arXiv:2304.13047v1 [math.PR] 25 Apr 2023

变形随机带矩阵中的 BBP现象

BENSON AU

Abstract. 我们研究随机周期带状矩阵的加性有限秩扰动，并假设该扰动的非平凡特征值不依赖于维数。对于带宽为 $b_N \gg N^{\varepsilon}$ 的情形，我们在此模型中建立了特征值/特征向量 BBP 转变。我们的分析依赖于对一般向量态进行的矩方法计算。

Contents

1. 引言2. 背景 3. 主要结果的 1
证明 3.1. 各向同性全局定律 5
3.2. 定理的证明 1.3参考文献 8
8
19
23

1. Introduction

理解随机矩阵的谱统计是数学、物理学与统计学交汇处的一个基础问题。这种交汇在经典Wigner系综中已有体现；Wigner 最初提出这一平均场模型，将其作为大型量子系统哈密顿量的一个易于处理的替代模型。在此后的数十年间，Wigner 矩阵的定义变得越来越广泛。为明确起见，我们在下文给出本文采用的定义。

定义 1.1（Wigner 矩阵）。设 $(\mathbf{X}_N(i,j) : 1 \le i \le j \le N \in \mathbb{N})$ 是一族相互独立的随机变量，满足

(i) 非对角元 $(i < j)$ 为复值、均值为零且方差为 σ^2；(ii) 对角元 $(i = j)$ 为实值且具有有限方差；(iii) 矩满足强一致控制：对任意 $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{1 \le i \le j \le N \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|\mathbf{X}_N(i,j)|^m] < \infty. \tag{1}$$

我们称由 $\mathbf{W}_N(i,j) = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{X}_N(i,j)$ 定义的随机厄米矩阵为方差为 σ^2 的归一化Wigner矩阵，并记作 $\mathbf{W}_N \overset{d}{=} \text{Wigner}(N, \sigma^2)$。上下文明确时，我们简称其为 Wigner 矩阵。下文中，当我们提到 Wigner 矩阵 $\mathbf{W}_N$ 时，默认指一列 Wigner 矩阵 $(\mathbf{W}_N)_{N \in \mathbb{N}}$。

由于是厄米的，我们可以对 Wigner 矩阵的特征值排序 $\lambda_1(\mathbf{W}_N) \le \cdots \le \lambda_N(\mathbf{W}_N)$。在对矩阵元素的分布作出一些简化假设的情况下，Wigner 解决了这些特征值的极限分布这一自然问题 [Wig55，Wig 58] ；而 Pastur 则在一般情况下，将矩假设 (iii) 替换为弱得多的 Lindeberg 条件，解决了这一问题

Date: 2023年4月27日。加州大学伯克利分校统计学系，bensonau@berkeley.edu。

条件 [Pas72] （另见 [BS10，定理 2.9]）：如果 $\mathrm{W}_N \overset{d}{=} \text{Wigner}(N, \sigma^2)$，那么经验谱分布 $\mu_{\mathbf{W}_N} = \frac{1}{N}\sum_{k\in[N]} \delta_{\lambda_k(\mathbf{W}_N)}$ 弱地几乎处处收敛于半圆分布 $\mu_{sc,\ \sigma^2}(dx) = \frac{\mathbb{1}\{|x|\le 2\sigma\}}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}\,dx$。

半圆律支配着全局特征值的行为；然而，物理上的解释主要涉及矩阵的局部特征值统计，尤其是其猜想中的普适性[Wig67]。由安德森开创的特征向量统计 [And58], 是相关的研究方向。特别地，Anderson 紧束缚模型表现出局域化特征函数[FS83、FMSS85、AM93、Aiz94] 以及泊松局部特征值统计 [Min96]。经过长期研究，Wigner 矩阵的普适性现象如今已得到充分理解 [BGK17、EY17]：其中的一些亮点包括局部特征值统计的 GOE/GUE 普适性，以及特征向量的完全离域化。随机带状矩阵作为一种自然的插值模型出现，用于研究这两个相之间的转变 [Bou18]。

定义 1.2 (随机带状矩阵)。 设 $(\mathbf{X}_N(i,\ j)\colon\ 1 \le i \le j \le N \in \mathbb{N})$ 如定义1.1所述。对于带宽 $(b_N : N \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}_0$，我们定义

$$\xi_N = \min\{2b_N + 1, N\}.$$

类似地，我们定义 N-周期距离

$$|i-j|_N = \min\{|i-j|, N - |i-j|\}.$$

带宽为 b_N 的周期 (0, 1)-带状矩阵是一个实对称矩阵 $\mathbf{B}_N$，其元素为

$$\mathbf{B}_N(i,j) = \mathbb{1}\left\{|i-j|_N \le b_N\right\}. \tag{2}$$

我们将由下式定义的随机厄米矩阵称为

$$\mathbf{\Xi}_N = \frac{1}{\sqrt{\xi_N}}\mathbf{B}_N \circ \mathbf{X}_N \tag{3}$$

方差为 σ^2 、带宽为 b_N 的归一化周期随机带状矩阵，并记作$\mathbf{\Xi}_N \overset{d}{=} \text{RBM}(N, \sigma^2, b_N)$。这里，$\circ$表示逐项乘积。上下文明确时，我们简称其为随机带状矩阵。下文中，提及随机带状矩阵 $\mathbf{\Xi}_N$ 时，我们默认指随机带状矩阵序列 $(\mathbf{\Xi}_N)_{N\in\mathbb{N}}$。

一个由来已久的猜想提出，随机带状矩阵存在两分性：带宽较大时出现离域化和 Wigner 局部统计；带宽较小时出现局域化和泊松局部统计；并且在临界带宽速率 $b_N \asymp \sqrt{N}$ [CMI90，FM91] 附近发生急剧转变。近期的研究进展已证实，当 $b_N \gg N^{3/4}$[BYY20] 时会出现离域化（事实上是量子唯一遍历性），并证实当 $b_N \ll N^{1/4}$ [CPSS、CS] 时会出现局域化。

Wigner 矩阵也出现在统计学中，变形版本在此被用作尖峰模型的原型。在这里，谱性质可用于区分尖峰模型与零假设情形[BBAP05，P´ec06], a 一种称为 BBP 相变的现象。为了说明这一转变，我们先回顾 Wigner 矩阵在零假设情形下的相关结果。我们假设 (i) 中的非对角元是独立同分布的，对角元 (ii)也同样如此，但不再假设存在 (iii)中所述的矩。回忆

(W1) 已知，极端特征值收敛到半圆分布的支撑边缘，当且仅当非对角元具有有限四阶矩 $\mathbb{E}[|\ \ _N\ 1,2\ |^4] < \infty\mathbf{X}()$BYBS。因此，例如，$\lim(\mathrm{W}\ )_{\text{as}}$；然而，若不存在有限四阶矩，则 $\liminf_{N\to\infty}\lambda_1(\mathrm{W}_N) \overset{\text{a.}}{=} -\infty^{\text{s}}$。 [88, 10] $N\to\infty\ \lambda_1\ \ _N \doteq -2\sigma$

(W2) GOE/GUE 中极端特征值的涨落发现于 [TW94，TW96]并且在 [Sos99] 中证明了其普适性，前提是矩阵元具有次高斯性。普适性的最优衰减速率在 [LY14] 中被证明为 $\lim_{s\to\infty} s^4\mathbb{P}(|\mathbf{X}_N(1,2)| > s) = 0.$

例如，$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(N^{2/3}(\lambda_N(\mathbf{W}_N)-2\sigma)\le s\sigma)=F_\beta(s)$，其中 F_β是参数为 β 的 Tracy–Widom分布的累积分布函数。特别地，我们注意到涨落的 $N^{-2/3}$ 尺度。

（W3）如前所述，ℓ^2-归一化的特征向量（$\mathbf{w}_N^{(k)}$）$_{k\in[N]}$ 的 $\mathbf{W}_N$ 完全是去局域化的。例如，如果我们像 （iii） 中那样假设具有有限矩，那么对任意 ε， $D>0$，$\mathbb{P}$（$\max_{k\in[N]}\|\mathbf{w}_N^{(k)}\|_\infty\ge N^{\varepsilon-1/2}$）$\le N^{-D}$ [BGK17，定理 1.2。10]。

尖峰 Wigner 模型向我们的矩阵引入了一个加性扰动 $\mathbf{A}_N$。我们假设 $\mathbf{A}_N$ 是自伴的，并且具有固定秩 $r_N\equiv r$。我们进一步假设 $\mathbf{A}_N$ 的非平凡特征值不依赖于 N：将它们记为 $\theta_1\le\cdots\le\theta_r$。由于该扰动具有有限秩，尖峰模型 $\mathbf{M}_N=\mathbf{W}_N+\mathbf{A}_N$ 的经验谱分布仍然收敛于半圆分布。尽管如此，$\mathbf{A}_N$ 的存在可以通过极值谱统计量检测出来（参见 （W1）-（W3）） 。回顾一下：

(S1) $\mathbf{A}_N$ 的每个特征值 θ_s ，只要满足 $|\theta_s|>\sigma$ ，都会在 $\mathbf{M}_N$中产生一个离群特征值。特别地，如果 $L_{-\sigma}=\#(\{s\in[r]:\theta_s<-\sigma\})$ 且 $L_{+\sigma}=\#(\{s\in[r]:\theta_s>\sigma\})$，那么

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_k(\mathbf{M}_N)\overset{\text{a.s.}}{=}\theta_k+\frac{\sigma^2}{\theta_k}<-2\sigma,\qquad\forall k\in[L_{-\sigma}];$$
$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{L_{-\sigma}+1}(\mathbf{M}_N)\overset{\text{a.s.}}{=}-2\sigma;$$
$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{N+1-k}(\mathbf{M}_N)\overset{\text{a.s.}}{=}\theta_{r+1-k}+\frac{\sigma^2}{\theta_{r+1-k}}>2\sigma,\qquad\forall k\in[L_{+\sigma}];$$
$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{N-L_{+\sigma}}(\mathbf{M}_N)\overset{\text{a.s.}}{=}2\sigma.$$

(S2) 离群特征值的涨落具有非普适性。我们省略此情形下结果的精确表述，仅指出涨落的 $N^{-1/2}$ 尺度。

(S3) $\mathbf{M}_N$ 中离群特征值的特征子空间与 $\mathbf{A}_N$中对应特征值的特征子空间具有非平凡的对齐。特别地，设 $\mathbf{m}_N^{(k)}$ 为与特征值 $\lambda_k(\mathbf{M}_N)$对应的单位特征向量。若 $k\in[L_{-\sigma}]$，则

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{\ker(\theta_k\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(k)})\right\|_2^2\overset{\text{a.s.}}{=}1-\frac{\sigma^2}{\theta_k^2},$$

其中 $P_{\ker(\theta_k\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}$表示投影到特征子空间 $\ker(\theta_k\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)$上的正交投影；然而，若 $\theta_{k'}\ne\theta_k$，则

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{\ker(\theta_{k'}\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(k)})\right\|_2\overset{\text{a.s.}}{=}0.$$

同样地，如果 $k\in[L_{+\sigma}]$，则将上述上标中的所有 k 替换为 $N+1-k$，并将下标中的所有 k 替换为 $r+1-k$。

(S4) 另一方面，如果 θ_k 不满足 (S1) 中关于产生离群特征值的阈值条件，那么 $\mathbf{M}_N$ 中相应特征值的特征子空间与 $\ker(\mathbf{A}_N)^\perp$渐近正交。特别地，如果 $\theta_k\in[-\sigma,0)$，则

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{\ker(\theta_{k'}\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(k)})\right\|_2\overset{\text{a.s.}}{=}0,\qquad\forall k'\in[r].$$

同样地，如果 $\theta_{r+1-k}\in(0,\sigma]$，则将上述的 $\mathbf{m}_N^{(k)}$ 替换为 $\mathbf{m}_N^{(N+1-k)}$。

式 (S1) 中的离群现象最初是在高斯酉系综中得到证明的 [P´ec06]，随后推广到满足 Poincar´e 不等式的 Wigner 矩阵 [CDMF09]，，之后又放宽为四阶矩Lindeberg型条件 [PRS13,RS13]，但代价是只能得到依概率收敛。在复数情形下，我们注意到，假设 $\mathrm{Re}(\mathbf{X}_N(i,j))\perp\!\!\!\perp\mathrm{Im}(\mathbf{X}_N(i,j))$ 同分布，这一条件始终成立。文献 [CDMF09,CDMF12,PRS13,RS13] 研究了所提及的涨落

情况 (S2)。若进一步假设矩阵元具有一致次指数衰减，则可得到精细得多的结果，此时可以利用各向同性局部半圆律 [KY13，KY14], ，但我们不再对此作进一步讨论。式 (S3) 中的特征向量对齐现象，最初是在一般的酉不变／正交不变随机矩阵中得到证明的 [BGN11] ，随后推广到满足 Poincar´e 不等式的 Wigner 矩阵 [Cap13]。对于相同的不变系综，在秩一扰动 (S4) 下的非对齐现象已在文献中得到证明 [BGN11] 。 $r = 1$

本文研究尖峰 RBM 模型 $\mathbf{M}_N = \mathbf{\Xi}_N + \mathbf{A}_N$。我们的主要结果证明，对于带宽 $b_N \gg N^{\varepsilon}$，特征值/特征向量 BBP 转变依然存在。

定理 1.3。设 $\mathbf{\Xi}_N$ 是定义*1.2*中的 RBM。若 $b_N \gg N^{\varepsilon}$ 对某个 $\varepsilon > 0$成立，则尖峰 RBM 模型$\mathbf{M}_N = \mathbf{\Xi}_N + \mathbf{A}_N$ 在*(S1)*、*(S3)*和*(S4)*中呈现特征值/特征向量 BBP 转变。

我们简要概述定理1.3的证明。对于 Wigner 矩阵 $\theta \mathbf{a}_N \mathbf{a}_N^*$ 的秩一扰动$\mathbf{W}_N$，Noiry 计算了 μ_θ 关于向量态$\mathbf{W}_N + \theta \mathbf{a}_N \mathbf{a}_N^*$的极限谱测度 $\tau_N(\cdot) = \langle \cdot \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N \rangle$ [Noi21，命题 2]。特别地，

$$\mu_\theta(dx) = \frac{\mathbb{1}\{|x| \le 2\sigma\}}{2\pi} \frac{\sqrt{4\sigma^2 - x^2}}{\theta^2 + \sigma^2 - \theta x} dx + \mathbb{1}\{|\theta| > \sigma\} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\theta^2}\right) \delta_{\theta + \frac{\sigma^2}{\theta}}(dx). \tag{4}$$

