \varphi_{\mathrm{E}}, \varphi_{\mathrm{C}}](\bar{x}, \bar{\kappa})$$

则它是一个带有自由变量 free(φ) 的 LREC$[\tau]$-公式：$=$(free(φ_{E}) $\setminus$ ($\bar{}y_1 \cup \bar{}y_2$)) $\cup$ (free(φ_{C}) $\setminus$ ($\bar{}y_1 \cup \bar{\iota}$)) $\cup\ \bar{}x \cup \bar{\kappa}$。给定一个双排序的 τ-结构 $\mathcal{A}^+$ 和一个赋值 α，公式 φ 递归地定义了一个关系 $X \subseteq V(\mathcal{A})^k \times \mathbb{N}$，使得

$$(\mathcal{A}^+, \alpha) \models \varphi \iff (\alpha(\bar{x}), \langle \alpha(\bar{\kappa}) \rangle_{\mathcal{A}}) \in X.$$

现在描述如何获得 X。首先，定义图 G := (V, E)，其中 V := V($\mathcal{A}$)^{k}且 E := $\varphi_{\mathrm{E}}[\mathcal{A}, \alpha;\ \bar{}y1, \bar{}y_2]$。也就是说，G 是定义在 V($\mathcal{A}$) 的 k 元组上的有向图，其边恰好是满足 $\bar{}v1, \bar{}v_2 \in V(\mathcal{A})^k$ 的那些二元组 ($\bar{}v1, \bar{}v_2$)，其中 $(\mathcal{A}, \alpha[\bar{}v_1/\ \bar{}y1, \bar{}v_2/\ \bar{}y_2]) \models \varphi_{\mathrm{E}}(\bar{}y1, \bar{}y_2)$。在图 G 上，公式 φ_{C} 随后定义了顶点标记

$$\mathrm{C}(\bar{v}_1) := \left\{\langle \bar{i} \rangle_{\mathcal{A}} \mid \bar{i} \in \varphi_{\mathrm{C}}[\mathcal{A}^+, \alpha[\bar{v}_1/\bar{y}_1]; \bar{\iota}]\right\}.$$

如果一个元组 $(\bar{v}, \bar{i})$ 满足 $\bar{v} \in V(\mathcal{A})^k$，并且资源项 $\bar{i} \in N(\mathcal{A})^{|\iota|}$ 包含于 X 中，则$\langle i \rangle_{\mathcal{A}} > 0$ （也就是说，仍有剩余资源），并且

$$\left| \left\{ \bar{w} \in N_{\mathrm{G}}^{+}(\bar{v}) \;\middle|\; \left(\bar{w}, \left\lfloor \frac{\langle i \rangle_{\mathcal{A}} - 1}{\deg_{\mathrm{G}}^{-}(\bar{w})} \right\rfloor \right) \in X \right\} \right| \in \mathrm{C}(\bar{v}).$$

逻辑 $\mathrm{LREC}_{=}$ 将 lrec-算子替换为 $\mathrm{lrec}_{=}$-算子，从而可以在构造图上定义一个等价关系。我们回顾上述定义的结构、赋值和变量元组。然后，令 $\varphi_{=}$、φ_{E}、φ_{C} 为 $\mathrm{LREC}_{=}[\tau]$-公式，我们得到一个新的 $\mathrm{LREC}_{=}[\tau]$-公式

$$\varphi := [\mathsf{lrec}_{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{\iota}} \varphi_{=}, \varphi_{\mathrm{E}}, \varphi_{\mathrm{C}}](\bar{x}, \bar{\kappa}).$$

其语义稍微复杂一些。首先，我们像之前一样构造图 G’。然后，令 $\sim$ 为由 $\varphi_{=}[\mathcal{A}^{+}, \alpha$ 定义的等价关系；在 V’ 上令 $\bar{y}1$、$\bar{y}_2]$，我们定义一个新图

$$\begin{aligned} \mathrm{G} := \big(\mathrm{V} &:= \mathrm{V}' / \sim, \\ \mathrm{E} &:= \left\{ (\bar{v}_{1/\sim}, \bar{v}_{2/\sim}) \in \mathrm{V}^2 \mid (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathrm{E}' \right\} \big) \end{aligned}$$

将 V’ 中的顶点收缩为其等价类，同时保留边。对于所有 $\bar{v}_{1/\sim} \in$V，我们定义

$$\mathrm{C}(\bar{v}_{1/\sim}) := \left\{ \langle \bar{i} \rangle_{\mathcal{A}} \mid \exists \bar{v}' \in \bar{v}_{1/\sim} : \bar{i} \in \varphi_{\mathrm{C}}[\mathcal{A}^{+}, \alpha[\bar{v}'/\bar{y}_1]; \bar{\iota}] \right\}.$$

关系 X 随后按照之前的方式定义。

关系 X 的计算示例见图 1。希望深入了解 LREC 和 $\mathrm{LREC}_{=}$ 的读者可以查阅 [24]，其中还包括可用这些逻辑表达的性质的具体示例。

现在我们开始定义逻辑 C，即带计数量词的一阶逻辑，将其定义为通过形如 $\exists^{\geq n}\mathrm{x}\, \varphi(\mathrm{x})$（至少有 n 个满足 $\varphi(\mathrm{x})$ 的元素 x）的 C-量词对 FO 进行的语法扩展，其中对所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ 均成立；这立即产生相关的量词$\exists^{\leq n}\mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}) \equiv \exists \mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}) \wedge \neg\exists^{\geq n+1}\mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})$ 以及 $\exists^{=n}\mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}) \equiv \exists^{\leq n}\mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x}) \wedge \exists^{\geq n}\mathrm{x}\ \varphi(\mathrm{x})$。

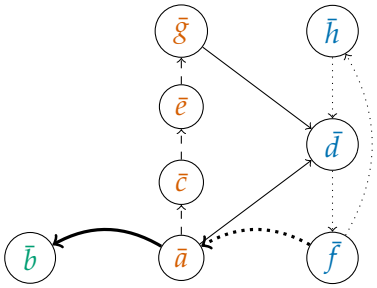
在继续之前，值得注意的是，C 和 FO+C 是两种不同且相互独立的逻辑，只是名称恰好相似。我们试图简要澄清它们之间的差异，以避免产生混淆。逻辑 C 仅仅是定义在关系结构上的 FO 语法扩展，而 FO+C 则定义在双排序结构上，并且能够在一定程度上对自然数进行量化。例如，图是否为正则图可以用 FO+C-公式表示为

$$\varphi_{\text{regular}}^{\mathsf{FO+C}} := \exists \iota \left[\forall x \# y\, E(x,y) = \iota \right],$$

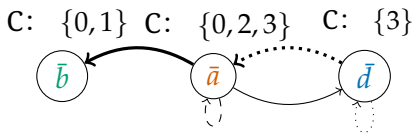
这可以理解为“存在一个数 ι，使得每个顶点 x 恰好有 ι 个邻居”。另一方面，由于 C 量词中的数字是硬编码的，任何刻画正则性的 C公式都只能适用于大小有界的图：

$$\varphi_{\text{regular}(n)}^{\mathsf{C}} := \bigvee_{0 \leq i \leq n} \forall x \exists^{=i} y\, E(x,y).$$

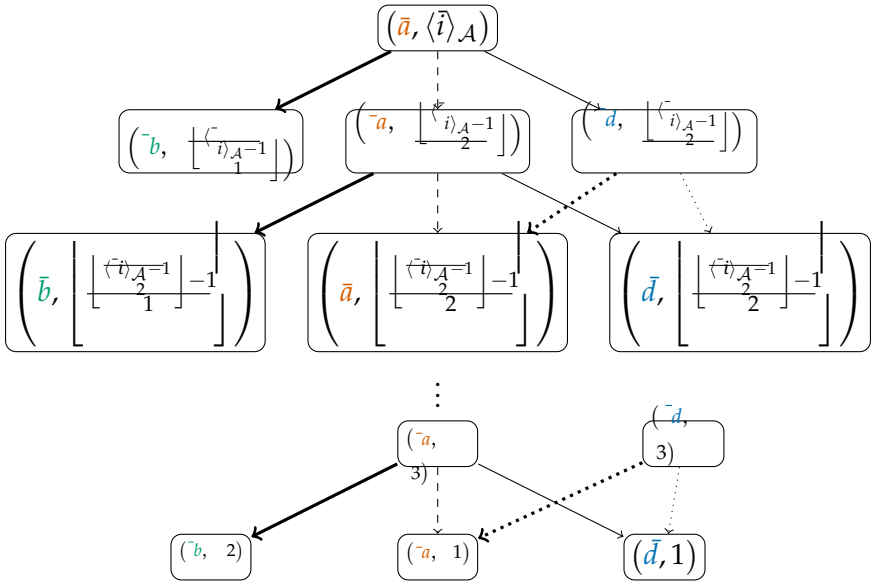
然而，对于固定大小的图，每个 一阶逻辑+C 公式都可以由一族 C公式模拟。 [9, 命题 8.4。18],这一结果是我们证明定理 I.1 的基础。



（a）由公式 φ_{E} 定义的图 G’ 在 $V(\mathcal{A})^{k}$ 上的表示。（省略顶点标签 C。边模式仅用于提供视觉辅助，不承载形式意义。）



（b）通过在由 $\varphi_{=}$ 定义的等价关系下对 G’ 取闭包，得到图 G 的一种表示。我们假设该关系为 $\bar{a}_{/\sim} = \{\bar{a}, \bar{c}, \bar{e}, \bar{g}\}$、$\bar{d}_{/\sim} = \{\bar{d}, \bar{f}, \bar{h}\}$、$\bar{b}_{/\sim} = \{\bar{b}\}$，$\varphi_{\mathrm{C}}$ 并假设由 定义的 C 取给定的顶点标签。



(c) 关于图 G 的递归展开（参数为 $(\bar{a}, \bar{i})$）所得有向无环图的可视化。对于每一步递归，资源项（即 $\langle \bar{i} \rangle_{\mathcal{A}}, \lfloor \langle \rangle_{\mathcal{A}} - 1 \rfloor$ 等）都可以理解为在图 G 中该顶点的入邻居之间进行均分。再加上资源项必须为正的要求，即可确保对数空间界。

图 1：评估 $\mathrm{LREC}_{=}[\tau]$-公式 $\varphi := [\mathrm{lrec}\ \bar{y}1, \bar{y}2, \bar{\imath}\varphi_{=}, \varphi_{\mathrm{E}}, \varphi_{\mathrm{C}}](\bar{a}, \bar{i})$ 时，关系 X 的计算过程示意图。设 $\mathcal{A}^{+}$ 是一个双类型的 τ-结构。假设由公式 φ_{E}定义的图 G’ 如图 1a 所示。再假设公式 $\varphi_{=}$ 生成图 G，公式 φ_{C} 生成顶点标记 C，如图 1b 所示。现在借助图 1c，自底向上说明如何计算该有向无环图，从而如何计算关系 X。叶节点（例如 $(\bar{b}, 2)$）属于关系 X，当且仅当 $0 \in \mathrm{C}(\bar{b})$，因为判定标准是 $(\bar{b}, 2)$ 的子节点中属于 X 的数量（即 0）是否出现在 $\mathrm{C}(\bar{b})$ 中。因此，此处 $(\bar{b}, 2)$、$(\bar{a}, 1) \in \mathrm{X}$ 成立，但 $(\bar{d}, 1) \notin \mathrm{X}$ 不成立。接着，其前驱 $(\bar{a}, 3)$ 属于 X，因为 $|\{(\bar{b}, 2), (\bar{a}, 1)\}| = 2 \in \mathrm{C}(\bar{a})$；而 $(\bar{d}, 3) \notin \mathrm{X}$ 不成立，因为 $|\{(\bar{a}, 1)\}| = 1 \notin \mathrm{C}(\bar{d})$。这一过程继续向上，直至根 $(\bar{a}, \langle \bar{i} \rangle_{\mathcal{A}})$；当其属于 X 的子节点数量 q 出现在 $\mathrm{C}(\bar{a})$ 中时，该根就包含在 X 中。最后，当且仅当根属于 X 时，φ 成立。

就其本身而言，考虑到 C，C 的表达能力与一阶逻辑完全相同

$$\exists^{\geq n} x\, \varphi(x) \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_n \left[\bigvee_{\substack{i,j\in[n] \\ i\neq j}} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i\in[n]} \varphi(x_i) \right].$$

然而，我们关注的是 C 的有限变量片段，记作 C_k ，其中 $k \in \mathbb{N}$；C_k 恰好包含 C 中仅使用来自$\{x_1,\ldots\ldots x_k\}$这些变量的所有公式。

我们将公式 $\varphi \in \mathrm{C}$ 的量词深度 $\mathrm{qd}(\varphi)$ 归纳定义为

$$\mathrm{qd}(\varphi) := \begin{cases} 0 & \text{if } \varphi \text{ is atomic,} \\ \mathrm{qd}(\psi) & \text{if } \varphi = \neg\psi, \\ \max(\mathrm{qd}(\psi_1), \mathrm{qd}(\psi_2)) & \text{if } \varphi = \psi_1 \vee \psi_2, \\ \mathrm{qd}(\varphi) + 1 & \text{if } \varphi = \exists^{(\geq n)} x\, \psi. \end{cases}$$

