arXiv:2304.13065v1 [cs.LO] 21 Apr 2023

无限状态广播网络中的可覆盖性参数化验证

A.R. Balasubramanian 慕尼黑
工业大学 *ayikudir@in.tum.de

摘要

具有有限状态进程的广播网络中的可覆盖性参数化验证，已针对不同类型的模型和拓扑结构开展研究。本文尝试建立一种广播网络理论，其中的进程可以是良结构迁移系统。由此得到的形式化体系称为 *well-structured broadcast networks*。对于各种类型的通信拓扑结构，我们证明了静态情形下的可覆盖性判定，即网络拓扑不允许发生变化时的可覆盖性判定。具体而言，我们证明，对于这些类型的静态通信拓扑结构，广播网络本身是一个 *well-structuredtransition system*，从而证明了广播网络中可覆盖性的可判定性。我们还给出了一种算法，用于在允许重新配置节点之间的连接时判定良结构广播网络的可覆盖性。最后，只需对该算法进行少量修改，我们即可证明当底层进程是下推自动机时可覆盖性的可判定性。

1 引言

无限状态系统的规范与验证是一项具有挑战性的任务。在过去二十年中，人们提出了多种技术来检查这类系统的安全性及其他性质，其中最突出的方法之一是 **良基结构转移系统** [20, 1] 的概念。良基结构转移系统是一种在其状态上配备了良拟序的迁移系统。在满足迁移系统的一些宽松假设时，已知这类系统中的可覆盖性是可判定的。

参数化验证研究由执行相同代码的匿名代理构成的网络，这些代理通过广播、会合通信和共享变量等通信方式进行交互 [19, 21, 9]。其目标是证明该模型的所有实例

*作者在印度金奈数学研究所就读期间完成的工作。本文的初步版本曾发表于 GandALF 2018。

的正确性，而不受（参数化的）代理数量影响。这类问题通常用无限状态系统来表述，因此可以应用无限状态验证理论中的技术。事实上，参数化验证中的许多研究结果都证明，网络底层的无限状态空间是一个良基结构转移系统。[13, 14, 11, 2]

广播网络是一种形式化体系，于 [13], 中引入，其中代理可以同时向其所有邻居广播消息。代理的数量和通信拓扑在执行开始前即已固定。此类系统的参数化验证涉及检查某个规范是否与代理数量或通信拓扑无关地成立。文献中针对这类系统考虑的一项重要规范是可覆盖性问题：是否存在一个初始配置，使得至少一个代理能够到达某个特定状态。在 [13], 中，作者证明，即使代理是有限状态进程，广播网络的可覆盖性问题仍然是不可判定的。此外，对于限制为有界直径拓扑的广播网络，不可判定性也已得到证明 [14]；而对于有界路径拓扑 [13], 、有界直径和度拓扑 [14], 以及团拓扑，则已证明其具有可判定性。进一步地，当允许对底层通信拓扑中的连接进行重配置时，可以通过多项式时间算法判定由有限状态进程组成的广播网络的可覆盖性 [12]。这一结果或许令人意外，因为可重配置情形看起来是静态情形的推广。此外，也有一些工作将参数化验证的结果从有限状态情形扩展到概率自动机 [6, 5] 和计时自动机[2]。既然广播网络理论已经针对这些不同类型的模型得到了研究，那么尝试构建以良结构迁移系统作为底层进程的广播网络理论，似乎是很自然的。

本文研究了广播网络中的可覆盖性问题，其中每个进程都可以是一个带标签的良结构转换系统。在这类系统中，底层进程本身可以具有无限多个状态。我们将此类系统称为良结构广播网络。我们证明，在这一设置下，对于多类受限拓扑结构，可覆盖性问题是可判定的。特别地，我们证明了以下拓扑结构集合上的可判定性：所有团拓扑、所有路径有界拓扑，以及所有具有有界直径和度的拓扑结构。我们表明，对于这些以良结构迁移系统作为进程的拓扑结构集合，网络的底层状态空间本身也是一个良结构迁移系统。我们还给出了一种算法，用于在交互代理之间允许进行边重配置时，判定良结构广播网络中某一配置的可覆盖性。当底层进程是下推自动机时，该算法稍作修改后也可以得到一个用于判定可覆盖性的算法。

致谢：我由衷感谢 Nathalie Bertrand 和 Nicolas Markey 就本文主题进行的有益讨论，并协助准备本文。感谢 Igor Walukiewicz 和 B. Srivathsan 帮助安排所需经费。我还想

感谢 Thejaswini K.S 和 Mirza Ahad Baig 对本文早期稿件提出意见，也感谢匿名审稿人提供宝贵反馈，这些反馈极大地改善了本文的呈现效果。

2 良结构广播网络

本节回顾有关良结构迁移系统 [20, 1]的结果，并据此定义良结构广播网络。我们还介绍此类网络的重新配置 语义，用以建模底层通信拓扑中可能发生的链接变化。

2.1 良结构迁移系统

定义 1. 集合 X 上的良拟序（*wqo*）$\leq$ 是一种自反、传递的二元关系，满足任意由元素 $x_0, x_1, \cdots$ 构成的无限序列都包含一对递增元素 $x_i \leq x_j$，且 $i < j$。