W 的强收敛（W1）与$\mathbf{W}_N$ 的 Weyl 交错不等式 [HJ13，定理 4.31] 随后推出了（S1）和（S3）在尖峰 Wigner 模型中的结论，见 $r = 1$ [Noi21，推论 3]（事实上，（S4）也可由同样的计算得到）。Noiry 对（4）的证明使用了 [KY17中的局部律，定理 122]，但他提到，对于标准基向量，更简单的论证就足够了（例如，[Cap13中的预解式估计，命题 62]）。

不同于通常通过预解式研究离群特征值的方法，我们的分析依赖于对一般向量态进行矩方法计算。特别地，我们在命题3.6中证明了一个看似无害的各向同性全局律。其最简单的形式表述如下：如果 $b_N \gg N^{\varepsilon}$ 对于某个$\varepsilon > 0$，那么

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr}\left(\prod_{s=1}^{r} \mathbf{x}_N^{(s-1)} \mathbf{y}_N^{(s)*} \mathbf{\Xi}_N^{m_s}\right) \overset{\text{a.s.}}{=} \prod_{s=1}^{r} \left[\lim_{N\to\infty} \langle \mathbf{x}_N^{(s)}, \mathbf{y}_N^{(s)} \rangle \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\operatorname{Tr}(\mathbf{\Xi}_N^{m_s})\right]\right], \tag{5}$$

其中 $\mathbf{x}_N^{(r)} = \mathbf{x}_N^{(0)}$ 。定理 1.3 的证明现在即可得出。事实上，设 $\mathbf{A}_N = \sum_{s=1}^{r} \theta_s \mathbf{a}_N^{(s)} \mathbf{a}_N^{(s)*}$为该扰动的谱分解。公式 (5) 告诉我们，对于任意 $s' \in [r]$， $\mathbf{\Xi}_N + \mathbf{A}_N$相对于向量态 $\tau^{(s')}{}_N(\cdot) = \langle \cdot \mathbf{a}^{(s')}{}_N, \mathbf{a}^{(s')}{}_N \rangle$ 的极限矩，与 $\mathbf{W}_N + \theta_{s'} \mathbf{a}^{(s')}{}_N \mathbf{a}_N^{(s')*}$) 相对于同一向量态的极限矩相同。由于 (4) 中的测度由其矩唯一确定（因为它是紧支撑的），这表明 $\mathbf{\Xi}_N + \mathbf{A}_N$相对于向量态 $\tau^{(s')}{}_N$的极限谱测度仍由 $\mu_{\theta_{s'}}$给出。最后，我们利用 BvH 的强收敛、推论 2.18] 以及 Weyl 交错不等式的归纳应用，完成证明。

注 1.4. 自然地，我们可以询问定理 1.3 中最优带宽速率。上述策略证明了：只要我们有各向同性全局定律以及 $\mathbf{\Xi}_N$ 的强收敛，对于 $\mathbf{\Xi}_N$ ，特征值/特征向量 BBP 转变就成立。若 $b_N \gg 1$，则式 (5) 中的依概率收敛仍然成立。此时的限制因素是 $\mathbf{\Xi}_N$ 的强收敛。这里存在一种“稀疏性与元素可积性之间的权衡” [BvH，注 7.13]。例如，若假设一致有界 $\|\mathbf{X}_N(i,j)\|_p \le (Cp)^{\alpha}$，其中常数 C，$\alpha \in [0, \infty)$与 p 无关，则对于带宽 $b_N \gg [\log(N)]^{6(1+\alpha)}$ [，有 $\|\mathbf{\Xi}_N\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 2\sigma$BGP14，定理 1.4],，其中 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ 表示依概率收敛（另见 [BvH，推论 2.18]）。对于 Rademacher 元素，当带宽为 $b_N \gg \log(N)$ 时，已知收敛 $\|\mathbf{\Xi}_N\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 2\sigma$ [Sod10，定理 1.4]；对于高斯元素，速率 $b_N \gg \log(N)$ 实际上是最优的 [BvH16，推论 4.4]。因此，我们还

具有 (S1)、 (S3)和 (S4) 依概率收敛 对于达到最优带宽速率的尖峰高斯随机带矩阵$b_N \gg \log(N)$。

注 1.5. 我们分析的一个关键依据是对 (4) 中极限谱测度的计算。鉴于 μ_θ 的矩确定性，原则上仅依据 (5) 就能完成这一计算。事实上，(5) 中矩阵 $(\mathbf{x}_N^{(s-1)}\ \mathbf{y}_N^{(s)*})_{s=1}^r$ 与 $\mathbf{\Xi}_N$ 之间的关系，是无穷小自由性的一个特例；这一概念由 [BS12] 提出。Shlyakhtenko 运用无穷小框架，从 $\frac{1}{N}$ 修正 [Shl18] 的角度阐释了酉不变系综中的特征值 BBP 相变。随后，Collins、Hasebe 和 Sakuma 在 [CHS18] 中借助他们的循环单调独立性框架进一步发展了这一理论。C´ebron 、 Dahlqvist 和 Gabriel 最近在 [CDG] 中取得的突破统一了这些及其他概念（例如条件自由性 [BLS96] 和单调独立性 [Mur01]），并运用非交换概率方法严格推导出 BBP 相变。特别地，在 GUE 的秩一扰动情形下，(4) 的计算可实现为单调卷积 $\mu_\theta = \delta_\theta \rhd \mu_{\mathcal{SC},\sigma^2}$ [CDG，第 1.4] 节。由于我们不会使用这一框架，因此不再对此作进一步讨论。

我们强调定理 1.3 的一个有趣特征。对于 (S1)、(S3) 和 (S4)，关于 [BGN11] 中酉不变／正交不变随机矩阵的原始证明，关键在于利用了不变系综的特征向量服从 Haar 分布这一事实。作者指出，这些证明或许可以推广到具有类 Haar 特征向量的随机矩阵 [BGN11，备注 2。15]。另一方面，定理 1.3 在已确立的局域化区域 $b_N \ll N^{1/4}$ 中仍然成立。例如，考虑一个秩一扰动 $\mathbf{A}_N = \theta \mathbf{a}_N \mathbf{a}_N^*$，其中 $\theta < -\sigma$。(S3) 中的对齐意味着以下收敛

$$\lim_{N\to\infty} |\langle \mathbf{a}_N, \mathbf{m}_N^{(1)} \rangle|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} 1 - \frac{\sigma^2}{\theta^2}.$$

当 $\frac{\sigma^2}{\theta^2}$ 很小时，这意味着尖峰模型 $\mathbf{M}_N = \mathbf{\Xi}_N + \theta \mathbf{a}_N \mathbf{a}_N^*$ 的特征向量 $\mathbf{m}_N^{(1)}$ 具有扰动的特征向量 $\mathbf{a}_N$ 的形态：如果 $\mathbf{a}_N$ 是局域化的，那么 $\mathbf{m}_N^{(1)}$ 也如此；如果 $\mathbf{a}_N$ 是离域化的，那么 $\mathbf{m}_N^{(1)}$ 也如此。

本文不讨论尖峰 RBM 模型中离群特征值的涨落（特别是 (S2) 的类似结果）。在这里，涨落的 尺度 取决于扰动特征向量的形状。这将成为未来工作的主题。参见 [Au21，第2] 节，其中给出了启发式分析和模拟。

注 1.6。我们针对 RBM 陈述了结果，但各向同性全局定律对于更一般的 k_N-稀疏 Wigner 矩阵也成立。在这里，将逐项乘积 (3) 中的 (0, 1)-带状矩阵 $\mathbf{B}_N$（相应地，将归一化项 $\sqrt{\xi_N}$）替换为顶点集 $[N]$ 上某个 k_N-正则图的邻接矩阵 $\mathbf{B}_N$（相应地，替换为归一化项 $\sqrt{k_N}$）。如果 $k_N \gg N^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 成立，那么我们再次得到该模型强收敛于半圆律 [BvH，推论 2.18]。因此，定理 1.3 可推广到 k_N-稀疏 Wigner 矩阵：证明所需的细微修改包含在注 3.2 和 3.4 中。

致谢。 作者感谢 Guillaume C´ebron 将以下作品介绍给他[Noi21、CDG]。作者还感谢 Jorge Garza-Vargas 和 Shirshendu Ganguly，感谢他们进行的许多有益交流。

2. Background

令 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 表示复 $N \times N$ 矩阵的集合。对于厄米矩阵 $\mathbf{H}_N \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$，我们将 $\mathbf{H}_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k(\mathbf{H}_N) \mathbf{h}_N^{(k)} \mathbf{h}_N^{(k)*}$ 记作其谱分解。

定义 2.1（相对于态 ψ 的谱测度）。设 $\psi : \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是一个态（即满足 $\psi(\mathrm{I}_N) = 1$ 的正线性泛函）。我们将 $\mathbf{H}_N$ 相对于 ψ 的谱测度定义为唯一的概率测度 $\mu^{\psi}{}_{\mathbf{H}_N}$，使得

$$\int x^m \, \mu^{\psi}_{\mathbf{H}_N}(dx) = \psi(\mathbf{H}_N^m), \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

示例 2.2（关于向量态的谱测度）。经验谱分布$\mu_{\mathbf{H}_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{\lambda_k\,(\mathbf{H}_N)}$ 是关于归一化迹 $\mu_{\mathbf{H}_N} = \mu^{\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,\mathbf{H}_N}$的谱测度。对于向量态 $\psi(\cdot) = \langle \cdot \mathbf{u}_N,\ \mathbf{u}_N \rangle$，我们使用记号 $\mu^{\mathbf{u}_N}{}_{\mathbf{H}_N}$。谱分解意味着

$$\mu^{\mathbf{u}_N}_{\mathbf{H}_N} = \sum_{k=1}^{N} |\langle \mathbf{u}_N, \mathbf{h}_N^{(k)} \rangle|^2 \delta_{\lambda_k(\mathbf{H}_N)}.$$

更一般地，我们需要计算以下形式的量

$$\prod_{s=1}^{r} \left\langle p_s(\mathcal{H}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}, \mathbf{y}_N^{(s)} \right\rangle = \prod_{s=1}^{r} \mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{H}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*} \right),$$

其中 $p_s(\vec{z}) \in \mathbb{C}\langle z_i : i \in I \rangle$ 是作用于一族厄米矩阵 $\mathcal{H}_N = (\mathbf{H}_N^{(i)})_{i\in I}$上的非交换多项式。我们将内积写成迹，以提示此类计算通常采用的图示方法，并稍作修改以区分矩阵 $\mathbf{x}_N^{(s)}$ $\mathbf{y}_N^{(s)*}$。

定义 2.3（矩阵图）。多重有向图 $G = (V, E, \mathrm{src}, \mathrm{tar})$ 由一个非空顶点集 V、一个边集 E以及方向映射 src、tar : $E \to V$组成，其中方向映射指示每条边的源点和目标点。测试图 $T = (G, \gamma)$ 是一个有限多重有向图 G，带有边标签 γ： $E \to I$。对于划分 $\pi \in \mathcal{P}(V)$，我们通过合并 G 的顶点来构造商测试图 $T^\pi = (G^\pi, \gamma^\pi)$，使得 $V^\pi = \pi$。底层多重有向图 $G^\pi = (V^\pi, E^\pi, \mathrm{src}^\pi, \mathrm{tar}^\pi)$ 及其关联的边标签 $\gamma^\pi : E^\pi \to I$ 随后可写为

(i) $V^\pi = V/\sim_\pi = \{[v]_\pi : \ v \in V\}$ 和 $E^\pi = E$;
(ii) $\mathrm{src}^\pi(e) = [\mathrm{src}(e)]_\pi$ 和 $\mathrm{tar}^\pi(e) = [\mathrm{tar}(e)]_\pi$; (iii) $\gamma^\pi = \gamma$。

为方便起见，我们简单地写作 $G^\pi = (V^\pi, E)$。稍微滥用一下记号，我们常将测试图 T 及其底层多重有向图 G 互换使用。例如，对于测试图的顶点集和边集，我们也分别使用记号 $\mathscr{V}(T)$ 和 $\mathscr{E}(T)$。

我们可以计 算测试图 T 在矩阵族 $\mathcal{M}_N = (\mathbf{M}_N^{(i)})_{i\in I}$ 上的值，所用公式为 la

$$\chi(T, \mathcal{M}_N) := \sum_{\phi : V \to [N]} \prod_{e \in E} \mathbf{M}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)),$$

其中 $(\phi(e)) := (\phi(\mathrm{tar}(e))\ \phi(\mathrm{src}(e))) \in [N]^2$。类似地，我们定义

$$\chi^0(T, \mathcal{M}_N) := \sum_{\phi : V \hookrightarrow [N]} \prod_{e \in E} \mathbf{M}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)),$$

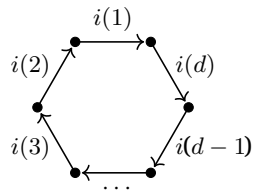
其中 ϕ： $V \hookrightarrow [N]$ 表示一个单射。函数 χ 和 χ^0 由 M¨obius 公式联系起来

$$\chi(T, \mathcal{M}_N) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \chi^0(T^\pi, \mathcal{M}_N).$$

例 2.4（矩）。对于一个度数为 $i \in I\rangle$ 的单项式 $p(\vec{z}) = z_{i(1)} \cdots z_{i(d)} \in \mathbb{C}\langle z_i$，

$$\mathrm{Tr}(p(\mathcal{M}_N)) = \chi(C_p, \mathcal{M}_N) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(\mathscr{V}(C_p))} \chi^0(C_p^\pi, \mathcal{M}_N), \tag{6}$$

