arXiv:2304.12965v2 [quant-ph] 24 Jan 2024

幺正电路博弈中的纠缠转变

Raúl Morral-Yepes,[1,2] Adam Smith,[3,4] S. L. Sondhi,[5] 和 Frank Pollmann[1,2]

[1] *Technical University of Munich, TUM School of Natural Sciences, Physics Department, Lichtenbergstr. 4, 85748 Garching, Germany* [2] *Munich Center for Quantum Science and Technology (MCQST), Schellingstr. 4, 80799 München, Germany* [3] *School of Physics and Astronomy, University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, UK* [4] *Centre for the Mathematics and Theoretical Physics of Quantum Non-Equilibrium Systems, University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, UK* [5] *Rudolf Peierls Centre for Theoretical Physics, University of Oxford, Oxford, UK*

在幺正电路中反复进行投影测量，随着测量率的调节，可能导致纠缠相变。在这项工作中，我们考虑一种不同的情形：投影测量被动态选择的、旨在最小化纠缠的幺正门所取代。这可以视为一种一维幺正电路博弈，两名玩家以不同的速率，在随机分配的键上放置幺正门："纠缠器"施加随机局域幺正门，以产生广延的（体积律）纠缠；"解纠缠器"则依据对量子态的有限了解，选择一个幺正门来降低所分配键上的纠缠熵，力求将纠缠限制在有限程度（面积律）。为阐明由此产生的纠缠动力学，我们考察三种不同情形：(i) 经典离散高度模型，(ii) Clifford 电路，以及 (iii) 一般的 $U(4)$ 幺正电路。我们发现，经典电路模型和 Clifford 电路模型都表现出相变，其发生取决于解纠缠器放置门的速率；这些相变具有相似的性质，可通过与随机Fredkin链的联系加以理解。相比之下，使用 Haar 随机幺正门时，纠缠器总能获胜；只要纠缠速率非零，我们就会观察到广延的体积律纠缠。

I. 导论

非平衡量子多体系统代表着一个充满挑战的前沿领域，并已被证明会呈现极其丰富的现象。例如，随着无序强度的变化，遍历相与多体局域化相之间会发生动力学相变 [1–6], 量子多体疤痕 [7–10], 以及可在周期驱动系统中出现的离散时间晶体 [11–17]。上述所有例子都发生在经历幺正演化的封闭量子系统中。

将量子多体系统的酉演化与测量相结合，带来了一个新的视角。在开创性工作中 [18–22], ，研究人员在由随机幺正门组成、并穿插局域投影测量的电路动力学中，发现了纠缠相变。这一相变将遵循面积律的解纠缠相与遵循体积律的纠缠相分隔开来，近年来已得到广泛研究 [23–42]。随后，人们发现，在面积律相内部还可能发生不同对称性破缺相与拓扑相之间的其他相变 [43–49]。

在本文中，我们考虑一种不同的设置，其中投影测量被替换为动态选择的幺正门，以解纠缠量子态。尽管寻找解纠缠幺正算符需要掌握量子态的某些非局域性质，但幺正门本身的作用是局域的。我们可以将这种方法理解为一个包含 L 个格点的（1+1）D 电路游戏，其中两名玩家以不同速率，在随机分配的键上放置幺正门：在每个向上

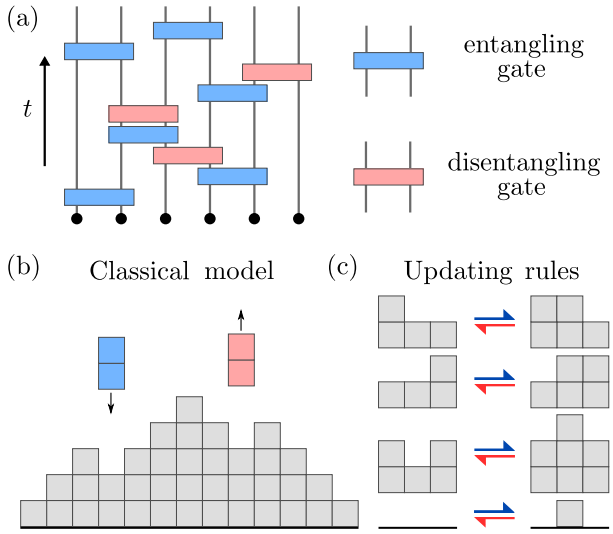


图 1。（a）幺正电路游戏示意图：蓝色方框表示随机幺正门，红色门表示为解纠缠该键而选择的幺正门。（b）电路游戏的经典版本，作为一个表面生长模型，其中纠缠操作和解纠缠操作分别由在晶格中添加或移除方块来替代。（c）经典模型的更新规则：纠缠器（蓝色箭头）添加方块，解纠缠器（红色箭头）移除方块，同时满足相邻键之间的高度差至多为一，且高度不能为负。

在每个时间步中，随机选择链上的一条键。以 $1-p$ 的概率，随机"纠缠器"作用

酉算符；否则，以概率 p，“解纠缠器”通过最小化给定键上的纠缠熵来发挥作用。这里，我们用纠缠熵$S = -\mathrm{Tr}\rho_A \ln \rho_A$ 进行测量，其中约化密度矩阵为 ρ_A，其中 A 包含该键左侧的所有量子比特。一个时间步定义为一组 L 更新步骤。图 1a 展示了该模型的一种可能实现方式。这个游戏有两种简单的极限情况：当 $p = 0$时，只有纠缠器可以行动，从而产生随机幺正电路，进而得到体积律态 [50]。当 $p = 1$时，纠缠在任何时刻都保持为零，因此得到面积律态。这里，我们关注模型在 $0 < p < 1$的中间取值下的行为。在定义了幺正电路游戏的规则后，自然会出现几个问题：在有限 p下，体积律和面积律纠缠之间是否存在相变？如果存在，它具有哪些普适性质？

我们将在幺正电路游戏的几种不同变体中回答这些问题：在第 II 节中，我们首先介绍一个经典表面生长模型。在该模型中，纠缠门与解纠缠门之间的竞争，被局部增加和降低表面高度之间的竞争所取代，如图 1b 所示。其次，在第 III 节中，我们研究一种 Clifford 电路。在这种情况下，寻找最优解纠缠器就相当于从双量子比特克利福德幺正门这一离散集合中进行选择。最后，在第 IV 节中，我们考虑一般的连续参数化幺正门。纠缠器从 Haar分布中随机选择门，而解纠缠器则需要对给定键上的幺正门进行优化，以最小化二分纠缠熵。

II. 经典模型

在本节中，我们研究一个位于（1+1）维空间中的表面生长模型，该模型可以被解释为幺正电路游戏的经典版本。我们首先介绍定义该模型的更新规则。随后，通过调节解纠缠速率，对所发生的相变进行数值研究。最后，我们展示该模型与随机Fredkin自旋链 [51]密切相关。

近年来，量子随机电路中的纠缠增长研究受到广泛关注。在一篇开创性论文中，Nahum等人 [50] 表明，在局部希尔伯特空间维数趋于无穷大的极限下，随机幺正演化中的纠缠增长可以映射为一种经典表面生长模型。该模型的动力学与其他系统中的纠缠增长具有相同的普适行为，例如，受随机幺正演化作用的量子比特链。基于这一简洁性，我们以该模型为出发点，提出一条直接的解纠缠规则，本质上就是撤销纠缠操作（随机幺正算符）的效果。这个玩具模型将作为一个有用的基准，用于比较并对照其他更复杂的量子模型中的幺正电路游戏。

在我们的经典表面生长模型中，随机均匀地选取一条键（区块），随后纠缠器或解纠缠器分别以 $1-p$ 和 p 的概率行动。也就是说， p 控制解纠缠速率。选中纠缠器时，高度表面的演化遵循如下动力学规则

$$\begin{aligned}&\text{Entangler (probability } 1-p\text{):}\\&\quad S_x(t+\Delta t) = \min\{S_{x-1}(t), S_{x+1}(t)\} + 1,\end{aligned} \tag{1}$$

其中， x 是键的索引， t 表示时间，而 $\Delta t = 1/L$。选中解纠缠器时，演化遵循如下动力学规则

$$\begin{aligned}&\text{Disentangler (probability } p\text{):}\\&\quad S_x(t+\Delta t) = \max\{S_{x-1}(t), S_{x+1}(t), 1\} - 1,\end{aligned} \tag{2}$$

其中，在 max 函数的参数中加入 1，以在所有时刻保持 $S_x(t) \geq 0$ 约束，即高度不能为负。我们还施加约束 $S_0(t) = S_{L+1}(t) = 0$，这是由模型的开放边界条件导致的。

上述规则共同定义了我们的经典纠缠-解纠缠游戏，如图 1b 所示：每个更新步骤中随机选取一条键，并以 p 的概率按照方程（2）对该键进行解纠缠，或以 $1-p$ 的概率按照方程（ 1 ）对该键进行纠缠。我们可以将其理解为一种（1+1）维表面生长-耗减模型，其中每条键的高度对应于其二分划分的纠缠熵。唯一的约束是高度不能为负，且两条相邻键之间的高度差至多为 1；这是某类表面生长模型——称为受限固体-固体（RSOS）模型——的定义条件 [52–54]。文献中已有对某些含粒子蒸发的 RSOS 模型动力学的研究；这些模型与我们的模型类似，但采用周期性边界条件 [55, 56]。

我们的经典模型源于这样一种直接类比：跨越一个键的纠缠熵对应于一个表面的高度。不过，值得注意的是，还存在其他方法可以为我们的幺正电路游戏构建经典对应物。例如，在参考文献 [35], 中，人们将随机酉演化导致的纠缠扩展与经典元胞自动机中的信息传播进行了类比。在这一特定模型中，测量是纯粹的局部操作，会阻止信息传播，其作用对应于我们的幺正电路游戏中的解纠缠器。这一替代框架展现了混沌相与冻结相之间的相变；其临界点具有关联的幂律扩展，属于定向渗流普适类。正如我们将在下文展示的，我们的模型也呈现出类似的相变，在临界性处具有幂律关联，但属于不同的普适类。

A. 数值结果

这个模型的极限情形很容易理解：对于 $p = 0$ 解纠缠器不会起作用，因此在长时间下，系统会达到金字塔形稳态。从平坦初始态开始的高度增长由卡达尔–帕里西–张（KPZ）普适标度 [57]，描述，正如参考文献 [50]中所推导的那样。极限 $p = 1$对应于平坦稳态，每个位置的高度均为 0。下文将研究这两个极限情形之间的转变。

经典模型可以高效地进行数值模拟，使我们能够研究较大的系统尺寸，最大可达$L = 8192$。对于所考虑的每个“解纠缠器”概率 p 和系统尺寸 L，我们运行 10^3次不同的电路实现（临界点 $p_c = 1/2$处除外，此时运行 10^4 次实现）。在每次实现中，我们将系统演化至达到动力学稳态，然后再额外演化 10^5个时间步，并对感兴趣的量取平均。请注意，除非另有说明，本文中的所有量均指系统稳态下的平均值。

图 2a 展示了半链高度 $S_{L/2}(p,\ L)$，随 L 变化的情况，其中包含了跨越相变的多个解纠缠概率 p。我们发现了三种不同的行为：对于 $p < p_c$，我们观察到 体积律 相，此时高度随系统尺寸线性增长。请注意，在热力学极限下，该相中的所有曲线都趋于直线 $S_{L/2} = L/2$。对于 $p > p_c$，我们观察到 面积律 相，此时平均高度趋于一个与系统尺寸无关的常数。最后，在临界点 $p_c = 1/2$ 处，高度与系统尺寸的平方根成正比。这些数值结果有力地表明，体积律相与面积律相之间存在相变。

为了进一步刻画不同的相，我们使用以下量研究系统稳态平均高度剖面周围的平均涨落

$$W(p,L) = \overline{\left(\frac{1}{L}\sum_{x=1}^{L}\left(S_x(p,L) - \overline{S_x(p,L)}\right)^2\right)^{1/2}}, \quad (3)$$