现在，我们可以进一步将 C_k 限制为 C_k^r，将其定义为 C_k 中满足 $\mathrm{qd}(\varphi) \leq r$的公式 φ 所构成的子集。

示例 II.1 $C\mathrm{C}_2^3$-句子

$$\exists x\, \exists^{=3} y \left[E(x,y) \wedge \exists^{=4} x\, E(y,x) \right]$$

它表达了这样一种性质：满足该性质的图必须包含一个恰好有三个邻点的顶点，而这三个邻点中的每一个又恰好有 *4* 个邻点。

下文中，我们主要使用渐近记号 $\mathrm{C}\mathcal{O}(\log n)\, \mathrm{k}$，其含义如下。设 τ 为一个词汇表，$\mathfrak{T}$ 为所有 τ-结构的类。对于任意 $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ 以及 τ-结构 $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}$，我们记，对于所有 $\bar{\mathrm{b}} \in \mathrm{V}(\mathcal{B})^m$，由一个结构及其元素的 m-元组组成的有序对为 $(\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}})$。设 $\mathfrak{B}$ 为包含这些有序对的某个子集的类，并假设 $\mathfrak{B}$ 恰好包含具有某种性质 P 的那些元素。于是，如果存在某个 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ 以及函数 $\mathrm{f}(\mathrm{n}) \in \mathcal{O}(\log \mathrm{n})$，使得对于所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$，都存在一个公式 $\varphi(\mathrm{n})\, \mathfrak{B}(\bar{\mathrm{v}}) \in \mathrm{C}^{f(\mathrm{n})\, \mathrm{k}[\tau]}$，满足对于所有 $(\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}})$（其中 $|\mathcal{B}| = \mathrm{n}$），均有 $\mathcal{B} \models \varphi(\mathrm{n})\, \mathfrak{B}(\bar{\mathrm{b}}) \iff (\mathcal{B}, \bar{\mathrm{b}}) \in \mathfrak{B}$，我们就称 P 可在 $\mathrm{C}\mathcal{O}(\log \mathrm{n})\, \mathrm{k}$ 中表达。

D. Weisfeiler–Leman 算法

（*k* 维）*Weisfeiler–Leman* 算法 （*k-WL*，$\mathrm{WL}k$）是一种组合算法，通过迭代计算图的顶点元组上的着色$k(G)^k \to C$ 。将其应用于两个图时，可以用来判断它们是否同构。就我们的目的而言，只需知道该算法的初始化方式：根据原子类型为所有由k个顶点组成的元组着色；原子类型包含有关此类元组中各元素的连通性和相等性的全部信息。随后，通过为每个由k个顶点组成的元组计算一种新颜色来迭代细化 着色；新颜色取决于相邻（即仅有一个位置不同）的k个顶点元组的颜色。最终输出是满足以下条件的第一个着色c_k^i： 它将k元组划分为与前一次迭代相同的颜色类。更多详情可参见 [25, 33]。

我们将 WL_k^r 记作 $\mathrm{WL}k$ 的一种限制，即在前 r 个细化轮次后终止，也就是 c_k^r；如果存在一种颜色 c，使得

经过 r 轮后，图 G 和图 H 中具有该颜色的顶点 k-元组数量不同，则 WL_k^r 会识别图 G。也就是说，如果它能将图 G 与所有非同构图 图 H 区分开来。Weisfeiler–Leman 算法与计数逻辑的有限变量片段之间的联系如下。

引理II.2（[23, 5]）设 $k \in \mathbb{N}$。对于阶相同的图 G 和 H，以及所有 $r \in \mathbb{N}$，以下陈述等价：

- WLrk 能区分 G 和 H。
- 存在一个 Crk_{+1}-句子 φ，使得 $G \models \varphi \iff H \not\models \varphi$。

对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们定义对数 Weisfeiler–Leman 算法，记作 WL$\mathcal{O}(\log n)k$，类似于 C$\mathcal{O}(\log n)k$中的渐近记号。特别地，引理II.2意味着，如果存在一个$k \geq 2$以及一个能够识别图G的 C$\mathcal{O}(\log n)k$-句子，那么 WL$\mathcal{O}(\log n)k-1$就能识别G。

III. 树状分解

本节用于计算对数高度的树状分解，我们将在此基础上于第四节构造具有对数量词深度的 C公式。我们从一个有向无环图开始，因为正如我们将在第四节看到的，根据 LREC 的定义计算关系X会得到这样一个图。为了在 C 中表示X，我们可以按照下文所述对该图进行分解。关键在于，分解所依据的树具有对数深度。随后，我们将利用该分解构造 C$\mathcal{O}(\log n)\ k$ -公式。

通过 gho本节中，我们假设图 G 是一个有根有向无环图，且r 是图 G的根 .

图 G 的树展开是树 T_G，其顶点是图 G 中满足 $\mathrm{v}_0 = \mathrm{r}$ 的路径 $\bar{}\mathrm{v} = (\mathrm{v}_0, \ldots, \mathrm{v}_k)$，并且当 $\ell = \mathrm{k} + 1$ 且对于 $\mathrm{i} \in [0, \mathrm{k}]$ 有 $\mathrm{w}_i = \mathrm{v}_i$ 时，$\bar{}\mathrm{w} = (\mathrm{w}_0, \ldots, \mathrm{w}_\ell)$ 是 $\bar{}\mathrm{v}$ 的子节点。对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V(G)}$，令 $\mathcal{P}_G(\mathrm{v})$ 表示图 G 中满足 $\mathrm{v}_0 = \mathrm{r}$ 且 $\mathrm{v}_k = \mathrm{v}$ 的所有路径 $(\mathrm{v}_0, \ldots, \mathrm{v}_k)$ 的集合。注意，所有 $\bar{}\mathrm{v} \in \mathcal{P}(\mathrm{v})$ 都是 T_G 的顶点。我们称它们为 T_G 中 v 的副本。

我们将图 G 中顶点v 的权重定义为

$$\mathrm{wt}_G(v) := |\mathcal{P}(v)|,$$

如果上下文明确，则省略其下标。我们将图 G 的总权重定义为 awt(图 G) $:= \sum_{v \in V(G)}$ wt(v)。注意，

$$\mathrm{awt}(G) = |T_G|.$$

我们将顶点 v 的重数 定义为

$$\mathrm{mul}_G(v) := \max \left\{ \prod_{i=1}^{k} \deg^-(v_i) \;\middle|\; (v_0, \ldots, v_k) \in \mathcal{P}(v) \right\},$$

其中空积为 1（因此 $\mathrm{mul}_G(r) = 1$）。我们也可以再次省略下标。此外，我们将图 G 的总重数 定义为 amul(图 G) $:= \sum_{v \in V(G)}$mul(v)。

引理 III.1 对于所有 $v \in V$(图 G)，有 wt(v) $\leq$mul(v)。

证明： 我们对v 与根r之间的距离进行归纳，以证明该结果。对于根r，有 $\mathrm{wt}(r) = \mathrm{mul}(r) = 1$。因此，设$v$ 为一个具有入邻居u_1,。 ...， u_k的节点。于是 $\deg^-(v) = k$ 并且

$$\mathrm{wt}(v) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{wt}(u_i) \le \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mul}(u_i) \le k \max_{i\in[k]} \mathrm{mul}(u_i) = \mathrm{mul}(v),$$

其中第一个不等式由归纳假设得出。 ■

对于$m \in \mathbb{N}$，如果对于所有$v \in V(G)$，都有 $\mathrm{mul}(v) \le m$ ，我们就称G 具有m-路径性质 。m-路径性质使我们能够控制树展开的大小。

C推论 III.2 如果 G 具有 m-路径性质，那么$\mathrm{awt}(G) \le \mathrm{amul}(G) \le m \cdot |\quad G|$.

设$v \in V(G)$ 且$W \subseteq V(G)$ 满足对于所有$w \in W$，都有$v \trianglelefteq_G w$ 。于是，我们定义G_v^W 为G 的诱导子图，其顶点集为

$$\big\{u \in V(G) \;\big|\; \text{there is path } (v_0,\dots,v_\ell) \text{ in } G \text{ with } v_0 = v \text{ and } v_\ell = u \text{ and } \{v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1}\} \cap W = \varnothing\big\}.$$

在定义中，我们约定对于 $\ell = 0$, $\{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_{\ell-1}\}$ 是空集。因此，如果 $\mathrm{v} \in \mathrm{W}$，那么 $\mathrm{G}_v^W = \mathrm{G}[\{\mathrm{v}\}]$。注意，$\mathrm{G}_v^W$是以 v 为根的有根有向无环图。如果 $\mathrm{W} = \varnothing$，我们记作 G_v，而不写作 G_v^W；如果 v 是根，则记作 G^W，而不写作 G_r^W。如果 $\mathrm{W} = \{\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_k\}$，我们也记作 $\mathrm{G}^{w_1,\dots,w^k v}$，而不写作 G_v^W。

L引理 III.3 对于所有 $v \in$ 图 G(图 G)，都有 awt(图 G_v) +awt(图 G^v) $\le$ awt(图 G) $+ 1$.

Proof: Let $X := V(G_v) \setminus V(G^v)$, $Y := V(G^v) \setminus V(G_v)$, and $Z := \big(V(G_v) \cap V(G^v)\big) \setminus \{v\}$. We have

$$\begin{aligned}
\mathrm{awt}(G) &= \mathrm{wt}_G(v) + \sum_{x\in X} \mathrm{wt}_G(x) \\
&\quad + \sum_{y\in Y} \mathrm{wt}_G(y) + \sum_{z\in Z} \mathrm{wt}_G(z) \\
\mathrm{awt}(G_v) &= \mathrm{wt}_{G_v}(v) + \sum_{x\in X} \mathrm{wt}_{G_v}(x) \\
&\quad + \sum_{z\in Z} \mathrm{wt}_{G_v}(z) \\
\mathrm{awt}(G^v) &= \mathrm{wt}_{G^v}(v) \\
&\quad + \sum_{y\in Y} \mathrm{wt}_{G^v}(y) + \sum_{z\in Z} \mathrm{wt}_{G^v}(z).
\end{aligned}$$

我们有 $\mathrm{wt}_{G_v}(\mathrm{v}) = 1$，并且 $\mathrm{wt}_{G^v}(\mathrm{v}) = \mathrm{wt}_G(\mathrm{v})$。此外，对于每个 $\mathrm{z} \in \mathrm{Z}$，都有 $\mathrm{wt}_{G_v}(\mathrm{z}) + \mathrm{wt}_{G^v}(\mathrm{z}) \le \mathrm{wt}_G(\mathrm{z})$，因为我们可以将 $\mathcal{P}_G(\mathrm{z})$ 划分为 $\mathcal{P}_{G^v}(\mathrm{z})$ 和集合 $\mathcal{Q}$，其中 $\mathcal{P}_{G^v}(\mathrm{z})$ 由图 G 中所有从 r 到 z 且避开 v 的路径组成，而集合 $\mathcal{Q}$ 由所有从 r 到 z 且包含 v 的路径组成。我们有 $|\mathcal{P}_{G_v}(\mathrm{z})| \le |\mathcal{Q}|$。由此即可得到该引理的结论。 ■

引理 III.4 设 $v \in V$(图 G)，且 v 不是图 G 的叶节点。则存在 $a \in V$(图 G)，使得 $v \trianglelefteq a$，并且

$$\mathrm{awt}(G_v^a) \le \frac{\mathrm{awt}(G_v)}{2}, \tag{1}$$

$$\mathrm{awt}(G_b) \le \left\lceil \frac{\mathrm{awt}(G_v)}{2} \right\rceil \qquad \text{for all } b \in N^+(a). \tag{2}$$

证明： 设 $m := \mathrm{awt}(\text{图 } G_v)$ ，并注意到 $m \geq |\text{图 } G_v| \geq 2$。

于是，对于图 G_v的每个叶节点 w，都有 $\mathrm{awt}(G_v^v) = 1 \leq m2$，并且 $\mathrm{awt}(G_v^w) = \mathrm{awt}(G_v) = m > m2$。因此，存在一个 $a \in V(G_v)$，使得对于每个 $b \in N^+(a)$，都有 $\mathrm{awt}(G_v^a) \leq m2$，并且 $\mathrm{awt}(G_v^b) > m2$。

这满足了 (1)；为说明其满足 (2)，令 $b \in N^+(a)$。于是 $\mathrm{awt}(G_v^b) > m2$，因此 $\mathrm{awt}(G_v^b) \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$。根据引理 III.3，有 $\mathrm{awt}(G_b) + \mathrm{awt}(G_v^b) \leq m + 1$，因此

$$\mathrm{awt}(G_b) \leq m + 1 - \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \right) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil .$$

■

引理 III.5 令 $v,w \in V(G)$ 满足 $v \lhd w$。则存在一个 $a \in V(G)$，使得 $v \trianglelefteq a \lhd w$，并且

$$\mathrm{awt}(G_v^a) \leq \frac{\mathrm{awt}(G_v^w)}{2}, \tag{3}$$

$$\mathrm{awt}(G_b^w) \leq \left\lceil \frac{\mathrm{awt}(G_v^w)}{2} \right\rceil \qquad \textit{for all } b \in N^+(a) \textit{ with } b \trianglelefteq w. \tag{4}$$