其中 C_p 是测试图

(7)
$$C_p = \quad$$


例 2.5 （随机带状矩阵）。 设 $\mathcal{W}_N = (\mathbf{W}_N^{(i)})_{i\in I}$ 是一族独立Wigner矩阵 $\mathbf{W}_N^{(i)} \overset{d}{=} \mathrm{Wigner}(N, \sigma_i^2)$（定义 1.1 中所述）。该族中的混合矩 $\mathcal{W}_N$ 在大维数极限下由自由独立性决定 [Voi91、Dyk93]: 若 $p(\vec{z})$ 是例2.4中的一个单项式，则

(8)
$$\tau(p) := \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(p(\mathcal{W}_N))\right] = \sum_{\pi\in\mathcal{NC}_2(d)} \prod_{\{j,k\}\in\pi} \sigma_{i(j)}\sigma_{i(k)} \mathbb{1}\{i(j) = i(k)\},$$

其中 $\mathcal{NC}_2(d)$ 是 $[d]$ 的非交叉对分拆集合。我们证明了，对于一族 $\mathcal{Z}_N = (\mathbf{\Xi}_N^{(i)})_{i\in I}$ 独立 RBM $\mathbf{\Xi}_N^{(i)} \overset{d}{=} \mathrm{RBM}(N, \sigma_i^2, b_N^{(i)})$（定义1.2 中所述）的情形，在假设 $b_N^{(i)} \gg 1$ 对每个 $i \in I$ [Au18], 下，同样的收敛性也成立；这推广了单个 RBM $\#(I) = 1$[BMP91]。

我们简要回顾一下如何利用定义 2.3中的图形式主义证明（8）。例 2.4 将计算归结为理解 $\mathbb{E}[\chi^0(C_p^\pi, \mathcal{Z}_N)]$ 对每个$\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{V}(C_p))$ 的渐近性。结果表明，在极限中只有一类特定的图会保留下来，即所谓的双树。在给出定义之前，先引入一些记号，以便从商测试图 T^π中提取相关信息。

定义 2.6（图投影）。设 $G = (V, E, \mathrm{src}, \mathrm{tar})$ 是一个多重有向图。对于 $\pi \in \mathcal{P}(V)$，我们根据 G^π 的平行边，在边 E 上定义一个等价关系:

$$e \sim_\pi e' \iff \{[\mathrm{tar}(e)]_\pi, [\mathrm{src}(e)]_\pi\} = \{[\mathrm{tar}(e')]_\pi, [\mathrm{src}(e')]_\pi\}.$$

我们记 $[e]_\pi = \{e' \in E : e' \sim_\pi e\}$，并记 $[E]_\pi = \{[e]_\pi : e \in E\}$。我们将自环的投影 $[E]_\pi^{(1)} = \{[e]_\pi \in [E]_\pi : [\mathrm{tar}(e)]_\pi = [\mathrm{src}(e)]_\pi\}$ 与非环边 $[E]_\pi^{(2)} = \{[e]_\pi \in [E]_\pi : [\mathrm{tar}(e)]_\pi \neq [\mathrm{src}(e)]_\pi\}$分开。注意，$\underline{G^\pi} := (V^\pi, [E]_\pi^{(2)})$ 是 G^π 的底层简单图。若 π 是单元素分拆，则 $G^\pi = G$，因此我们在记号中省略它（例如，$[e]$ 和 $[E]$）。

这使我们能够将双树这一直观概念形式化。

定义 2.7（双树）。双树是一个多重有向图 $G = (V, E, \mathrm{src}, \mathrm{tar})$，满足 （i）不存在自环：$[E]^{(1)} = \emptyset$；（ii）每条边的重数均为二：对于每个 $e \in E$，$\#([e]) = 2$；（iii）底层简单图 $\underline{G} = (V, [E])$ 是一棵树。

双树的平行边成对出现，因此可以写作 $[E] = \{\{e, e'\} : e \in E\}$。如果测试图 $T = (G, \gamma)$ 满足 G 是一个双树，并且对于每一对平行边 $\{e, e'\} \in [E]$，$\gamma(e) = \gamma(e')$，则称其为带色双树。

将引理 4 特化到 [Au18，再将其应用于 3] 的商 C_p，即可得到

(9)
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\chi^0(C_p^\pi, \mathcal{Z}_N)\right] = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\{e,e'\}\in[\mathscr{E}(C_p)]_\pi} \sigma_{\gamma(e)}^2 & \text{if } C_p^\pi \text{ is a colored double tree;} \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

由此即可得到（8）。

当然，同样的形式体系也可以应用于 $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)],$，但将来自 $\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*$ 的贡献分离出来会更加方便。

例 2.8（加权矩）。对于一个 $p(\vec{z}) = z_{i(1)}\cdots z_{i(d)} \in \mathbb{C}\langle z_i : \ i \in I\rangle$ 度数为d的单项式，我们定义测试图

$$T_p = \quad \underset{v_0}{\bullet} \xleftarrow{i(1)} \underset{v_1}{\bullet} \xleftarrow{\cdots} \underset{\cdots}{\bullet} \xleftarrow{i(d)} \underset{v_d}{\bullet} \tag{10}$$

形式上，$T_p = (L_p, \gamma_p)$，其中 $L_p = (V_p, E_p, \mathrm{src}, \mathrm{tar})$ 和 $\gamma_p : \ E_p \to I$ 满足

(i) $V_p = \{v_{t-1} : \ t \in [d+1]\}$; (ii) $E_p = \{e_t : \ t \in [d]\}$; (iii) $\mathrm{src}(e_t) = v_t$ 和 $\mathrm{tar}(e_t) = v_{t-1}$; (iv) $\gamma_p(e_t) = i(t)$。

于是我们得到（6）的类似结果：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(p(\mathcal{M}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*) &= \sum_{\phi:V_p\to[N]} \mathbf{x}_N(\phi(v_d))\overline{\mathbf{y}_N(\phi(v_0))}\prod_{e\in E_p}\mathbf{M}_N^{(\gamma_p(e))}(\phi(e)) \\ &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(V_p)}\sum_{\phi:V_p^\pi\hookrightarrow[N]} \mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))\overline{\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))}\prod_{e\in E_p}\mathbf{M}_N^{(\gamma_p(e))}(\phi(e)),\end{aligned}$$

其中我们回顾 $E_p^\pi = E_p$。

注 2.9. 粗略地说，各向同性全局定律意味着以下渐近式

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)] &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(V_p)}\sum_{\phi:V_p^\pi\hookrightarrow[N]} \mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))\overline{\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))}\prod_{e\in E_p}\Xi_N^{(\gamma_p(e))}(\phi(e)) \\ &= \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(V_p)\\ \text{s.t. } v_0\overset{\pi}{\sim}v_d}}\sum_{\phi:V_p^\pi\hookrightarrow[N]} \mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))\overline{\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))}\prod_{e\in E_p}\Xi_N^{(\gamma_p(e))}(\phi(e)) + o(1).\end{aligned}$$

为说明这一点，注意到（7）中的环图和（10）中的路径图满足$C_p = T_p^{\hat{\pi}}$ 对于划分 $\hat{}\pi$，其唯一的非单元素块为 $\{v_0, v_d\}$。将范围限制为划分类$\pi \in \mathcal{P}(V_p)$，使得 $v_0 \overset{\pi}{\sim} v_d$，则 T_p 的所有可能商的集合等于 C_p的所有可能商的集合。识别 $[v_0]_\pi = [v_d]_\pi$ 还迫使 $\phi([v_0]_\pi) = \phi([v_d]_\pi)$，这既解释了内积，也引入了相较于（8）而言表面上缺失的额外归一化。

3. Proofs of the main results

3.1. 各向同性全局定律。设 $\mathcal{Z}_N = (\mathbf{\Xi}_N^{(i)})_{i\in I}$ 是一族相互独立的 RBM $\mathbf{\Xi}_N^{(i)} \overset{d}{=} \mathrm{RBM}(N, \sigma_i^2, b_N^{(i)})$，如定义1.2所述。我们假设 $b_N^{(i)} \gg 1$ 对每个 $i \in I$ 成立，以确保（8）中的收敛性，该结论也几乎处处成立 [Au18，定理 412]:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)) \overset{\text{a.s.}}{=} \sum_{\pi\in\mathcal{NC}_2(d)}\prod_{\{j,k\}\in\pi}\sigma_{i(j)}\sigma_{i(k)}\mathbb{1}\{i(j) = i(k)\} =: \tau(p).$$

本文的主要技术贡献是这一收敛结论的各向同性版本。为了陈述精确的结果，我们需要引入一些额外的记号。对于 $p_1(\vec{z}), \ldots, p_r(\vec{z}) \in \mathbb{C}\langle z_i : \ i \in I\rangle$，我们定义

$$I_{p_1,\ldots,p_r} := \{i \in I : z_i \text{ appears in } p_s(\vec{z}) \text{ for some } s \in [r]\}.$$

我们首先证明依期望收敛（参见 [Au21，引理 3。4]）。

引理 3.1（各向同性 各向同性全局定律，依期望收敛）。对于 $p(\vec{z}) \in \mathbb{C}\langle z_i : i \in I\rangle$ 以及 $\mathbf{x}_N$、$\mathbf{y}_N \in \mathbb{S}^{N-1}$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N{}^*)\right] = \langle \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N\rangle \tau(p) + O_p\left(\frac{1}{\min_{i\in I_p}\sqrt{\xi_N^{(i)}}}\right).$$

特别是，渐近式中的常数不依赖于单位向量 $\mathbf{x}_N$、$\mathbf{y}_N$。

证明。 由线性性，不妨设 $p(\vec{z}) = z_{i(1)}\cdots z_{i(d)}$ 是一个单项式。为简化记号，我们将式（$T_p = (L_p, \gamma_p)$ 中的测试图简记为 10） $T = (L, \gamma)$。随后可以利用例 2.8: 中的图形式主义展开迹

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)\right] &= \sum_{\phi: V\to[N]} \mathbf{x}_N(\phi(v_d))\overline{\mathbf{y}_N(\phi(v_0))}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\Xi_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right] \\
&= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(V)}\sum_{\phi: V^\pi\hookrightarrow[N]} \mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))\overline{\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))}\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\frac{\prod_{e\in E}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \\
&=: \sum_{\pi\in\mathcal{P}(V)}\sum_{\phi: V^\pi\hookrightarrow[N]} \zeta_N(\pi,\phi), \qquad (11)
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right] = O_p(1) \qquad (12)$$

根据矩假设（π, ϕ），以及 1 的有限性， $\gamma(E) \subset I$，该式关于 $\phi: V^\pi \hookrightarrow [N]$ 的一致成立是显然的。由于映射是单射，我们的随机变量之间相互独立，因此可以将期望按平行边分解。特别地，使用定义 2.6中的记号，

$$\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right] = \prod_{l=1}^{2}\prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi^{(l)}}\mathbb{E}\left[\prod_{e'\in[e]_\pi}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e'))}(\phi(e'))\right].$$

非对角随机变量的中心化性告诉我们

$$\prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi^{(2)}}\mathbb{E}\left[\prod_{e'\in[e]_\pi}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e'))}(\phi(e'))\right] = 0 \qquad (13)$$

除非 $\#([e]_\pi) \geq 2$ 对每个 $[e]_\pi \in [E]_\pi^{(2)}$均成立。因此，我们可以将（11）中的外部求和限制在此类划分上。这促使我们定义

$$\mathcal{P}_+(V) := \{\pi \in \mathcal{P}(V) : \#([e]_\pi) \geq 2 \text{ for every } [e]_\pi \in [E]_\pi^{(2)}\}, \qquad (14)$$

这使我们可以将（11）重写为

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)\right] = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_+(V)}\sum_{\phi: V^\pi\hookrightarrow[N]}\zeta_N(\pi,\phi).$$

我们引入一些额外的记号来控制内部求和。回忆一下， $\underline{L^\pi} = (V^\pi, [E]_\pi^{(2)})$ 是 L^π 的底层简单图。令 $(V^\pi, [F]_\pi)$ 为 $\underline{L^\pi}$ 的生成树。对于 $e \in E$，我们定义

$$\lfloor e\rfloor_\pi := \arg\min_{e'\in[e]_\pi} b_N^{(\gamma(e'))} = \arg\min_{e'\in[e]_\pi}\xi_N^{(\gamma(e'))}.$$

如果出现平局，为明确起见，我们选择路径中最左边的边 L 。由于矩阵 $(\mathbf{B}_N^{(i)})_{i\in I}$ 是形如 (,) 的对称 (01) 矩阵，我们可以对乘积

$$\begin{aligned}\prod_{e\in E}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)) &= \prod_{l=1}^{2}\prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi^{(l)}}\prod_{e'\in[e]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e'))}(\phi(e'))\\ &= \prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi^{(2)}}\prod_{e'\in[e]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e'))}(\phi(e'))\\ &= \prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi^{(2)}}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))\\ &\le \prod_{[e]_\pi\in[F]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi)),\end{aligned}$$

其中，对称性消除了边方向上的歧义 $\lfloor e\rfloor_\pi$ 对于$\mathbf{B}^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}{}_N\,(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))$。将此与期望的上界（12）结合起来，我们得到

$$\zeta_N(\pi,\phi)=O_p\left(|\mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))||\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))|\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\right).$$

这使我们可以进一步将范围限制为划分

$$\mathcal{P}_{++}(V):=\{\pi\in\mathcal{P}(V):T^\pi\text{ is a colored double tree}\}\subset\mathcal{P}_+(V)$$

代价是

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_+(V)}\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}\zeta_N(\pi,\phi)=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{++}(V)}\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}\zeta_N(\pi,\phi)+O\left(\frac{1}{\min_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\right).\tag{15}$$

在证明这一点之前，请注意，如果 T^π 是双树，那么 $[v_0]_\pi=[v_d]_\pi$。事实上，双树中的每个顶点的度数都是偶数；然而， T 中的每个顶点 $v\notin\{v_0,v_d\}$ 的度数都是二，而 $\deg_T(v_0)=\deg_T(v_d)=1$。由于 $\deg_{T^\pi}([v]_\pi)=\sum_{v'\sim_\pi v}\deg_T(v')$，结论即得。