其中，上划线表示该量在稳态下的平均值。该量 S_x（$p,\ L$）是在键 x、解纠缠概率为 p 且系统尺寸为L时，稳态下高度剖面的一个随机实现。实际上，我们取 t 远大于达到稳态的弛豫时间，并在时间上取平均。经典模型中的空间涨落 W（$p,\ L$）如图 2b 所示，是 p 和 L 的函数。在体积律相中，随着系统尺寸增大，相对涨落趋于零，因为只有在系统中心附近的有限区域内才会出现高度变化。用随机动力学的语言来说，这对应于非活跃相。在面积律相中，当系统尺寸足够大时，涨落收敛于一个常数值，表明存在活跃相，其中涨落

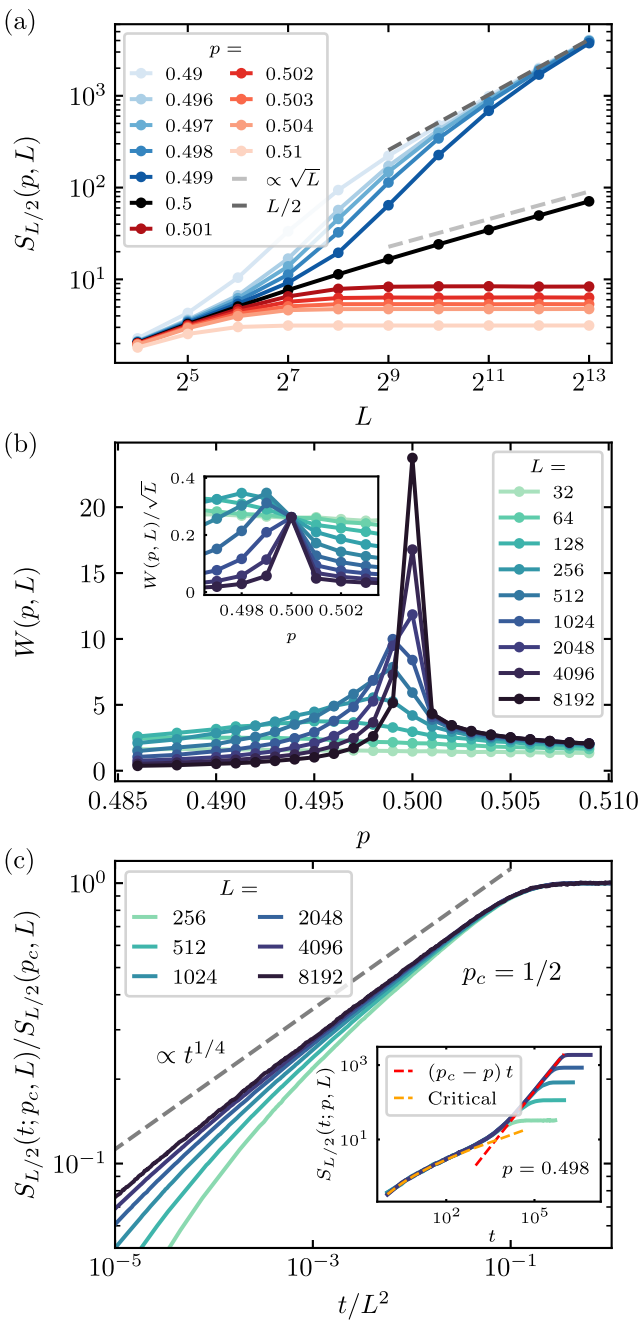


图2. 经典模型的数值结果。(a) 半链高度随系统尺寸 L 的变化，其中解纠缠概率 p取不同值。(b) 空间涨落$W(p,\ L)$ 随解纠缠概率 p的变化，跨越相变区域，并对应不同的系统尺寸 L。插图显示 $W(p,\ L)/\sqrt{L}$，该量在临界点处取与系统尺寸无关的正值，而在其他情况下趋于零。(c) 对 10^4 次实现取平均后，半链高度除以稳态值的时间演化随 t/L^2 的变化，其中系统处于临界性 $p_c = 1/2$。高度以指数为 $\beta = 1/4$的幂律增长。插图显示了体积律相中 $p = 0.498$ 处 $S_{L/2}$ 的时间演化，对应 L的若干取值。当 $t < t_c$ 时，演化具有临界性（橙线）；而当 $t > t_c$ 时，高度随 t线性增长（红线）。

在系统体内部的每一点都相等。在临界点，我们处于一个强烈涨落的相中，涨落随系统尺寸增加而增大，其形式为 $\sqrt{L}$，如图 2b 的插图所示。

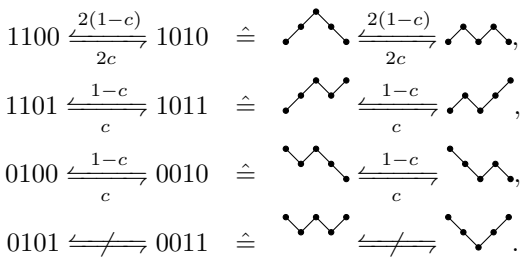
最后，我们关注临界点 $p_c = 1/2$ 处系统的动力学及其热化时间。具体而言，我们研究从所有位置高度均为零的平坦态出发时，稳态是如何达到的。图2c展示了在 10^4 条轨迹上取平均、并以稳态值归一化的半链高度的演化。半链高度的增加遵循时间上的幂律 $S_{L/2}(t; p_c, L) \propto t^{\beta}$，其指数为 $\beta = 1/4$，因此该相中的平衡时间为 $T_{\mathrm{eq}} \propto L^{z}$，动力学指数为 $z = 2$。我们观察到，临界点处的动力学与 Edwards-Wilkinson（EW）标度 [58], 一致，其中指数 $\beta = 1/4$ 预计为该值。此外，我们发现，面积律相和体积律相中的动力学指数分别为 $z = 0$ 和 $z = 1$。在图2c的插图中，我们展示了体积律相中、但接近临界性的某个解纠缠概率下，半链纠缠熵的时间演化。我们区分出两个区域：对于 $t < t_c$，演化与临界点处相同，即趋近于 $t^{1/4}$。相反，对于 $t > t_c$，高度按 $(1/2-p)t$ 增加，随时间呈线性增长。临界时间 t_c 是演化行为发生变化的时刻，由两条直线的交点确定。当趋近临界点时，它按幂律发散，

$$t_c \sim (p_c - p)^{-4/3}, \tag{4}$$

临界指数 $4/3$。在 App 中。A中，我们将更详细地讨论热化之前的系统动力学，并通过数值计算表明，临界点受 EW 普适性支配，而体积律相和面积律相遵循 KPZ 普适标度。

B. 与 Fredkin链结果的比较

经典模型中的相变可以通过与随机经典 Fredkin 链的联系来理解 [51], 。该模型最初被提出，作为量子自旋链中幂律违背面积律的一个例子 [59–62]。随机 Fredkin 模型定义在一条含有 L 个格点的链上，每个格点可以为空，也可以被粒子占据（$z_i = 0$，1）。我们关注含有 $L/2$ 个粒子的情况，即 $\sum_i z_i = L/2$。通过定义键变量 $h_n = \sum_{i=1}^{n} (2z_i - 1)$，可以将该模型解释为高度模型，且满足条件：对每个 n，都有$h_n > 0$ 。该模型的演化遵循连续时间马尔可夫链，参数 c 刻画变换发生的速率。具体而言，其演化由以下更新规则描述：



请注意，这些规则避免产生 0011 形式的状态，因为这种状态可能导致负高度。

尽管该模型看起来与我们介绍的模型相似，但两者之间存在一些关键差异：首先，在我们的经典模型中，变换发生的速率并非由单个参数固定，而是取决于系统状态。例如，解纠缠器能够执行解纠缠操作（而非什么也不做）的概率，与可以降低高度的键的数量成正比。其次，Fredkin 链动力学由连续时间马尔可夫过程描述，这与我们模型的离散动力学不同。第三，Fredkin 模型不允许存在平坦区域，即高度相同的相邻位置。我们的模型允许存在这种区域，但它们只会在零高度处产生。在热力学极限下，这些平坦区域在体积律相中无关紧要。

尽管这些差异导致两个模型具有不同的动力学，但在临界点 $c_c = p_c = \frac{1}{2}$ 处，稳态是一致的。事实上，连续时间与离散时间之间的差异对于稳态的平均性质变得无关紧要。此外，我们可以将临界点理解为从体积律一侧逼近的情形，此时平坦区域无关紧要，而临界点对应于纠缠操作与解纠缠操作之间的平衡。

数值模拟支持了其与 Fredkin链之间的联系。在临界点处，数值观测到的高度随$\sqrt{L}$ 的标度行为与 Fredkin链的解析结果一致（该结果由 Dyck 路径的平均值给出）。此外，我们模型的临界剖面趋近于 Fredkin链的解析结果，该结果为 [63]

$$\overline{S_x(L)} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{x(L-x)}{L}}, \tag{5}$$

（相较于参考文献 [63], 中的方程多了一个因子 2，因为该文考虑的是 1/2 而非 1 的跳跃），如图 3a 所示。通过对按系统尺寸归一化的半链高度进行有限尺寸标度分析，我们得到从体积律相接近临界点时关联长度的临界指数为 $\nu = 1$，如图 3c 所示。这与 Fredkin 链的解析结果一致，

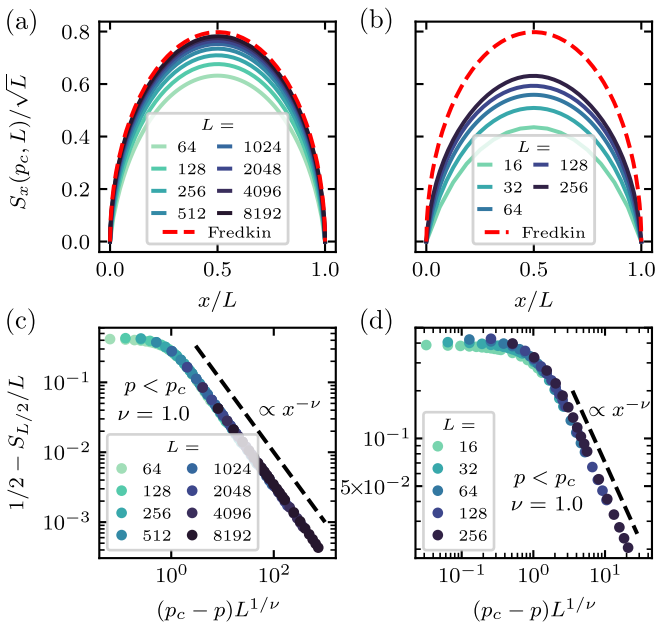


图3。（a）经典模型在临界性处、 p_c =1/2的稳态平均剖面，针对不同系统尺寸，并以 $\sqrt{L}$归一化。红色虚线表示热力学极限下Fredkin链的解析结果。（b）Clifford模型在临界性处、 $p_c = 0.382$的稳态平均剖面。（c）从体积律相趋近临界点时，半链高度除以系统尺寸 L 后的有限尺寸标度。临界指数 $\nu = 1$ 与随机Fredkin自旋链中的解析结果相对应。（d）从体积律相趋近临界点时，Clifford模型中半链纠缠熵除以系统尺寸L 后的有限尺寸标度，近似临界指数为 $\nu \approx 1.0$。

其中关联长度按 [51] 标度变化

$$\xi = \ln\left(\frac{c}{1-c}\right)^{-1} \propto |c - 1/2|^{-1}. \tag{6}$$

III. CLIFFORD模型

作为第一个量子模型，我们考虑限制为克利福德门的幺正电路 [64]。虽然在经典计算机上模拟一般的量子电路是一项困难的任务，但克利福德 电路可以使用稳定子态 [65–68]进行高效模拟。克利福德 电路提供了足够广泛的操作集合，能够展现有趣的行为，同时将复杂度保持在关于系统尺寸的多项式范围内。事实上，克利福德 电路一直是研究测量诱导相变 [18, 19, 21]的主要平台。作用于两个量子比特的克利福德 幺正算符构成一个有限群（包含 11520 个幺正算符），因此，通过尝试所有幺正算符，直到找到能够最大程度解纠缠给定键的幺正算符，就可以找到用于解纠缠一个键的最优幺正算符。