定义 2. 带标签的良结构转换系统（带标签的良基转移系统）是一个元组$(S, \Sigma, S_0, R, \leq)$，其中

- S 是一个配置集
- Σ 是一个称为字母表的有限符号集合
- $R \subseteq S \times \Sigma \times S$ 是迁移关系
- S_0 是初始配置集合
- $\leq \subseteq S \times S$ 是状态之间的良拟序，满足：$-$ $\leq$与 R兼容，即如果 $s_1 \leq t_1$ 和 $(s_1, a, s_2) \in R$，则存在 t_2 使得 $s_2 \leq t_2$ 和 $(t_1, a, t_2) \in R$

为简化记号，有时我们将写作 $s \xrightarrow{a} s'$，表示 $(s, a, s') \in R$。此外，如果存在 s' 使得 $(s, a, s') \in R$，我们将称标记为 a 的迁移在配置 s 处已启用。

请注意，我们对带标签的良结构迁移系统的定义具有稳健性：如果将良结构迁移系统限制为具有特定标签的迁移，所得系统仍然是良结构迁移系统。如果对于每个 $s \in S$，形如 $(s, a, s') \in R$的迁移都只有有限多个，则称良结构迁移系统为 有限分支。为简化证明，本文将仅讨论有限分支的良结构迁移系统。

我们称配置集 $I \subseteq S$ 为向上闭的，当 $x \in I$ 且 $y \geq x$ 蕴含 $y \in I$ 时。对于任意子集 $I \subseteq S$，我们定义 $\uparrow I = \{x : \exists y \in I, \quad x \geq y\}$。特别地，配置集 I 是向上闭的，当且仅当 $I = \uparrow I$。向上闭集 I 的基是满足 $I = \uparrow I^b$ 的集合 I^b。已知对于良拟序，所有向上闭集都有有限基。

给定一个配置集 I，记 $pre(I)$ 为集合 $\{s' \in S : (s', a, s) \in R$，其中某个 $a \in \Sigma, \ s \in I\}$。对于 $i > 0$，令 $pre^i(I) := \{s' \in S : (s', a, s) \in$

R，其中某个 $a \in \Sigma$， $s \in pre^{i-1}(I)\}$，并令 $pre^*(I) := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} pre^i(I)$。注意，根据良结构迁移系统的定义，如果 I 是向上闭的，那么$pre(I)$ 也是向上闭的。我们有时将 $s \to s'$ 写作 $s \in pre(s')$，并将 $s \xrightarrow{*} s'$ 写作 $s \in pre^*(s')$。如果给定上闭集 I 的有限基后能够计算出集合 $pre(I)$ 的有限基，则称带标签的良基转移系统具有有效前基。

带标签的良基转移系统的可覆盖性 问题如下：给定一个配置 s，判断是否存在 s' 和 s_0 使得 $s_0 \in S_0$、 $s' \geq s$ 和$s_0 \xrightarrow{*} s'$。

根据 [1, 20]，已知

定理 3. 对于具有有效前基和可判定良拟序的带标签良基转移系统，可覆盖性是可判定的。

证明思路如下：给定一个配置 s，我们计算以下上闭集序列： $U_0 =\uparrow s$和 $U_{i+1} =$ 前(U_i)。该序列最终会达到饱和，得到某个 U_m，它将为前$^*(U_0)$提供一个有限基。现在，检查 s 是否可被覆盖，就相当于检查 $\uparrow U_m$中是否至少存在一个初始配置。

带标签的良基转移系统的常见例子包括：任意有限状态系统、带状态向量加法系统（VASS）、带重置弧的 Petri 网、带转移弧的 Petri 网以及有损计数器机。

带标签的良结构转移系统可能是无限状态系统，因此无法以显式方式描述完整的配置集。通常，带标签的良结构转移系统（S、 Σ、 S_0、 R、 $\leq$）通过有限描述（Q、 Σ、 Q_0、 Δ、 $\cdots$）给出。有限描述可能具有额外的结构，例如计数器、因果关系等。关系 Δ 的结构取决于其所描述的带标签良结构转移系统的类型。

例 *4.* 设（Q、 Σ、 Q_0、 Δ、 V）是一个带状态的向量加法系统（*VASS*），其中 Q 是有限状态集， Σ 是有限字母表， Q_0 是初始状态集， V 是 $\mathbb{Z}^d$ 上的有限向量集（对于某个 d），而 Δ 具有 $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times V \times Q$的形式。这描述了一个带标签的良结构转移系统（$S$、 Σ、 S_0、 R、 $\leq$），其中 S 是所有配置的集合，即 $S = \{(p、 u) : (p、 u) \in Q \times \mathbb{N}^d\}$，$S_0 = \{(p、 u) : (p、 u) \in Q_0 \times \{0\}^d\}$，而 $\leq$ 是 $\mathbb{N}^d$上的通常乘积序。转换关系 R 定义如下：*((*p、 u*)* a*, (*q、 w*))* $\in R$当且仅当 $\exists v \in V$，存在（p、 a、 v、 q）$\in \Delta$ 使得 $u + v \geq 0$ 且 $w = u + v$。在此情况下，我们看到每个迁移（（p、 u） a，（q、 w））$\in R$ 都由一个元组（p、 a、 v、 q）$\in \Delta$描述。

在本文的其余部分中，我们假设每个带标签的良基转移系统都将通过有限描述给出。因此，我们假设以下形式的操作：给定 $a \in \Sigma$，选择一个最小配置 $c \in S$，使得由 a 标记的迁移在 s 给定 $a \in \Sigma$ 和 $c \in S$ 选择一个配置c'，使得 $(c,\ a,\ c') \in R$ 删除所有未由 a标记的迁移，都可以通过给定的有限描述来判定 P。