为证明（15），假设 $\pi\in\mathcal{P}_+(V)\setminus\mathcal{P}_{++}(V)$。我们考虑两种情况： $[v_0]_\pi\neq[v_d]_\pi$ 和$[v_0]_\pi=[v_d]_\pi$。如果 $[v_0]_\pi\neq[v_d]_\pi$，那么在 $(V^\pi,[F]_\pi)$ 中，从 $[v_0]_\pi$ 到$[v_d]_\pi$存在唯一一条（必定非空的）路径。我们将该路径上的边 $[f_1]_\pi$、……、 $[f_m]_\pi$ 以及顶点w_0、……、 w_m依次编号。我们将其余的边 $[F']_\pi=[F]_\pi\setminus\{[f_1]_\pi,\dots,[f_m]_\pi\}$ 分开以界定

$$\begin{aligned}&\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}|\mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))||\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))|\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\\ \le&\sum_{\Phi:\{w_n\}_{n=0}^m\to[N]}|\mathbf{x}_N(\Phi(w_m))||\mathbf{y}_N(\Phi(w_0))|\prod_{n=1}^m\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))}(\Phi(w_{n-1}),\Phi(w_n))\\ &\qquad\cdot\frac{\sum_{\Psi:V^\pi\setminus\{w_n\}_{n=0}^m\to[N]}\prod_{[e]_\pi\in[F']_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\Psi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\\ =&\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F']_\pi}\xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\sum_{\Phi:\{w_n\}_{n=0}^m\to[N]}|\mathbf{x}_N(\Phi(w_m))||\mathbf{y}_N(\Phi(w_0))|\prod_{n=1}^m\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))}(\Phi(w_{n-1}),\Phi(w_n)),\end{aligned}$$

这里我们再次利用矩阵 $(\mathbf{B}_N^{(i)})_{i\in I}$ 是对称矩阵这一事实，在书写 $\mathbf{B}^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))\ N}(\Phi(\lfloor f_n\rfloor_\pi)) = \mathbf{B}^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))\ N}(\Phi(w_{n-1})\ \Phi(w_n))$ 时忽略边的方向。我们将剩余的和识别为一个内积

$$\sum_{\Phi:\{w_0\}_{n=1}^m\to[N]} |\mathbf{x}_N(\Phi(w_m))||\mathbf{y}_N(\Phi(w_0))| \prod_{n=1}^m \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))}(\Phi(w_{n-1}),\Phi(w_n)) = \left\langle \prod_{n=1}^m \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))}|\mathbf{x}_N|,|\mathbf{y}_N| \right\rangle,$$

其中，$|\mathbf{x}_N|$、$|\mathbf{y}_N|$ 分别是对 $\mathbf{x}_N$、$\mathbf{y}_N$ 应用逐项绝对值后得到的向量。特别地，仍然有 $|\mathbf{x}_N|$、$|\mathbf{y}_N| \in \mathbb{S}^{N-1}$。因此，

$$\begin{aligned}\left\langle \prod_{n=1}^m \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))}|\mathbf{x}_N|,|\mathbf{y}_N| \right\rangle &\le \left\| \prod_{n=1}^m \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))} \right\|_2 \\ &\le \prod_{n=1}^m \left\| \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))} \right\|_2 = \prod_{n=1}^m \xi_N^{(\gamma(\lfloor f_n\rfloor_\pi))},\end{aligned}$$

其中，算子范数的计算源于以下观察：$\mathbf{B}_N^{(i)}$ 是一个实对称的（0，1）-矩阵，且每个行和都等于 $\xi_N^{(i)}$（例如参见 [HJ13，问题 5.6.P21]）。

综合以上各点，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]} \zeta_N(\pi,\phi) &= O_p\left(\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F']_\pi} \xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))} \prod_{n=1}^m \xi_N^{(\gamma(\lfloor f_m\rfloor_\pi))}}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right) \\ &= O_p\left(\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F]_\pi} \xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}{\prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}} \right).\end{aligned}$$

由于 $\pi\in\mathcal{P}_+(V)\setminus\mathcal{P}_{++}(V)$，我们知道

$$\frac{\xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}{\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}} \le 1, \qquad \forall [e]_\pi \in [E]_\pi^{(2)}. \tag{16}$$

此外，根据定义，T^π 不是带色双树。如果 T^π 是一个（颜色错误的）双树，那么由于非对角元的独立性和中心化性再次可以推出（13），所以结论已经成立。因此，我们可以假设 T^π 不是双树。这意味着，底层简单图要么不是树，在这种情况下 $[F]_\pi\subsetneq[E]_\pi$,，要么底层简单图是树，但至少存在一条边 $[e]_\pi$，其重数为 $\#([e]_\pi)\ge 3$。在这两种情况下，我们都可以看到

$$\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F]_\pi} \xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}{\prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}} = O_p\left(\frac{1}{\min_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right). \tag{17}$$

对于满足 $[v_0]_\pi=[v_d]_\pi$ 的 $\pi\in\mathcal{P}_+(V)\setminus\mathcal{P}_{++}(V)$，剩下的情形也可用几乎相同的方法处理。事实上，由柯西-施瓦茨不等式可知，

$$\begin{aligned}&\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]} |\mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi))||\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))| \frac{\prod_{[e]_\pi\in[F]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \\ \le &\frac{\prod_{[e]_\pi\in[F]} \xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}{\prod_{[e]_\pi\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}} \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_N(i)||\mathbf{y}_N(i)|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\prod_{[e]_\pi \in [F]} \xi_N^{(\gamma(\lfloor e \rfloor_\pi))}}{\prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} \prod_{e' \in [e]_\pi} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}}.$$

与之前一样，我们可以假设 T^π 不是双树，这再次导出渐近式（17）。因此我们得出

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_+(V) \setminus \mathcal{P}_{++}(V)} \sum_{\phi : V^\pi \hookrightarrow [N]} \zeta_N(\pi, \phi) = O_p\left(\frac{1}{\min_{e \in E} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right),$$

这就证明了（15）。

为了完成证明，考虑一个划分 $\pi \in \mathcal{P}_{++}(V)$。根据定义，$T^\pi$ 是一个带色双树，满足 $[v_0]_\pi = [v_d]_\pi$。我们可以先进行识别 $v_0 \overset{\pi}{\sim} v_d$，并将 T^π 视为（7）中有向环 $C_p = T^{\hat{}\pi}$ 的一个商，其中 $\hat{}\pi$ 中唯一的非单元素块是 $\{v_0, v_d\}$。不难看出，有向环的商只有在其每条平行边 $\{e, e'\}$ 都指向相反方向时才是双树，即 $(\mathrm{tar}(e), \mathrm{src}(e)) = (\mathrm{src}(e'), \mathrm{tar}(e'))$ [Au18，图 5]。因此，$\zeta_N(\pi, \phi)$ 中的期望完全可以用方差表示：

$$\begin{aligned}
\sum_{\phi : V^\pi \hookrightarrow [N]} \zeta_N(\pi, \phi) &= \sum_{\phi : V^\pi \hookrightarrow [N]} \mathbf{x}_N(\phi([v_d]_\pi)) \overline{\mathbf{y}_N(\phi([v_0]_\pi))} \mathbb{E}\left[\prod_{e \in E} \mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)) \right] \frac{\prod_{e \in E} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e \in E} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \\
&= \left[\prod_{[e] \in [E]_\pi} \sigma^2_{\gamma(e)} \right] \sum_{\Phi : \{[v_0]_\pi\} \to [N]} \mathbf{x}_N(\Phi([v_0]_\pi)) \overline{\mathbf{y}_N(\Phi([v_0]_\pi))} \\
&\qquad \cdot \left(\frac{\sum_{\Psi : V^\pi \setminus \{[v_0]_\pi\} \hookrightarrow [N] \setminus \{\Phi([v_0]_\pi)\}} \prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\Psi(e))}{\prod_{[e] \in [E]_\pi} \xi_N^{(\gamma(e))}} \right).
\end{aligned}$$

与之前一样，我们可以将产生非零被加数（必然等于 1）的映射 Ψ 的数量界定为

$$\sum_{\Psi : V^\pi \setminus \{[v_0]_\pi\} \hookrightarrow [N] \setminus \{\Phi([v_0]_\pi)\}} \prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\Psi(e)) \leq \prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} \xi_N^{(\gamma(e))}.$$

由于 $(V^\pi, [E]_\pi)$ 是一棵树，唯一妨碍等号成立的条件是要求 Ψ 具有单射性。因此可直接得到下界

$$\sum_{\Psi : V^\pi \setminus \{[v_0]_\pi\} \hookrightarrow [N] \setminus \{\Phi([v_0]_\pi)\}} \prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\Psi(e)) \geq \prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} (\xi_N^{(\gamma(e))} - d),$$

这里回顾一下，$d \geq \#(V^\pi) - 1$ 是单项式 $p(\vec{z})$ 的度数。由此可得

$$\begin{aligned}
&\left[\prod_{[e] \in [E]_\pi} \sigma^2_{\gamma(e)} \right] \sum_{\Phi : \{[v_0]_\pi\} \to [N]} \mathbf{x}_N(\Phi([v_0]_\pi)) \overline{\mathbf{y}_N(\Phi([v_0]_\pi))} \\
&\qquad \cdot \left(\frac{\sum_{\Psi : V^\pi \setminus \{[v_0]_\pi\} \hookrightarrow [N] \setminus \{\Phi([v_0]_\pi)\}} \prod_{[e]_\pi \in [E]_\pi} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\Psi(e))}{\prod_{[e] \in [E]_\pi} \xi_N^{(\gamma(e))}} \right) \\
=& \langle \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N \rangle \prod_{[e] \in [E]_\pi} \sigma^2_{\gamma(e)} + O_p\left(\frac{1}{\min_{e \in E} \xi_N^{(\gamma(e))}} \right).
\end{aligned}$$

鉴于归一化迹的常规计算（9），证明完毕。 □

注 3.2. 对于独立的（$k_N^{(i)}$）$_{i\in I}$-正则 Wigner 矩阵

$$(\Xi_N^{(i)})_{i\in I} = \left(\frac{1}{\sqrt{k_N^{(i)}}}\widetilde{\mathbf{B}}_N^{(i)} \circ \mathbf{X}_N^{(i)}\right)_{i\in I},$$

只需在证明中将所有 $\mathbf{B}_N^{(i)}$（分别为 $\xi_N^{(i)}$）替换为 $\widetilde{\mathbf{B}}_N^{(i)}$（分别为 $k_N^{(i)}$），但有一个值得注意的例外。具体而言，对于周期性（0, 1）带矩阵 $(\mathbf{B}_N^{(i)})_{i\in I}$，我们反复使用了恒等式

$$\circ_{e'\in[e]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e'))} = \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))},$$

这里回顾一下，$\circ$ 表示逐项乘积。虽然对于一般的 $(\widetilde{\mathbf{B}}_N^{(i)})_{i\in I}$，这一性质不再成立，但$\circ_{e'\in[e]_\pi}\widetilde{\mathbf{B}}^{(\gamma(e'))}{}_N$确实是一个对称（0, 1）矩阵，其行和有界于$k^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}{}_N := \min_{e'\in[e]_\pi} k_N^{(\gamma(e'))}$，这正是沿用相同论证所需的全部条件。

计算出期望后，我们接下来证明集中性。为此，我们使用中心矩的一个界。

引理 3.3（中心矩）。对于 $(p_s(\vec{z}))_{s=1}^r \subset \mathbb{C}\langle z_i : i\in I\rangle$ 以及 $(\mathbf{x}_N^{(s)})_{s=1}^r$、$(\mathbf{y}_N^{(s)})_{s=1}^r \subset \mathbb{S}^{N-1}$，

$$\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^r\left(\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*}\right) - \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*}\right)\right]\right)\right] = O_{p_1,\dots,p_r}\left(\left[\min_{i\in I_{p_1,\dots,p_r}}\sqrt{\xi_N^{(i)}}\right]^{-r}\right).$$

和之前一样，渐近式中的常数与单位向量 $(\mathbf{x}_N^{(s)})_{s=1}^r$、$(\mathbf{y}_N^{(s)})_{s=1}^r$ 无关。

证明。根据多线性，我们可以假设每个 $p_s(\vec{z}) = z_{i_s(1)}\cdots z_{i_s(d_s)}$ 都是一个单项式。为简化记号，我们将式 (10) 中的测试图 $T_{p_s} = (L_{p_s}, \gamma_{p_s})$ 简写为 $T_s = (L_s, \gamma_s)$。我们还将 $T = (G, \gamma)$ 定义为测试图 $(T_s)_{s=1}^r$ 的不交并 $T = \sqcup_{s=1}^r T_s$。中心矩对应的式 (11) 可写为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^r\left(\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*}\right) - \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*}\right)\right]\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^r\left(\sum_{\phi_s:V_s\to[N]}\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi_s(v_{d_s}^{(s)}))\overline{\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi_s(v_0^{(s)}))}\left(\prod_{e\in E_s}\Xi_N^{(\gamma_s(e))}(\phi_s(e)) - \mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_s}\Xi_N^{(\gamma_s(e))}(\phi_s(e))\right]\right)\right)\right]\\
=&\sum_{\phi:V\to[N]}\left(\prod_{s=1}^r\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi(v_{d_s}^{(s)}))\overline{\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi(v_0^{(s)}))}\right)\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^r\left(\prod_{e\in E_s}\Xi_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)) - \mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_s}\Xi_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\right)\right]\\
=&\sum_{\pi\in\mathcal{P}(V)}\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}\left(\prod_{s=1}^r\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi([v_{d_s}^{(s)}]_\pi))\overline{\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi([v_0^{(s)}]_\pi))}\right)\\
&\qquad\cdot\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^r\left(\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)) - \mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\right)\right]\frac{\prod_{e\in E}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\\
=:&\sum_{\pi\in\mathcal{P}(V)}\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}\eta_N(\phi^\pi\cdot)
\end{aligned}$$

我们重复引理 3.1 证明中的两个早期步骤。特别地，我们的矩假设（1）意味着

$$\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^r\left(\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e)) - \mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\right)\right] = O_{p_1,\dots,p_r}(1)$$

对（π， ϕ）一致地满足

$$\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^{r}\left(\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))-\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\right)\right]=0$$