此外，由克利福德 电路生成的稳定子态中的纠缠熵 [69] 总是以 log(2) 为单位的整数，因此，经典模型的高度图像可以转换到这一情形中，使高度变为二分纠缠。然而，与经典模型相比，Clifford情形下纠缠和解纠缠的规则更加复杂。

在Clifford模型中，我们考虑一条由 L个自旋-1/2自由度（量子比特）组成、具有开放边界条件的链。该链按照图1a所示的方式演化。纠缠门从克利福德幺正门的离散集合中随机且均匀地抽取，而解纠缠门则恰当地选取为克利福德幺正门，以最大限度地降低该键上的纠缠。与经典模型相比，该模型有几个关键区别：首先，这里的纠缠器不一定是最优的。由于它仅施加一个随机克利福德幺正算符，因此存在一定概率，它不会增加纠缠，甚至会解开该键上的纠缠。其次，解纠缠器并非总能像规则方程（2）所允许的那样降低纠缠。不过，解纠缠器总能至少将纠缠降低到与相邻键相匹配的程度，即$S_x($ $t+1) \leq \max\{S_{x-1}(t)\ S_{x+1}(t)\}$。

解纠缠步骤可以通过首先考察相邻键上的纠缠熵值来简化：如果 $S_x(t) < \min\{S_{x-1}(t)\ S_{x+1}(t)\}$，那么由于次可加性，该键无法进一步解纠缠。否则，就必须尝试 Clifford 群中的幺正算符，直到其中一个能够使该键达到最大程度的解纠缠。如附录 B 所示，我们发现，只需从 19 个 Clifford 幺正算符组成的子集中选择解纠缠门，就足以对稳定子态的任意给定键实现最大程度的解纠缠。然而，这个最小幺正算符集合并不唯一；不过，下面所描述的相变不受选择影响，详见附录 C，其中讨论了不同的解纠缠方法。

A. 数值结果

由于该模型的数值模拟比经典模型的数值模拟要求更高，我们只能将系统尺寸限制在 $L = 256$以内。数值结果显示，在 $p_c \approx 0.382$处发生了从体积律到面积律相的相变，如图4a 所示。相较于 p_c ，这种降低部分是由于纠缠器施加了随机 Clifford 幺正门，而这些门可能无法最有效地增加纠缠，甚至可能降低纠缠。对于 $p < p_c$，半链纠缠熵渐近收敛于 $L/2$；而对于 $p > p_c$ ，它则收敛于一个常数值。临界点处的行为与经典情况相似，按$\sqrt{L}$进行标度；然而，系统尺寸的限制以及较大的有限尺寸效应（经典情况下也存在）使得无法根据现有的数值数据精确量化标度指数，具体数值

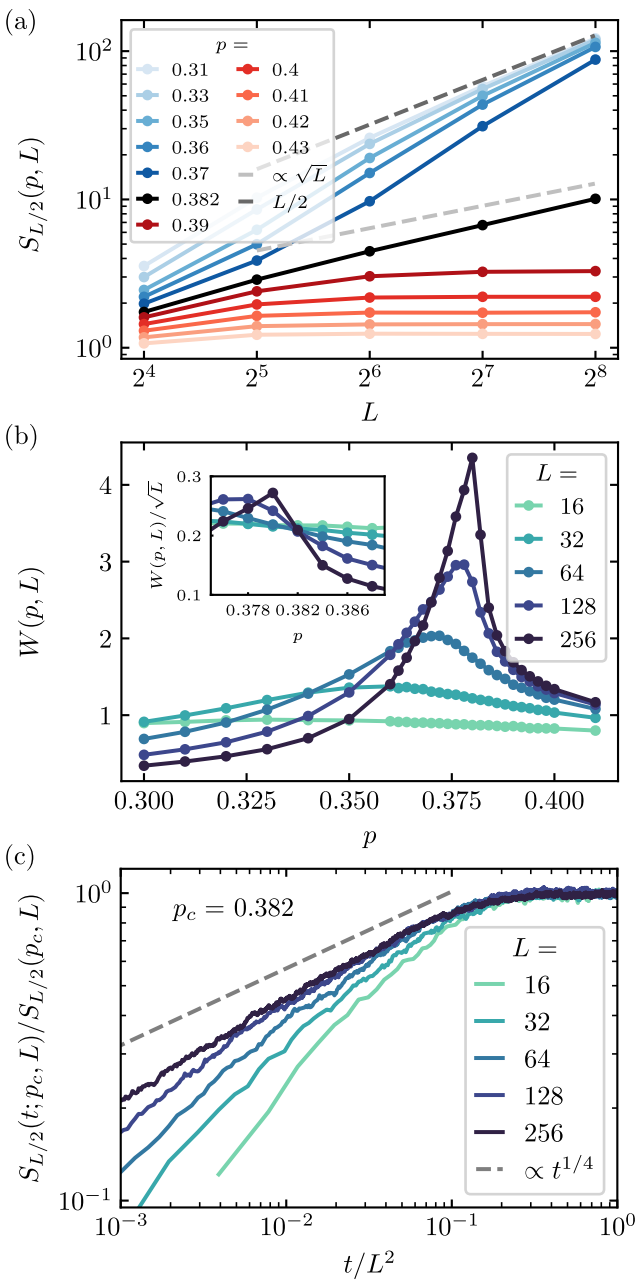


图4. Clifford模型的数值结果。(a) 对于不同的解纠缠概率 p，半链纠缠熵 $S_{L/2}(p,\ L)$ 随系统尺寸 L 的变化。(b) 对于不同的系统尺寸 L，相变过程中空间涨落 $W(p,\ L)$ 随解纠缠概率 p 的变化。插图显示了 $W(p,\ L)/\sqrt{L}$，其在临界点处取一个与系统尺寸无关的正值。(c) 在临界性 $p_c = 0.382$ 下，半链高度随时间的时间演化，并对 10^3 次实现进行电路平均。高度以指数为 $\beta \approx 1/4$ 的幂律增长，动力学指数为 $z = 2$。

据。请注意，这与测量诱导相变形成对比，在后者中，临界点的特征是纠缠熵呈对数标度，且互信息具有共形对称性 [21]。

图4b 展示了空间涨落随解纠缠概率变化的行为。该行为与经典模型中发现的结果非常相似。临界点处空间涨落的发散使我们能够更精确地确定临界点的位置（插图）。最后，我们研究了临界点处纠缠熵的时间演化，如图4c 所示。在足够晚的时间，演化行为似乎收敛为幂律 t，其指数接近 $1/4$，这与经典模型中的情况相同。附录A展示了系统动力学的其他结果，我们发现临界点由 EW 普适性类支配，这与经典模型一致。这种行为不同于测量诱导相变的临界点，在后者中，纠缠熵随时间对数增长，并在与系统尺寸成线性关系的时间内达到饱和 [21]。此外，我们发现，在临界相、 $z = 2$ 体积律相 $z = 1$和 $z = 0$ 面积律相中，动力学指数分别相同。

临界点稳态中的平均轮廓如图 3b 所示。数值模拟所能达到的系统尺寸还不够大，无法令人信服地确定该轮廓是否正在收敛于 Fredkin链中的某一个，其表达式由式（5）给出。不过，我们可以看到，即使比例常数并不相同，该轮廓在定性上仍与经典情形中的轮廓具有相同的形状。图3d 展示了以系统尺寸归一化的半链纠缠熵的有限尺寸标度塌缩。根据有限的可用数据，我们发现，从体积律一侧接近临界点时，关联长度的临界指数为 $\nu \approx 1$。因此，该指数似乎与经典版本游戏中得到的指数一致。

IV. 哈尔随机模型

现在，我们研究最一般情形下的量子线路模型，其中酉门不受限制地取自酉群 $U(4)$。在 Clifford 情形中，只需从一个离散集合中选择酉算符，就能轻松实现纠缠熵最小化；而在 Haar 情形中，解纠缠则更具挑战性。具体而言，我们必须通过调节若干连续参数，在 $U(4)$ 中找到最优酉算符——对于双位点酉门，这意味着解纠缠器必须对一个含有 9 个连续参数 [70]的函数进行最小化，而该函数很可能存在许多局部极小值。量化纯态纠缠程度的纠缠度量有多种，因此我们必须选用一种来进行纠缠最小化。这里，我们将关注双分 von Neumann 解纠缠器，即一种解纠缠

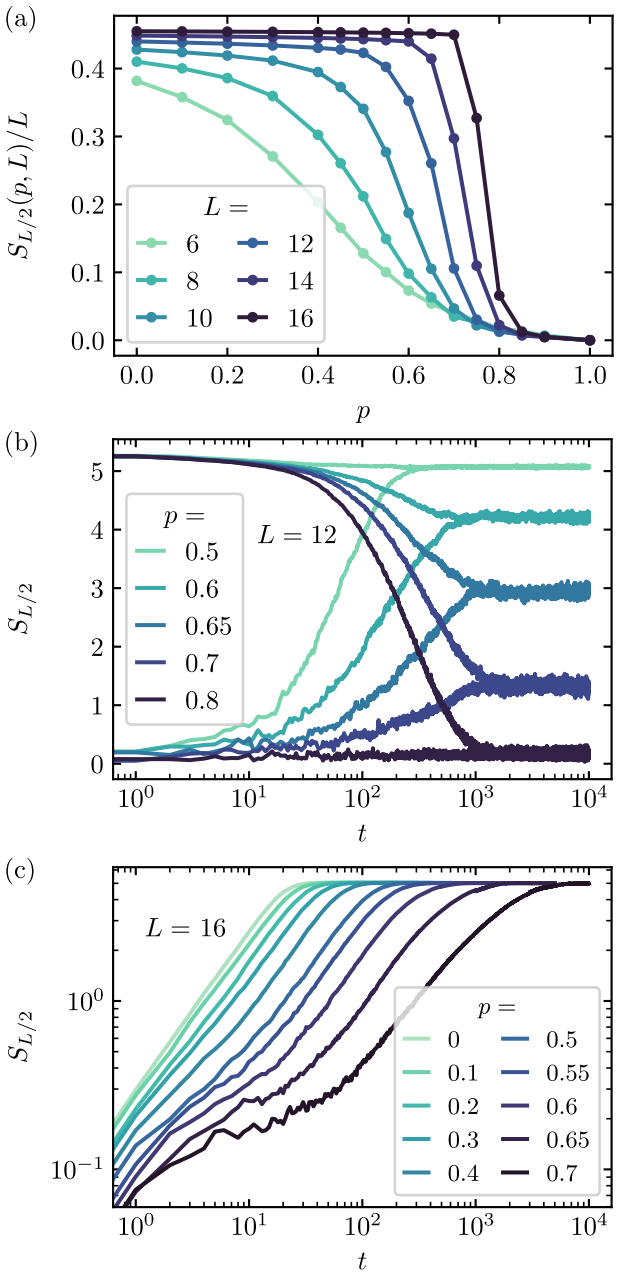


图5. Haar随机模型的数值结果。（a）随着系统尺寸增加，序参量 $S_{L/2}/L$ 与解纠缠器概率的关系。（b）固定系统尺寸 $L = 12$时，从乘积态和随机Haar态出发的半链纠缠熵的时间演化，电路平均取50次实现。（c）系统尺寸为 $L = 16$ 且解纠缠概率增加时的时间演化。在短时间内，电路平均取500次实现，直到达到稳态；之后取10次实现。