例 5. 若$(Q, \Sigma, Q_0, \Delta, V)$ 是一个描述带标签的良结构迁移系统$(S, \Sigma, S_0, R, \leq)$ 的向量加法系统，那么显然，若 $a \in \Sigma$且$(p, a, v, q) \in \Delta$，使得 $v =$

$(v_1, \ldots, v_d)$，则配置 $c = (p, u)$（其中 $u = (\min(0, -v_1) \ldots, \min(0, -v_d))$）是一个最小配置，使得存在一条以 a 为标签且在 c 处已启用的迁移。此外，假设给定一个字母 $a \in \Sigma$ 和一个配置$c = (p, u)$，我们希望构造一个配置 c'，使得 $(c, a, c') \in R$。显然，可以通过选取形如 $(p, a, v, q) \in \Delta$ 的元组来实现，其中 $u \geq (\min(0, -v_1) \ldots, \min(0, -v_d))$，然后令 $c' = (q, u + v)$。

2.2 良结构广播网络

在本节中，我们定义良构广播网络，并介绍重新配置语义。

在全文中，我们固定一个有限字母表 Σ。将符号集合$\{!!a : a \in \Sigma\}$ 记为 Σ_b，并将符号集合 $\{??a : a \in \Sigma\}$ 记为 Σ_r。

定义 6。进程是一个带标签的良结构转换系统 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R, \leq)$。

良结构广播网络由单个进程 $\mathcal{P}$ 的多个副本组成。此类网络的每个配置都是一个无向图，其中每个节点都标记有一个配置 $s \in S$。直观地说，标签 $!!a$ 和 $??a$ 分别对应于根据底层图所指定拓扑结构进行广播和接收消息。形式化地，

定义 7。 S-图是一个图 $G = (V, E, L)$，其中 L 是一个标记函数 $L : V \to S$。

S-图表示一种无向图，其中每个节点 $v \in V$ 都在执行相同的进程 $\mathcal{P}$，并且当前处于配置 $L(v)$。

现在，我们使用进程的概念来定义一种称为良构广播网络的迁移系统。

定义 8。给定一个进程 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R, \leq)$，良构广播网络是一个元组 $BN(\mathcal{P}) = (\Theta, \Theta_0, \to)$，其中

- Θ 是所有有限 S-图的集合
- Θ_0 是所有有限 S_0-图的集合，并且
- $\to$ 定义如下：如果 $\theta = (V, E, L)$ 和 $\theta' = (V, E', L')$，则 $\theta \xrightarrow{a} \theta'$当且仅当

  广播：$E = E'$ 和 $\exists v \in V$使得

  1. $(L(v), !!a, L'(v)) \in R$2. $(L(u), ??a, L'(u)) \in R$对于每个与 v相连的节点 u，3. $L'(w) = L(w)$ 对于每个其他节点 w

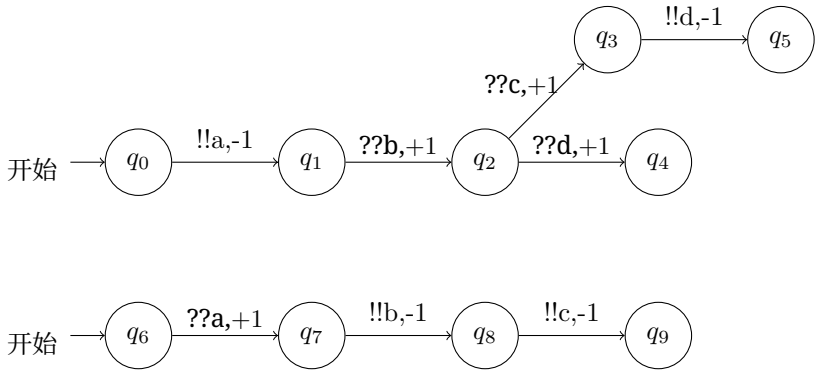

图1：进程示例

若 $\theta_0 \in \Theta_0$，则称 θ_0 为初始图。每当进程 $\mathcal{P}$的含义可从上下文中明确时，我们仅用BN指代广播网络。

良构广播网络可以如下理解：我们有一个图，其中每个顶点都运行进程 $\mathcal{P}$ 的一个副本，而顶点 v 的当前标签表示进程在 v 处的配置。在每个时间步，某个顶点 v 中的进程选择广播一条消息（!!a），该消息会被其所有邻居 u 接收（??a）。

图1描绘了一个进程，其规范由向量加法系统给出。计数器的初始值取为1。如果图中未显示接收符号对应的迁移，则假定该迁移会进入死状态。

请注意，这种广播网络的表述不允许更改底层拓扑中的连接。为了对此类更改进行建模，我们使用重新配置的概念。可重配置良构广播网络是一种良构广播网络；在允许广播迁移的同时，我们还允许以下类型的转换：$\theta = (V, E, L) \to \theta' = (V, E', L')$，条件是

重新配置： $L = L'$ 且 $E' \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$

任何重新配置都对应于进程底层网络拓扑的非确定性变化。我们将由此产生的迁移系统记为 $RBN(\mathcal{P})$。

给定一个良构广播网络BN，可覆盖性问题是：给定一个配置 s，判断是否存在某个初始图，使得经过一系列迁移后，我们能够到达一种网络拓扑，其中至少一个代理达到一个能够覆盖 s的配置 s'。更形式化地说，我们考虑以下问题：给定一个配置 $s \in \mathcal{P}$，判断是否存在 $\theta \in \Theta$、$\theta_0 \in \Theta_0$ 和 $s' \geq s$，使得 $\theta_0 \xrightarrow{*} \theta$，且 s' 是 θ 中某个进程的标签。注意，这不同于询问 s 在 $\mathcal{P}$中是否可覆盖。