证明：令 $m := \mathrm{awt}(G_v^w)$，并注意到 $m \geq |G_v^w| \geq 2$。设 $\bar{v} = (v_0, \ldots, v_k)$ 是图 G 中的一条路径，其中 $v_0 = v$ 且 $v_k = w$。我们有 $\mathrm{awt}(G^{v_0} v) = 1 \leq m2$ 且 $\mathrm{awt}(G^{v_k} v) = \mathrm{awt}(G_v^w) > m2$。因此，存在唯一的 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$，使得 $\mathrm{awt}(G^{v_i} v) \leq m2$ 且 $\mathrm{awt}(G^{v_{i+1}} v) > m2$。令 $a(\bar{v}) := v_i$，并令 a 在所有 $a(\bar{v})$ 中取 $\trianglelefteq$-极大值，其中 $\bar{v}$ 遍历从 v 到 w 的所有路径。

则所有 $a(\bar{v})$ 都显然满足 (3)，特别地，a 也满足。

为证明 (4)，令 $b \in N^+(a)$，使得 $b \trianglelefteq w$。由于 $v \trianglelefteq a$、$ab \in E(G)$ 且 $b \trianglelefteq w$，存在一条从 v 到 w 的路径 $(v_0, \ldots, v_k)$，使得 $a = v_i$ 且 $b = v_{i+1}$。由 a 的极大性可知，$\mathrm{awt}(G_v^b) > m2$。将引理 III.3 应用于图 G_v^w 和 b，可得 $\mathrm{awt}(G_b^w) \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil$。

■

现在我们可以使用引理 III.4 和引理 III.5，归纳地构造图 G的一个表示，使其由一棵对数高度的树构成。

引理 III.6 存在一棵有根树 T 以及映射 $v: V(T) \to V(\text{图 } G)$、$W: V(T) \to 2^{V(G)}$，使得以下条件得到满足。

1) $|W(t)| \leq 1$ 对所有 $t \in V(T)$。2) 当且仅当 $v(t)$ 是图 G 的叶节点，或 $W(t) = \{v(t)\}$时，$t \in V(T)$ 是 T 的叶节点。3) 如果 $t \in V(T)$ 不是 T 的叶节点且 $W(t) = \{w\}$，则 $v(t) \lhd w$。4) 如果 $t \in V(T)$ 有子节点 $u_1, \ldots, u_k$，其中某个 $k \geq 1$，则

$$V\left(G_{v(t)}^{W(t)}\right) \setminus \{v(t)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V\left(G_{v(u_i)}^{W(u_i)}\right).$$

5) T 的高度至多为 $2\log(\mathrm{awt}(\text{图 } G))$。

证明： 我们归纳地定义树 树 T。我们从一个根 r_T 开始，并令 $v(r_T) := r$ 且 $W(r_T) := \varnothing$。

为了扩展树 T，令 t 为 T 中尚未定义子节点的节点。如果 v(t) 是 G 的叶节点，或 $v(t) \in W(t)$，则 t 是 T 的叶节点。现在假设 v(t) 不是 G 的叶节点，且 $v(t) \notin W(t)$。令 $v := v(t)$，$W := W(t)$。根据归纳法，我们假设 $|W| \leq 1$，并且如果 $W = \{w\}$，则 $v \lhd_G w$。

情况 *1*：$W = \varnothing$。（我们称t 为类型 0 节点。）

于是 $G_v^W = G_v$。根据引理 III.4，存在 $a \in V(G_v)$，使得 $\mathrm{awt}(G_v^a) \le \mathrm{awt}(G_v)\,2$，并且 $\mathrm{awt}(G_b) \le \left\lceil \frac{\mathrm{awt}(G_v)}{2} \right\rceil$ 对所有 $b \in N^+(a)$ 都成立。我们添加一个 t 的子节点 u_a，其中 $v(u_a) := v$ 且 $W(u_a) := \{a\}$。对于每个 $b \in N^+(a)$，我们添加一个子节点 u_b，其中 $v(u_b) := b$ 且 $W(u_b) := \varnothing$。情况 2：对于某个 w，有 $W = \{w\}$。（我们称 t 为类型 1 节点。）于是 $G_v^W = G_v^w$。根据引理 III.5，存在 $a \in V(G_v)$，使得 $\mathrm{awt}(G_v^a) \le \mathrm{awt}(G_b^w)\,2$，并且 $\mathrm{awt}(G_b) \le \left\lceil \frac{\mathrm{awt}(G_v^w)}{2} \right\rceil$ 对所有满足 $b \trianglelefteq w$ 的 $b \in N^+(a)$ 都成立。我们添加一个 t 的子节点 u_a，其中 $v(u_a) := v$ 且 $W(u_a) := \{a\}$。对于每个满足 $b \trianglelefteq w$ 的 $b \in N^+(a)$，我们添加一个子节点 u_b，其中 $v(u_b) := b$ 且 $W(u_b) := \{w\}$。对于每个满足 $b \not\trianglelefteq w$ 的 $b \in N^+(a)$，我们添加一个子节点 u_b，其中 $v(u_b) := b$ 且 $W(u_b) := \varnothing$。

根据构造可直接得出，树 T、v、W 满足引理 III.6 的第 1 至第 4 项。我们需要证明它们满足第 5 项。对于每个 $t \in V(\text{树 } T)$，令 $A(t) := \mathrm{awt}\left(\text{图 } G^{W(t)}{}_{v(t)}\right)$。注意，对于所有节点 $t \in V(\text{树 } T)$ 以及 t 的所有子节点 u，以下结论成立：

- $A(u) < A(t)$；
- 若 t 的类型为 0，则 $A(u) \le \left\lceil \frac{A(t)}{2} \right\rceil$；
- 若 $A(u) > \left\lceil \frac{A(t)}{2} \right\rceil$，则 t 的类型为 1，且 $W(u) = \varnothing$，因此 u 的类型为 0。

这意味着，对于 t 的所有孙节点 v，都有 $A(v) \le A(t)\,2$；又由于 $A(r_T) = \mathrm{awt}(\text{图 } G)$，第 5 项得证。 ■

IV. From $\mathsf{LREC}_=$ to $\mathsf{C}_k^{\mathcal{O}(\log n)}$

设 G 为一个有向图。G 的基数条件是一个映射 C，它为每个 $v \in V(G)$ 关联一个集合 $C(v) \subseteq [0, \deg^+(v)]$。给定一个基数条件 C，我们类似于 $\mathrm{LREC}_=$ 的定义，将 $X = X(G, C) \subseteq V(G) \times \mathbb{N}_{>0}$ 定义为按包含关系最小的集合，使得对于所有 $v \in V(G)$ 和 $i \in \mathbb{N}_{>0}$，均有 $(v, i) \in X$ 当且仅当

$$\left| \left\{ w \in N^+(v) \;\middle|\; \left(w, \left\lfloor \frac{i-1}{\deg^-(w)} \right\rfloor \right) \in X \right\} \right| \in C(v).$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，我们定义一个词汇表 $\tau(n) := \{E, P_0, \ldots, P_n\}$，其中 E 是一个二元关系符号，而 P_i 是一元关系符号。我们可以将由阶为 $|G| \le n$ 的有向图 G 和 G 的一个基数条件 C 组成的元组 (G, C) 表示为一个 $\tau(n)$-结构 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G, C)$，其中 $V(\mathcal{A}) := V(G)$，$E(\mathcal{A}) := E(G)$，并且对于所有 $i \in [0, n]$，

$$P_i(\mathcal{A}) := \{v \in V(G) \mid i \in C(v)\}.$$

下面的定理使我们能够通过具有对数量词深度的计数逻辑中的公式来检验 X-成员关系。

定理 IV.1 存在一个 $k \in \mathbb{N}_{>0}$，使得对于所有 n，$r \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $i \in [(n+1)^r]$，存在一个 $\mathsf{C}_{\mathcal{O}(r \log n)}\,k$-公式 $\varphi_{(n)\,i}(x)$，使得对于所有阶为 $|G| \le n$ 的有向图 G、G 的所有基数条件 C，以及所有 $v \in V(G)$，都有

$$\mathcal{A}(G, C) \models \varphi_i^{(n)}(v) \iff (v, i) \in X(G, C).$$

证明：设 n、$r \in \mathbb{N}_{>0}$，并设 $i \in [(n+1)^r]$。首先，对于每个阶为 $|G| \le n$ 的有向图 G 以及 G 上的每个基数条件 C，我们将描述对于所有 $v \in V(G)$，

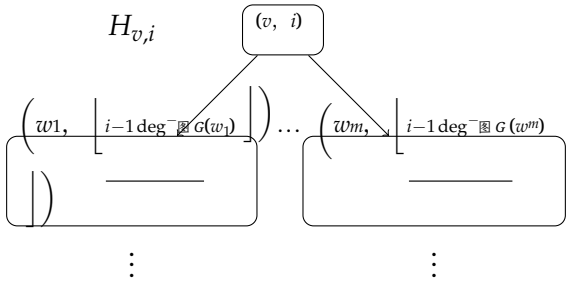


图 2：$H_{v,i}$ 的递归构造：在此例中，有 $N^+_{图\,G}(v) = \{w_1, \dots, w_m\}$。

可用于判断（v、i）是否包含于X（G、C）中的有根有向无环图$H_{v,i}$。然后，引理 III.6 根据$H_{v,i}$给出具有对数高度的树$T_{v,i}$。我们将描述如何利用这些树来判断（v、i）$\in X$（G、C）是否成立。在本证明末尾，我们递归地构造用于检查是否包含于X（G、C）中的公式，并使其结构紧密遵循所描述树的结构。由于引理 III.6 中的树具有对数高度，这些公式将具有对数量词深度。

设图 G 是一个阶为 $|\text{图 G}| \leq \text{n}$ 的有向图，且 $\text{v} \in$图 G 的顶点集 V(G)。我们归纳定义一个有根有向无环图 $\text{H}_{v,i}$，另见图 2。我们从根 (v, i) 开始。然后，反复地，对于每个顶点 $(\text{v}', \text{i}') \in \text{V}(\text{H}_{v,i})$ 以及每个邻居 $\text{w} \in \text{N}^+$图 G (v′)，其中对于 $\text{j}: = \left\lfloor \text{i}'-1\,\text{deg}^-\text{图 G(w)} \right\rfloor$，满足~~$\text{j} \geq 1$,~~ 我们向 $\text{H}_{v,i}$ 添加一个顶点 (w, j)（除非它已经存在），并插入一条从 (v′, i′) 到 (w, j) 的边。

我们可以如下判断“(v, i) $\in$ X(G, C)?”。首先，遍历 $\text{H}_{v,i}$ 中的所有叶节点 (w, j)，若 $0 \in \text{C(w)}$，则将其标记为正，否则标记为负。然后，对于每个只有已标记子节点的顶点 (w, j)，当且仅当标记为正的子节点数量包含于 C(w) 时，将该顶点标记为正，否则标记为负。所有顶点都标记完毕后，当且仅当 (v, i) 标记为正时，(v, i) $\in$ X(G, C)。由于 $\text{H}_{v,i}$ 的高度可能关于图 G 的规模线性，这一过程可能需要线性步数。因此，我们改用对数高度的树 $\text{T}_{v,i}$，如下所述。

注意，对于节点 $(w,j) \in V(H_{v,i})$，图 $H_{w,j}$ 是 $H_{v,i}$ 在 (或等于) (w,j) 下方所有节点上诱导出的子图。

断言 1 $H_{v,\ i}$ 具有$(n\ +1)^r$-路径性质。

证明：我们证明等价命题 $\text{mul}_{H_{v,\ i}}\big((w,j)\big) \leq \big(|H_{v,i}|+1\big)^r$ 对所有$(w,j) \in V(H_{v,i})$成立。

设$(v'_0, \dots, v'_p)$ 是$H_{v,i}$ 中的一条路径，其中$v'_0 = (v,i)$ 且$v'_p = (w,j)$。此外，设$(v_s, \ell_s) := v'_s$ 对所有$s \in [0,p]$成立。那么，我们有

$$\ell_s = \left\lfloor \frac{\ell_{s-1}-1}{\deg^-_G(v_s)} \right\rfloor \leq \frac{\ell_{s-1}}{\deg^-_G(v_s)} = \frac{i}{\prod_{t=1}^{s}\deg^-_G(v_t)}$$

对于所有 $\text{s} \in [\text{p}]$。对于 $\ell_p = \text{j} \geq 1$，有 $\text{i} \geq \prod^p \text{s}{=}1\,\text{deg}^-$图 G (vs) $\geq \prod^p \text{s}{=}1\,\text{deg}^-\text{H}_{v,i}(\text{v}_s)$。因此，$\text{mul}_{H_{v,i}}\big((\text{w, j})\big) \leq \text{i} \leq (\text{n}+1)^r$。所以，$\text{H}_{v,i}$ 具有 $(\text{n}+1)^r$-路径性质。」