除非 $\#([e]_\pi)\geq 2$ 对每个 $e\in[E]_\pi^{(2)}$都成立。由于我们考虑的是中心矩，因此还可以说得更多。特别地，如果存在边 $e_s\in E_s$和 $e_{s'}\in E_{s'}$ 使得 $[e_s]_\pi=[e_{s'}]_\pi$，我们称 T_s 和 $T_{s'}$ 在 T^π 中具有边叠加。边叠加在 $[r]$ 上定义了一个自然等价关系 $\sim_{E,\ \pi}$，如下所示：

$s\sim_{E,\pi}s'\iff\exists s_0$、…、$s_n\in[r]$：对于每个 $t\in[n]$， $T_{s_{t-1}}$和T_{s_t}在 T^π中具有边叠加，其中 $s_0=s$ 和 $s_n=s'$。我们使用记号$[s]_{E,\ \pi}=\{s'\in[r]:s'\sim_{E,\ \pi}s\}\in[r]/\sim_{E,\ \pi}$，以避免与 $[v]_\pi\in V^\pi$ 和 $[e]_\pi\in[E]_\pi$混淆。这使我们能够进行因式分解

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^{r}\left(\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))-\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_s}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\right)\right]\\&=\prod_{[s]_{E,\pi}\in[r]/\sim_{E,\pi}}\mathbb{E}\left[\prod_{s'\in[s]_{E,\pi}}\left(\prod_{e\in E_{s'}}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))-\mathbb{E}\left[\prod_{e\in E_{s'}}\mathbf{X}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))\right]\right)\right],\end{aligned}$$

根据中心化，除非对每个 $s\in[r]$都有 $\#([s]_{E,\ \pi})\geq 2$，否则其等于 0。换句话说，除非每个测试图 T_s 都在 T^π 中与至少一个其他测试图 $T_{s'}$存在边叠加，否则期望为零。这引导我们定义

$$\mathcal{P}_\times(V):=\{\pi\in\mathcal{P}_+(V):\#([s]_{E,\pi})\geq 2\text{ for every }s\in[r]\},$$

这里我们回顾 $\mathcal{P}_+$（V）在（14）中的定义。于是，中心矩计算可化简为

$$\mathbb{E}\left[\prod_{s=1}^{r}\left(\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)^*}\right)-\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)^*}\right)\right]\right)\right]=\sum_{\pi\in\mathcal{P}_\times(V)}\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}\eta_N(\phi,\pi),$$

其中

$$\eta_N(\phi,\pi)=O_{p_1,\ldots,p_r}\left(\left[\prod_{s=1}^{r}\left|\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi([v_{d_s}^{(s)}]_\pi))\right|\left|\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi([v_0^{(s)}]_\pi))\right|\right]\frac{\prod_{e\in E}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\right).$$

等价关系 $\sim_{[E]_\pi}$ 不一定等于由 $T^\pi=(\sqcup_{s=1}^r T_s)^\pi$ 的连通分支在 $[r]$ 上定义的等价关系。特别地，如果

$$\mathscr{V}([s]_{E,\pi}):=\{[v]_\pi\in V^\pi:v\in T_{s'}\text{ for some }s'\sim_{E,\pi}s\},$$

那么对于$[s]_{E,\ \pi}\neq[s']_{E,\ \pi}$，可能有 $\mathscr{V}([s]_{E,\ \pi})\cap\mathscr{V}([s']_{E,\ \pi})\neq\emptyset$。尽管如此，仍然有

$$\begin{aligned}&\left[\prod_{s=1}^{r}\left|\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi([v_{d_s}^{(s)}]_\pi))\right|\left|\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi([v_0^{(s)}]_\pi))\right|\right]\frac{\prod_{e\in E}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\\&=\prod_{[s]_{E,\pi}\in[r]/\sim_{E,\pi}}\left(\prod_{s'\in[s]_{E,\pi}}\left[\left|\mathbf{x}_N^{(s')}(\phi([v_{d_{s'}}^{(s')}]_\pi))\right|\left|\mathbf{y}_N^{(s')}(\phi([v_0^{(s')}]_\pi))\right|\frac{\prod_{e\in E_{s'}}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E_{s'}}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}\right]\right),\end{aligned}$$

由此

$$\sum_{\phi:V^\pi\hookrightarrow[N]}\left[\prod_{s=1}^{r}\left|\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi([v_{d_s}^{(s)}]_\pi))\right|\left|\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi([v_0^{(s)}]_\pi))\right|\right]\frac{\prod_{e\in E}\mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}}$$

$$\leq \prod_{[s]_{E,\pi}\in[r]/\sim_{E,\pi}} \sum_{\phi:\mathscr{V}([s]_{E,\pi})\to[N]} \prod_{s'\in[s]_{E,\pi}} \left[\left|\mathbf{x}_N^{(s')}(\phi([v_{d_{s'}}^{(s')}]_\pi))\right| \left|\mathbf{y}_N^{(s')}(\phi([v_0^{(s')}]_\pi))\right| \frac{\prod_{e\in E_{s'}} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E_{s'}} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right].$$

因此，只需证明

$$\begin{aligned}&\sum_{\phi:\mathscr{V}([s]_{E,\pi})\to[N]} \prod_{s'\in[s]_{E,\pi}} \left[\left|\mathbf{x}_N^{(s')}(\phi([v_{d_{s'}}^{(s')}]_\pi))\right| \left|\mathbf{y}_N^{(s')}(\phi([v_0^{(s')}]_\pi))\right| \frac{\prod_{e\in E_{s'}} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E_{s'}} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right]\\ =&O_{p_1,\ldots,p_r}\left(\left[\min_{i\in I_{p_1,\ldots,p_r}} \sqrt{\xi_N^{(i)}} \right]^{-\#([s]_{E,\pi})} \right).\end{aligned}$$

于是，不失一般性，我们可以假设只有一个等价类 $[s]_{E,\ \pi}=[r]$，从而简化记号。特别地，我们已将问题归结为证明

$$\begin{aligned}&\sum_{\phi:V^\pi\to[N]} \prod_{s=1}^{r} \left[\left|\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi([v_{d_s}^{(s)}]_\pi))\right| \left|\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi([v_0^{(s)}]_\pi))\right| \frac{\prod_{e\in E_s} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E_s} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right]\\ =&O_{p_1,\ldots,p_r}\left(\left[\min_{i\in I_{p_1,\ldots,p_r}} \sqrt{\xi_N^{(i)}} \right]^{-r} \right).\end{aligned} \tag{18}$$

直观地说，每个测试图 T_s 都会通过单位向量 $\mathbf{x}_N^{(s)}$、$\mathbf{y}_N^{(s)}$，或底层简单图 $\underline{G^\pi}=(V^\pi,[E]_\pi^{(2)})$ 中由边叠加产生的缺陷，对因子 $\left[\min_{i\in I_{p_1,\ldots,p_r}} \sqrt{\xi_N^{(i)}}\right]^{-r}$ 负责。为使这一点形式化，引入一些额外记号来汇总相关项将十分方便。定义

$$\begin{aligned}(w_1,\ldots,w_{2r}) &:= (v_0^{(1)}, v_{d_1}^{(1)}, \ldots, v_0^{(r)}, v_{d_1}^{(r)});\\ (\mathbf{u}_N^{(1)},\ldots,\mathbf{u}_N^{(2r)}) &:= (|\mathbf{x}_N^{(1)}|,|\mathbf{y}_N^{(1)}|,\ldots,|\mathbf{x}_N^{(r)}|,|\mathbf{y}_N^{(r)}|) \in (\mathbb{S}_{\geq 0}^{N-1})^{2r},\end{aligned}$$

在这种情况下

$$\begin{aligned}&\prod_{s=1}^{r} \left[\left|\mathbf{x}_N^{(s)}(\phi([v_{d_s}^{(s)}]_\pi))\right| \left|\mathbf{y}_N^{(s)}(\phi([v_0^{(s)}]_\pi))\right| \frac{\prod_{e\in E_s} \mathbf{B}_N^{(\gamma(e))}(\phi(e))}{\prod_{e\in E_s} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e))}}} \right]\\ =&\prod_{s=1}^{2r} \mathbf{u}_N^{(s)}(\phi([w_s]_\pi)) \frac{\prod_{[e]\in[E]_\pi} \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{[e]\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}}\\ \leq&\prod_{s=1}^{2r} \mathbf{u}_N^{(s)}(\phi([w_s]_\pi)) \frac{\prod_{[e]\in[F]_\pi} \mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{[e]\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi} \sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}}\end{aligned}$$

对于 $\underline{G^\pi}$ 的任意生成树（V^π，$[F]_\pi$）。借助柯西-施瓦茨不等式，单位向量进一步减小了分子，这意味着对于任意 $S\subset[N]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} \mathbf{u}_N^{(s)}(i) &\leq \sqrt{\#(S)},\\ \sum_{i\in S} \mathbf{u}_N^{(s)}(i)\mathbf{u}_N^{(s')}(i) &\leq 1;\end{aligned} \tag{19}$$

然而，一般而言，无法做到优于

$$\sum_{i\in S}\prod_{s\in\mathscr{S}}\mathbf{u}_N^{(s)}(i)\le 1 \tag{20}$$

对于 $\mathscr{S}\subset[2r]$ 使得 $\#(\mathscr{S})\ge 2$，其中我们使用了 $\|\mathbf{u}_N^{(s)}\|_\infty\le\|\mathbf{u}_N^{(s)}\|_2=1$ 这一事实。

为了跟踪单位向量，我们将顶点 $V_{\text{out}}:=\{w_1,\dots,w_{2r}\}\subset V$ 区分开来，并称其为外部顶点。其余顶点 $V_{\text{in}}:=V\setminus V_{\text{out}}$ 称为内部顶点。对于一个划分 $\pi\in\mathcal{P}(V)$，我们根据块的内部/外部构成将其分开：

$$\pi^{(a,b)}=\{B\in\pi:\#(B\cap V_{\text{out}})=a,\#(B\cap V_{\text{in}})=b\}.$$

我们以类似的方式区分这些顶点：

$$V_\pi^{(a,b)}=\bigcup_{B\in\pi^{(a,b)}}B.$$

略微滥用记号，我们也将 $\pi^{(a,\ge b)}$ 和 $V_\pi^{(a,\ge b)}$ 写作显然对应的类似表达式。

不考虑单位向量时，我们有等式

$$\sum_{\phi:V^\pi\to[N]}\frac{\prod_{[e]\in[F]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{[e]\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}}=\frac{N\prod_{[e]\in[F]_\pi}\xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}{\prod_{[e]\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}},$$

其中 $\#(\pi)=\#([F]_\pi)+1$，因为 $(V^\pi,[F]_\pi)$ 是一棵生成树。根据命题 3.6 的证明，我们知道如何通过付出在 $\#(\pi^{(1,\ge0)})$ 中增加两个块或在 $\#(\pi^{(\ge2,\ge0)})$ 中增加一个块的代价，移除分子中的 N 因子。在为 ϕ 赋予剩余取值时，我们可以使用 (19) 和 (20)，将分子中的一项 $\xi^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}N$ 化简为 $\sqrt{\xi_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}}$（如果块 $B\in V^\pi$ 属于 $\pi^{(1,\ge0)}$）或 1（如果块 $B\in V^\pi$ 属于 $\pi^{(\ge2,\ge0)}$）。由于 $\pi\in\mathcal{P}_+(V)$，我们仍需处理 (16) 中的块 $B\in\pi^{(0,\ge1)}$。因此，重新引入单位向量后，我们得到以下界

$$\begin{aligned}&\sum_{\phi:V^\pi\to[N]}\prod_{s=1}^{2r}\mathbf{u}_N^{(s)}(\phi([w_s]_\pi))\frac{\prod_{[e]\in[F]_\pi}\mathbf{B}_N^{(\gamma(\lfloor e\rfloor_\pi))}(\phi(\lfloor e\rfloor_\pi))}{\prod_{[e]\in[E]_\pi}\prod_{e'\in[e]_\pi}\sqrt{\xi_N^{(\gamma(e'))}}}\\&\le\left[\min_{i\in I_{p_1,\dots,p_r}}\xi_N^{(i)}\right]^{\left([\#(\pi)-1]-\left[\frac{\#(\pi^{(1,\ge0)})}{2}+\#(\pi^{(\ge2,\ge0)})-1\right]\right)-\frac{\sum_{s=1}^r d_s}{2}},\end{aligned}$$

其中，d_s 是测试图 T_s中的边数。因此，如果我们能够证明对于满足 $\pi\in\mathcal{P}_+(V)$且$[s]_{E,\ \pi}=[r]$的 d_s，则(18)将成立，

$$\left[\#(\pi)-\frac{\#(\pi^{(1,\ge0)})}{2}-\#(\pi^{(\ge2,\ge0)})\right]-\frac{\sum_{s=1}^r d_s}{2}\le-\frac{r}{2},$$

或者，等价地，

$$\frac{\#(\pi^{(1,\ge1)})}{2}+\#(\pi^{(0,\ge1)})+\frac{r}{2}\le\frac{\sum_{s=1}^r d_s}{2}, \tag{21}$$

其中，我们使用了 $\pi\in\mathcal{P}_+(V)$迫使 $\pi^{(1,\ge0)}=\pi^{(1,\ge1)}$这一事实。

我们通过对边的总数进行 $D=\sum_{s=1}^r d_s$ 并结合基例$D=2$，证明（21）（参见 [AGV，命题 4。4]）。注意，中心性允许我们将范围限制在 $r\ge2$，因为否则矩界显然成立。关于 $D=2$ 的情形 $r=2$ 对应于$d_1=d_2=1$和 $\pi^{(1,\ge1)}=\pi^{(0,\ge1)}=\emptyset$，其中没有内部顶点。因此，21）得证。