器，其目标是最小化S 给定键两侧的二分纠缠熵 [71]。在附录 D中，我们讨论解纠缠器在尝试移除由深度为 $2L$ 的随机电路生成的量子态的全部纠缠时的表现

线路。我们发现，解纠缠时间随系统尺寸呈指数增长。

为模拟该系统，我们依赖于对系统完整波函数进行数值精确的演化，因此只能处理较小的系统尺寸，最大为 $L = 16$。

A. 数值结果

我们首先研究稳态半链纠缠熵除以系统尺寸后的结果， $S_{L/2}/L$。该量可作为相变的序参量：在体积律相中，该量在热力学极限下收敛到一个有限值，而在面积律相中则趋于零。图5a展示了随机Haar线路中该序参量与解纠缠器概率的关系 p ，其中使用冯·诺伊曼解纠缠器。随着系统尺寸增大，系统达到最大纠缠态的区域扩大，这表明对于任意解纠缠器概率 $p < 1$，都不存在相变。因此，在热力学极限下，解纠缠器所做的任何努力都是徒劳的：即使随机幺正门的速率是无穷小的，也预计最终会导致最大纠缠态。这一行为与随机幺正演化和测量之间的竞争所呈现的情况截然不同；在后者中，当测量速率足够大但仍为有限值时，会发生向面积律相的相变。这与量子测量高度非局域的性质有关，相比之下，我们的幺正解纠缠器只具有局域作用。

图 5b 展示了固定系统尺寸 $L = 12$ 下的线路平均时间演化，以及从两种不同初态开始时的几种不同解纠缠概率：乘积态和 Haar 随机态。我们发现，对于任意解纠缠概率，从这两种可能的初态达到的稳态都是相同的。尽管解纠缠器无法稳定面积律相，但它确实会延长达到平衡态所需的时间。在图 5c 中，我们固定系统尺寸 $L = 16$ ，并检查随解纠缠概率增加而变化的时间演化 p。达到稳态所需的时间（该稳态为最大纠缠态）按 $p \to 1$发散。实际上，我们发现，当趋近于 $p = 1$时，平衡时间的发散速度快于 $1/(1-p)$ 中的任何幂律，而最好将其描述为指数发散。

现在，我们将基于这样一种情况给出一个启发式论证，说明 $p < 1$不存在面积律：复杂多体纠缠结构的产生，使得基于量子门的解纠缠器无法有效地将其消除。首先考虑一个简化模型：对初始乘积态施加 n_e 个随机门来制备量子态。接着，施加解纠缠电路，直到总纠缠降低到某个阈值以下。图6 展示了平均解纠缠门数 n_d 如何随 n_e变化。当 $n_e \ll L$时，施加于系统的酉算符几乎从不重叠，因此

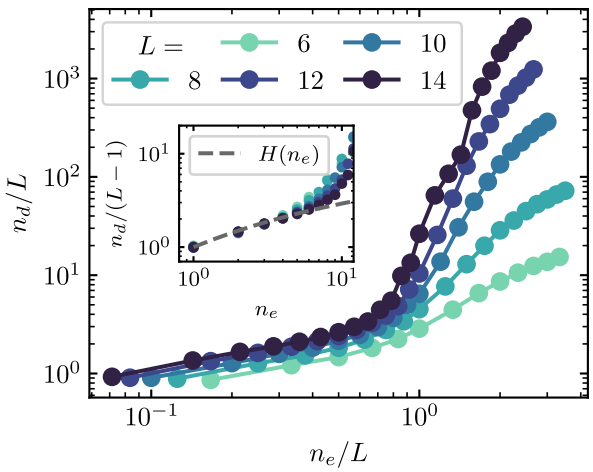


图6. 将随机放置的 n_e 个双量子比特幺正门组成的电路所产生的量子态解纠缠，所需的平均解纠缠步骤数为 n_d。判定量子态已解纠缠的条件是，每个键处的二分纠缠之和满足 $\sum_x S_x < 10^{-3}L$。插图展示了 $n_e \ll L$ 在 $n_d(n_e)/L = H_{n_e}$ 条件下的标度塌缩，其中 H_n 是第 n 个调和数。

不会产生任何多体纠缠。在这种情况下，解纠缠器只需找到纠缠键，便能完全消除纠缠。在此极限下，解纠缠所需的平均时间可以解析计算，结果为 $n_d(n_e) = (L-1)H_{n_e}$，其中H_{n_e}是第 n_e个调和数，这与我们的数值结果一致（图6的插图）。相反，当 $n_e \gtrsim L$ 时，重叠的门会产生复杂的多体纠缠结构，使解纠缠任务变得困难得多。对于固定深度的纠缠电路 $n_e/L \gtrsim 1$，所需解纠缠电路的深度随系统尺寸增长得快于线性。具体而言，如附录D所述，当 $n_e/L = 2L$时，解纠缠时间随 L 呈指数增长——我们推测这一性质对任意 $n_e/L \gtrsim 1$都成立。相比之下，纠缠器制备最大纠缠态所需的电路深度随系统尺寸线性增长 [50]。我们注意到，类Metropolis纠缠冷却算法 [72]的相关方案也已有研究。该冷却协议消除量子态纠缠的效率，与所制备量子态的复杂度及其纠缠谱统计有关 [72–76]。

现在，我们可以转向幺正电路游戏，其中纠缠门和解纠缠门在整个时间演化过程中以一定速率发生。对于接近 1 的解纠缠速率 p，纠缠器起初无法有效地产生纠缠，因为在纠缠器能够再次放置一个随机门之前，任意随机门都很可能会被解纠缠门抵消。然而，经过足够长的时间后，纠缠器仍有有限概率能够创建一个长度 l 的多体纠缠区域，这通过相互重叠的门实现。此时，解纠缠器移除这样一个区域所需的时间与 $\exp(l)$ 成正比。而纠缠器以最大纠缠方式将该区域增长到长度 $l+1$ 的概率按 $\propto l$的尺度变化。因此，经过足够长的时间后，创建一个具有足够长度的高度纠缠区域的概率是有限的，使其更有可能增长而非缩小。这样的区域随后会不断扩展，系统最终将拥有广延的体积律纠缠。换句话说，在热力学极限下，对于任意 $p < 1$，纠缠器最终总会获胜。由于随机生成一个长度为 l的纠缠区域所需的时间关于 $1/(1-p)$ 呈指数增长，这一论证也解释了图 5c 中观测到的关于 $1/(1-p)$ 呈指数增长的弛豫时间。

V. 讨论

受测量诱导相变的启发，我们为量子随机电路引入了一个新的研究平台：在此平台中，解纠缠测量被动态选取的幺正门所取代，这些门利用对量子态的有限了解来最小化纠缠。我们研究了该模型的三种不同变体：经典表面生长模型、克利福德电路，以及含有通用 $U(4)$ 门的电路。对于经典模型和克利福德模型，我们发现了体积律相与面积律相之间的相变；在临界点处，纠缠熵（经典情形下则为高度）随系统尺寸的平方根增长。通过将经典模型与随机Fredkin自旋链进行比较，我们对其有了更深入的理解。对于克利福德电路，我们发现其定性行为与经典模型十分相似，存在一个将体积律相与面积律相分隔开的相变。然而，系统尺寸方面的数值限制使我们无法确定该相变是否属于同一普适类。值得注意的是，这一相变的行为与克利福德电路中观察到的测量诱导相变存在显著差异。具体而言，其临界点处的纠缠随系统尺寸的平方根成正比增长，与测量诱导相变中观察到的临界点处纠缠呈对数增长形成对比。

在采用随机 Haar 幺正算符的模型中，我们发现了定性上不同的行为：对于任意有限的解纠缠器概率 $p < 1$，我们都没有观察到体积律与面积律之间的相变。相反，我们发现，当 $L \to \infty$ 时，对于任意 p <1，稳态都是最大纠缠的。我们基于解纠缠器无法有效移除多体纠缠的复杂结构这一点，为这种行为提供了启发式论证。在测量相变的背景下则不会出现这种情况，因为无论量子态的复杂程度如何，测量都能够降低纠缠

因此始终可以观察到面积律相。

幺正电路游戏的框架为随机电路中的未来研究开辟了许多令人兴奋的方向。首先，超越经典模型后，目前尚不清楚这些相变分别属于哪些不同的普适类。经典模型和克利福德模型中发现的相变已显示出非常相似的临界行为。然而，仍需进一步研究，以确定这两种相变实际上是否属于同一普适类。另一个令人兴奋的探索方向是考虑游戏的不同变体，可以改变规则，或将门限制在 $U(4)$ 的不同子集内——这预计会导致不同的行为。此外，我们目前的工作采用了一种最小化某条键上纠缠熵的解纠缠器，但在具有一般$U(4)$ 幺正算符的情况下，无论解纠缠速率为何，只要该速率有限，这一策略都无法促成相变。另一个悬而未决的问题是，优化其他量是否能够在热力学极限下有效控制纠缠增长。最后，实验测量 R´ényi 纠缠熵 [77——79]的可能性，为在物理硬件上实现纠缠博弈带来了令人兴奋的前景。

致谢

我们感谢 Adam Nahum 和 Curt von Keyserlingk 所进行的富有见地的讨论。我们感谢 Luke Causer 所进行的富有见地的讨论，并感谢他分享随机Fredkin链的数据。我们感谢 Matteo Ippoliti 提出的宝贵意见。R. M. 感谢 Matthias Engelbrecht 和 Josef Willsher 的有益讨论。本研究获得了欧洲研究委员会（ERC）的资助，资助依据为欧盟“地平线2020”研究与创新计划下的资助协议第 771537 号。A.S. 感谢 1851年万国博览会皇家委员会提供的研究奖学金。本研究获得 Leverhulme Trust国际教授职位项目资助，项目编号为 LIP-202-014（S.L.S）。为实现开放获取，作者已为本次投稿所产生的任何作者接受稿版本采用 CC BY 公共版权许可。F.P. 感谢德国研究基金会（DFG）在德国卓越战略 EXC-2111-390814868 项目下提供的支持。F.P. 的研究属于慕尼黑量子谷的一部分，该项目由巴伐利亚州政府通过巴伐利亚高科技议程Plus提供资金支持。

数据和材料的可用性：原始数据和模拟代码可在 Zenodo 获取，合理请求后即可提供 [80]。

附录 A：普适动力学

本文主要关注所研究的不同模型的平均稳态性质。在本附录中，我们将研究模型在热化之前的动力学，也就是稳态如何形成。我们将主要关注经典模型，因为它便于进行大规模数值模拟。随后我们将展示，在可实现的系统尺寸范围内，克利福德模型表现出相似的行为。

如参考文献 [50], 所述，我们的幺正电路游戏在 $p = 0$ 处的纠缠熵按照 Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）方程 [57],增长

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \eta(x,t) + c, \qquad \text{(A1)}$$

其中 $\eta(x,\ t)$ 是不相关噪声项，而 c 给出线性增长行为。可以通过代入 c 将 $S(x,\ t) \to S(x,\ t) - ct$吸收到高度场中，从而对纠缠熵的线性增长作出贡献。 ν 有时称为表面张力，因为它有助于平滑界面。最后，非线性 λ 项描述增长率对表面斜率的依赖关系。当 $\lambda = 0$时，方程（A1）简化为 Edwards-Wilkinson（EW）方程 [58], ，其普适性质与 KPZ 不同。

本节将考察表征动力学 [54]的三个不同指数：表征界面涨落大小的增长指数β 、表征空间涨落的粗糙度指数 α ，以及决定关联长度 $\xi_{||}$增长速率的动力学指数 z_d ；关联长度定义为空间关联的特征距离。请注意，z_d 不同于正文中介绍的动力学指数 z，后者表征高度（或纠缠熵）的平衡时间。相反， z_d 表征涨落的饱和时间。这些指数与动力学的关系如下：平均高度线性增长，并带有一个次主导修正，

$$\overline{S_x(t)} = v_E t + Bt^{\beta}, \qquad \text{(A2)}$$

其中，上划线表示对轨迹取平均。涨落增长为

$$w_x(t) \equiv \left(\overline{S_x(t)^2} - \overline{S_x(t)}^2\right)^{1/2} = Ct^{\beta}. \qquad \text{(A3)}$$