例 9. 考虑一个只有两个状态 q、q' 和一条迁移 $q \xrightarrow{??} q'$的有限自动机。注意，在 $BN(\mathcal{P})$中，状态 q' 永远无法到达。但是，如果我们将其仅视为一个不考虑广播网络语义的标记迁移系统，那么显然，在迁移系统$\mathcal{P}$中可以从 q 到达 q' 。为区分这两种情况，我们分别称之为 $BN(\mathcal{P})$ 中的可覆盖性和 $\mathcal{P}$中的可覆盖性。

作为第二点评论，我们注意到，如果某个配置在$BN(\mathcal{P})$中是可覆盖的，那么它在$RBN(\mathcal{P})$中也同样是可覆盖的，但反之则不成立。例如，考虑图1中给出的进程 $\mathcal{P}$ 。我们声称，在$BN(\mathcal{P})$中，状态 q_4 永远无法被覆盖。原因如下：假设存在一次执行，其中某个节点 v 到达状态 q_4。不难看出，v 的初始状态应当是 q_0。为了从 q_0到达 q_4 ，节点 v 应当在处于状态 q_2 时从某个节点 v'接收到消息 d 。因此， v' 应当是 v 的邻居，而 v 的初始状态为 q_0。由于 v' 必须从 q_0 迁移到 q_3，它必定曾在某个时刻广播消息 a 。考虑运行过程中 v' 执行迁移$!!a$ 的时刻。由于 v 是v'的邻居， v 必须在到达状态 q_4之前的某个时刻接收到消息 a 。但在接收到消息 a后， v 将进入死状态，从而导致矛盾。因此， q_4 在 BN中不可覆盖。然而，我们稍后将看到，在允许重新配置的情况下，q_4 确实是可覆盖的。

已知良结构广播网络 $BN(\mathcal{P})$ 的可覆盖性问题是不可判定的，即使 $\mathcal{P}$ 是一个有限状态迁移系统[13]。为了克服不可判定性，我们将限制底层网络拓扑的允许集合。

3 受限拓扑的可覆盖性问题

在本节中，我们研究良结构广播网络中的可覆盖性问题，其中我们考虑的所有底层图的集合都将受到限制。具体而言，我们针对三类不同的受限拓扑证明可判定性结果，即有界路径拓扑、团拓扑以及有界直径和度拓扑。所有这些结果都可以看作对有限状态进程 [14, 13] 上已有结果的扩展。

作为第一步，我们定义两个配置之间的诱导子图序，该序将被广泛用于证明这三类拓扑中的可判定性：

定义 10。 给定两个标记图 $\theta_1 = (V_1, E_1, L_1)$ $\theta_2 = (V_2, E_2, L_2) \in \Theta$，定义 $\theta_1 \sqsubseteq \theta_2$ 当且仅当存在一个单射 $h:\ V_1 \to V_2$ ，使得 $\forall u, v \in V_1$，

- $(u, v) \in E_1 \iff (h(u), h(v)) \in E_2$
- $L_1(u) \leq L_2(h(u))$

换句话说，单射 h 应保留顶点之间的边以及其标签相对于良拟序的顺序。如果存在这样的

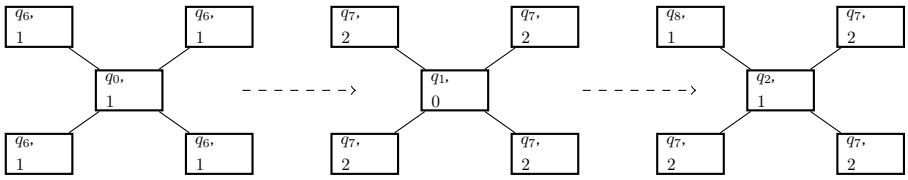

图2：标记图之间的转换

h ，那么我们称其为 θ_1 与θ_2 之间的保序单射。

3.1 有界路径拓扑

本节将证明，当我们将范围限制在路径有界图时，可覆盖性问题变为可判定。全文假设一个数k 是固定的。

下文中，给定一个标记图 θ，我们将其顶点集记为$V(\theta)$。类似地， $E(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 分别用于表示 θ 的边集和标签函数。

定义 11。 如果图 G中最长的简单路径长度至多为 k，则称其为 k-路径有界图。

给定一个进程 $\mathcal{P}$，现在我们可以通过将 $BN(\mathcal{P})$ 中的配置集限制为 k-有界路径拓扑结构，来定义 k-路径有界广播网络；也就是说，我们定义一个新的迁移系统 $BN^k(\mathcal{P}) = (\Theta^k, \Theta_0^k, \rightarrow)$，其中 Θ^k和 Θ_0^k仅由 Θ 和 Θ_0 中满足 k-路径有界条件的配置组成。注意，在该模型中，节点之间不允许进行重新配置。