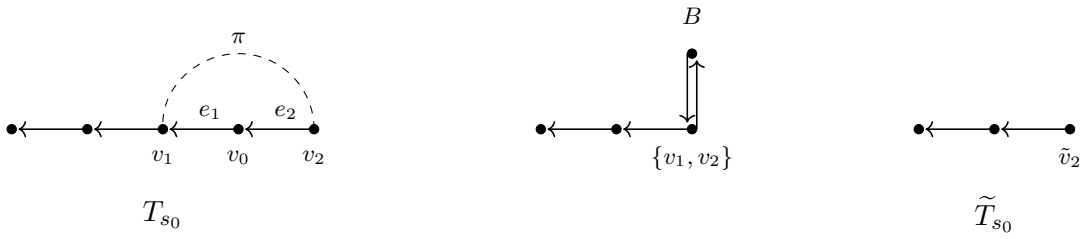


图1。示例：根据 $\pi \in \mathcal{P}_+(V)$ 的要求，对 T_{s_0} 中与 v_0 相邻的两条边进行捏合。由于 $B = \{v_0\} \in \pi^{(0,1)}$，这是与 v_0 相邻的边满足条件 $\#([e]_\pi) \geq 2$ 的唯一方式。

如果 $D = 3$，那么有两种可能。首先，可能是 $r = 3$ 且 $d_1 = d_2 = d_3 = 1$。如前所述，此时没有内部顶点，因此结论成立。如果 $r = 2$，那么 $\{d_1, d_2\} = \{1, 2\}$。因此，恰好有一个内部顶点；然而， T_1与 T_2 之间的必需的边叠加意味着，这个唯一的内部顶点将与至少一个外顶点合并，于是 $\#(\pi^{(0,\geq 1)}) = 0$ 且 $\#(\pi^{(1,\geq 1)}) \leq 1$。代入所有结果后，我们再次得到（21）。

现在假设 $D \geq 4$。如果 $\#(\pi^{(0,1)}) \leq \#(\pi^{(1,\geq 2)})$，那么结论成立。事实上，在这种情况下，

$$\begin{aligned}
\frac{\#(\pi^{(1,\geq 1)})}{2} + \#(\pi^{(0,\geq 1)}) &= \frac{\#(\pi^{(1,1)}) + \#(\pi^{(1,\geq 2)})}{2} + \#(\pi^{(0,1)}) + \#(\pi^{(0,\geq 2)}) \\
&\leq \frac{\#(\pi^{(1,1)})}{2} + \#(\pi^{(1,\geq 2)}) + \frac{\#(\pi^{(0,1)})}{2} + \#(\pi^{(0,\geq 2)}) \\
&\leq \frac{\#(V_\pi^{(1,1)} \cap V_{\mathrm{in}})}{2} + \frac{\#(V_\pi^{(1,\geq 2)} \cap V_{\mathrm{in}})}{2} + \frac{\#(V_\pi^{(0,1)} \cap V_{\mathrm{in}})}{2} + \frac{\#(V_\pi^{(0,\geq 2)} \cap V_{\mathrm{in}})}{2} \\
&\leq \frac{\#(V_{\mathrm{in}})}{2} \\
&= \frac{\sum_{s=1}^{r}(d_s - 1)}{2} \\
&= \frac{D - r}{2}.
\end{aligned}$$

因此，我们可以假设 $\#(\pi^{(0,1)}) > \#(\pi^{(1,\geq 2)})$。令 $B \in \pi^{(0,1)} \neq \emptyset$。这意味着， $B = \{v_0\}$ 由一个内部顶点组成，即属于测试图 T_{s_0}。由于 $\pi \in \mathcal{P}_+(V)$， T_{s_0} 中与 v_0 相邻的两个顶点 v_1、v_2 必须由 π 识别。这对应于对 T_{s_0} 中与 v_0 相 incident 的两条边 e_1、e_2 进行捏合。于是，块 B 必然是 $\underline{T^\pi}$ 中的一片叶子，并且在 T^π 中恰有两条关联边。因此， T^π 的其余部分可以构造为 $(T_s)_{s\in[r]\setminus\{s_0\}}$ 与删去两条边后的 T_{s_0} 的不交并的商。图1对此作了示意。注意，我们必须有 $d_{s_0} \geq 3$；否则， $d_{s_0} = 2$ 以及 T_{s_0} 与任意其他 T_s 之间的边叠加将与 $B \in \pi^{(0,1)}$ 矛盾。

~为应用归纳假设，令 T_{s_0} 为从 T_{s_0} 中移除 v_0 及其两条关联边，并将 v_1 和 v_2 合并为一个顶点 $\tilde{v}_2$ 后得到的测试图。若 v_2 是内部的（分别地，外部的），那么 $\tilde{v}_2$ 在 T_{s_0} 中也同样如此。划分 π 自然地定义了不交并 $\widetilde{\bigsqcup}_{s\in[r]\setminus\{s_0\}} T_s \sqcup T_{s_0}$ 的顶点划分 $\tilde{\pi}$，如下所示。对于一个块 $B' \in \pi \setminus \{B\}$，我们定义

$$f(B') = \begin{cases} (B' \setminus \{v_1, v_2\}) \cup \{\tilde{v}_2\} & \text{if } v_1, v_2 \in B'; \\ B' & \text{else.} \end{cases} \tag{22}$$

这些新的块构成了该划分

$$\tilde{\pi} = \{f(B') : B' \in \pi \setminus \{B\}\} \in \mathcal{P}\Big((V \setminus \{v_0, v_1, v_2\}) \cup \{\tilde{v}_2\}\Big).$$

由于 B 是 T^π 中 $\underline{T^\pi}$ 的一个叶子，且恰好有两条关联边 e_1、e_2，划分 $\tilde{\pi}$ 仍然满足

$$\#([e]_{\tilde{\pi}}) \geq 2, \quad \forall e \in E \setminus \{e_1, e_2\}, \tag{23}$$

意味着 $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}_+\Big((V \setminus \{v_0, v_1, v_2\}) \cup \{\tilde{v}_2\}\Big)$。此外，正如前文所述，由于 $B \in \pi^{(1,0)}$，e_1 和 e_2 都无法参与 T_{s_0} 与某个其他 T_s 之间的边叠加。因此，$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$任何此类叠加在 $(\sqcup_{s\in[r]\setminus\{s_0\}} T_s \sqcup T_{s_0})^\pi$ 中都会被保留，这意味着仍然只有一个等价类$[s]_{E\setminus\{e_1,e_2\}}$，$\tilde{\pi} = [r]$。于是，归纳假设使我们可以得出

$$\frac{\#(\tilde{\pi}^{(1,\geq 1)})}{2} + \#(\tilde{\pi}^{(0,\geq 1)}) + \frac{r}{2} \leq \frac{\sum_{s\in[r]\setminus s_0} d_s + \tilde{d}_{s_0}}{2} = \frac{\sum_{s=1}^r d_s - 2}{2}.$$

现在我们必须分别将 $\tilde{\pi}^{(1,\geq 1)}$ 和 $\tilde{\pi}^{(0,\geq 1)}$ 与 $\pi^{(1,\geq 1)}$ 和 $\pi^{(0,\geq 1)}$ 联系起来。根据定义（22），f改变了恰好一个块 $[v_1]_\pi = [v_2]_\pi$的组成，使该块中的内部顶点数量减少一个，同时不改变其他所有块。如果 v_2 是外部的，那么 $[v_2]_\pi \in \pi^{(\geq 1,\geq 1)}$和 $f\left([v_2]_\pi\right) \in \tilde{\pi}^{(\geq 1,\geq 0)}$。如果 v_2是内部的，那么 $[v_2]_\pi \in \pi^{(\geq 0,\geq 2)}$和 $f\left([v_2]_\pi\right) \in \tilde{\pi}^{(\geq 0,\geq 1)}$。无论哪种情况，映射 f 都限制为 $\pi^{(0,\geq 1)} \setminus \{B\}$ 与 $\tilde{\pi}^{(0,\geq 1)}$之间的一个双射，由此

$$\#(\tilde{\pi}^{(0,\geq 1)}) = \#(\pi^{(0,\geq 1)}) - 1.$$

类似地，f 限制为 $\pi^{(1,\geq 0)}$ 与 $\tilde{\pi}^{(1,\geq 0)}$之间的双射；然而，正如我们已经看到的，条件（14）（分别为（23））迫使 $\pi^{(1,\geq 0)} = \pi^{(1,\geq 1)}$（分别为 $\tilde{\pi}^{(1,\geq 0)} = \tilde{\pi}^{(1,\geq 1)}$），因此

$$\#(\pi^{(1,\geq 1)}) = \#(\tilde{\pi}^{(1,\geq 1)}).$$

综上所述，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\#(\pi^{(1,\geq 1)})}{2} + \#(\pi^{(0,\geq 1)}) + \frac{r}{2} &= \#(\tilde{\pi}^{(1,\geq 1)}) + \#(\tilde{\pi}^{(0,\geq 1)}) + 1 + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{\sum_{s=1}^r d_s - 2}{2} + 1 \\ &= \frac{\sum_{s=1}^r d_s}{2},\end{aligned}$$

这正是我们要证明的结论。 □

注 3.4。对于独立的 $(k_N^{(i)})_{i\in I}$-正则 Wigner 矩阵，只需继续采用注 3.2中的相同修改。引理 3.3 中的上界很容易看出是尖锐的，并且可以通过叠加若干条线的副本来得到双树森林。

Coro推论 3.5（集中性）。对于 $p(\vec{z}) \in \mathbb{C}\langle z_i : i \in I\rangle$、$r \in \mathbb{N}$，以及 $\mathbf{x}_N$、$\mathbf{y}_N \in \mathbb{S}^{N-1}$，

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*) - \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)\right]\right| \geq \varepsilon\right) = O_{p,r,\varepsilon}\left(\left[\min_{i\in I_p} \sqrt{\xi_N^{(i)}}\right]^{-r}\right).$$

证明。由于对每个 $i \in I$ 都有 $b_N^{(i)} \gg 1$，只需证明 $r = 2m$ 为偶数时的结论。我们定义一个共轭线性对合 $*: \mathbb{C}\langle z_i : i \in I\rangle \to \mathbb{C}\langle z_i : i \in I\rangle$，其在单项式上的作用如下：

$$(z_{i(1)} \cdots z_{i(d)})^* = z_{i(d)} \cdots z_{i(1)}.$$

由于矩阵 $\mathcal{Z}_N = (\Xi_N^{(i)})_{i\in I}$ 是厄米的，该运算与通常的矩阵伴随相交换：

$$[p(\mathcal{Z}_N)]^* = p^*(\mathcal{Z}_N),$$

我们利用这一点，将加权迹的复共轭写成另一个加权迹

$$\overline{\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)} = \mathrm{Tr}\left([p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*]^*\right) = \mathrm{Tr}(p^*(\mathcal{Z}_N)\mathbf{y}_N\mathbf{x}_N^*).$$

特别地，模平方可以写成一个乘积

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)-\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)\right]|^2\\=&\Big(\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)-\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N\mathbf{y}_N^*)\right]\Big)\Big(\mathrm{Tr}(p^*(\mathcal{Z}_N)\mathbf{y}_N\mathbf{x}_N^*)-\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(p^*(\mathcal{Z}_N)\mathbf{y}_N\mathbf{x}_N^*)\right]\Big).\end{aligned}$$

该结果随即由引理 3.3 和马尔可夫不等式得出。 □

现在我们可以证明各向同性全局定律。我们回顾记号 $\xrightarrow{\mathbb{P}}$，表示依概率收敛。

命题 3.6（各向同性全局定律）。设 $(\mathbf{x}_N^{(s)})_{s=1}^r$、$(\mathbf{y}_N^{(s)})_{s=1}^r\subset\mathbb{S}^{N-1}$ 满足

$$\lim_{N\to\infty}\langle\mathbf{x}_N^{(s)},\mathbf{y}_N^{(s)}\rangle=c_s.$$

若 $p_1(\vec{z})\ldots,p_r(\vec{z})\in\mathbb{C}\langle z_i\colon i\in I\rangle$，则

$$\mathrm{Tr}\left(\prod_{s=1}^r\mathbf{x}_N^{(s-1)}\mathbf{y}_N^{(s)*}p_s(\mathcal{Z}_N)\right)\xrightarrow{\mathbb{P}}\prod_{s=1}^r\left[c_s\tau_{\mathcal{Z}}(p_s)\right],$$

其中 $\mathbf{x}_N^{(r)}=\mathbf{x}_N^{(0)}$。若对于某个 $\varepsilon>0$，$\min_{i\in I_{p_1,\ldots,p_r}}\xi_N^{(i)}\gg N^{\varepsilon}$，则该收敛可提升为几乎必然意义下的收敛：

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Tr}\left(\prod_{s=1}^r\mathbf{x}_N^{(s-1)}\mathbf{y}_N^{(s)*}p_s(\mathcal{Z}_N)\right)\overset{\text{a.s.}}{=}\prod_{s=1}^r\left[c_s\tau_{\mathcal{Z}}(p_s)\right].$$

证明。我们先将所讨论的迹改写为若干迹的乘积：

$$\mathrm{Tr}\left(\prod_{s=1}^r\mathbf{x}_N^{(s-1)}\mathbf{y}_N^{(s)*}p_s(\mathcal{Z}_N)\right)=\prod_{s=1}^r\left\langle p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)},\mathbf{y}_N^{(s)}\right\rangle=\prod_{s=1}^r\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*}\right).$$

因此，只需证明单项 $\mathrm{Tr}\left(p_s(\mathcal{Z}_N)\mathbf{x}_N^{(s)}\mathbf{y}_N^{(s)*}\right)$ 的所述收敛性。收敛性依概率收敛可由引理 3.1 和推论 3.5推出。若 $\min_{i\in I_{p_1,\ldots,p_r}}\xi_N^{(i)}\gg N^{\varepsilon}$ 对某个$\varepsilon>0$成立，则可在推论 r 3.5 中选取足够大的值，以应用 Borel-Cantelli 引理，并将收敛性提升至几乎必然意义。□

3.2. 定理 **1.3**的证明。 我们将详细阐述引言中给出的证明思路。尽管许多细节都是常规的，我们仍在此一并写出，以求完整。回顾记号$\mathbf{M}_N=\mathbf{\Xi}_N+\mathbf{A}_N=\sum_{k=1}^N\lambda_k(\mathbf{M}_N)\mathbf{m}_N^{(k)}\mathbf{m}_N^{(k)*}$ 表示尖峰 RBM 模型的谱分解，扰动 $\mathbf{A}_N=\sum_{s=1}^r\theta_s\mathbf{a}_N^{(s)}\mathbf{a}_N^{(s)*}$的记号也类似。我们假设 $\xi_N\gg N^{\varepsilon}$ 对某个 $\varepsilon>0$成立。我们从各向同性全局定律的一个直接推论开始。