比值 C/B 是一个普适量。空间关联长度随时间的增长规律为 $\xi_{||}(t) \propto t^{1/z}$ ，空间关联满足

$$G(r) \equiv \left[\overline{\left(S_x(t) - S_{x+r}(t)\right)^2}\right]^{1/2} = r^{\alpha} g\left(r/\xi_{||}(t)\right). \qquad \text{(A4)}$$

请注意，空间关联仅在轮廓的“活跃”区域内测量，即远离高度已经饱和到固定值的

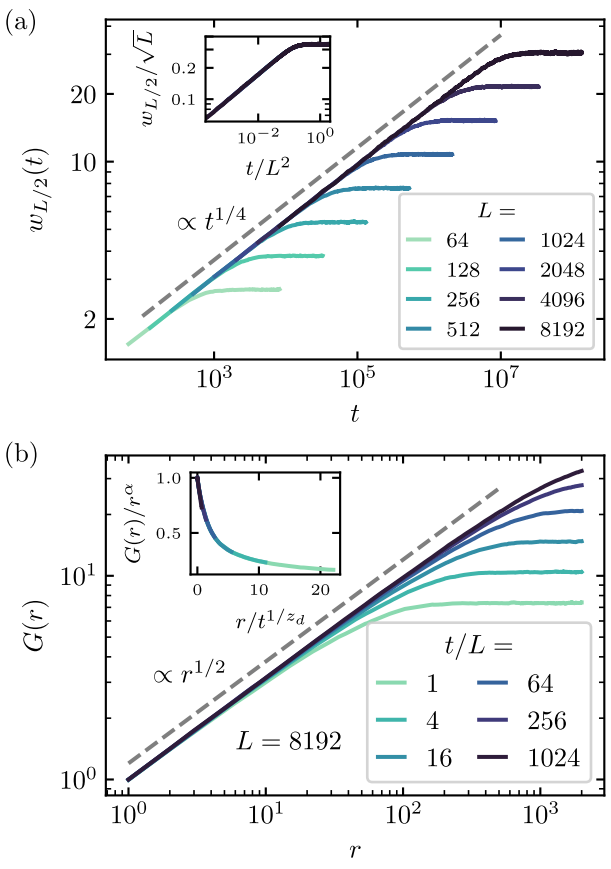


图 7. 临界点处经典模型的动力学性质 $p_c = 1/2$。（a）随着系统尺寸增大，半链高度涨落的演化。插图：演化的标度塌缩。（b）空间关联随距链 r 中心的距离的变化，针对不同时间步下的系统尺寸。插图：由具有 EW 指数的方程（A4）给出的标度塌缩，$\alpha = 1/2$ 以及 $z_d = 2$。数据取平均于 2×10^4 次电路实现，其中 $L = 8192$，否则取平均于 10^5 次实现。

位置。实际上，为了确定空间涨落，我们固定 $x = L/2$，因为该点需要更长时间才能达到稳态。

普适的 KPZ 标度行为由以下指数给出

$$\text{KPZ:} \qquad \beta = 1/3, \qquad \alpha = 1/2, \qquad z_d = 3/2. \tag{A5}$$

相比之下，EW 普适性由以下特征确定

$$\text{EW:} \qquad \beta = 1/4, \qquad \alpha = 1/2, \qquad z_d = 2. \tag{A6}$$

1. 经典模型的动力学

我们从临界点处的经典模型开始考虑 $p_c = 1/2$。正如我们在图2c 中所看到的，临界点处的速度为零，而高度增长为 $t^{1/4}$，这与 EW 标度一致。现在，我们考察系统在临界性处的其他动力学性质。图7a 展示了半链中涨落随时间的演化。该增长遵循幂律，其指数为 $\beta = 1/4$。图7b 展示了固定系统尺寸 $L = 8192$下不同时间步的空间关联。如预期，空间关联遵循幂律，其指数为 $\alpha = 1/2$。图中的插图展示了使用标度形式（A4）并取动力学指数 $z_d = 2$所得到的塌缩结果。所有这些结果都证实，临界点的动力学由 EW 普适类刻画。

现在转向体积律相中的动力学。正如正文所述，高度增长的速度为 $v_E = p_c - p$，其在临界点处消失。因此，为了观察方程（A1）中的非线性项对纠缠增长的作用，我们需要减去线性速度项。图 8展示了在解纠缠概率为 $p = 0.3$的点处系统的动力学。在图 8a 中，我们展示了由 KPZ 方程中的非线性项产生的高度的次主导增长；对于足够长的时间，其增长为t^{β}，其中 $\beta = 1/3$。类似地，在图 8b 中，我们发现涨落按照方程（A3）的预测增长，其指数对应于 KPZ 普适性。我们注意到，在这两种情况下，KPZ 行为仅在长时间下出现，并且越接近临界点，这一现象越明显。这是 EW 行为与 KPZ 行为之间交叉的结果：随着接近临界点，由 λ 控制的非线性项变得更小（λ 在 $p \to 1/2$时趋于 0），而其变得重要所需的时间尺度增大。具体而言，从 EW 行为到 KPZ 行为的交叉发生在与 $\lambda^{-\phi}$成正比的时间内，其中 $\phi = 4$ [55, 56]。

图 8b 表明，涨落 $w_{L/2}$ 会随时间按幂律增长，直到达到最大值；此时，它们会快速降低到一个与系统尺寸无关的固定值。这一现象由系统的开放边界条件和次可加性约束所导致，二者共同规定了 $L/2$ 在链的中部的最大高度。随后，当高度变得足够大并达到上边界时，涨落会减小。在周期性边界条件下，高度没有上限，涨落会持续增加，直到在时间 $w_{L/2} \sim L^{\alpha}$ 内达到 $\sim L^{z_d}$。

最后，图 8c 展示了若干时间步下空间关联随距离的变化。如 KPZ 标度所预言，关联遵循指数为 $\alpha = 1/2$的幂律。在插图中，我们按照拟设（A4）展示了有限尺寸标度塌缩。结果证实了动力学指数 $z_d = 3/2$，这是 KPZ 行为的特征，与临界点处的行为形成对比。

在面积律相中，结果关于体积律相呈对称性。然而，要在该相中观察到 KPZ 普适性，需要将系统初始化为具有最大高度的量子态。随后，结果与体积律相中获得的结果相似

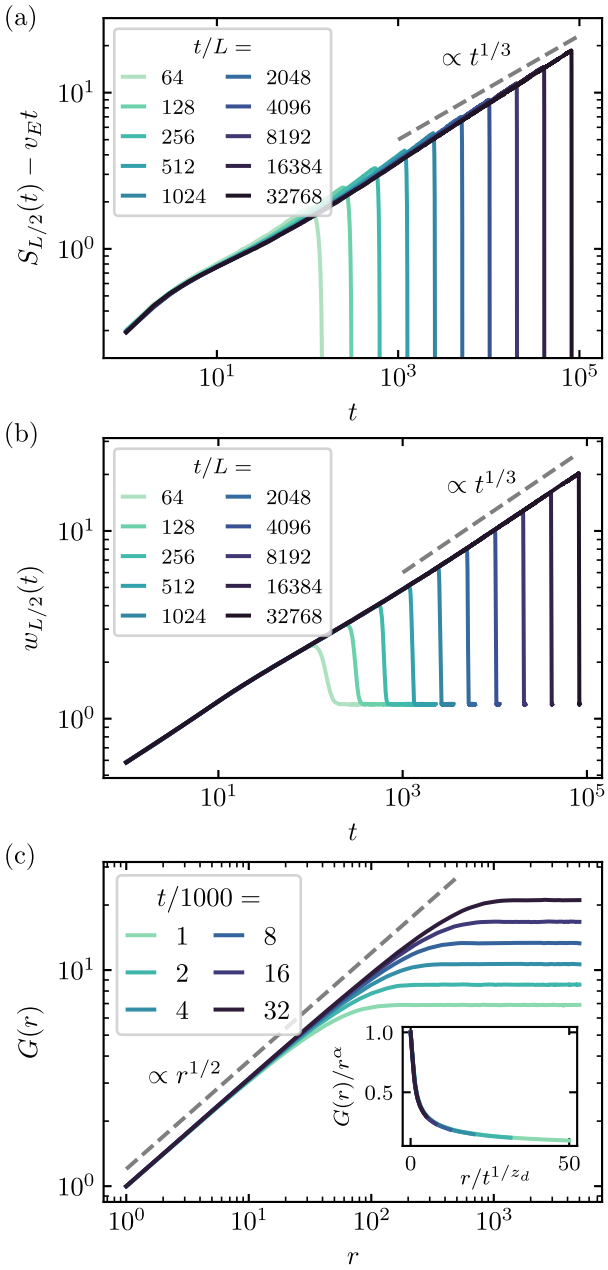


图8. 体积律相中经典模型的动力学性质，其中 $p = 0.3$。（a）半链高度 $S_{L/2}(t) - v_E t$ 随时间的次级增长，系统尺寸逐渐增大。晚期时，增长遵循指数为 $\beta = 1/3$ 的幂律。（b）系统尺寸逐渐增大时半链高度涨落的演化。（c）空间关联随距链中心的距离 r 变化，系统尺寸为 $L = 32768$，对应不同时间步。插图：由式（A4）给出的标度塌缩，采用 KPZ 指数，$\alpha = 1/2$ 和 $z_d = 3/2$。数据对电路实现次数取平均。

，但此时速度 $v_E = p_c - p$ 为负。稳态中的涨落受到边界条件 $S_x(t) \geq 0$ 的限制，因此涨落会增长为

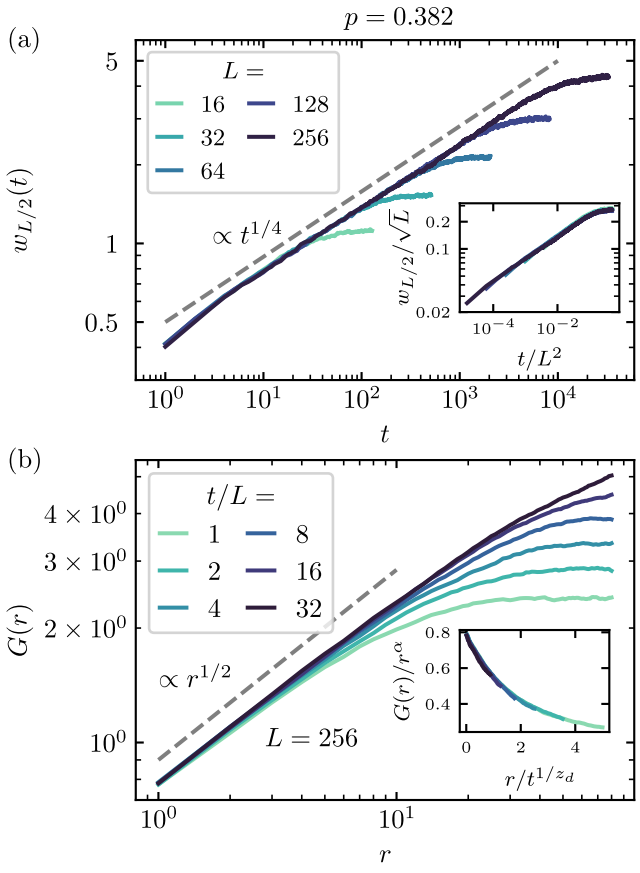


图9. 临界点 $p_c = 0.382$处 Clifford模型的动力学性质。（a）系统尺寸逐渐增大时半链高度涨落的演化。插图：演化的标度塌缩。（b）空间关联随距链中心的距离 r 变化，系统尺寸为 $L = 256$，对应不同时间步。插图：由式（A4）给出的标度塌缩，采用 EW 指数，$\alpha = 1/2$ 和 $z_d = 2$。数据对 10^4 次电路实现取平均。