图2展示了进程在图1中给出的迁移系统 $BN^2(\mathcal{P})$ 中的一些迁移。

我们将运用良结构迁移系统的理论来证明 k-路径有界广播网络的可覆盖性问题是可判定的。更具体地说，作为第一步，我们证明以下引理。

引理 12. 所有 k-路径有界配置的集合在诱导子图序下是良拟序。

证明。 由 Ding 定理（ [17] 中的定理 2.2）可得。 □

接下来，我们证明诱导子图序与 相容$BN^k(\mathcal{P})$。

引理 13。 对于每个满足 $\theta_1 \xrightarrow{a} \theta_2$ 和 $\theta_1 \sqsubseteq \theta_1'$ 的 θ_1、θ_2、$\theta_1' \in \Theta^k$，都存在满足 $\theta_1' \xrightarrow{a} \theta_2'$ 和 $\theta_2 \sqsubseteq \theta_2'$ 的 $\theta_2' \in \Theta^k$ 。

证明。令 w 为 θ_1 中广播消息 a 的顶点，并令 x_1、$\cdots$、x_p 为接收消息 a 的 v 的邻居。令 h 为从 θ_1 到 θ_1' 的保序单射。对于每个 i，令 $v = h(w)$ 和 $u_i = h(x_i)$。由于 $\mathcal{P}$ 是良结构的，并且由于 $L(\theta_1)\ w \leq L(\theta_1')\ v$，可知存在一个标记为 $!!a$ 的迁移 t'，该迁移在 $L(\theta_1')\ v$ 处已启用。类似地，对于每个 i，由于 $L(\theta_1)\ x_i \leq L(\theta_1')\ u_i$，可知存在标记为 $??a$ 的迁移 t_i'，它们分别在 $L(\theta_1')\ u_i$ 处已启用。由于 h 是一个单射，因此每个 u_i 都是 v 的邻居。于是，我们可以从节点 v 广播消息 a，并在图 θ_1' 中的节点 u_1、$\cdots$、u_p 处接收消息 a。将所得的图称为 θ_2'。显然，同一个单射 h 是 θ_1' 与 θ_2' 之间的保序单射。 □

最后，我们证明有效前基性质。在证明之前，先介绍一些记号。设 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R, \leq)$ 为给定的进程，设 $BN^k(\mathcal{P})$ 为与之关联的 k-路径有界广播网络。对于一个符号 $a \in \Sigma_b \cup \Sigma_r$，令 $\mathcal{P}_a$ 表示迁移系统 $\mathcal{P}$ 中仅由符号 a 标记的那些迁移所构成的子系统。注意，$\mathcal{P}_a$ 是良结构的，因为 $\mathcal{P}$ 是良结构的。我们假设 $\mathcal{P}_a$ 从 $\mathcal{P}$ 继承了有效前基性质。对于配置集 $C \subseteq S$，令 前驱$_{\mathcal{P}}(S)$ 表示迁移系统 $\mathcal{P}$ 中的集合前驱(S)，令 前驱$_{\mathcal{P}_a}(S)$ 表示迁移系统 $\mathcal{P}_a$ 中的集合 前驱(S)。

证明有效前基性质的第一步是给出以下引理。

引理14。 给定一个标记图 $\theta \in \Theta^k$，我们可以有效地计算出 $pre(\uparrow \theta)$ 的一个有限基。

证明。 令 $\theta = (V,\ E,\ L)$，并令 $G = (V,\ E)$。对于每个节点 $v \in V$以及每个符号 $a \in \Sigma_b \cup \Sigma_r$，我们假设可以为集合 $pre_{\mathcal{P}_a}(\uparrow L(v))$ 计算一个有限基，将其记为 B_a^v。（我们假设这是通过首先删除 $\mathcal{P}$ 中未标记为 a 的所有转换，然后利用 $\mathcal{P}_a$ 的有效基性质，为$pre_{\mathcal{P}_a}(\uparrow L(v))$ 计算一个有限基来完成的。

令 $\mathbb{H} = \{H_1, H_2, \cdots, H_l\}$ 为所有 k-路径有界图的集合，其中每个 H_i 都比 G 多一个顶点，并且包含 G 作为诱导子图。显然，$\mathbb{H}$ 是有限的。现在我们将描述两个过程，它们的输出合在一起将构成集合 $pre(\uparrow \theta)$ 的一个基。

第一个过程根据图 G 创建新的标记图，具体如下:

1. 将集合基$_G$ 初始化为空集。2. 选择一个顶点 $v \in V$和一个字母 $a \in \Sigma$。令 $u_1, u_2, \cdots, u_p$为 G中 v 的邻居。3. 从 $B_{!!a}^v$中选择一个配置 c_v。

4. 对于每个 u_j，从 B^{u_j} ??$_a$中选择一个配置 c_{u_j}。5. 按如下方式构造标记图 $G_{before} = (G, L')$：对于每个 u_j，$L'(v) = c_v$, $L'(u_j) = c_{u_j}$，并且当 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$时，$= L(y)$ L'。6. 选择一个配置 c'_v，使得 $(c_v, !!a, , c'_v) \in R$。7. 对于每个 u_j，选择一个配置 c'_{u_j}，使得 $(c_{u_j}, ??a, c'_{u_j}) \in R$。8. 按如下方式构造标记图 $G_{after} = (G, L'')$：对于每个 u_j，$L''(v) = c'_v$, $L''(u_j) = c'_{u_j}$，并且当 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$时，$L''(y) = L(y)$。9. 如果 $G_{after} \in \uparrow \theta$，则将 G_{before} 添加到集合基$_G$中。

由于假设迁移系统 $\mathcal{P}$ 是有限分支的，因此在上述过程中第 6 行和第 7 行中只有有限种选择。此外，如本文开头所述，我们假设可以借助给定的有限规格有效地计算出这些选择，以用于 $\mathcal{P}$。