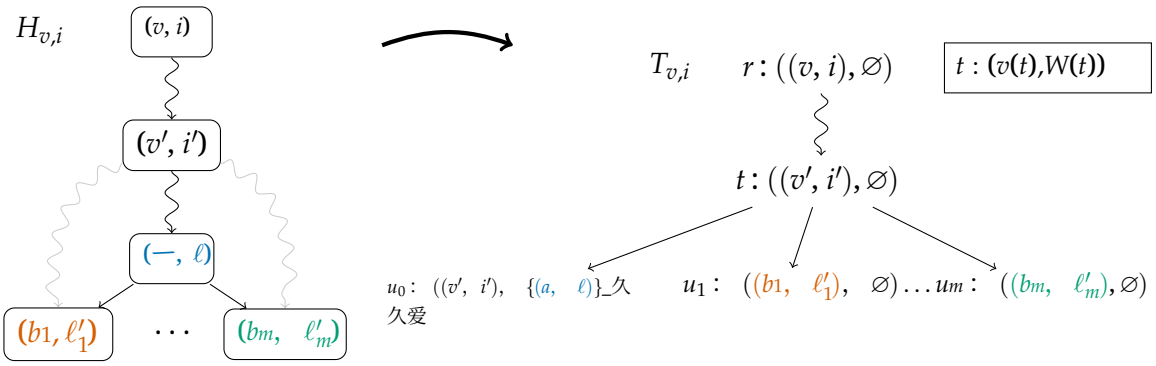


图 3：令(v, i)为我们想要判断“$(v,i) \in X$(图 G, C)？”的顶点，图中展示了如何在一个类型 0 的顶点$t \in V$(树 $T_{v,i}$) 处，递归地得到树 $T_{v,i}$ ，其中$v(t) = (v', i')$,$W = \varnothing$。

接下来，我们将引理 III.6 应用于 图 $G_{v,i}$，并得到（存在）一棵有根树 树 $T_{v,i}$ 以及映射 v: V(树 $T_{v,i}$) $\to V$(图 $G_{v,i}$) 和 W: V(树 $T_{v,i}$) $\to 2^{V(H_{v,i})}$。令 树 $T_{v,i}$、v、W 如引理 III.6 的证明中所述。

现在，我们描述如何使用 $T_{v,i}$ 判定“(v, i) $\in$ X(G, C)?”。设 H := $H_{v,i}$，且 T :=$T_{v,i}$。我们从 T 的根 r 开始。根据引理 III.6 中的构造，r 是一个类型 0 节点（即，对于满足 W(t) $= \varnothing$ 的节点 t），且 v(r) $=$ (v, i)，W(r) $= \varnothing$。对于每个类型 0 节点 t $\in$ V(T)，满足 v(t) $=$ (v′, i′) 且 W(t) $= \varnothing$，我们的目标是通过递归检查 t 的子节点，判定 (v′, i′) $\in$ X(G, C)。对于每个类型 1 节点 t $\in$ V(T)，满足 v(t) $=$ (v′, i′) 且 W(t) $=$ {(w, j)}，我们还会得到一个数 c; 我们的目标是在 H 中 (w, j) 的子节点恰有 c 个包含于 X(G, C) 这一假设下，通过递归检查 t 的子节点，判定 (v′, i′) $\in$ X(G, C)。具体而言，计算过程如下。

以下内容还可参见图 3。考虑 T 的顶点集中的一个类型 0 节点 t $\in$ ，其子节点为类型 1 的 u_0 以及 u_1, ...类型 0 的 u_m。令 v(t) $=$(v′, i′)、W(t) $= \varnothing$、v(u_0) $=$(v′, i′)、W(u_0) $=$ {(a, ℓ)}，以及 v(u_s) $=$ (b_s, ℓ'_s)、W(u_s) $= \varnothing$ ，其中所有 s $\in$ [m]均满足。根据引理 III.6 中 T 的构造，对于所有 s $\in$ [m], ，我们有 (v, i) $\trianglelefteq_H$(v′, i′) $\triangleleft_H$(a, ℓ) $\triangleleft_H$(b_s, ℓ'_s)，其中 (b_s, ℓ'_s) 是 H 中 (a, ℓ) 的子节点。

要判定“(v′, i′) $\in$ X(G, C)?”，我们首先对所有 s $\in$ [m]递归地判定 (b_s, ℓ'_s) $\in$ X(G, C)。这等价于对 t 的类型 0 子节点 $u_1, \ldots, u_m$ 递归地运行我们的过程。令 c 为包含在 X(G, C) 中的 (b_s, ℓ'_s) 的数量。然后，我们对类型 1 的子节点 u_0 递归地运行我们的过程，其中 v(u_0) $=$ (v′, i′)，且 W(u_0) $=$ {(a, ℓ)}，以检查在 (a, ℓ) 的子节点中恰有 c 个包含在 X(G, C) 中的假设下，(v′, i′) 是否包含在 X(G, C) 中。

现在考虑 T 的顶点集中的一个类型 1 节点 t $\in$，其子节点为类型 1 的 u_0、u_1, ...类型 1 的 u_m，以及类型 0 的 u_{m+1}、.....、u_{m+p}（见图 4）。令 v(t) $=$(v′, i′)、W(t) $=$ {(w, j)}，v(u_0) $=$(v′, i′)、W(u_0) $=$(a, ℓ)，v(u_s) $=$(b_s, ℓ'_s)、W(u_s) $=$ {(w, j)}，对所有 s $\in$ [m], ，并令 v(u_s) $=$(b_s, ℓ'_s)、W(u_s) $= \varnothing$，对所有 s $\in$ [m $+1$, p]。根据引理 III.6 中 T 的构造，对于所有 s $\in$ [m $+$p], ，我们有 (v, i) $\trianglelefteq_H$(v′, i′) $\triangleleft_H$(a, ℓ) $\triangleleft_H$(b_s, ℓ'_s)，其中 (b_s, ℓ'_s) 是 H 中 (a, ℓ) 的子节点；对于所有 s $\in$ [m]，有 (b_s, ℓ'_s) $\trianglelefteq_H$(w, j)；对于所有 s $\in$ [m $+1$, p]，有 (b_s, ℓ'_s) $\not\trianglelefteq_H$(w, j)。

判定 是否在恰好有 $(v'$ 个$i') \in X(G, C)$ 的子节点 o 的假设下成立? f

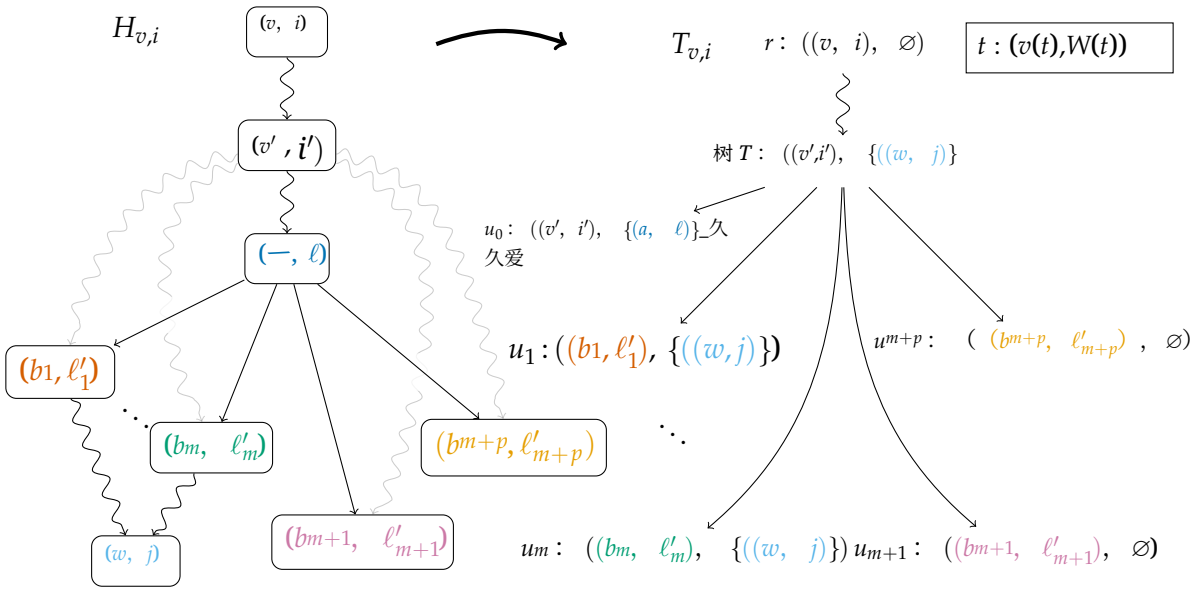


图 4：设 (v, i) 为我们希望确定“(v, i) $\in$ X(G, C)?” 中所述的顶点，该图展示了如何在一个类型 1 的顶点 t $\in$ V($T_{v,i}$) 处递归地获得 $T_{v,i}$，其中 v(t) $=$ (v′, i′)，W $=$ {(w, j)}。

H 中的 (w, j) 包含在 X(G, C) 中，我们在上述假设下对类型 1 的子节点 $u_1, \ldots, u_m$ 递归地运行我们的过程，从而为 s $\in$ [m] 判定 $(b_s, \ell'_s) \in$X(G, C)。接下来，我们对类型 0 的子节点 $u_{m+1}, \ldots, u_{m+p}$ 递归地运行该过程，从而为 s $\in$ [m $+$1, m $+$p] 判定 $(b_s, \ell'_s) \in$X(G, C)。令 c′ 为满足 s $\in$ [m $+$p] 的 $(b_s, \ell'_s) \in$X(G, C) 的数量。最后，我们对类型 1 的子节点 u_0 递归地运行我们的过程，以检查在 (a, ℓ) 的子节点中恰好有 c′ 个包含在 X(G, C) 中的假设下，(v′, i′) 是否包含在 X(G, C) 中。

目前，我们假设所考虑的节点不是叶节点。对于一个类型 0 的叶节点 t，若 v(t) $=$ (v′, i′) 且 W(t) $=\varnothing$，则当且仅当 $0 \in$ C(v′) 时，(v′, i′) $\in$ X(G, C)，因为根据引理 III.6（第 2 项），(v′, i′) 是 $H_{v,i}$ 的叶节点。对于一个类型 1 的叶节点 t，根据引理 III.6（第 2 项），我们有 W(t) $=$ {(v′, i′)}。因此，我们需要在以下假设下确定 (v′, i′) $\in$ X(G, C)：H 中 (v′, i′) 的子节点中恰有 c 个包含于 X(G, C) 中，其中 c 为某个数。当且仅当 c $\in$C(v′) 时，该条件成立。

在将树 $T_{v,i}$ 的结构转换为公式之前，我们首先验证这些树具有对数高度。这对于获得具有对数数量词深度的公式至关重要。

断言 2 $T_{v,\ i}$ 的高度至多为$(4r\ +2)\ \cdot \log(n\ +1)$。

证明：根据断言 1，$H_{v,\ell}$ 具有(n $+$1)^r-路径性质。因此，结合推论 III.2，我们得到 awt($H_{v,\ell}$) $\leq$(n $+$1)$^r \cdot |H_{v,\ell}|$，进而根据引理 III.6，$T_{v,\ell}$ 的高度至多为 2 log((n $+$1)$^r \cdot |H_{v,\ell}|$) $\leq$ 2log((n $+$1)$^r \cdot$(n $+$1)$^r \cdot$ n) $\leq$ 2 $\cdot$ (2r $+$1) $\cdot$log(n $+$1)。」

接下来，我们递归地构造以下形式的公式：$\psi^{h,n}_{t0,i'}(x)$ 以及 $\psi^{h,n}_{t1,i',j,c}(x, y)$，其中域变量为$x$、$y$。开始之前，适合先简要分析一下语法。用$n$表示结构的阶，该阶是固定的。通过$t0$ 和$t1$，我们记录当前公式对应的是类型 0 节点还是类型 1 节点。数字

$h \in \mathbb{N}$ 记录我们的递归深度，并确保我们不会生成具有非对数深度的公式。

最终目标是检查 (v, i) 是否包含于 X(G, C) 中。在此过程中，我们检查来自有向无环图 $H_{v,i}$ 的所有 (v′, i′)，判断它们是否包含于 X 中。我们希望 $G \models \psi^{h,n}_{\mathrm{t0,i'}}(v')$ 当且仅当我们能够以递归深度 h 验证 $(v', i') \in X(G, C)$。这对应于树 $T_{v,i}$ 中高度至多为 h 的一个类型 0 节点 t，其中 $v(t) = (v', i')$，$W(t) = \varnothing$，且 (v′, i′) 属于 X(G, C)。我们希望 $G \models \psi^{h,n}_{\mathrm{t1,i',j,c}}(v', w)$ 当且仅当我们能够以递归深度 h 验证 $(v', i') \in X(G, C)$，并在到达 (w, j) 时停止递归。在这些情况下，我们假设 (w, j) 恰好有 c 个包含于 X(G, C) 中的子节点。这对应于 $T_{v,i}$ 中高度至多为 h 的一个类型 1 节点 t，其中 $v(t) = (v', i')$，$W(t) = \{(w, j)\}$，并且当 (v′, i′) 在 $H_{v,\ell}$ 中恰好有 c 个包含于 X(G, C) 中的子节点时，$(v', i') \in X(G, C)$ 成立。

