arXiv:2304.12970v1 [math.CV] 24 Apr 2023

Barthe 和 Cordero-Erausquin 的多重次调和高斯相关性

YI C. HUANG

Abstract. 我们简化了 Barthe 和 Cordero-Erausquin 关于多重次调和函数的高斯相关不等式证明。新的观察是复高斯情形下的二阶分部积分公式。

1. Introduction

二阶连续可微函数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$ 若对所有 $w\in\mathbb{C}^n$都满足 z的逐点非负性，则称其为多重次调和函数（简称 psh）

$$\sum_{1\le j,k\le n}\partial^2_{z_j\overline{z_k}}f(z)w_j\overline{w_k}\ge 0,$$

其中

$$\partial_{z_j}=\frac{1}{2}(\partial_{x_j}-i\partial_{y_j})\quad\text{and}\quad\partial_{\overline{z_j}}=\frac{1}{2}(\partial_{x_j}+i\partial_{y_j}).$$

这里， $z=x+iy$ 满足 x， $y\in\mathbb{R}^n$。定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的函数 f 称为圆对称函数，当且仅当

$$f(e^{i\theta}w)=f(w),\quad\forall\,\theta\in[-\pi,\pi],\quad\forall w\in\mathbb{C}^n.$$

考虑定义在 $\mathbb{C}^n$上的标准复高斯测度 $d\gamma$:

$$d\gamma(w)=\pi^{-n}e^{-|w|^2}d\ell(w),$$

其中 $d\ell$ 表示 $\mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$上的勒贝格测度。

最近， [BCE22]证明了以下重要结果。

定理 1.1（Barthe 和 Cordero-Erausquin）。设 f、 $g:\mathbb{C}^n\to[-\infty,\infty)$是两个拟亚纯函数（在无穷远处具有受控增长）。若 f 是圆对称的，则

$$\int fgd\gamma\ge\int fd\gamma\int gd\gamma.\tag{1.1}$$

关于高斯相关不等式的精彩综述，可参见 Barthe[Bar17] 。

2. Integration by parts

（1.1）中 [BCE22] 的证明与凸函数的实数情形类似（参见 Y. Hu [Hu97] 和 Schmuckenschl¨ager [Sch00]）中关于奥恩斯坦-乌伦贝克算子的讨论

$$\mathbb{L}f(w):=\frac{1}{4}\Delta f(w)-\frac{1}{2}\langle w,\nabla\rangle_{\mathbb{C}^n}f(w).$$

日期：2023年4月26日。2020年数学主题分类。主要分类：60E15；次要分类：32U05。关键词和短语：相关不等式、高斯测度、多重次调和函数。作者的研究得到中国国家自然科学基金（编号：11801274）资助。作者感谢 Sijie Luo（CSU）就集中不等式提供有益的交流，并感谢 Fuping Shi（NJNU）在每周举行的分析工作组中作详细报告。

利用 $w, \nabla_{\mathbb{C}^n} = (x + iy) \cdot (\nabla_x - i\nabla_y)$，我们可以将 $\mathbb{L}$ 展开为

$$\mathbb{L} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\partial^2_{x_j x_j} + \partial^2_{y_j y_j}\right) - \frac{1}{2}\left(x_j \partial_{x_j} + y_j \partial_{y_j}\right).$$

Sinc $\bar{}$ 由于多重次调和性涉及 $\partial\bar{\partial}$-算子，因此自然要使用 h

$$L = \sum_{j=1}^{n} \left(\partial^2_{z_j \overline{z_j}} - \overline{z_j}\partial_{\overline{z_j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} e^{|z|^2} \partial_{z_j}\left(e^{-|z|^2}\partial_{\overline{z_j}}\right).$$

为方便起见，我们引入一阶向量算子

$$\partial_{\overline{z}} = (\partial_{\overline{z_1}}, \partial_{\overline{z_2}}, \cdots, \partial_{\overline{z_n}}) \quad \text{and} \quad \partial_z = (\partial_{z_1}, \partial_{z_2}, \cdots, \partial_{z_n}).$$