根据构造可知，$G_{before} \xrightarrow{a} G_{after}$ 是 $BN^k(\mathcal{P})$ 中的一次迁移。因此，如果 $G_{before} \in$ 基$_G$，则 $G_{before} \in pre(\uparrow \theta)$。

第二个过程根据集合$\mathbb{H}$中的图创建新的标记图。固定一个图 $H \in \mathbb{H}$。根据 H，我们按以下方式构造标记图：

1. 将集合 basis$_H$ 初始化为空集。2. 固定一个单射 $h : G \to H$ 和一个字母 $a \in \Sigma$。令 v 为 H中不在 G的像中的顶点，即 $v \notin h(G)$，并令 u_1、$\cdots$、u_p为 v 在 H中的邻居。3. 对于符号 $!!a$，选择一个最小配置 c_v，使得在 c_v处有一个由 $!!a$ 标记且已启用的迁移。4. 对于每个 u_j，从 B^{u_j} ??$_a$中选择一个配置 c_{u_j}。5. 按如下方式构造标记图 $H_{before} = (H, L')$：对于每个 u_j，$L'(v) = c_v$，$L'(u_j) = c_{u_j}$；如果 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$，则 $L'(y) = L(h^{-1}(y))$。6. 选择一个配置 c'_v，使得 $(c_v, !!a, c'_v) \in R$。7. 对于每个 u_j，选择一个配置 c'_{u_j}，使得 $(c_{u_j}, ??a, c'_{u_j}) \in R$。8. 按如下方式构造标记图 $H_{after} = (H, L'')$：对于每个 u_j，$L''(v) = c'_v$，$L''(u_j) = c'_{u_j}$；如果 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$，则 $L''(y) = L(h^{-1}(y))$。9. 如果 $H_{after} \in \uparrow \theta$，则将 H_{before} 添加到集合 basis$_H$中。

根据构造，再次可以清楚地看出 $H_{before} \xrightarrow{a} H_{after}$，因此，如果 $H_{before} \in \mathsf{basis}_H$，则 $H_{before} \in$前置(↑ θ)。

令基$_\theta$:= 基$_G \cup \left(\bigcup_{H\in\mathbb{H}}$ 基$_H\right)$。我们声称，基$_\theta$ 是集合pre(↑ θ)的一个基。为此，我们证明：若 $\eta \in pre$(↑ θ)，则存在η'，使得 $\eta' \sqsubseteq \eta$ 且 $\eta' \in$基$_\theta$。

令 $\eta := (V', E', L') \in \mathsf{pre}$(↑ θ)。因此，应该存在一条从 η 到某个 $\zeta := (V', E', L'') \in$↑ θ的迁移。设这条迁移是通过从顶点 $w \in V'$ 广播 a，并由其所有邻居$x_1, x_2, \cdots, x_l$接收 a 而得到的。这意味着，对每个 x_j，都存在迁移$(L'(w), !!a, L''(w)) \in R$和$(L'(x_j), ??a, L''(x_j)) \in R$。此外，对于 $y \notin \{w, x_1, \ldots, x_l\}$，$L'(y) = L''(y)$。

回忆一下，$\theta = (V, E, L)$ 和 $G = (V, E)$。由于 $\zeta \in$↑ θ 存在一个从 θ 到 ζ 的保序单射 h。现在分两种情况：

- 节点 w 属于 h的像：设 x_1，x_2，$\cdots$，x_p 是 ζ 中属于 h的像的 w的邻居。对每个 x_i，令 $v = h^{-1}(w)$ 和 $u_i = h^{-1}(x_i)$。

  由于 h 是保序单射，且 $h(v) = w$，因此我们有 $L(v) \leq L''(w)$。根据假设，存在一个迁移 $(L'(w), !!a, L''(w)) \in R$。结合这两点，我们有 $L'(w) \in \mathsf{pre}^{\mathcal{P}_{!!a}}$(↑ $L(v)$)。由于 $B^v_{!!a}$ 是 $\mathsf{pre}^{\mathcal{P}_{!!a}}$(↑ $L(v)$) 的有限基，因此存在 $c_v \in B^v_{!!a}$ 和$c_v \leq L'(w)$。类似的推理可得，对于每个 u_i，存在 $c_{u_i} \in B^{u_i}??_a$ 和 $c_{u_i} \leq L'(x_i)$。由于 $c_v \in B^v_{!!a}$，因此存在一个迁移 $(c_v, !!a, c'_v) \in R$，其中某个$c'_v \geq L(v)$满足条件。同理，对于每个 u_i，由于 $c_{u_i} \in B^{u_i}??_a$，因此存在一个迁移 $(c_{u_i}, ??a, c'_{u_i}) \in R$，其中某个 $c'_{u_i} \geq L(u_i)$满足条件。令 $\eta' = (G, M')$，其中 $M'(v) := c_v$，$M'(u_i) = c_{u_i}$，且对每个 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$，$M'(y) = L(y)$。令 $\zeta' = (G, M'')$，其中 $M''(v) = c'_v$，$M''(u_i) = c'_{u_i}$，且对每个 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$，$M''(y) = L(y)$。根据构造，容易验证 $\eta' \xrightarrow{a} \zeta', \zeta' \in$↑ $\theta, \eta' \in$基$_G$，且 h 是从 η' 到 η的保序单射。因此我们有 $\eta' \in$基$_G$ 和 $\eta' \sqsubseteq \eta$。