由于对于每个 $i' < 1$，(v′, i′) 都不包含在 X(G, C) 中，因此我们可以直接设定 $\psi^{h,n}_{\mathrm{t0,i'}}(x) := \bot$ 以及 $\psi^{h,n}_{\mathrm{t1,i',j,c}}(x, y) := \bot$，其中 $h \in \mathbb{N}$、$i' \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$、$j \in \mathbb{Z}$ 和 $c \in \mathbb{N}$ 任意。此外，对于所有 $h \in \mathbb{N}$、$i' \in \mathbb{Z}$、$j \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 和 $c \in \mathbb{N}$，我们设定 $\psi^{h,n}_{\mathrm{t1,i',j,c}}(x, y) := \bot$。

准备工作：在继续之前，我们先介绍几个公式。对于所有 $d \in \mathbb{N}$，令 $\deg^- d(x) := \exists^{=d} y(E(y, x))$。那么，$G \models \deg^- d(v)$ 当且仅当 $\deg^- G(v) = d$。此外，对于所有 ℓ、$\ell' \in \mathbb{N}$，我们归纳定义 $\mathrm{path}^{0,n}_{\ell,\ell'}(x, y) := (x = y)$ if $\ell = \ell'$ and

$$\mathsf{path}^{0,n}_{\ell,\ell'}(x, y) = E(x, y) \wedge \bigvee_{d \in [n], \left\lfloor \frac{\ell - 1}{d} \right\rfloor = \ell'} \deg^-_d(y)$$

否则，以及对于 $h \geq 1$,

$$\mathsf{path}^{h,n}_{\ell,\ell'}(x, y) = \exists z \bigvee_{j=\ell'}^{\ell} \left[\mathsf{path}^{h-1,n}_{\ell,j}(x, z) \wedge \mathsf{path}^{h-1,n}_{j,\ell'}(z, y) \right].$$

我们有 $G \models$ 路径$^{h,n}_{\ell,\ell'}(v, w)$ 当且仅当在 H_{vi} 中存在一条路径（因此，在任何其他包含 (v, i) 的 $H_{v',j}$ 中也存在）从 (v, ℓ) 到 (w, ℓ')，且可以在 h 个递归步骤内验证。

类型0的公式： 首先，我们构造与类型 0 节点相对应的公式。令 T 为根据引理 III.6 的证明得到的一棵树，并令 $t \in V(T)$ 为一个形如 $v(t) = (v', i')$ 的类型 0 节点，并且 $W(t) = \varnothing$。

在基本情形 $h = 0$ 中，我们不再有剩余的递归步骤，此时检查 t 是否为 T 中的叶节点。当 v′ 不存在满足 $\lfloor i'^{-1} \deg^-(w) \rfloor \geq 1$ 的后继节点 w（其中 w 属于 G）时，情况即成立，这等价于 $i' - 1 \geq \deg^-(w)$。~~对于上述描述的叶节点 t，我们有 $(v', i') \in X(G, C)$ 当且仅当 $0 \in C(v')$。~~因此，对于所有 $i' \in \mathbb{N}_{>0}$，我们设

$$\psi^{0,n}_{t0,i'}(x) := P_0(x) \wedge \forall y \left[E(x, y) \rightarrow \bigvee_{d=i}^{n} \deg^-_d(y) \right].$$

在针对 $h \in \mathbb{N}_{>0}$ 的递归步骤中，存在一个顶点 $a \in V(G)$ 和一个数 $\ell < i'$，使得 $(v', i') \lhd_{H_{v,i}} (a, \ell)$，即 (a, ℓ) 在 $H_{v,i}$ 中位于 (v′, i′) 之下。直观地说，节点 (a, ℓ) 应将有向无环图 $H_{v,i}$ 分成大小几乎相等的若干部分。我们猜测 (a, ℓ) 在 $H_{v,i}$ 中属于 X(G, C) 的子节点数量 c。然后，我们通过类型 0 公式和 $h - 1$ 个剩余递归步骤，验证恰好有这么多个子节点包含在 X(G, C) 中。利用数量 c，我们可以通过一个类型 1 公式验证 $(v', i') \in X(G, C)$，并且

$h-1$ 个剩余递归步骤，方法是传递这样的信息：恰好有 c 个(a,ℓ) 的子节点包含在 $X(G,C)$ 中。

因此，对于h,$i' \in \mathbb{N}_{>0}$，我们设

$$\psi^{h,n}_{t0,i'}(x) := \psi^{0,n}_{t0,i'}(x) \vee \exists y \bigvee_{\ell=1}^{i'-1} \bigvee_{c=0}^{n} \Big[\mathsf{path}^{h,n}_{i',\ell}(x,y) \\ \wedge \ \mathsf{children}^{h-1,n}_{t0,\ell,c}(y) \wedge \psi^{h-1,n}_{t1,i',\ell,c}(x,y) \Big]$$

with

$$\mathsf{children}^{h,n}_{t0,\ell,c}(y) := \\ \exists^{=c} z \left[E(y,z) \wedge \bigvee_{d=1}^{n} \left(\deg^{-}_{d}(z) \wedge \psi^{h,n}_{t0,\lfloor \frac{\ell-1}{d} \rfloor}(z) \right) \right]$$

对于所有$h \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}_{>0}$以及$c \in \mathbb{N}$，其表达的是“$(y,\ell)$ 有c 个类型 0 的子节点，且这些子节点位于X(图 G,C)中。这一点可以在h 个递归步骤内验证。”

类型 1 的公式：现在，我们构造与类型 1 节点相对应的公式。设树 T 为根据引理 III.6 的证明得到的一棵树，并设$t \in V(T)$ 为一个类型 1 节点，其形式为$v(t) = (v',i')$ 以及$W(t) = \{(w,j)\}$。

在 $\mathrm{h} = 0$ 的情况下，此时不再有剩余的递归步骤，我们检查 t 是否为树 T 中的叶节点。当 $\mathrm{v}' = \mathrm{w}$ 且 $\mathrm{i}' = \mathrm{j}$ 时会出现这种情况。对于这样的叶节点，假设 (v′, i′) 的子节点中恰有 c 个位于 X(G, C) 中，则当且仅当 $\mathrm{c} \in \mathrm{C}(\mathrm{v}')$ 时，$(\mathrm{v}', \mathrm{i}') \in \mathrm{X}(\mathrm{G}, \mathrm{C})$。因此，对于所有 $\mathrm{i}' \in \mathbb{N}_{>0}$ and $\mathrm{c} \in \mathbb{N}$，我们设 $\psi^{0}{}_{,n}\,\mathrm{t1,i'},\mathrm{c(x,\,y)} := \mathrm{P}_c(\mathrm{x}) \wedge \mathrm{x} = \mathrm{y}$。此外，对于所有 $\mathrm{i}', \ell \in \mathbb{N}_{>0}$ and $\mathrm{c} \in \mathbb{N}$ 且 $\mathrm{i}' \neq \ell$，我们设 $\psi^{0}{}_{,n}\,\mathrm{t1,i'},\ell,\mathrm{c(x,\,y)} := \bot$。

在 $\mathrm{h} \in \mathbb{N}_{>0}$ 的递归步骤中，存在某个顶点 $\mathrm{a} \in \mathrm{V(G)}$，以及一个 ℓ，满足 $\mathrm{j} < \ell < \mathrm{i}'$，使得 $(\mathrm{v}', \mathrm{i}') \lhd_{H_v,i} (\mathrm{a},\ \ell) \lhd_{H_v,i} (\mathrm{w,\,j})$。我们猜测 H_v 中 (a, ℓ) 的子节点里属于 X(G, C) 的数量 c'。然后，我们验证恰好有这么多个子节点包含在 X(G, C) 中。如果该子节点在 H_v 中不位于 (w, j) 上方，那么它是一个类型 0 节点，我们使用一个还剩 $\mathrm{h} - 1$ 个递归步骤的类型 0 公式。如果该子节点在 H_v 中位于 (w, j) 上方，那么它是一个类型 1 节点，我们使用一个还剩 $\mathrm{h} - 1$ 个递归步骤的类型 1 公式，并传递这样的信息：恰好有 c 个 (w, j) 的子节点包含在 X(G, C) 中。然后，利用猜测的数量 c'，我们可以通过一个还剩 $\mathrm{h} - 1$ 个递归步骤的类型 1 公式来验证 $(\mathrm{v}', \mathrm{i}') \in \mathrm{X(G,\,C)}$，并传递这样的信息：恰好有 c' 个 (a, ℓ) 的子节点包含在 X(G, C) 中。

因此，对于所有h、i'、$j \in \mathbb{N}_{>0}$和$c \in \mathbb{N}$，我们设

$$\psi^{h,n}_{t1,i',j,c}(x,y) := \psi^{0,n}_{t1,i',j,c}(x,y) \\ \vee \exists z \bigvee_{\ell=j+1}^{i'-1} \bigvee_{c'=0}^{n} \Big(\mathsf{path}^{h,n}_{i',\ell}(x,z) \wedge \mathsf{path}^{h,n}_{\ell,j}(z,y) \\ \wedge \mathsf{children}^{h-1,n}_{t1,\ell,j,c,c'}(z,y) \wedge \psi^{h-1,n}_{t1,i',\ell,c'}(x,z) \Big)$$

with

$$\begin{aligned}&\mathsf{children}^{h,n}_{t1,\ell,j,c,c'}(z,y) :=\\ &\quad\exists^{=c'}\, z'\Bigg(E(z,z') \wedge \bigvee_{d=1}^{n}\Bigg[\deg^{-}_{d}(z')\\ &\quad\wedge\quad\Bigg(\left[\psi^{h,n}_{t0,\lfloor\frac{\ell-1}{d}\rfloor}(z') \wedge \neg\mathsf{path}^{h,n}_{\lfloor\frac{\ell-1}{d}\rfloor,j}(z',y)\right]\\ &\quad\vee\quad\left[\psi^{h,n}_{t1,\lfloor\frac{\ell-1}{d}\rfloor,j,c}(z',y) \wedge \mathsf{path}^{h,n}_{\lfloor\frac{\ell-1}{d}\rfloor,j}(z',y)\right]\Bigg)\Bigg]\Bigg)\end{aligned}$$

对于所有 $\mathrm{h} \in \mathbb{N}$、$\ell$、$\mathrm{j} \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 c、$\mathrm{c}' \in \mathbb{N}$，表达“$(\mathrm{z}, \ell)$ 有 c' 个子节点属于 $\mathrm{X}(\mathrm{G}, \mathrm{C})$，前提是 (y, j) 的 c 个子节点包含于 $\mathrm{X}(\mathrm{G}, \mathrm{C})$ 中。(z, ℓ) 中位于 (y, j) 之上的子节点属于类型 1，而不在 (y, j) 之上的子节点属于类型 0。所有这些都可以通过 h 个递归步骤验证”

公式的嵌套深度：由于根据引理 III.6，存在一棵树 $T_{v,i}$ 而根据断言 2，该树的高度为 $(4r+2)\cdot\log(n+1)$，因此只需使公式 $\psi^{h,n}_{t0,i}(x)$ 具有对数级嵌套深度即可。也就是说，我们选择

$$\varphi^{(n)}_{i}(x) := \psi^{((4r+2)\cdot\log(n+1)),n}_{t0,i}(x).$$

那么，$\mathcal{A}(G, C) \models \varphi_{(n)\,i}(v)$ 当且仅当 $(v,i) \in X(G, C)$ 对于所有大小为 $|G| \le n$ 的图 G、所有关于 G 的基数条件 C 以及所有 $v \in V(G)$ 均成立。 ■

我们已准备好证明本节的主要结果。

定理 I.1 对于每个词汇表 τ 以及每个 $\mathsf{LREC}_{=}[\tau]$-公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{\kappa})$，存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个由 $\mathrm{C}^{\mathcal{O}(\log n)}k$-公式 $\left(\psi_{\bar{m}}(\bar{x})\right)_{\bar{m}\in[n]^{|\bar{\kappa}|}}$ 组成的族，对于所有大小为 $|\mathcal{A}| \le n$ 的 τ-结构 $\mathcal{A}$、所有 $\bar{v} \in \left(V(\mathcal{A})\right)^{|\bar{x}|}$ 以及所有 $\bar{m} \in [|\mathcal{A}|]^{|\bar{\kappa}|}$，均有

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{v}, \bar{m}) \iff \mathcal{A} \models \psi_{\bar{m}}(\bar{v}).$$