高度降低，直到它们到达系统的下边界，呈现出与图 8b 中相似的行为。

2. Clifford模型的动力学

在Clifford模型中，我们获得了与经典模型相似的结果。在图9 中，我们展示了系统在临界点 $p_c = 0.382$ 处的动力学性质。我们得到的结果与图 7中经典模型的结果等价。特别是，涨落以指数为 $\beta = 1/4$ 的幂律增长，而关联则随距离以 $\alpha = 1/2$增长，正如 EW 标度所预测的那样。

由于系统尺寸的限制，以及 EW 到 KPZ 的交叉发生在较长时间尺度上，对 Clifford模型中的体积律相结果进行分析更具挑战性。因此，我们将此类相中的动力学详细研究留待未来

工作。

附录 B：最小解纠缠双量子比特克利福德幺正算符集

在本附录中，我们证明，可以使用从由 19 个双量子比特幺正算符组成的最小集合中选取的 Clifford 幺正算符，对稳定子态中的任意一个键进行解纠缠。我们的证明将采用构造性方法，给出这些幺正算符的显式形式。本附录的组织如下：首先，我们将简要总结用于模拟 Clifford 电路的稳定子形式。随后，我们回顾截断规范的概念，该规范用于以便于直接计算纠缠熵的方式表示系统的量子态。最后，我们利用截断规范识别所有局部纠缠结构，并确定能够对其进行解纠缠的幺正算符。

1. 稳定子形式主义回顾

L 个量子比特的稳定子态定义为量子态 $|\psi\rangle$，存在 L 个线性独立且彼此对易的 Pauli 字符串算符 g_i 使该态保持不变，即 $g_i|\psi\rangle = |\psi\rangle$。这类算符称为稳定子。由这些稳定子及矩阵乘法生成的群称为该量子态 $|\psi\rangle$ 的稳定子群。

克利福德幺正算符是指将每个 Pauli 字符串映射为另一个 Pauli 字符串的酉算符，因此能保持稳定子态。众所周知，克利福德群由门集 {CNOT，S，H} 生成。由于 Pauli 字符串的数量有限，克利福德门的数量也是有限的。具体而言，对于双量子比特幺正算符，该群包含 11520 个门。

Gottesmann-Knill 定理 [65–68] 确保任何由初始稳定子态经克利福德门和 Pauli 测量演化而成的电路，都可以在经典计算机上高效模拟。

区域 A 中稳定子态的纠缠熵可以通过计算稳定子群中完全包含于 A的稳定子数量来得到，即这些稳定子在其补集上作用平凡。随后，纠缠熵可表示为 [81]

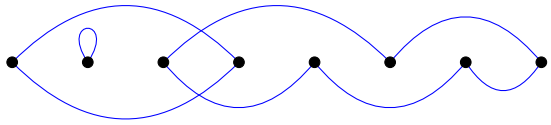
$$S_A = n_A - \log_2 |\mathcal{S}_A|, \tag{B1}$$

其中，n_A 是 A 中包含的量子比特数量，而 $|\mathcal{S}_A|$ 是包含于 A中的稳定子子群的大小。

我们注意到，生成稳定子群的稳定子集合可以有许多不同的选取方式，因为任意两个稳定子的乘积仍然是一个稳定子。这在文献中被称为规范自由度 [21]。一种特别有用的规范称为一维自旋链的截断规范，最早由参考文献 [50] 引入。定义 $\rho_l(i)$ 为左端点（即具有非平凡内容的第一个位置）位于位置 i 的稳定子数量；同理，$\rho_r(i)$ 表示右端点位于相应位置的稳定子数量。于是，稳定子的生成集合总可以按如下方式选取，使其满足以下性质：

- $\rho_r(i) + \rho_l(i) = 2$ for every site i.
- 如果一个位置 i 具有 $\rho_r(i) = 2$ 或 $\rho_l(i) = 2$，那么这两个稳定子在位置 i具有不同的泡利算符。

总是可以将稳定子态转换为截断规范；关于相关算法，请参阅参考文献 [21]。处于截断规范的量子态可以用如下方式进行图示表示 [43]：绘制 L 个代表各个位置的点。然后，对于每个稳定子，绘制一条连接左端点和右端点的线。例如，一个包含 8 个量子比特的稳定子态可以表示为：



(B2)

请注意，这种表示并不能唯一表示一个稳定子态。不过，它包含了我们所需的关于纠缠熵的全部信息。

在截断规范下，连续区域的纠缠熵 A 计算起来尤其简单：它等于端点位于内部的生成元数量 A 而另一个端点位于外部的生成元数量 A。因此，通过观察有多少条弦跨越每条键，就可以直接从量子态的图示表示中获得二分纠缠熵。例如，示例量子态（B2）中的纠缠轮廓将是S（x）=（1、1、2、1、1、1、1）。利用这种稳定子态的表示，我们注意到，只需在酉算符作用的量子比特内部移动稳定子的端点，就能在局部降低纠缠。在下一节中，我们将确定给定键中可能存在的所有局部纠缠结构，并找到将它们分别最大程度解纠缠的方法。

2. 局部解纠缠量子态

原则上，要解纠缠稳定子态中的一个键，需要从双量子比特克利福德幺正算符集合中找出最优的解纠缠幺正算符。然而，这个集合包含许多幺正算符，逐一尝试会非常耗时。尽管如此，稳定子态中允许的局部纠缠结构是有限的。本节将探讨所有可能的局部纠缠结构，以及解纠缠它们所需的相应幺正算符。我们将

发现，只需一个由 19 个双量子比特克利福德幺正算符组成的有限集合，就足以最大程度地解纠缠任意可能的键。

寻找解纠缠克利福德酉算符的第一步，是考察可能的局部稳定子结构，也就是相邻量子比特在截断规范下，稳定子端点的所有可能构型。通过计算在每个格点添加两端点弦的方式数，我们确定共有 21 种可能的稳定子结构（注意，每种结构同时对应许多局部状态）。其中只有部分结构可以解纠缠。例如，考虑以下两种局部稳定子结构：



(B3)

第一种情况下，端点经局部幺正算符修改的稳定子不会穿过键，因此无法在局部降低纠缠熵。第二种情况下，有一个稳定子穿过了键。然而，在保持每个格点有两个端点的同时，无论如何移动稳定子端点，都无法使穿过该键的弦少于一条。因此，无法通过局部幺正算符进一步对这种构型进行解纠缠。所有此类构型都称为局部极小。这类构型共有 11 种。其余 10 种构型称为局部纠缠，原则上至少可以通过局部操作进行解纠缠。

现在，让我们来看看局部纠缠的构型，并构造能够将其解纠缠的幺正算符。我们从以下构型开始：



(B4)

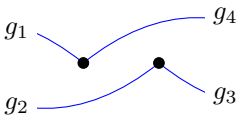
单个格点中的一个环对应于一个完全包含在该格点内的稳定子，这意味着对该格点施加泡利算符 P 后，量子态保持不变（可能相差一个符号）。施加一个 SWAP 门（它是克利福德幺正算符）会将单格点稳定子从一个格点移到另一个格点。请注意，在含有单个稳定子的格点中，另外两个稳定子可能只含有 P 或一个单位算符，因为这些稳定子必须与 P 对易。如果它们含有单位算符，那么施加 SWAP 门后，该稳定子就会自动从另一个格点开始/结束。如果它们与单个稳定子含有相同的内容，那么可以用 P 乘它们（因为稳定子的乘积仍是稳定子），从而在该格点中产生一个单位算符，并将其归结为第一种情况。因此，SWAP 操作会将量子态变为



(B5)

因此，使跨越该键的纠缠减少一个单位。

现在，我们来考虑以下对称的局域纠缠结构：



(B6)

在这种情况下，有 4 个稳定子与之相关，其结构如下：

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \ldots A_1 \mathbb{1}_2, \\
g_2 &= \ldots B_1 C_2, \\
g_3 &= \quad \mathbb{1}_1 F_2 \ldots, \\
g_4 &= \quad E_1 D_2 \ldots,
\end{aligned}
$$

其中，圆点表示至少还有另一个具有非平凡内容的格点。所有端点都必须是泡利矩阵，而其余部分（B 和 F）可以是泡利矩阵或单位算符。为使记号简洁，我们省略了算符之间的张量积。由于所有稳定子都必须彼此对易，我们可以观察到若干性质。首先，$[A, E] = 0$ 和 $[C, F] = 0$，这意味着 $A = E$ 和 $C = F$。因此，我们写成

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \ldots A_1 \mathbb{1}_2 \\
g_2 &= \ldots B_1 C_2 \\
g_3 &= \quad \mathbb{1}_1 C_2 \ldots \\
g_4 &= \quad A_1 D_2 \ldots
\end{aligned}
$$

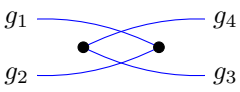
根据这些弦的对易关系，我们还需要满足$[B_1 C_2, A_1 D_2] = 0$。这意味着要么是 (a) $[C, D] = [B, A] = 0$，要么是 (b) $\{C, D\} = \{B, A\} = 0$。目标是找到一个幺正算符 U，使得 $U A_1 \mathbb{1}_2 U^\dagger = \tilde{A}_1 \mathbb{1}_2$和$U B_1 C_2 U^\dagger = \tilde{B}_1 \mathbb{1}_2$，其中 $\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = 0$。由于幺正算符不能改变对易关系，我们注意到，情形 (a) 无法被解纠缠。

在情况 (b) 中，我们有 $\{A_1 \mathbb{1}_2, B_1 C_2\} = 0$，因此可以得到目标形式。为此，我们定义一个按以下方式变换 Pauli 串的酉算符：

$$
\begin{aligned}
U A_1 U^\dagger &= A_1, \\
U B_1 U^\dagger &= B_1 C_2, \\
U C_2 U^\dagger &= C_2, \\
U D_2 U^\dagger &= A_1 D_2.
\end{aligned}
$$

这种变换保留了所有对易关系，因此是一个有效的酉算符。注意，只需选择保持不变的泡利矩阵，该酉算符就完全确定了，A_1 以及 C_2。它们各自可以取 3 个值，因此总共有 9 个这样的酉算符，我们将其记为 $\mathcal{U}_d = \{U_1, ..., U_9\}$。这些就是解纠缠形如（B6）的状态所需的全部酉算符。

接下来，我们考虑这种纠缠结构



(B7)

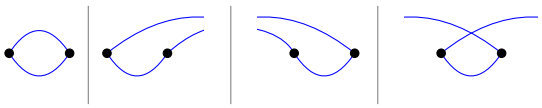
它是唯一一种可以将纠缠减少 2 个单位的结构。在这种情况下，相关稳定子的形式为

$$\begin{aligned} g_1 &= \ldots A_1 B_2, \\ g_2 &= \ldots C_1 D_2, \\ g_3 &= \quad E_1 F_2 \ldots, \\ g_4 &= \quad G_1 H_2 \ldots. \end{aligned}$$

和之前一样，我们将考虑两种不同的情况。当 $[A_1B_2, C_1D_2] = 0$ 时，纠缠熵只能减少 1。这只需在 $\mathcal{U}_d$ 中施加任意一个满足 $UA_1B_2U^\dagger = A_1$ 的酉算符即可。然后，我们将得到 $Ug_3U^\dagger = \tilde{E}_1\tilde{F}_2\ldots$ 和 $Ug_4U^\dagger = \tilde{G}_1\tilde{H}_2\ldots$。由于对易关系保持不变，它们必然与 $Ug_1U^\dagger = \ldots A_1$ 对易，因此 $[A, \tilde{E}] = [A, \tilde{G}] = 0$。~ ~只有当 E 和 G 等于 A 或单位算符时，这一点才成立。如果其中一个等于单位算符，那么我们已经处于公式B6所描述的情形。否则，我们~ ~有 $E = G$，因此可以将这两个稳定子相乘，从而得到一个在位置 1 上为单位算符的稳定子，回到截断规范，并得到公式B6的形式。