- 节点 w 不在 h的像中：令 x_1、$\cdots$、x_p 为 w 的邻居，且它们位于 h 的像中。对每个 x_i，令 $u_i = h^{-1}(x_i)$。考虑图 H，它由 G 添加一个顶点 v 得到，其中 v 是 u_1的邻居，....., u_p。显然 $H \in \mathbb{H}$。根据假设，存在一个迁移 $(L'(w), !!a, L''(w)) \in R$。令 $c \leq L'(w)$ 为一个最小配置，使得对于某个 c'，存在形如 $(c, !!a, c') \in R$ 的迁移。现在，类似于前一种情况，对于每个 u_i，我们可以得到一个配置 $c_{u_i} \in B^{u_i}??_a$，使得 $c_{u_i} \leq L'(x_i)$。对于每个 u_i，由于 $c_{u_i} \in B^{u_i}??_a$，可知对于某个 $c'_{u_i} \geq L(u_i)$，存在一个迁移 $(c_{u_i}, ??a, c'_{u_i}) \in R$。

令 $\eta' = (H, M')$，其中 $M'(v) := c$、 $M'(u_i) = c_{u_i}$，并且对于每个 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$， $M'(y) = L(y)$。令 $\zeta' = (H, M'')$，其中 $M''(v) = c'$、 $M''(u_i) = c'_{u_i}$，并且对于每个 $y \notin \{v, u_1, \ldots, u_p\}$， $M''(y) = L(y)$。令 h' 为映射 $h'(w) = v$，并且对于 $y \neq w$， $h'(y) = h(y)$。

根据构造可以很容易验证， $\eta' \xrightarrow{a} \zeta'$、 $\zeta' \in \uparrow \theta$、 $\eta' \in$基$_H$ 和 h' 是从 η' 到 η的保序单射。因此，我们有 $\eta' \in$基$_H$ 和 $\eta' \sqsubseteq \eta$。

□

引理 15。 如果 $C \subseteq BN^k(\mathcal{P})$ 是一个上闭集，并且具有有限基，那么我们可以有效地计算出$pre(C)$的有限基。

证明。 设 $\mathbb{B} = \{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ 是向上闭集 C的有限基。根据引理14，对于每个 θ_i，我们可以计算出一个标记图集合基$_{\theta_i}$，使得基$_{\theta_i}$ 是$pre(\uparrow \theta_i)$的一个基。于是显然，集合$pre(C)$所需的基就是$\bigcup_{1 \leq i \leq n}$ 基$_{\theta_i}$。

□

定理 16。 k-路径有界配置的可覆盖性是可判定的。

证明。 设 s为给定配置。考虑图 G，它只有一个顶点，其标签为 s。显然，当且仅当图 G 在迁移系统 BN^k 中依据诱导子图序可被覆盖时，配置 s 才能被覆盖。但根据前面的引理，我们已经证明， BN^k 依据诱导子图序且具有有效预基，是一个良结构迁移系统。因此， BN^k 中的可覆盖性是可判定的，证明完毕。

□

因此， k-路径有界拓扑的广播语义中的可覆盖性，可归约为检查另一个良结构迁移系统中的可覆盖性！

3.2 团拓扑

我们将对所有团拓扑的集合证明一个类似的结果。设 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R, \leq)$ 为底层进程。

引理 17。 所有团配置的集合在诱导子图序下构成一个良拟序。

证明。 回顾一下， S 是进程 $\mathcal{P}$ 的配置集。我们考虑偏序集 $(M_f(S) \subseteq_\leq)$，其中 $M_f(S)$ 是 S的所有有限子多重集构成的集合，而 $\subseteq_\leq$ 定义为

$$S_1 \subseteq_\leq S_2 \iff \exists \text{ an injection } h : S_1 \to S_2 \text{ such that } \forall s \in S_1,\ s \leq h(s)$$

众所周知，如果 $(S, \leq)$ 是良拟序，那么 $(M_f(S) \subseteq_\leq)$ 也为良拟序。利用这一结果，我们证明所有团配置构成的集合是良拟序的。

设 θ 和 θ' 是带标签的团配置。令 L_θ 为多重集$\{L(\theta)(v) : v \in V(\theta)\}$。类似地，令 $L_{\theta'}$ 为多重集 $\{L(\theta')(v) : v \in V(\theta')\}$。显然，$L_\theta \subseteq_\leq L_{\theta'}$ 当且仅当 $\theta \sqsubseteq \theta'$。由于 $\subseteq_\leq$ 是良拟序，因此在诱导子图序下，所有团配置构成的集合是良拟序。 □

通过与针对 k-路径有界图所给出的论证类似的论证，可以很容易地证明兼容性性质。预基的计算可以如下实现：上一小节给出的算法首先从给定的基 $\mathbb{B}$ 中选择一个图 $\theta = (G, L)$，然后考虑所有大小至多为 $|G| + 1$ 且将 G 作为子图诱导出来的 k-路径有界图，随后从这些 k-路径有界图中构造预基。我们也使用相同的算法为团拓扑构造预基，但在第一步中，我们将构造所有大小至多为 $|G|+1$且诱导出 G的k-路径有界图，替换为构造所有大小至多为 $|G|+1$且诱导出 G的团图。该算法的证明源自对前一种情况所给出的类似证明。因此，我们有