证明：我们对 φ 的结构进行归纳。对于公式 $\varphi(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\kappa}) \in$ 一阶逻辑$+\mathrm{C}[\tau]$，由于我们只需要在大小至多为 n 的结构上保持等价，因此可以应用 [9, 命题 8.4 的证明18], 中的论证：首先将 # 运算符替换为计数量词，然后以归纳方式将公式族硬编码，从 $\top$ 分别为 $\bot$ 原子数值句 ($\le$、min、max、S) 开始，随后对于先前量化变量的每个可能赋值，用 $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ 上的析取式替换存在数值量化。因此，存在常数 k、$\mathrm{r} \in \mathbb{N}$，并且对于每个 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$，存在一个 $\mathrm{C}^{r}_{k}[\tau]$-公式族 $\left(\psi_{\bar{j}}(\bar{\mathrm{x}})\right)_{\bar{\mathrm{j}}\in[\mathrm{n}]^{|\bar{\kappa}|}}$，使得对于所有大小为 $|\mathcal{A}| \le \mathrm{n}$ 的 τ-结构 $\mathcal{A}$、所有 $\bar{\mathrm{v}} \in \left(\mathrm{V}(\mathcal{A})\right)^{|\bar{\mathrm{x}}|}$ 以及所有 $\bar{\mathrm{j}} \in [|\mathcal{A}|]^{|\bar{\kappa}|}$，都有

$$\mathcal{A}^{+} \models \varphi(\bar{v}, \bar{j}) \iff \mathcal{A} \models \psi_{\bar{j}}(\bar{v}).$$

对于 $\varphi = (\neg\varphi_1)$、$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$、$\varphi = (\exists y\, \varphi_1)$、$\varphi = (\#\iota\, \varphi_1 = \kappa)$，或 $\varphi = (\#y\, \varphi_1 = \kappa)$，其中

- y 是一个域变量，
- ι, κ 是数变量，
- $\bar{x}$ 是一个域变量元组，
- $\bar{\kappa}$ 是一个数变量元组，我们假设其中包含 κ，

- 自由$(\varphi) \subseteq \bar{x} \cup \bar{\kappa}$，并且
- φ_1，φ_2 是 LREC$_=$-公式，

我们首先递归地构造 C$\mathcal{O}$ (log n) k-公式$\left(\psi_{1、\bar{j}}\left(\bar{x}\right)\right)_{j\in[n]^{|\bar{\kappa}|}}$、$\left(\psi_{2、\bar{j}}\left(\bar{x}\right)\right)_{j\in[n]^{|\bar{\kappa}|}}$，然后再次应用 [9, 命题 8.418] 的证明中的论证。

现在，令 $\varphi = [$lrec -y1、-y2、$\bar{\iota}\varphi_=$、φ_{E}、$\varphi_{\mathrm{C}}]$（-x，$\bar{\kappa}$），其中取相容的域变量元组 -y1、-y2、-x，非空的数变量元组 $\bar{\iota}$、$\bar{\kappa}$，以及 LREC$_=$-公式 $\varphi_=$（-y1、-y2、-x）、φ_{E}（-y1、-y2、-x）、φ_{C}（-y1、-x、$\bar{\iota}$、$\bar{\kappa}$）。

根据归纳假设，存在一个常数 k′ ∈ ℕ，使得对于每个 n ∈ ℕ，都有 C$\mathcal{O}$(log n) k′-公式 $\psi_=$(-y1, -y2, -x)、ψ_{E}(-y1, -y2, -x)，以及一个由 C$\mathcal{O}$(log n) k′-公式$\left(\psi_{\mathrm{C}、\bar{i}}\bar{j}\left(\bar{y}1,\bar{x}\right)\right)_{\bar{i}\bar{j}\in[}$ n$]^{|\bar{\iota}\bar{\kappa}|}$组成的族，并且

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+ \models \varphi_=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}) &\iff \mathcal{A} \models \psi_=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}),\\
\mathcal{A}^+ \models \varphi_{\mathrm{E}}(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}) &\iff \mathcal{A} \models \psi_{\mathrm{E}}(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}), \text{ and}\\
\mathcal{A}^+ \models \varphi_{\mathrm{C}}(\bar{u}_1,\bar{v},\bar{\imath},\bar{\jmath}) &\iff \mathcal{A} \models \psi_{\mathrm{C},\bar{\imath}\bar{\jmath}}(\bar{u}_1,\bar{v})
\end{aligned}$$

对于所有大小为 $|\mathcal{A}| \leq$n 的结构 $\mathcal{A}$以及所有 $\bar{u}_1 \in (\mathrm{V}(\mathcal{A}))^{|\bar{y}^1|}$、$\bar{u}_2 \in (\mathrm{V}(\mathcal{A}))^{|\bar{y}^2|}$、$\bar{v} \in (\mathrm{V}(\mathcal{A}))^{|\bar{x}|}$、 i ∈ N$(\mathcal{A})^{|\bar{\imath}|}$和 j ∈N$(\mathcal{A})^{|\bar{\kappa}|}$，均成立。此外，根据定理 IV.1，存在一个 k″ ∈ $\mathbb{N}_{>0}$，使得对于所有 n ∈ $\mathbb{N}_{>0}$和 $\ell \in \{1,\ldots\ldots(\mathrm{n}+1)^{|\bar{\kappa}|}\}$，存在一个 C$\mathcal{O}$(log n) k″ $[\{\mathrm{E}, \mathrm{P}_0,\ldots\ldots\mathrm{P}_n\}]$-公式 $\varphi_{X,\ell}$(x)，使得对于所有大小至多为 n 的 τ-结构 $\mathcal{A}$，以及对于 Section II 中 φ 的 LREC$_=$定义所得到的 G = (V, E) 和 C，都有 $\mathcal{A}$(G, C)$\models \varphi_{X,\ell}$(v) $\iff$(v, ℓ) ∈X(G, C)，对所有 v ∈V(G) 均成立。我们通过将每个出现的

- z_1 =z2 通过 $\bar{z}_i = (z_{i,1},\ldots,z_{i,|\bar{x}|})$ 对 $\exists z_{1,1}\cdots\exists z_{1,|\bar{x}|}\exists z_{2,1}\cdots\exists z_{2,|\bar{x}|}\left(\psi_=(\bar{z_1},\bar{z_2},\bar{x})\right)$ $i \in \{1,2\}$,
- ∃x1 由 ∃x1,1 . . . ∃x1,|x|,
- $E(z1,z2)$ 由

$$\begin{aligned}
&\exists z'_{1,1}\cdots\exists z'_{1,|\bar{x}|}\exists z'_{2,1}\cdots\exists z'_{2,|\bar{x}|}\big(\\
&\psi_=(\bar{z}'_1,\bar{z}_1,\bar{x}) \wedge \psi_=(\bar{z}'_2,\bar{z}_2,\bar{x}) \wedge \psi_{\mathrm{E}}(\bar{z}'_1,\bar{z}'_2,\bar{x})\big),
\end{aligned}$$

- 以及 $P_i(z1)$ 通过 $\exists z'_{1,1}\cdots\exists z'_{1,|\bar{x}|}\left(\psi_=(\bar{z}',\bar{z},\bar{x}) \wedge \psi_{\mathrm{C},\bar{\imath}\bar{\ell}}(\bar{z}',\bar{x})\right)$

对于 $\varphi_{X,\ell}$ 中出现的任意变量 z_1,z_2 。

令 $\psi_{\bar{m}}(\bar{x}) := \psi_{X,\langle\bar{m}\rangle}(\bar{x})$ 对所有 $\bar{m} \in [n]^{|\bar{\kappa}|}$均成立。那么，对于所有大小为 $|\mathcal{A}| \leq n$ 的 τ-结构 $\mathcal{A}$、所有 $\bar{v} \in (V(\mathcal{A}))^{|\bar{x}|}$ 以及所有 $\bar{m} \in [|\mathcal{A}|]^{|\bar{\kappa}|}$，均有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+ \models \varphi(\bar{v},\bar{m}) &\iff (\bar{v},\langle\bar{m}\rangle) \in X(G,C)\\
&\iff \mathcal{A} \models \psi_{X,\langle\bar{m}\rangle}(\bar{v})\\
&\iff \mathcal{A} \models \psi_{\bar{m}}(\bar{v}).
\end{aligned}$$

■

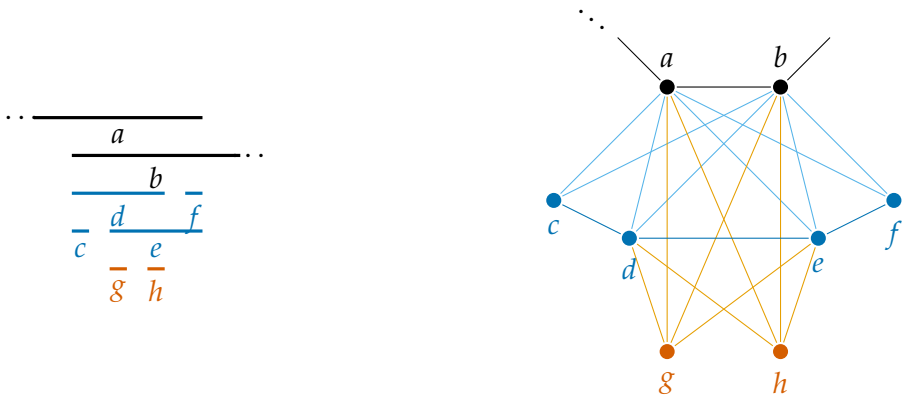


图5：区间表示的一部分（左）及其对应的、具有嵌套模块的区间图 G（右）。图 G 中四个（可见的）极大团 $C_{i,i\in[4]}$ 分别为 {a, b, c, d}, {a, b, d, e, g},{ } { } a, b, d, e, h, 以及 a, b, e, f。

V. 区间图

本节将说明，定理 I.1 的结果如何使我们能够从区间图的 $\mathrm{LREC}_{=}$-可定义规范化中得到一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$C^{\mathcal{O}(\log n)\, k}$ 都能区分每个阶为 n 的区间图。我们还将得到弦无爪图的类似结果。最后，我们概述如何在无需 $\mathrm{LREC}_{=}$ 的情况下证明区间图的这一结果：利用区间图某个子类的对称传递闭包逻辑 STC+C-可定义规范化，以及每个区间图都可以分解为该子类中的区间图这一事实。

区间是连续整数的集合。区间表示 $\mathcal{I}$ 是一个区间集合，由此可得到其图 $G_{\mathcal{I}}$，其中 $V(G_{\mathcal{I}}) := \mathcal{I}$，$E(G_{\mathcal{I}}) := \{\{I, J\} \subseteq \mathcal{I} \mid I \cap J \neq \varnothing\}$。若存在一个区间表示 $\mathcal{I}$，使得 $G \cong G_{\mathcal{I}}$，则无向图 G 是区间图；示例见图5。若区间表示 $\mathcal{I}$ 在基数意义上是极小的，即对于所有满足 $G_{\mathcal{I}} \cong G_{\mathcal{I}'}$ 的区间表示 $\mathcal{I}'$ 而言，$\bigcup \mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ 都是极小的，则称其为极小区间表示。若存在区间表示 $\mathcal{I}$，使得 $G_{\mathcal{I}} \cong G$ 且对所有 $I, J \in \mathcal{I}$，$I \not\subseteq J$，则区间图 G 是真区间图。

引理 V.1（[24]）存在一种$\mathrm{LREC}_{=}$-可定义的区间图规范化 ψ（ι，κ），使得对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 以及阶为 n 的区间图 G，均有 $\mu\colon G^{+} \cong ([n],\ \psi[G^{+};\ \iota,\ \kappa])$。

特别地，由于 ψ 是规范化的结果，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及阶为 n 的区间图 G 和 H，均有 $G \cong H$ 当且仅当 $([n],\ \psi[G^{+};\ \iota,\ \kappa]) = ([n],\ \psi[H^{+};\ \iota,\ \kappa])$。

应用定理 I.1，我们得到：

推论 V.2 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有一个由 $C^{\mathcal{O}(\log n)\, k}$-句子 $(\psi_{ij})_{ij\in[n]}$ 组成的族，使得对于所有阶为 n 的区间图 G 以及 $i, j \in [n]$

$$G \models \psi_{ij} \iff G^{+} \models \psi(i, j).$$

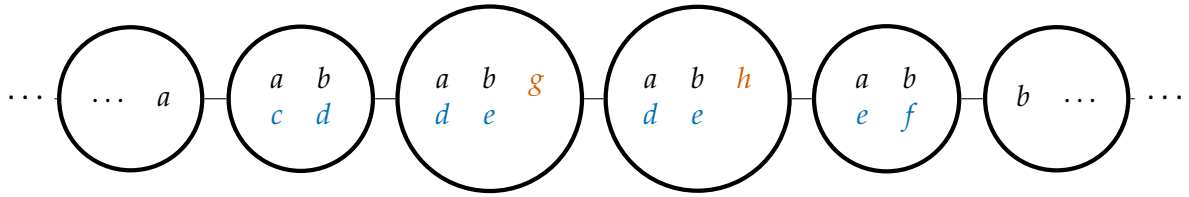


图 6：图5中的图 G 的一种可能路径分解的局部。特别要注意，完全反转最中间的四个（分别是两个）节点中的内容，也可以得到其他可能的路径分解。

现在，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 G 为阶为 n 的区间图，并令所有 $i,j \in [n]$，

$$\psi_{ij}^{G} := \begin{cases} \top & \text{if } G \models \psi_{ij}, \\ \bot & \text{if } G \not\models \psi_{ij}. \end{cases}$$