引理 3.7. 对于 $s'\in[r]$，谱测度 $\mu^{\mathbf{a}_N^{(s')}}\mathbf{M}_N$ 几乎处处弱收敛到

$$\mu_{\theta_{s'}}(dx)=\frac{\mathbb{1}\{|x|\le2\sigma\}}{2\pi}\frac{\sqrt{4\sigma^2-x^2}}{\theta_{s'}^2+\sigma^2-\theta_{s'}x}\,dx+\mathbb{1}\{|\theta_{s'}|>\sigma\}\left(1-\frac{\sigma^2}{\theta_{s'}^2}\right)\delta_{\theta_{s'}+\frac{\sigma^2}{\theta_{s'}}}(dx).$$

证明。 由于特征向量 $(\mathbf{a}_N^{(s)})_{s\in[r]}$ 是正交归一的，命题 3.6 告诉我们

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left\langle\mathbf{M}_N^m\mathbf{a}_N^{(s')},\mathbf{a}_N^{(s')}\right\rangle&=\lim_{N\to\infty}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{a}_N^{(s')}\mathbf{a}_N^{(s')*}\left(\mathbf{\Xi}_N+\sum_{s=1}^r\theta_s\mathbf{a}_N^{(s)}\mathbf{a}_N^{(s)*}\right)^m\right)\\&\overset{\text{a.s.}}{=}\lim_{N\to\infty}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{a}_N^{(s')}\mathbf{a}_N^{(s')*}\left(\mathbf{W}_N+\theta_{s'}\mathbf{a}_N^{(s')}\mathbf{a}_N^{(s')*}\right)^m\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\langle \left(\mathbf{W}_N + \theta_{s'} \mathbf{a}_N^{(s')} \mathbf{a}_N^{(s')*} \right)^m \mathbf{a}_N^{(s')}, \mathbf{a}_N^{(s')} \right\rangle,$$

其中 $\mathbf{W}_N$是一个 Wigner 矩阵。因此， $\mu^{\mathbf{a}_N^{(s')}} \mathbf{M}_N$的矩与 $\mu^{\mathbf{a}_N^{(s')}} \mathbf{W}_{N+\theta_{s'}} \mathbf{a}_N^{(s')} \mathbf{a}_N^{(s')*}$的矩几乎处处收敛到同一个确定性序列（$m_1$， m_2，.....） $\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 。Noiry 证明了，谱测度 $\mu^{\mathbf{a}_N^{(s')}} \mathbf{W}_{N+\theta_{s'}} \mathbf{a}_N^{(s')} \mathbf{a}_N^{(s')*}$ 几乎处处弱地收敛于 $\mu_{\theta_{s'}}$ [Noi21，命题2]：极限矩 $m_i < \infty$ 的有限性进一步表明，$\mu_{\theta_{s'}}$ 的矩由同一个序列（m_1， m_2，.....）给出。由于分布 $\mu_{\theta_{s'}}$ 是紧支撑的，它由其矩唯一确定。因此， $\mu^{\mathbf{a}_N^{(s')}} \mathbf{M}_N$ 的矩收敛到（m_1， m_2，.....）意味着 $\mu^{\mathbf{a}_N^{(s')}} \mathbf{M}_N$ 几乎处处弱地收敛于$\mu_{\theta_{s'}}$。

□

为证明特征值 BBP 相变 (S1) 对于 $\mathbf{M}_N$，我们采用经典的 Weyl 交错不等式在秩一扰动情形下的特例[HJ13，推论 4.3。9]。

命题 3.8（Weyl）。设 $\mathbf{H}_N \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 为厄米矩阵，且 $\mathbf{v}_N \in \mathbb{S}^{N-1}$。若 $\theta > 0$，则

$$\lambda_k(\mathbf{H}_N) \le \lambda_k(\mathbf{H}_N + \theta \mathbf{v}_N \mathbf{v}_N^*) \le \lambda_{k+1}(\mathbf{H}_N), \qquad k = 1, \dots, N-1;$$
$$\lambda_N(\mathbf{H}_N) \le \lambda_N(\mathbf{H}_N + \theta \mathbf{v}_N \mathbf{v}_N^*).$$

现在我们可以给出

定理 *1.3* 的证明。 首先，假设 $(\theta_s)_{s=1}^r$ 互异。我们通过对 r 进行归纳法来证明该结果。 $r = 1$ 的基例对应于秩一扰动 $\mathbf{M}_N = \mathbf{\Xi}_N + \theta_1 \mathbf{a}_N^{(1)} \mathbf{a}_N^{(1)*}$。不失一般性，我们可以假设 $\theta_1 > 0$。将引理 3.7 应用于例 2.2中谱测度的显式形式，可得几乎必然的弱收敛

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mu_{\mathbf{M}_N}^{\mathbf{a}_N^{(1)}} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \left| \left\langle \mathbf{a}_N^{(1)}, \mathbf{m}_N^{(k)} \right\rangle \right|^2 \delta_{\lambda_k(\mathbf{M}_N)} \\ &\overset{\text{a.s.}}{=} \frac{\mathbb{1}\{|x| \le 2\sigma\}}{2\pi} \frac{\sqrt{4\sigma^2 - x^2}}{\theta_1^2 + \sigma^2 - \theta_1 x} dx + \mathbb{1}\{|\theta_1| > \sigma\} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\theta_1^2}\right) \delta_{\theta_1 + \frac{\sigma^2}{\theta_1}}(dx). \end{aligned} \tag{24}$$

$\mathbf{\Xi}_N$ 的强收敛和交错不等式意味着至多存在一个离群特征值：

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_1(\mathbf{M}_N) \overset{\text{a.s.}}{=} -2\sigma;$$
$$\lim_{N\to\infty} \lambda_{N-1}(\mathbf{M}_N) \overset{\text{a.s.}}{=} 2\sigma.$$

特别是，若 $\theta_1 \in (\sigma, \infty)$，则极限谱测度中位于 $\theta_1 + \frac{\sigma^2}{\theta_1} > 2\sigma$ 处的原子质量（24）必定源自 $\lambda_N(\mathbf{M}_N)$，因此

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_N(\mathbf{M}_N) \overset{\text{a.s.}}{=} \theta_1 + \frac{\sigma^2}{\theta_1};$$
$$\lim_{N\to\infty} \left| \left\langle \mathbf{a}_N^{(1)}, \mathbf{m}_N^{(N)} \right\rangle \right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} 1 - \frac{\sigma^2}{\theta_1^2}.$$

注意，交错不等式还表明， $\lambda_N(\mathbf{M}_N)$ 是 $\theta_1 > 0$ 的非递减函数。如果 $\theta_1 \in (0, \sigma]$，那么我们可以利用这一单调性推导出

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_N(\mathbf{M}_N) \overset{\text{a.s.}}{=} 2\sigma.$$

缺乏 在极限谱测度中的 2σ 处存在一个原子质量（24）在这种情况下意味着 es

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(1)},\mathbf{m}_N^{(N)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} 0.$$

现在假设某个 $r\geq 1$ 的结果，并考虑一个秩为 $r+1$ 的扰动 n

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_N &= \mathbf{\Xi}_N+\sum_{s=1}^{r+1}\theta_s\mathbf{a}_N^{(s)}\mathbf{a}_N^{(s)*}\\ &= \left(\mathbf{\Xi}_N+\sum_{s=1}^{r}\theta_s\mathbf{a}_N^{(s)}\mathbf{a}_N^{(s)*}\right)+\theta_{r+1}\mathbf{a}_N^{(r+1)}\mathbf{a}_N^{(r+1)*}\\ &= \widetilde{\mathbf{M}}_N+\theta_{r+1}\mathbf{a}_N^{(r+1)}\mathbf{a}_N^{(r+1)*}.\end{aligned}$$

我们回顾一下假设 $\theta_1<\cdots<\theta_{r+1}$ 非零以及记号

$$\begin{aligned}L_{-\sigma} &= \#(\{s\in[r]:\theta_s<-\sigma\});\\ L_{+\sigma} &= \#(\{s\in[r]:\theta_s>\sigma\}).\end{aligned}$$

不失一般性，我们可以假设 $\theta_{r+1}>0$。根据归纳假设，我们知道 $\widetilde{\mathbf{M}}_N=\sum_{k=1}^N\lambda_k(\widetilde{\mathbf{M}}_N)\,\widetilde{\mathbf{m}}_N^{(k)}\widetilde{\mathbf{m}}_N^{(k)*}$ 满足

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\lambda_k(\widetilde{\mathbf{M}}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} \theta_k+\frac{\sigma^2}{\theta_k}<-2\sigma, \qquad \forall k\in[L_{-\sigma}];\\ \lim_{N\to\infty}\lambda_{L_{-\sigma}+1}(\widetilde{\mathbf{M}}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} -2\sigma;\\ \lim_{N\to\infty}\lambda_{N+1-k}(\widetilde{\mathbf{M}}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} \theta_{r+1-k}+\frac{\sigma^2}{\theta_{r+1-k}}>2\sigma, \qquad \forall k\in[L_{+\sigma}];\\ \lim_{N\to\infty}\lambda_{N-L_{+\sigma}}(\widetilde{\mathbf{M}}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} 2\sigma.\end{aligned} \tag{25}$$

我们再次使用引理3.7 来计算极限谱测度

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\mu_{\mathbf{M}_N}^{\mathbf{a}_N^{(s)}} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(k)}\right\rangle\right|^2\delta_{\lambda_k(\mathbf{M}_N)}\\ &\overset{\text{a.s.}}{=} \frac{\mathbb{1}\{|x|\leq 2\sigma\}}{2\pi}\frac{\sqrt{4\sigma^2-x^2}}{\theta_s^2+\sigma^2-\theta_s x}\,dx+\mathbb{1}\{|\theta_s|>\sigma\}\left(1-\frac{\sigma^2}{\theta_s^2}\right)\delta_{\theta_s+\frac{\sigma^2}{\theta_s}}(dx)\end{aligned} \tag{26}$$

对任意 $s\in[r+1]$。由于 $(\theta_s)_{s=1}^{r+1}$ 互异，且函数 $x\mapsto x+\frac{\sigma^2}{x}$ 在 $|x|\geq\sigma$ 上是单射，应用于秩一扰动 $\mathbf{M}_N=\widetilde{\mathbf{M}}_N+\theta_{r+1}\mathbf{a}_N^{(r+1)}\,\mathbf{a}_N^{(r+1)*}$ 的交错不等式，以及（25）中的收敛性，意味着只有当 26）中的弱收敛成立时，才有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\lambda_k(\mathbf{M}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} \theta_k+\frac{\sigma^2}{\theta_k}, \qquad \forall k\in[L_{-\sigma}];\\ \lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(k)}\right\rangle\right|^2 &\overset{\text{a.s.}}{=} \mathbb{1}\{s=k\}\left(1-\frac{\sigma^2}{\theta_k^2}\right), \qquad \forall(s,k)\in[r+1]\times[L_{-\sigma}];\\ \lim_{N\to\infty}\lambda_{L_{-\sigma}+1}(\mathbf{M}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} -2\sigma;\\ \lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(k)}\right\rangle\right|^2 &\overset{\text{a.s.}}{=} 0, \qquad \forall s\in[r+1]\text{ if }\theta_k\in[-\sigma,0);\\ \lim_{N\to\infty}\lambda_N(\mathbf{M}_N) &\overset{\text{a.s.}}{=} \begin{cases}\theta_{r+1}+\dfrac{\sigma^2}{\theta_{r+1}} & \text{if }\theta_{r+1}\in(\sigma,\infty);\\ 2\sigma & \text{if }\theta_{r+1}\in(0,\sigma];\end{cases}\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(N)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} \begin{cases} \mathbb{1}\{s=r+1\}\left(1-\dfrac{\sigma^2}{\theta_{r+1}^2}\right) & \forall s\in[r+1] \text{ if } \theta_{r+1}\in(\sigma,\infty); \\ 0, & \forall s\in[r+1] \text{ if } \theta_{r+1}\in(0,\sigma]. \end{cases}$$

粗略地说，我们从谱的左边缘出发，借助陷阱 $\lambda_1(\mathbf{M}_N) \lesssim \lambda_1(\mathbf{M}_N)$ 逐步向内推进。利用下界 $\lambda_N(\mathbf{M}_N) \lesssim \lambda_N(\mathbf{M}_N)$ 确定谱的右边缘后，我们可以重复上述论证，从另一方向逐步向内推进，并利用陷阱 $\lambda_{N-1}(\mathbf{M}_N) \leq \lambda_N(\mathbf{M}_N)$。因此，

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{N-k}(\mathbf{M}_N) \overset{\text{a.s.}}{=} \theta_{r+1-k}+\frac{\sigma^2}{\theta_{r+1-k}}, \qquad \forall k\in[L_{+\sigma}];$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(N-k)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} \mathbb{1}\{s=r+1-k\}\left(1-\frac{\sigma^2}{\theta_{r+1-k}^2}\right), \qquad \forall (s,k)\in[r+1]\times[L_{+\sigma}];$$

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{N-1-L_{+\sigma}}(\mathbf{M}_N) \overset{\text{a.s.}}{=} 2\sigma;$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(N-k)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} 0, \qquad \forall s\in[r+1] \text{ if } \theta_{r+1-k}\in(0,\sigma],$$