如果 $\{A_1B_2, C_1D_2\} = 0$，那么根据构造 $[A, C] = 0$（因为 $\{B, D\} = 0$）。这只可能在两种情况下发生：要么 $A = C$，要么其中一个是单位算符。在这两种情况下，施加一个 SWAP 门都会使纠缠度至少降低 1，并留下如（B6）中的稳定子结构；使用幺正算符 $\mathcal{U}_d$ 即可将该结构完全解纠缠。

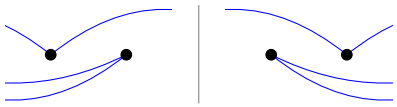
我们已经证明，利用由 19 个幺正算符组成的集合 $\{\mathcal{U}_d, \text{SWAP}\ \mathcal{U}_d \times \text{SWAP}\}$，我们可以对形如（B5）、（B6）和（B7）的任意局部纠缠键进行解纠缠。还有另外六种局部纠缠结构。其中四种如下：



(B8)

所有这些状态都有一个稳定子 $g_1 = A_1B_2$ 完全包含在该键中。因此，对状态进行解纠缠只需在 $\mathcal{U}_d$ 中施加一个幺正算符，使得 $UA_1B_2U^\dagger = A_1$ 或 $UA_1B_2U^\dagger = B_2$。

最后，剩下的两种纠缠结构为：



(B9)

这两种结构也可以使用 $\mathcal{U}_d$ 中的幺正算符进行解纠缠，按照与结构（B6）类似的论证即可验证这一点。因此，我们找到的19个幺正算符集合足以对任何可能的键进行解纠缠。

注意，我们构造的只是能够解开任意给定键的一组可能的幺正算符，但我们

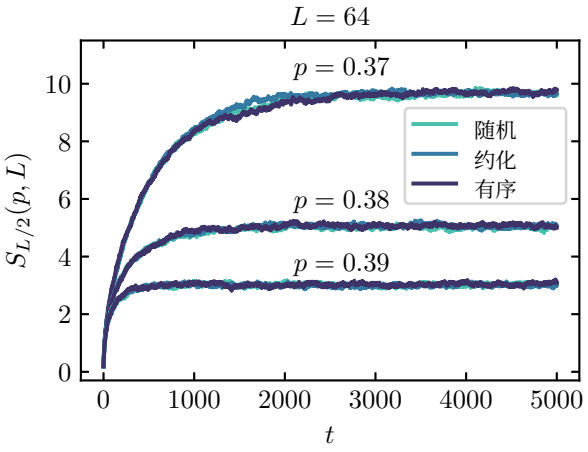


图10. 对于系统尺寸为$L = 64$的系统，比较不同 Clifford 解纠缠器以及不同解纠缠器概率下半链纠缠熵的时间演化。使用 10^2 次实现进行电路平均。

还可以考虑许多其他选择。例如，在幺正算符之后施加单量子比特旋转，不会改变这组算符的解纠缠能力，但会得到一组全新的矩阵。

附录C：Clifford 解纠缠器的比较

如正文所述，Clifford 解纠缠器有多种选择，可以最大程度地对一个键进行解纠缠，因为不同的 Clifford 门会使纠缠减少相同的量。在这里，我们比较不同的解纠缠选择方式，并说明它们是等价的。这表明，只要解纠缠幺正算符能够最大程度地对该键进行解纠缠，平均轨迹就不取决于所选择的是哪一个解纠缠幺正算符。我们比较以下方法：(i) 随机采样：检查所有 Clifford 幺正算符对给定键的作用，并从能够最大程度地对其进行解纠缠的门中随机选择一个。(ii) 约简随机采样：使用由19个 Clifford 幺正算符组成的约简集合，该集合足以对任何可能的键进行解纠缠，并依次尝试其中的所有幺正算符。随后，从最优的幺正算符中随机选择一个。(iii) 有序采样：使用前一种方法中的相同子集，但选择找到的第一个能够最大程度地对该键进行解纠缠的幺正算符（因此不一定会尝试所有幺正算符）。

系统尺寸为 $L = 64$ 时，半链纠缠熵的时间演化如图10所示，其中比较了不同解纠缠概率下的三种不同采样方法。每条线代表 10^3 次电路实现的平均值。值得注意的是，这三种方法在纠缠熵的演化和稳态值方面均产生相同的结果。因此，在我们的模拟中，我们使用有序采样方法来解纠缠键，因为它需要

找到解纠缠门所需的最少尝试次数，从而加快模拟速度。

附录 D：解纠缠最大纠缠态

冯·诺依曼解纠缠器的任务是找出 U(4) 式中的最优酉算符，从而最大限度地降低给定键上的二分纠缠。这意味着它必须对 9 个连续参数进行最小化。在这里，我们研究解纠缠器在尝试解纠缠由 L 个量子比特构成的最大纠缠态时的效果。为此，我们从一个乘积态出发，利用深度为 $2L$ 的随机电路演化系统，得到一个具有最大纠缠的状态。随后，解纠缠器开始作用，在随机键上最小化纠缠熵，直到半链纠缠熵降低至某个阈值以下。值得注意的是，我们的解纠缠过程与文献 [72, 73]中介绍的类 Metropolis 冷却算法相似。不过，在该情形下，解纠缠器采用随机酉算符，且仅在纠缠熵降低时接受该算符，因此省去了我们解纠缠器中的最小化步骤。

图 11 展示了解纠缠电路中半链纠缠熵的平均时间演化。解纠缠所需的时间随系统尺寸呈指数增长。观察 $L = 16$ 线的行为可以发现，演化会长时间停留在最大纠缠态，之后才能有效降低纠缠。我们认为这种现象源于数值不稳定性：优化过程未能找到纠缠熵的全局最小值。此外，我们指出，与参考文献 [72, 73], 中的纠缠冷却算法不同，我们的解纠缠器只要有足够长的时间，就能够解纠缠该量子态。

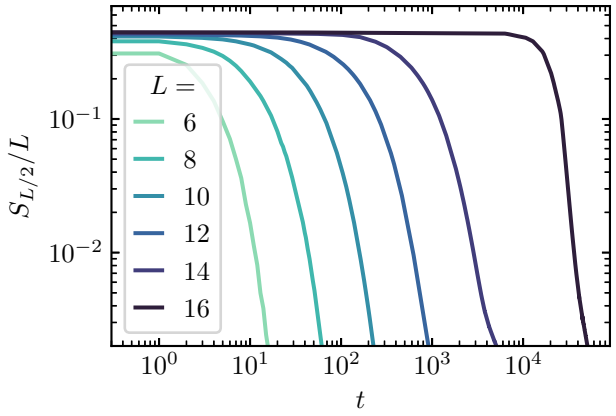


图 11。对于采用冯·诺伊曼解纠缠器的解纠缠电路，半链纠缠熵的时间演化；初始状态为由深度为 $2L$ 的随机电路生成的 L 量子比特量子态。电路平均取自 10^2 次实现。

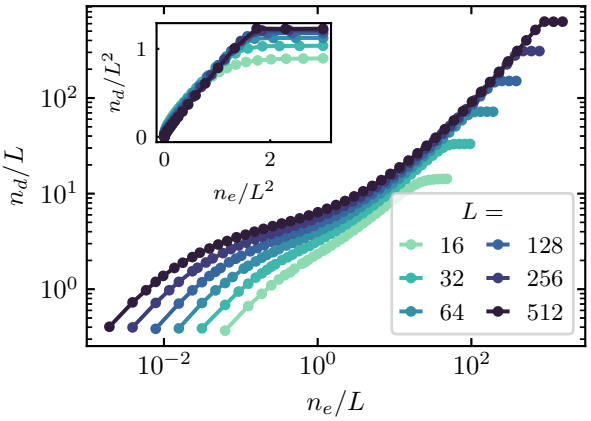


图 12。完全解纠缠由 n_e 个随机放置的双量子比特克利福德幺正算符构成的电路所生成的量子态所需的平均解纠缠步骤数 n_d 。插图显示了 n_d/L^2 与 n_e/L^2 之间的塌缩。

附录 E：解纠缠稳定子态

Haar 情形中没有相变，是因为它会产生复杂的纠缠结构，无法通过高效的局部操作将其解纠缠。相反，稳定子态中的纠缠结构非常简单，正如我们在附录 B中所展示的，因此可以轻易地通过局部操作将其降低。具体而言，正如下文将要展示的，任意稳定子态都可以使用深度为 $\mathcal{O}(L)$ 的电路进行局部解纠缠。

为了研究克利福德电路的解纠缠复杂度，我们将考虑如下设置：从一个乘积稳定子态开始，并通过随机含有电路 n_e 门。然后，运行解纠缠电路，直到纠缠降为 0，并统计所需的双量子比特门数量， $n_d(n_e)$。数值结果如图 12所示。我们观察到三种不同的区域。对于 $n_e < L$，存在一个非线性区域，其中降低纠缠仅包括找到纠缠键并应用逆克利福德幺正算符。对于 $n_e > L^2$，解纠缠门的数量与 n_e无关。这是量子态处于最大纠缠状态的区域，因此增加更多纠缠门不会改变解纠缠电路所需的深度。在这种情况下，完全解纠缠所需的门数量为 $n_d \propto L^2$，如图 12的插图所示。在中间区域，$L < n_e < L^2$，解纠缠电路的深度随纠缠电路的深度线性增长，且斜率与系统尺寸无关。这些结果与图 6 所示的随机Haar情形形成对比，在该情形下，对于 $n_e > L$ ，解纠缠电路的深度会随系统尺寸呈指数增长。