我们有以下分部积分公式。

引理 2.1. 对于足够光滑的函数 $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$,

$$\int (Lf) g \, d\gamma = -\int \partial_{\overline{z}} f \cdot \partial_z g \, d\gamma = \int f(\overline{L} g) \, d\gamma,$$

其中 $\overline{L} = \sum_{j=1}^{n} (\partial^2_{z_j \overline{z_j}} - z_j \partial_{z_j})$。

此外，如果 f 是圆对称的，

$$\int (L^2 f) g \, d\gamma = \sum_{1 \le j,k \le n} \int \partial^2_{z_j \overline{z_k}} f \cdot \partial^2_{z_k \overline{z_j}} g \, d\gamma.$$

第一部分是标准结果。对于第二部分，我们注意到其可交换性 y

$$\partial_{z_j} L = L \partial_{z_j}, \quad \forall\, 1 \le j \le n, \tag{2.1}$$

以及以下两个算子关系

$$L = \mathbb{L} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \partial_{x_j} - x_j \partial_{y_j}\right)$$

and

$$\overline{L} = \mathbb{L} - \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \partial_{x_j} - x_j \partial_{y_j}\right).$$

因此， f是圆对称的意味着

$$Lf = \overline{L} f = \mathbb{L} f \quad \text{and} \quad L^2 f = \mathbb{L}^2 f = \overline{L} L f.$$

第二部分可由使用（2.1）以及第一部分中的两个恒等式得出。

注 2.2. 注意，分部积分公式还意味着

$$\int (-Lf) \bar{f} \, d\gamma = \int |\partial_{\overline{z}} f|^2 \, d\gamma \ge 0.$$

3. A shorter proof of Theorem 1.1

用 $P^{\mathbb{L}}_t$（分别记为 P^{L}_t）表示 $L^2(d\gamma)$ 上的半群（分别为复 $L^2(d\gamma)$）。我们遵循 Barthe 和 Cordero-Erausquin 的策略 [BCE22]。对于拟亚纯函数 f和 g，其中 f 也具有圆对称性，引入取值于 $\mathbb{R}$ 的函数

$$\alpha(t) := \int (P^{\mathbb{L}}_t f) g \, d\gamma, \quad t \ge 0.$$

由于 f 是圆对称的，我们有

$$\alpha''(t) = \int (\mathbb{L}^2 P^{\mathbb{L}}_t f) g \, d\gamma = \int (L^2 P^{L}_t f) g \, d\gamma.$$

S由于 $P_t^L f = P_t^{\mathbb{L}} f$ 也是多重次调和且圆对称的，根据引理 2。 1

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= \sum_{1\le j,k\le n} \int \partial^2_{z_j\overline{z_k}} P_t^L f \cdot \partial^2_{z_k\overline{z_j}} g \, d\gamma \\ &= \int \mathrm{Tr}\left(D^2_{\mathbb{C}}(P_t^L f) D^2_{\mathbb{C}} g\right) d\gamma \ge 0.\end{aligned}$$

这里 $D^2_{\mathbb{C}} h$ 表示厄米矩阵 $(\partial^2_{z_j\overline{z_k}} h)_{1\le j,\ k\le n}$。注意， α 有一个有界极限 $\alpha(\infty)$。由 α 的凸性可知，它在 $[0,\infty)$ 上递减，而相关不等式（1.1）对应于 $\alpha(0) \ge \alpha(\infty)$。证毕。

注 3.1. 总之，我们的证明只需对 P_t^L 有较少的了解。

References

[Bar17] Franck Barthe. 高斯相关不等式（据 Thomas Royen）。Bourbaki 研讨班，第 69` 届，2017 年。[BCE22]Franck Barthe 和 Dario Cordero-Erausquin. 多重次调和函数的高斯相关不等式。arXiv 预印本 arXiv:2207.03847，2022 年。[Hu97] Yaozhong Hu. 带有精确余项的 Itô-Wiener 混沌展开、相关性与方差不等式。《理论概率论杂志》，10(4):835–848，1997 年。[Sch00] Michael Schmuckenschläger. 相关不等式。《数学新闻》，214(1):121–127，2000 年。

School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, People's Republic of China电子邮箱: Yi.Huang.Analysis@gmail.com 个人主页：https://orcid.org/0000-0002-1297-7674