引理 V.3 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，每个阶为 n 的区间图 G 都存在一个 $\mathsf{C}^{\mathcal{O}(\log n)}$ k 阶公式 φ_G，满足：对于每个阶为 n 的区间图 H，

$$H \models \varphi_G \iff H \cong G.$$

证明：设G 是一个阶为n的区间图。我们声称

$$\varphi^{G} := \bigwedge_{i,j \in [n]} \psi_{ij} \leftrightarrow \psi_{ij}^{G}$$

就是该公式。为此，设H 是一个阶为n的区间图。

($\Longrightarrow$) 假设$H \models \varphi_G$。那么，对于所有i、$j \in [n]$，$H \models \psi_{ij} \leftrightarrow \psi_{ij}^{G}$，这意味着$H \models \psi_{ij}$当且仅当$G \models \psi_{ij}$。因此，$([n], \psi[G^{+}; \iota, \kappa]) = ([n], \psi[H^{+}; \iota, \kappa])$，从而$G \cong H$。

($\Longleftarrow$) 假设$G \cong H$。那么，$([n], \psi[G^{+}; \iota, \kappa]) = ([n], \psi[H^{+}; \iota, \kappa])$。因此，对于所有$i$、$j \in [n]$，$H \models \psi_{ij}$，当且仅当$G \models \psi_{ij}$，因此 $\psi_{ij} \leftrightarrow \psi_{ij}^{G}$。于是，$H \models \varphi_G$。 ■

因此，剩下要证明的是，我们能够将区间图与非区间图或阶不同的图区分开来。为此，我们需要逻辑 STC 和 STC+C。

对称传递闭包逻辑 STC（见 [39]）通过 stc 算子扩展一阶逻辑；对于所有词汇表 τ、τ 结构 $\mathcal{A}$ 以及 k $\in \mathbb{N}$，该算子允许在顶点 k元组上定义无向图。在句法上，如果 ψ 是一个 STC[τ]公式，$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是变量的 k元组，且 $\bar{v}$、$\bar{w} \in V(\mathcal{A})^k$，那么 $\varphi := [\mathrm{stc}\ \bar{x}, \bar{y} \psi]$（$\bar{v}$、$\bar{w}$）也同样是一个 STC 公式。关于语义，我们只需知道，在 φ 中，ψ 在 $V(\mathcal{A})^k$上定义了一个无向图。随后，stc 算子测试（$\bar{v}$、$\bar{w}$）是否是上述图的对称传递闭包中的一条边。从这个意义上说，它与传递闭包逻辑 [31] 中的 tc 算子非常接近，但限制性更强。将 STC 扩展到双排序结构后，得到 STC+C，其中 stc 算子扩展到混合域/数值元组上。研究发现，STC+C 被包含于 $\mathrm{LREC}_{=}$ 中。

引理 V.4（[24]） 对称传递闭包逻辑+C $\leq \mathrm{LREC}_{=}$。

因此，应用定理 I.1，我们立即得到以下结论。

引理 *V.5* 对于每个词汇表 τ 以及每个 $STC+C[\tau]$-公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{\imath})$，存在一个常数 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个由 $C\mathcal{O}(\log n)\ k$-公式 $\left(\psi_{\bar{i}}(\bar{x})\right)_{\bar{i} \in [n]^{|\bar{\imath}|}}$ 组成的族，使得对于所有大小为 $|\mathcal{A}| \leq n$ 的 τ-结构 $\mathcal{A}$、所有 $\bar{v} \in \left(V(\mathcal{A})\right)^{|\bar{x}|}$ 以及所有 $\bar{i} \in (N(\mathcal{A}))^{|\bar{\imath}|}$，都有

$$\mathcal{A}^{+} \models \varphi(\bar{v}, \bar{i}) \iff \mathcal{A} \models \psi_{\bar{i}}(\bar{v}).$$

值得一提的是，我们也可以不经过 $\mathrm{LREC}_{=}$ 得到上述结果。此方法与定理 I.1 的方法类似，即对公式的结构进行归纳，不过要简单一些，因为 stc 算子可以建模为对定义在顶点/数字k-元组上的图进行简单的连通性测试。这可以通过一个深度相对于图的规模为对数级的公式来表达（见 [20,例子 3]）。

引理 V.6 ([39]) 区间图可由对称传递闭包逻辑定义。

推论 V.7 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个$\mathsf{C}\mathcal{O}(\log n)\ k$ 阶句子 $\varphi_{(n)\ \text{区间}}$，使得对于每个阶为 n 的图 G，$G \models \varphi_{(n)\ \text{区间}}$ 当且仅当 G 是区间图。

结合引理 V.3 和推论 V.7，我们现在可以证明本节的主要定理。

定理 I.2 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个阶为 n 的区间图 G，都存在一个公式 $\Phi^{G} \in \mathsf{C}\mathcal{O}(\log n)\ k$，能够将 G 描述至同构意义下唯一确定。

证明：设 H 是一个满足 $G \ncong H$ 的图。若 $|V(H)| \neq |V(G)|$，则 G 和 H 可由公式 $\exists^{=n} x\,(x = x)$ 分离，其中 n 是图 G 的阶。因此，设 $|V(H)| = |V(G)|$。若 V(H) 不是区间图，则根据推论 V.7，G 和 H 可由某个公式 $\varphi(n)\ \text{interval} \in \mathsf{C}\mathcal{O}(\log n)\ k'\ [\{E\}]$ 分离，其中 $k' \in \mathbb{N}$ 是某个固定值。因此，设 H 是一个阶为 n 的区间图。于是，根据引理 V.3，$H \not\models \varphi^{G}$ with $\varphi^{G} \in \mathsf{C}\mathcal{O}(\log n)\ k''\ [\{E\}]$，其中 $k'' \in \mathbb{N}$ 是某个固定值。因此，令 $k = \max(k', k'')$，定义公式 $\Phi^{G} \in \mathsf{C}\mathcal{O}(\log n)\ k[E]$ 为

$$\Phi^{G} := \exists^{=n} x\,(x = x) \wedge \varphi^{(n)}_{\text{interval}} \wedge \varphi^{G}$$

刻画图 G 至同构意义。 ■

推论 V.8 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\mathsf{WL}\mathcal{O}(\log n)\ k$ 能识别每个具有 n 个顶点的区间图 *h.*

我们对弦无爪图也得到了类似的结果。如果图的每个长度至少为 4 的环都含有一条弦，则称该图为**弦图**。这可以用一个对称传递闭包逻辑句子表达：对于图 G的每条长度为 3 的路径，检验它是否无法闭合成长度至少为 4 的诱导环。如果一个图不含与完全二部图$K_{1,3}$同构的诱导子图，则称该图为**无爪图**。显然，这可以通过一个 C^{4}_{4}-公式检验。因此，可以用一个对称传递闭包逻辑句子检验一个图是否为弦无爪图。此外，弦无爪图存在 $\mathrm{LREC}_{=}$ 可定义的规范化。

引理 V.9 ([27]) 存在一种 $\mathrm{LREC}_{=}$-可定义的弦无爪图规范化$\psi(\iota, \kappa)$，使得对于所有区间图 G，

$$\mu\colon G^{+} \cong ([n], \psi[G^{+}; \iota, \kappa]).$$

类似的论证可得定理 I.3。

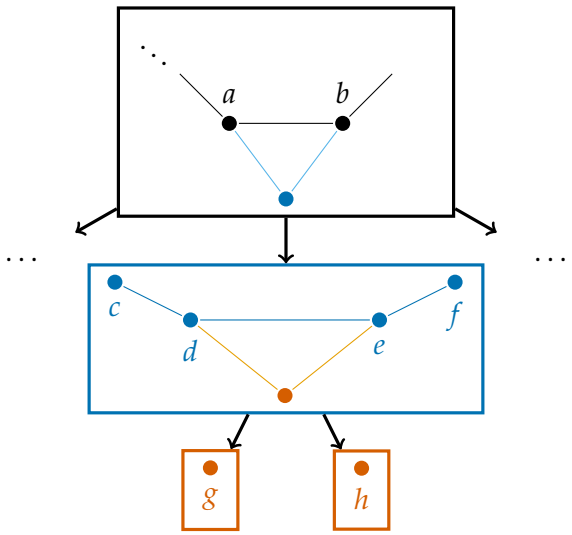


图 7：对应于图5中 G 的模分解简化示意图。令 M

$\neq$ $_{i\,i\in[4]}$ $= \cup_{\in[4]}$ $_{i} \setminus \cup \mathcal{M}$ \C 为 G 的一个可能端点，顶点

$\{$ $_{i\,i\in[4]}$ $\}$ $= \{$ $\}$ $\{\ \}$ $\{\ \}$

集 S : i C ((G) C ,) c, d, e, f, g, h 是 G 的一个模，而顶点集 g 和 h 是 G[S], 的模，其中 {c, d} 和 {e, f } 是 G[S]的可能端点。

定理 I.3 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得对于每个阶为 n 的弦无爪图 G，都存在一个公式 $\Phi^G \in \mathrm{C}\mathcal{O}_{(\log n)}\, k$，能够将 G 描述到同构意义下。

A. 规避LREC$_=$

最后，我们概述如何直接证明定理 I.2，而无需考虑 LREC$_=$并应用 Laubner [38] 和 Grußien [27]的相关结果。我们首先介绍区间图的一些性质。图 G 的一个极大团 是顶点子集$C \subseteq V(G)$，满足C 构成一个团，并且对于所有$v \in V(G) \setminus C$，$C \cup \{v\}$ 不构成团。我们用 $\mathcal{M}(G)$表示G的所有极大团的集合。

注意到，区间图恰好是这样一类图：其极大团可以排列成一个（不一定唯一的）线性序，使得每个顶点都包含于该阶中连续的极大团内 [42]。等价地，它们是具有路径分解的图（见 [45]），且其中每个袋都对应一个极大团，如图 6 所示。

区间图 G 的一个可能端点是极大团 M $\in \mathcal{M}$(G)，使得 G 具有一个路径分解 (P, β)，并且对于某个 p $\in$ V(P)（满足 deg$_P$(p) $= 1$），有 β(p) $=$ M。给定区间图 G 的这样一个可能端点 M，我们可以得到一个 STC 可定义的严格弱序 $\prec_M$，该序包含了极大团 [38] 的阶的全部信息。形式化地，$\prec_M$ 对所有 C $\in \mathcal{M}$(G)\ {M} 初始化为 M $\prec_M$ C，随后递归地扩展为

$$C \prec_M D \text{ if } \exists X \in \mathcal{M}(G) : \begin{cases} X \prec_M D, (X \cap C) \setminus D \neq \varnothing, \\ C \prec_M X, (X \cap D) \setminus C \neq \varnothing. \end{cases}$$

值得注意的是，对于某些区间图 G 和可能的端点 M，阶 $\prec_M$ 在 $\mathcal{M}(G)$上成为一个线性序；可以证明，将其扩展到 $V(G)$ 上会诱导出一个严格弱序

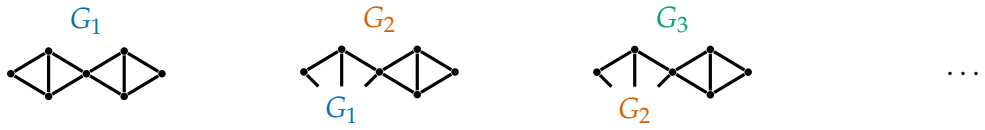


图8：一个区间图族的前几个成员 (图 $G_i)_{i\geq 1}$，对于所有$i \in \mathbb{N}_{>0}$，树图 G_i 的模分解高度为i。这是因为，对于图 G_i,$i\geq 2$，其顶点中有很大一部分 $\left(> |V(\text{图 } G)_2|\right)$ 包含在它唯一的模中。

$<_G$ 其中，两个顶点 v、$w \in V(G)$ 是 $<_G$-不可比较的，当且仅当 $N_G[v] = N_G[w]$。这为这些区间图 [38]导出了一个由 STC+C 定义的规范化。特别地，根据引理 V.5，我们获得了一个固定的 k^* 和一个 $\mathrm{C}\mathcal{O}(\log n)\ k^*$ -公式，用于描述每个此类区间图，且精确到同构。

现在，我们考虑那些线性序不是 $\prec_M$ 的区间图 G。集合$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$(G)中的极大团相对于 $\prec_M$ 不可比较，当且仅当对于任意两个不同的极大团 C_1,$\mathrm{C}_2 \in \mathcal{C}$，$\mathrm{C}_1 \prec_M \mathrm{C}_2$ 且 $\mathrm{C}_2 \prec_M \mathrm{C}_1$均不成立。集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$(G)是极大的，当且仅当对于所有 $\mathrm{C}_1 \in \mathcal{C}$和 $\mathrm{C} \in \mathcal{M}(\mathrm{G})\setminus \mathcal{C}$，$\mathrm{C}_1 \prec_M \mathrm{C}$ 或 $\mathrm{C} \prec_M \mathrm{C}_1$成立。对于每个这样的极大极大团不可比较集 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$(G)以及 $\mathcal{D} := \mathcal{M}(\mathrm{G}) \setminus \mathcal{C}$，顶点集 $\mathrm{S}_{\mathcal{C}} := \bigcup \mathcal{C} \setminus \bigcup \mathcal{D}$ 是一个模，即相对于图中其余部分具有一致连通性行为的顶点子集；也就是说，对于每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V(G)} \setminus \mathrm{S}_{\mathcal{C}}$，要么对所有 $\mathrm{w} \in \mathrm{S}_{\mathcal{C}}$，$\mathrm{vw} \in \mathrm{E(G)}$，要么 $\mathrm{vw} \notin \mathrm{E(G)}$。下文中，我们只考虑通过极大不可比较集的极大团得到的那些模。注意，对于每个模 $\mathrm{S}_{\mathcal{C}}$，$\mathrm{G}[\mathrm{S}_{\mathcal{C}}]$ 也是一个区间图，见图 7。