注意，对于 $n_e < L$，所需的解纠缠

步骤数与一般电路的并不相同。该酉算符完全不会使系统发生纠缠，这并不是由随机克利福德门具有有限概率所导致的，而是随机 Haar 门所不可能实现的。

---

[1] D. Basko、I. Aleiner 和 B. Altshuler，《具有局域单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属-绝缘体转变》，《物理学年鉴》321，1126（2006）。[2] A. Pal 和 D. A. Huse，《多体局域化相变》，《物理评论B》82，174411（2010）。[3] R. Nandkishore 和 D. A. Huse，《量子统计力学中的多体局域化与热化》，《凝聚态物理年度评论》6，15（2015）。[4] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，《专题讨论：多体局域化、热化与纠缠》，《现代物理评论》91，021001（2019）。[5] W. D. Roeck 和 J. Z. Imbrie，《多体局域化：稳定性与不稳定性》，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》375，20160422（2017）。[6] F. Alet 和 N. Laflorencie，《多体局域化：导论与选题》，《物理学报告》19，498（2018）。[7] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papi´c，《量子多体疤痕导致的弱遍历性破缺》，《自然·物理》14，745（2018）。[8] C. J. Turner、A. A. Michailidis、D. A. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papi´c，《里德伯原子链中的量子疤痕本征态：纠缠、热化失效及对微扰的稳定性》，《物理评论B》98，155134（2018）。[9] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papi´c，《量子多体疤痕与遍历性的弱破缺》，《自然·物理》17，675（2021）。[10] A. Chandran、T. Iadecola、V. Khemani 和 R. Moessner，《量子多体疤痕：准粒子视角》（2022）。[11] F. Wilczek，《量子时间晶体》，《物理评论快报》109，160401（2012）。[12] H. Watanabe 和 M. Oshikawa，《量子时间晶体的不存在性》，《物理评论快报》114，251603（2015）。[13] V. Khemani、A. Lazarides、R. Moessner 和 S. L. Sondhi，《驱动量子系统的相结构》，《物理评论快报》116，250401（2016）。[14] D. V. Else、B. Bauer 和 C. Nayak，《Floquet 时间晶体》，《物理评论快报》117，090402（2016）。[15] C. W. von Keyserlingk、V. Khemani 和 S. L. Sondhi，《Floquet 系统中的绝对稳定性及时空长程有序》，《物理评论B》94，085112（2016）。[16] K. Sacha 和 J. Zakrzewski，《时间晶体：综述》，《物理学进展报告》81，016401（2017）。[17] V. Khemani、R. Moessner 和 S. L. Sondhi，《时间晶体简史》（2019）。[18] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher，《量子芝诺效应与多体纠缠转变》，《物理评论B》98，205136（2018）。[19] A. Chan、R. M. Nandkishore、M. Pretko 和 G. Smith，《幺正-投影纠缠动力学》，《物理评论B》99，224307（2019）。[20] B. Skinner、J. Ruhman 和 A. Nahum，《纠缠动力学中的测量诱导相变》，《物理评论X》9，031009（2019）。[21] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher，《混合量子电路中由测量驱动的纠缠转变》，《物理评论B》100，134306（2019）。[22] A. Zabalo、M. J. Gullans、J. H. Wilson、S. Gopalakrishnan、D. A. Huse 和 J. H. Pixley，《随机量子电路中测量诱导相变的临界性质》，《物理评论B》101，060301（2020）。[23] M. P. Fisher、V. Khemani、A. Nahum 和 S. Vijay，《随机量子电路》，《凝聚态物理年度评论》14，335（2023）。[24] M. Ippoliti、M. J. Gullans、S. Gopalakrishnan、D. A. Huse 和 V. Khemani，《纯测量动力学中的纠缠相变》，Physical Review X 11，011030（2021）。[25] A. Nahum、S. Roy、B. Skinner 和 J. Ruhman，《全连接量子电路、量子树和朗道-金兹堡理论中的测量与纠缠相变》，PRX Quantum 2，010352（2021）。[26] Y. Bao、S. Choi 和 E. Altman，《带测量的随机幺正电路中的相变理论》，《物理评论B》101，104301（2020）。[27] M. J. Gullans 和 D. A. Huse，《量子测量诱导的动力学纯化相变》，Physical Review X 10，041020（2020）。[28] R. Vasseur、A. C. Potter、Y.-Z. You 和 A. W. W. Ludwig，《全息随机张量网络中的纠缠转变》，《物理评论B》100，134203（2019）。[29] S. Choi、Y. Bao、X.-L. Qi 和 E. Altman，《扰乱动力学中的量子纠错与测量诱导相变》，《物理评论快报》125，030505（2020）。[30] M. Szyniszewski、A. Romito 和 H. Schomerus，《可变强度弱测量导致的纠缠转变》，《物理评论B》100，064204（2019）。[31] Q. Tang 和 W. Zhu，《测量诱导相变：通过密度矩阵重整化群计算研究非可积模型》，《物理评论研究》2，013022（2020）。[32] C.-M. Jian、Y.-Z. You、R. Vasseur 和 A. W. W. Ludwig，《随机量子电路中的测量诱导临界性》，《物理评论B》101，104302（2020）。[33] A. Zabalo、M. J. Gullans、J. H. Wilson、S. Gopalakrishnan、D. A. Huse 和 J. H. Pixley，《随机量子电路中测量诱导相变的临界性质》，《物理评论B》101，060301(R)（2020）。[34] D. Rossini 和 E. Vicari，《量子临界性下多体系统的测量诱导动力学》，《物理评论B》102，035119（2020）。[35] J. Willsher、S.-W. Liu、R. Moessner 和 J. Knolle，《混沌经典多体系统中的测量诱导相变》，《物理评论B》106，024305（2022）。[36] A. Pizzi、D. Malz、A. Nunnenkamp 和 J. Knolle，《弥合经典与量子多体信息动力学之间的鸿沟》，《物理评论B》106，214303（2022）。[37] Y. Fuji 和 Y. Ashida，《测量诱导量子

临界性与连续监测》，《物理评论B》102，054302（2020）。[38] J. Iaconis、A. Lucas 和 X. Chen，《量子自动机电路中的测量诱导相变》，《物理评论B》102，224311（2020）。[39] O. Lunt、M. Szyniszewski 和 A. Pal，《测量诱导临界性与纠缠簇：一维和二维克利福德电路研究》，《物理评论B》104，155111（2021）。[40] S. Sharma、X. Turkeshi、R. Fazio 和 M. Dalmonte，《扩展型和长程幺正电路中的测量诱导临界性》，SciPost Phys. Core 5，023（2022）。[41] P. Sierant、M. Schir`o、M. Lewenstein 和 X. Turkeshi，《（d + 1）维稳定子电路中的测量诱导相变》，《物理评论B》106，214316（2022）。[42] S. P. Kelly、U. Poschinger、F. Schmidt-Kaler、M. P. A. Fisher 和 J. Marino，《混合电路动力学对量子通信的相干性要求》，SciPost Phys. 15，250（2023）。[43] A. Lavasani、Y. Alavirad 和 M. Barkeshli，《对称随机量子电路中的测量诱导拓扑纠缠相变》，《自然·物理》17，342–347（2021）。[44] S. Sang 和 T. H. Hsieh，《测量保护的量子相》，《物理评论研究》3，023200（2021）。[45] A. Lavasani、Y. Alavirad 和 M. Barkeshli，《（2 + 1）维监测随机量子电路中的拓扑序与临界性》，《物理评论快报》127，235701（2021）。[46] K. Klocke 和 M. Buchhold，《仅测量XZZX量子码中的拓扑序与纠缠动力学》，《物理评论B》106，104307（2022）。[47] A. Lavasani、Z.-X. Luo 和 S. Vijay，《监测量子动力学与Kitaev自旋液体》，《物理评论B》108，115135 2023（）。[48] R. Morral-Yepes、F. Pollmann 和 I. Lovas，《在广义簇模型中探测并稳定测量诱导的对称性保护拓扑相》，《物理评论B》108，224304（2023）。[49] G. Kells、D. Meidan 和 A. Romito，《弱监测自由费米子中的拓扑相变》，SciPost Phys. 14，031（2023）。[50] A. Nahum、J. Ruhman、S. Vijay 和 J. Haah，《随机幺正动力学下的量子纠缠增长》，Physical Review X 7，031016（2017）。[51] L. Causer、J. P. Garrahan 和 A. Lamacraft，《经典随机Fredkin链中的慢动力学与大偏差》，Physical Review E 106，10.1103/physreve.106.014128（2022）。[52] J. M. Kim 和 J. M. Kosterlitz，《受限固体对固体模型中的生长》，《物理评论快报》62，2289（1989）。[53] J. M. Kim、J. M. Kosterlitz 和 T. Ala-Nissila，《受限固体对固体模型中的表面生长与交叉行为》，Journal of Physics A: Mathematical and General 24，5569（1991）。[54] A.-L. Barab

´

Fractal Concepts in Surface Growth 1995 和 H. E. Stanley，《（剑桥大学出版社，）》。[55] J. G. Amar 和 F. Family，《表面生长中的普适性：标度函数与振幅比》，《物理评论A》45，5378 1992（）。[56] T. J. Oliveira、K. Dechoum、J. A. Redinz 和 F. D. A. Aar˜ão Reis，《从线性到非线性界面生长交叉过程中的普适与非普适特征》，《物理评论E》74

，011604（2006）。

[57] M. Kardar、G. Parisi 和 Y.-C. Zhang，生长界面的动态标度，《物理评论快报》56，889（1986）。[58] F. Edwards Samuel 和 D. R. Wilkinson，颗粒聚集体的表面统计，《伦敦皇家学会学报》10.1098/rspa.1982.0056（1982）。[59] R. Movassagh 和 P. W. Shor，局域系统中的超临界纠缠：量子物质面积律的反例，《美国国家科学院院刊》113，13278（2016）。[60] O. Salberger 和 V. Korepin，Fredkin 自旋链（2016），arXiv:1605.03842 [量子物理]。[61] L. Dell'Anna、O. Salberger、L. Barbiero、A. Trombettoni 和 V. E. Korepin，局域整数和半整数自旋链中的簇分解破缺及光锥缺失，《物理评论B》94，155140（2016）。[62] R. Movassagh，Fredkin 量子自旋链的能隙呈多项式小，《数学科学与应用年刊》3，531（2018）。[63] X. Chen、E. Fradkin 和 W. Witczak-Krempa，无能隙量子自旋链：多重动力学与共形波函数，《物理学杂志A：数学与理论》50，464002（2017）。[64] Clifford 门是将 Pauli 字符串算符变换为 Pauli 字符串算符的幺正算符。[65] D. Gottesman，达到量子汉明界的量子纠错码类，《物理评论A》54，1862（1996）。[66] D. Gottesman，量子计算机的海森堡表象（1998），arXiv:quant-ph/9807006 [量子物理]。[67] D. Gottesman，稳定子码与量子纠错（1997），arXiv:quant-ph/9705052 [量子物理]。[68] S. Aaronson 和 D. Gottesman，稳定子电路的改进模拟，《物理评论A》70，052328（2004）。[69] 我们所说的纠缠熵，是指任意 Rényi 熵，因为对于稳定子态而言，由于纠缠谱的平坦性，所有这些熵都相等 [82, 83]。[70] B. Kraus 和 J. I. Cirac，使用双量子比特门最优地生成纠缠，《物理评论A》63，062309（2001）。[71] 我们还可以考虑 Rényi 解纠缠器，它使跨越该键的双分区 n-阶 Rényi 熵最小化。我们对这类解纠缠器的数值结果表明，$n > 1$下的行为与冯·诺伊曼解纠缠器等价。[72] C. Chamon、A. Hamma 和 E. R. Mucciolo，涌现的不可逆性与纠缠谱统计，《物理评论快报》112，240501（2014）。[73] D. Shaffer、C. Chamon、A. Hamma 和 E. R. Mucciolo，量子电路中的不可逆性与纠缠谱统计，《统计力学杂志：理论与实验》2014，P12007（2014）。[74] Z.-C. Yang、A. Hamma、S. M. Giampaolo、E. R. Mucciolo 和 C. Chamon，量子多体动力学、热化与局域化中的纠缠复杂度，《物理评论B》96，020408（2017）。[75] S. True 和 A. Hamma，随机电路中的纠缠复杂度相变，《Quantum》6，818（2022）。[76] J. Odavi´c、G. Torre、N. Miji´c、D. Davidovi´c、F. Franchini 和 S. M. Giampaolo，纠缠的随机幺正算符、鲁棒性与复杂度，《Quantum》7，1115（2023）。[77] R. Islam、R. Ma、P. M. Preiss、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli 和 M. Greiner，在量子多体系统中测量纠缠熵

，《自然》**528**，77

(2015)。[78]H. Pichler、G. Zhu、A. Seif、P. Zoller 和 M. Hafezi，用于测量冷原子纠缠谱的测量协议，Physical Review X **6**，041033 (2016)。[79] A. M. Kaufman、M. E. Tai、A. Lukin、M. Rispoli、R. Schittko、P. M. Preiss 和 M. Greiner，通过孤立多体系统中的纠缠实现量子热化，《科学》**353**，794 (2016)，https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aaf6725。[80] R. Morral-Yepes、A. Smith、S. L. Shondi 和 F. Pollmann，幺正电路博弈中的纠缠转变 (2023)。[81] D. Fattal、T. S. Cubitt、Y. Yamamoto、S. Bravyi 和 I. L. Chuang，《稳定子形式主义中的纠缠》（2004），arXiv:quant-ph/0406168 [quant-ph]。[82] A. Klappenecker 和 M. Rotteler，《超越稳定子码 II：克利福德码》，IEEE Transactions on Informa- tion Theory **48**，2396（2002）。[83] N. Linden、F. Matus、M. B. Ruskai 和 A. Winter，《稳定子态的量子熵锥》，载于 *8th Con-ference on the Theory of Quantum Computation, Com-munication and Cryptography (TQC 2013)*，《Leibniz International Proceedings in Informatics》（LIPIcs），第 22 卷，S. Severini 和 F. Brandao 编（Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，Dagstuhl，德国，2013 年），第 270–284 页。