由此完成归纳步骤。

为证明一般情形，我们不再假设扰动 $\mathbf{A}_N=\sum_{s=1}^r \theta_s \mathbf{a}_N^{(s)}\mathbf{a}_N^{(s)*}$ 的非平凡特征值 $\theta_1\leq\cdots\leq\theta_r$必然是单特征值。因此，设 $\Theta_1<\cdots<\Theta_q$ 为 $(\theta_s)_{s=1}^r$ 的互异值，并设 $m_t=\dim(\ker(\Theta_t\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N))$ 为 Θ_t 的重数。利用霍夫曼–维兰特不等式 [HJ13, Corollary 6.3.8] 进行标准的连续性论证，即可根据我们在 $(\theta_s)_{s=1}^r$ 具有互异值情形下的早先结果，证明 $\mathbf{M}_N$ 的特征值 BBP 相变 (S1)（例如参见 [BGN11, Section 6.2.3]）。接下来，我们再次利用谱测度 (26) 的收敛性，推得对于任意 $(s,t)\in[r]\times[q]$,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\sum_{i=1}^{t-1}m_i+1}^{\sum_{i=1}^{t}m_i}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(k)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} \mathbb{1}\left\{s\in\left[\sum_{i=1}^{t-1}m_i+1,\sum_{i=1}^{t}m_i\right]\right\}\left(1-\frac{\sigma^2}{\Theta_t^2}\right) \text{ if } \Theta_t<-\sigma;$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\sum_{i=1}^{t-1}m_i+1}^{\sum_{i=1}^{t}m_i}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(k)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} 0 \text{ if } \Theta_t\in[-\sigma,0);$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\sum_{i=t+1}^{q}m_i+1}^{\sum_{i=t}^{q}m_i}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(N+1-k)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} \mathbb{1}\left\{s\in\left[\sum_{i=1}^{t-1}m_i+1,\sum_{i=1}^{t}m_i\right]\right\}\left(1-\frac{\sigma^2}{\Theta_t^2}\right) \text{ if } \Theta_t>\sigma;$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\sum_{i=t+1}^{q}m_i+1}^{\sum_{i=t}^{q}m_i}\left|\left\langle \mathbf{a}_N^{(s)},\mathbf{m}_N^{(N+1-k)}\right\rangle\right|^2 \overset{\text{a.s.}}{=} 0 \text{ if } \Theta_t\in(0,\sigma].$$

注意，这已经证明了特征向量 BBP 转变中的不对齐性(S4) 以及(S3)的第二部分；然而，我们无法获得单个特征向量$\mathbf{m}_N^{(k)}/\mathbf{m}_N^{(N+1-k)}$ 在$\mathbf{a}_N^{(s)}$ 上的投影。对 $s\in[r]$上的对齐性求和，我们得到较弱的结论

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\sum_{i=1}^{t-1}m_i+1}^{\sum_{i=1}^{t}m_i}\left\|P_{\ker(\Theta_t\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(k)})\right\|_2^2 \overset{\text{a.s.}}{=} m_t\left(1-\frac{\sigma^2}{\Theta_t^2}\right) \text{ if } \Theta_t<-\sigma;$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=\sum_{i=t+1}^{q}m_i+1}^{\sum_{i=t}^{q}m_i}\left\|P_{\ker(\Theta_t\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(N+1-k)})\right\|_2^2\overset{\text{a.s.}}{=}m_t\left(1-\frac{\sigma^2}{\Theta_t^2}\right)\text{ if }\Theta_t>\sigma.$$

尽管如此，我们可以在[Cap13的第 5] 节中再次进行扰动论证，从而根据互异性 $(\theta_s)_{s=1}^r$的早期情形再次推导出该结果。我们得到

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{\ker(\Theta_t\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(k)})\right\|_2^2\overset{\text{a.s.}}{=}1-\frac{\sigma^2}{\Theta_t^2},\qquad\forall k\in\left[\sum_{i=1}^{t-1}m_i+1,\sum_{i=1}^{t}m_i\right]\text{ if }\Theta_t<-\sigma;$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_{\ker(\Theta_t\mathbf{I}_N-\mathbf{A}_N)}(\mathbf{m}_N^{(N+1-k)})\right\|_2^2\overset{\text{a.s.}}{=}1-\frac{\sigma^2}{\Theta_t^2},\qquad\forall k\in\left[\sum_{i=t+1}^{q}m_i+1,\sum_{i=t}^{q}m_i\right]\text{ if }\Theta_t>\sigma,$$

其确立了（S3）。 □

References

[AGV] Benson Au 和 Jorge Garza-Vargas, *Spectral asymptotics for contracted tensor ensembles*, 预印本。https://arxiv.org/abs/2110.01652v3。[Aiz94] Michael Aizenman, *Localization at weak disorder: some elementary bounds*, 《数学物理评论》6（1994），第 5A 期，1163–1182。MR 1301371[AM93] Michael Aizenman 和 Stanislav Molchanov, *Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation* **157** 1993 2, 245 278 , 《数学物理通讯》（），第 – 期。1244867 MR[58] *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices* **109** 以及 P. W. 安德森, , 《物理评论》（1958），1492–1505。[Au18] Benson Au, *Traffic distributions of random band matrices* **23** 2018 77, , 《电子概率学报》（），论文编号 pp。3858905 MR[21] 48 _____ Au , *Finite-rank perturbations of random band matrices via infinitesimal free probability*, 《纯粹与应用数学通讯》74（2021），第 9 期，1855–1895。MR 4287689[BBAP05] Jinho Baik、G ´ ´ *Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices* **33** 2005 5, 1643 1697 2165575 erard Ben Arous 和 Sandrine Peche, , 《概率年刊》（），第 – 期。MR [BGK17] Florent Benaych-Georges 和 Antti Knowles, *Local semicircle law for Wigner matrices*, 《随机矩阵高级专题》，《综合全景》，第 53 卷，法国数学学会，巴黎，2017 年，第 1–90 页。MR 3792624`BGN[Florent Benaych-Georges 和 Raj Rao Nadakuditi, 11] , , 《数学进展》（），第 – 期。MR *The eigenvalues and eigenvectors of finite low rank* BGP[Florent Benaych-Georges 和 Sandrine P14] eche, , 《电子概率通讯》（），第 期。MR *perturbations of large random matrices* **227** 2011 1, 494 521 2782201 ´ ´ *Largest eigenvalues and eigenvectors of band or sparse* BLS Marek Bozejko、Michael Leinert 和 Roland Speicher, [96] *random matrices* **19** 2014 4, 9 3164751 . , 《太平洋数学杂志》（），第 – 期。MR *Convolution and limit theorems for conditionally free random variables* **175** 1996 2, 357 388 BMP L. V. Bogachev、S. A. Molchanov 和 L. A. Pastur, [91] 1432836 , 《数学札记》50（1991），第 6 期，31–42，157。MR 1150631 *On the density of states of random band matrices*Bou[Paul Bourgade, 18] , 《国际数学家大会论文集——里约热内卢 2018》。第 IV 卷。特邀报告，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018 年，第 2759–2784 页。MR 3966510 *Random band matrices*BS[Zhidong Bai 和 Jack W. Silverstein, 10] , 第二版，《统计学系列》，Springer，纽约，*Spectral analysis of large dimensional random matrices*。MR BS S. T. Belinschi 和 D. Shlyakhtenko, 2010 2567175 , 《美国数学杂志》134（2012），第 1 期，193–234。MR [12] 2876144 *Free probability of type B: analytic interpretation and applications*BvH[Tatiana Brailovskaya 和 Ramon van Handel,] , 预印本。https://arxiv.org/abs/2201.05142v1。 *Universality and sharp matrix concentration inequalities*BvH[Afonso S. Bandeira 和 Ramon van Handel, 16] , 《概率年刊》（），第 – 期。MR *Sharp nonasymptotic bounds on the norm of random matrices with independent entries* **44** 2016 4, 2479 2506 BY Z. D. Bai 和 Y. Q. Yin, [88] 3531673 , 《概率年刊》（），第 – 期。MR *Necessary and sufficient conditions for almost sure convergence of the largest eigenvalue of a Wigner matrix* **16** 1988 4, 1729 1741 958213 BYY[Paul Bourgade、Horng-Tzer Yau 和 Jun Yin, 20] , 《纯粹与应用数学通讯》（）第 – 期。MR *Random band matrices in the delocalized phase I: Quantum unique ergodicity and universality* **73** 2020 7, 1526 1596 Cap M. Capitaine, [13] 4156609 , 《理论概率学报》（2013），第 3 期，595–648。MR 3090543

[CDG] Guillaume C ´ *Freeness of type B and conditional freeness* ebron、Antoine *for random matrices* 2205 01926 1 Dahlqvist 和 Franck Gabriel，，预印本。https://arxiv.org/abs/ 。v。[CDMF09] Mireille Capitaine、Catherine Donati-Martin 和 Delphine F ´ *The largest eigenvalues of finite rank* eral，，《概率年刊》 *deformation of large Wigner matrices: convergence and nonuniversality of the fluctuations* **37** 2009 1, 1 47 2489158 （），第 – 期。MR CDMF M. Capitaine、C. Donati-Martin 和 D. F [12] ´ *Central limit theorems for eigenvalues of deformations of* eral，，《亨利·庞加莱概率与统计研究所 *Wigner matrices* ´ **48** 2012 1, 107 133 2919200 年刊》（），第 – 期。MR [CHS18] Benoit Collins、Takahiro Hasebe 和 Noriyoshi Sakuma， *Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices* **70** 2018 3, 1111 1150 ，《日本数学会杂志》（），第 – 期。 3830802 MR[90] *Scaling properties of band random matrices* CMI Giulio Casati、Luca Molinari 和 Felix Izrailev，《物理评论快报》 64 （ 1990 ），第 16 期，1851–1854。MR 1046365[CPSS] Giorgio Cipolloni、Ron Peled、Jeffrey *Dynamical localization for random* Schenker 和 Jacob Shapiro， *band matrices up to* $W \ll N^{1/4}$ 2206 05545 2 ，预印本。 https://arxiv.org/abs/ 。v。[CS] Nixia Chen 和 Charles K Smart， *Random band matrix localization by scalar fluctuations*，预印本。 https://arxiv.org/abs/2206.06439v1。[Dyk93] Ken Dykema， *On certain free product factors via an extended matrix model*，《泛函分析杂志》 112（1993），第 1 期，31–60。MR 1207936[EY17] L ´aszl´o Erd˝os 和 Horng-Tzer Yau， *A dynamical approach to random matrix theory*，《 Courant 数学讲义》，第 28 卷，Courant 数学科学研究所，纽约；美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯， 2017 3699468 。MR FM Yan V. Fyodorov 和 Alexander D. Mirlin， [91] *Scaling properties of localization in random band matrices: a* *σ-model approach* **67** 1991 18, 2405 2409 ，《物理评论快报》（），第 – 期。 1130103 MR [85] ¨ FMSS J. Frohlich、F. Martinelli、E. Scoppola 和 *Constructive proof of localization in the Anderson* T. Spencer， *tight binding model* **101** 1985 1, 21 46 814541 ，《数学物理通讯》（），第 – 期。MR [FS83] J¨ ¨ *Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large* urg Frohlich 和 *disorder or low energy* **88** 1983 2, 151 184 Thomas Spencer，《数学物理通讯》（），第 – 期。MR 696803 [13] *Matrix analysis* HJ Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson，第二版， 剑桥大学出版社，剑桥， 2013 2978290 。MR KY Antti Knowles 和 Jun Yin， [13] *The isotropic semicircle law and deformation of Wigner matrices*，《纯粹与应用数学通讯》 **66** 2013 11, 1663 1750 3103909 （），第 – 期。MR KY，，《概率年刊》42（2014），第 5 期，1980– [14] _____ *The outliers of a deformed Wigner matrix* 2031。MR 3262497[KY17]，_____ *Anisotropic local laws for random matrices* **169** 2017 1 2，，《概率理 257 352 3704770 论及相关领域》（），第 - – 期。MR[LY14] Ji Oon Lee 和 Jun Yin， *A necessary and sufficient condition for edge universality of Wigner matrices*， 《杜克数学杂志》163（2014），第 1 期，117–173。MR 3161313[Min96] Nariyuki Minami， *Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model*，《数学物理通讯》177（1996），第 3 期，709–725。 MR 1385082[Mur01] Naofumi Muraki， *Monotonic independence monotonic central limit theorem and monotonic law of small* ，《无限维分析、量子概率及相关主题》 *numbers* **4** 2001 1, 39 58 1824472 （），第 – 期。MR [21] *Spectral measures of spiked random matrices* **34** 2021 2, 923Noi Nathan Noiry，《理论概率学报》（），第 –952 页。MR 4259454 [72] *The spectrum of random matrices* **10** 1972 1, 102 112 475502 Pas L. A. Pastur，《理论数 [´ 06] ´ ´ *The largest eigenvalue of small rank perturbations of Hermitian random matrices* 学物理》（），第 – 期。MR Pec S. Peche，《概率理论及相关领域》134（2006），第 1 期，127–173。MR 2221787[PRS13] Alessandro Pizzo、 David Renfrew 和 Alexander Soshnikov， *On finite rank deformations of Wigner* *matrices* ´ **49** 2013 1, 64 94 3060148 ，《亨利·庞加莱概率与统计研究所年刊》 （），第 – 期。MR [RS13] David Renfrew 和 Alexander Soshnikov， *On finite rank deformations of Wigner matrices II: Delocalized* *perturbations* **2** 2013 1, 1250015, 36 ，《随机矩阵：理论与应用》（），第 3039820 期。MR [18] Shl D. Shlyakhtenko， *Free probability of type-B and asymptotics of finite-rank perturbations of random matri-* *ces* **67** 2018 2, 971 991 ，《印第安纳大学数学杂志》（），第 – 3798863 期。MR [10] *The spectral edge of some random band matrices* Sod Sasha Sodin，《数学年刊》（第 2 3，2223 172 2010 2251 2726110 ）（），第 – 期。MR [Sos99] Alexander Soshnikov， *Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices*， 《数学物理通讯》 **207** 1999 3, 697 733 1727234 （），第 – 期。MR TW Craig A. Tracy 和 Harold Widom， [94] *Level-spacing distributions and the Airy kernel*，《数学物理通讯》159（1994），第 1 期，151–174。MR 1257246

[TW96] , *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*, Comm. Math. Phys. **177** (1996), no.3, 727–754.MR 1385083[
Voi91] Dan Voiculescu,
Limit laws for random matrices and free products **104** 1991 1, , Invent.
201 220 1094052
Math. ( ), no. – . MR[Wig55] Eugene P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*,
Ann. of Math. (2 **62** 1955 548 564 0077805) ( ), – . MR Wig ,
[58] ———
On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 325–327. MR 95527[Wig
67] , *Random Matrices in Physics*, SIAM Review **9** (1967), no. 1, 1–23.

Department of Statistics, University of California, Berkeley, 367 Evans Hall # 3860,
Berkeley, CA 94720-3860, USA*Email address*: bensonau@berkeley.edu