在那里，我们看到，归纳地将模替换为单个顶点（这些顶点与图的其余部分保持与它们所替换的模相同的连通性）会产生一个模分解（树）T。令G_S 表示将所有模收缩为顶点后的 G 副本。方便的是，对于某个可能的端$M \in \mathcal{M}(G_S)$，每个这样的G_S 都可以在其极大团上取一个线性序 $\prec_M$，因此，根据引理 V.5，可以通过 $\mathrm{C}\mathcal{O}(\log n)\ k^*$ 将其描述到同构为止。

因此，对于每个$t \in V(T)$，与其对应的子图可以通过 $\mathrm{C}\mathcal{O}(\log n)\ k^*$ 来描述。因此，以归纳的、自底向上方式刻画G直到同构的公式并不困难。主要问题在于T的高度。这是因为一个区间图G 至多可能有一个模$S_{\mathcal{C}}$ 满足 $|S_{\mathcal{C}}| > |G|/2$。因此，我们可以构造出一族区间图，使其模分解树关于图的规模线性（示例见图8）。

因此，我们的思路是仿照引理 III.6，对模分解树构造一个树状分解。由于该分解相对于输入图的规模具有对数高度，因此只需基于此分解归纳地描述我们的图，即可得到具有对数数量词深度的公式。

VI. 结论

我们已经证明，对于每个可由 $\mathrm{LREC}_=$ 定义的性质，都存在一个常数 k，使得对于每个大小界 n，该性质都可以通过一族 $\mathrm{C}\mathcal{O}(\log n)\ k$ -公式在大小至多为 n 的结构上表达出来。这意味着，k 维 Weisfeiler–Leman 算法能够在对数

数量的迭代中区分所有可由该性质分离的图。此外，基于 Grohe 等人 [24] 和 Grußien [27],的结果，这表明该算法能够在对数级数量的迭代中识别每个区间图和每个弦无爪图。

研究具有对数级量词深度的计数逻辑的能力，或者等价地，研究 Weisfeiler–Leman 算法经过对数次迭代后的能力，并将其应用于其他图类，仍是一项值得探索的课题。一个自然的目标图类是由有限个排除小图定义的图类。

此外，由于我们的结果是非一致性的（我们针对每个大小上界n都给出了公式），后续可以探讨如何得到类似的一致性结论：每个 $\mathrm{LREC}_{=}$-公式是否都等价于一个只使用对数次迭代的带计数的最小不动点逻辑公式?

参考文献

[1] Albert Atserias 和 Elitza N. Maneva。Sherali–Adams 松弛与计数逻辑中的不可区分性。*SIAM J.Comput.*，42(1):112–137，2013。doi: 10.1137/120867834。[2] Albert Atserias 和 Joanna Ochremiak。可定义椭球法、平方和证明与同构问题。载于 第*33*届年度 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会论文集，*LICS 2018*，第66–75页。ACM，2018。doi: 10.1145/3209108.3209186。[3] Christoph Berkholz 和 Jakob Nordstr¨om。量词深度与 Weisfeiler–Leman 细化步骤的近最优下界。载于 第*31*届年度 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会论文集，*LICS 2016*，第267–276页。ACM，2016。doi: 10.1145/2933575.2934560。[4] Andreas Blass、Yuri Gurevich 和 Saharon Shelah。无选择多项式时间。*Ann.Pure Appl. Log.*，100(1-3):141–187，1999。doi: 10.1016/S0168-0072(99)00005-6。[5] Jin-Yi Cai、Martin F¨urer 和 Neil Immerman。图识别所需变量数的最优下界。*Combinatorica*，12(4):389–410，1992。[6] Andreas Darmann、Ulrich Pferschy 和 Joachim Schauer。带时间区间的资源分配。*Theor. Comput. Sci.*，411(49):4217–4234，2010。doi: 10.1016/j.tcs.2010.08. 028。[7] Anuj Dawar 和 Felipe Ferreira Santos。区分 LREC 与 LFP。载于 *LICS '22*：第*37*届年度 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会，第55:1–55:13页。ACM，2022。[8] Holger Dell、Martin Grohe 和 Gaurav Rattan。Lov´asz 遇上 Weisfeiler 和 Leman。载于 第*45*届自动机、语言与编程国际研讨会，*ICALP 2018*，LIPIcs 第107卷，*LIPIcs*，第40:1–40:14页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2018。doi: 10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.40。[9] Heinz-Dieter Ebbinghaus 和 J¨org Flum。有限模型论。Springer Science & Business Media，2005。[10] Kousha Etessami 和 Neil Immerman。树规范化与传递闭包。*Inf.Comput.*，157(1-2):2–24，2000。doi: 10.1006/inco.1999.2835。[11] Sergei Evdokimov、Ilia Ponomarenko 和 Gottfried Tinhofer。森林代数与代数森林（关于一类新的弱紧图）。*Discret. Math.*，225(1-3): 149–172，2000。doi: 10.1016/S0012-365X(00)00152-7。[12] Ronald Fagin。广义一阶谱与多项式时间可识别集合。载于 计算复杂性（*1973*年纽约 *SIAM-AMS* 研讨会论文集），SIAM-AMS Proc.，第VII卷，第43–73页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1974年。

[13] Martin F¨urer。Weisfeiler–Lehman 细化至少需要线性次数的迭代。载于自动机、语言与编程，第二十八届国际讨论会，ICALP 2001，计算机科学讲义第2076卷，第322–333页。Springer，2001。doi: 10.1007/3-540-48224-5\ 27。[14] Erich Gr¨adel 和 Martin Grohe。多项式时间是无选择的吗？载于《逻辑与计算领域II——献给 Yuri Gurevich 75岁生日的论文集》，计算机科学讲义第9300卷，第193–209页。Springer，2015。doi: 10.1007/978-3-319-23534-9\ 11。[15] Erich Gr¨adel 和 Svenja Schalth¨ofer。无选择对数空间。载于第44届数学计算机科学基础国际研讨会，MFCS 2019，LIPIcs 第138卷，第31:1–31:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2019。[16] Martin Grohe。通过可定义性测试可嵌入图的同构。载于《第32届年度 ACM计算理论研讨会论文集》，2000年，第63–72页。ACM，2000。doi: 10.1145/335305.335313。[17] Martin Grohe。《描述复杂性、规范化与可定义图结构理论》，逻辑讲义第47卷。剑桥大学出版社，2017。doi: 10.1017/ 9781139028868。[18]Martin Grohe。图神经网络逻辑。载于第36届年度 ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会，LICS 2021，意大利罗马，2021年6月29日至7月2日，第1–17页。IEEE，2021。doi: 10.1109/LICS52264.2021.9470677。[19] Martin Grohe 和 Sandra Kiefer。有界亏格图的 Weisfeiler–Leman 维数的线性上界。载于第 46 届自动机、语言与编程国际讨论会，ICALP 2019，LIPIcs 第132卷，第117:1–117:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2019。doi: 10.4230/LIPIcs.ICALP. 2019.117。[20] Martin Grohe 和 Sandra Kiefer。对数 Weisfeiler–Leman 可识别所有平面图。载于第48届自动机、语言与编程国际讨论会（ICALP 2021）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021。[21] Martin Grohe 和 Daniel Neuen。有界秩宽度图的规范化与可定义性。载于第34届年度 ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会，LICS 2019，第1–13页。IEEE，2019。doi: 10.1109/LICS.2019.8785682。[22] Martin Grohe 和 Martin Otto。卵石游戏与线性方程。J. Symb. Log.，80 (3):797–844，2015。doi: 10.1017/jsl.2015.28。[23] Martin Grohe 和 Oleg Verbitsky。通过进行游戏并行测试图同构。载于自动机、语言与编程，第三十三届国际讨论会，ICALP 2006，计算机科学讲义第4051卷，第3–14页。Springer，2006。doi: 10.1007/11786986\ 2。[24] Martin Grohe、Berit Grußien、Andr´e Hernich 和 Bastian Laubner。L递归与一种新的对数空间逻辑。Logical Methods in Computer Science，9，2013。[25] Martin Grohe、Kristian Kersting、Martin Mladenov 和 Pascal Schweitzer。颜色细化及其应用。载于《提升式概率推理导论》。麻省理工学院出版社，2021年08月。[26]Martin Grohe、Moritz Lichter 和 Daniel Neuen。Weisfeiler-Leman 算法的迭代次数。arXiv，2301.13317，2023。会议版本发表于本次会议。[27] Berit Grußien。通过弦图无爪图上的对数空间与多项式时间

图。《逻辑方法与计算机科学》，15(3)，2019。[28] Udaiprakash I. Gupta、Der-Tsai Lee 和 JY-T Leung。区间图和圆弧图的高效算法。《Networks》，12(4)：459–467，1982。[29] Neil Immerman。可在多项式时间内计算的关系查询。《信息与控制》，68（1-3）：86–104，1986。doi: 10.1016/S0019-9958(86)80029-8。[30] Neil Immerman。刻画复杂性类的语言。《SIAM计算杂志》，16(4)：760–778，1987。doi: 10.1137/0216051。[31] Neil Immerman。《描述复杂性》。计算机科学研究生教材。Springer，1999。doi: 10.1007/978-1-4612-0539-5。[32] J. Mark Keil。在区间图中寻找哈密顿回路。《信息处理快报》，20(4)：201–206，1985。[33] Sandra Kiefer。Weisfeiler–Leman 算法的能力与局限。博士论文，亚琛工业大学，亚琛，2020。[34] Sandra Kiefer 和 Daniel Neuen。Weisfeiler–Leman 算法分解图的能力。《SIAM离散数学杂志》，36(1)：252–298，2022。doi: 10.1137/20m1314987。[35] Sandra Kiefer 和 Pascal Schweitzer。一阶逻辑中图区分的量词深度上界。《逻辑方法与计算机科学》，15(2)，2019。doi: 10.23638/LMCS-15(2:19)2019。[36]Sandra Kiefer、Ilia Ponomarenko 和 Pascal Schweitzer。平面图的 Weisfeiler–Leman维数至多为 3。《ACM杂志》，66(6)：44:1–44:31，2019。doi: 10.1145/3333003。[37] Johannes K¨obler、Sebastian Kuhnert、Bastian Laubner 和 Oleg Verbitsky。区间图：对数空间中的规范表示。《SIAM计算杂志》，40(5)：1292–1315，2011。doi: 10.1137/10080395X。[38] Bastian Laubner。在区间图上刻画多项式时间。载于《2010年第25届IEEE计算机科学逻辑年度研讨会》，第199–208页。IEEE，2010。[39]Bastian Laubner。图的结构与用于刻画多项式时间的新逻辑。博士论文，柏林洪堡大学，2011。¨Leonid Libkin。《有限模型论要素》，第41卷。Springer，2004。[40] Moritz Lichter、Ilia Ponomarenko 和 Pascal Schweitzer。游走细化、游走逻辑与 Weisfeiler–Leman 算法的迭代次数。载于《第34届ACM/IEEE计算机科学逻辑年度研讨会》，LICS 2019，第1–13页。IEEE，2019。doi: 10.1109/LICS.2019.8785694。[41]Rolf H. M[42] ohring。可比图和区间图的算法方面。载于《图与序》，第41–101页。Springer，1985。¨Christopher Morris、Martin Ritzert、Matthias Fey、William L. Hamilton、Jan Eric Lenssen、Gaurav Rattan 和 Martin Grohe。Weisfeiler 和 Leman 走向神经网络：高阶图神经网络。载于《第三十三届AAAI人工智能会议》，AAAI 2019，第4602–4609页。AAAI Press，2019。doi: 10.1609/aaai.v33i01.33014602。[43]Martin Otto。有界变量逻辑与计数——有限模型研究，《逻辑讲义》第9卷。Springer Verlag，1997。[44] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图小图 I：排除森林。《组合理论杂志》B辑，35(1)：39–61，1983。[45] Moshe Y. Vardi。关系查询语言的复杂性（扩展摘要）。载于《第14届ACM计算理论研讨会年会论文集》，1982，第

137–146。ACM，1982 年。doi：10.1145/800070.802186。[47] Peisen Zhang、Eric A. Schon、Stuart G Fischer、Eftihia Cayanis、Janie Weiss、Susan Kistler 和 Philip E. Bourne。基于图论的 DNA 物理图谱构建重叠群组装算法。生物信息学，10(3):309–317，1994 年。