定理18。 团配置中的可覆盖性是可判定的。

3.3 有界直径和度的图

本节将证明，当可覆盖性问题限定在所有有界直径和度有界的图所构成的空间中时，该问题是可判定的。首先，我们给出图的直径定义：

定义 19。 图 G 的直径是 G 的任意两个顶点之间所有最短路径长度的最大值。

已知，限定在有界直径图上的良结构广播网络的可覆盖性问题是不可判定的，即使底层进程具有有限状态空间 [14]。然而，如果除了有界直径之外，我们还考虑度有界的图，就可以重新获得可判定性。为证明这一点，我们使用 Hoffman and Singleton[22] 的一个非平凡结果。该结果表明，对于固定的直径 k 和度 d，直径至多为 k 且度至多为 d 的最大（无标记）图的大小为 $M(k, d) = (k(k-1)^d - 2)/(k-2)$。因此，对于有限状态进程，这立即证明了可覆盖性问题是可判定的。不过，我们也可以以直接的方式将其扩展到良结构情形。回顾一下， S 是进程 $\mathcal{P}$ 的所有配置构成的集合。对于一个直径和度有界的图 $G = (V, E)$，考虑集合 $Lab(G) = \{G' \mid G' = (V, E, L)\ L : V \to S\}$，即，$Lab(G)$ 是通过使用来自 S 的标签标记 G 中的顶点而得到的所有标记图的集合。

引理 20。 对于一个直径为 k 、度为 d 的固定图 G ，集合 Lab（G）在诱导子图序下是一个良拟序。

证明。 假设 G 有 n 个顶点。任意地将这些顶点按某种顺序排列v_1， $\cdots$， v_n。令（S^n， $\leq^n$）为偏序集，其中将 $\leq^n$ 定义为

$$(s_1, \ldots, s_n) \leq^n (s'_1, \ldots, s'_n) \iff s_1 \leq s'_1 \wedge s_2 \leq s'_2 \wedge \cdots \wedge s_n \leq s'_n$$

众所周知，如果 (S， $\leq$) 是良拟序，那么 (S^n， $\leq^n$) 也是良拟序。现在注意到，如果 $\theta = (V, E, L)$ 和 $\theta' = (V, E, L')$ 属于 $Lab(G)$，那么

$$(L(v_1), \ldots, L(v_n)) \leq^n (L'(v_1), \ldots, L'(v_n)) \implies \theta \sqsubseteq \theta'$$

因此该引理立即得证。 □

对于固定的图 G，我们可以采用与其他情形类似的方式证明兼容性和有效前基。因此，我们有

定理 21。 对于 k-有界直径和 d-有界度数的图，其可覆盖性问题是可判定的。

证明。 设 $B = \{b_1, \cdots, b_m\}$ 是进程 $\mathcal{P}$ 的配置空间 S 的有限基，并设 s 是需要确定其可覆盖性的给定配置。设 G 是一个具有 n 个顶点的固定图，并考虑集合

$$B_i = \{(b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_{i-1}}, s, b_{j_i}, b_{j_{i+1}}, \cdots, b_{j_n}) : \text{ each } b_{j_l} \in B\}$$

并令 $B' = \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i$。显然，该集合是有限的。

上述性质意味着，对于给定的具有 G 有界直径和度的图，可以判定是否能够从$Lab(G)$中的任意初始配置覆盖 B' 中的某个配置。但我们知道，直径为 k 且度为 d 的图的数量是有限的。因此，我们可以检查是否能够从这些图中的任意一个覆盖 B' 中的至少一个配置，由此可知，对于具有有界直径和度的图，可覆盖性问题是可判定的。 □

4 重配置语义下的可覆盖性问题

在上一节中，我们证明了各种受限静态拓扑结构类别的可判定性结果。然而，这些系统不允许改变系统的网络拓扑结构。在本节中，我们处理重配置语义下的可覆盖性问题，并证明该问题是可判定的。具体而言，我们给出一个算法，该算法给定一个进程 $\mathcal{P}$ 和一个配置 s，当且仅当能够在$RBN(\mathcal{P})$中覆盖配置 s 时返回 true。

设 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R, \leq)$ 为给定的进程。回忆一下， Σ 是一个固定的字母表，使得 $\Sigma_b = \{!!a : a \in \Sigma\}$ ，且 $\Sigma_r = \{??a : a \in \Sigma\}$。我们假设，对于每个 $a \in \Sigma$，都可以计算出集合 C_a 的一个基，其中包含所有具有一个标记为 $!!a$ 的已启用迁移的配置。（由于底层序关系是良拟序 wqo，该集合始终是有限的。）请注意，该计算只涉及迁移系统 $\mathcal{P}$ 的语义，而不涉及 RBN 的语义。对于许多系统而言，根据给定的有限规范 $\mathcal{P}$，这种计算将相当直接。

示例 22。 *1.* 如果 $\mathcal{P}$ 是一个有限状态系统，那么对于任意字母 a，我们可以遍历 $\mathcal{P}$ 中的所有配置空间，并计算标记为 $!!a$ 的迁移。

2. 在向量加法系统中，假设 $\{t^1, t^2, \ldots, t^l\}$ 是所有标记为$!!a$ 的元组集合，即每个 t^i 都是（p^i，$!!a$，v^i，q^i）的形式。显然，C_a ={（p^1，u^1）、（p^2，u^2）.....（p^l，u^l）}，其中每个

$$u^i = (\max(0, -v_1^i), \max(0, -v_2^i), \ldots, \max(0, -v_n^i))$$

3. 由于 *Petri*网中的转移弧和重置弧与普通转移具有相同的前置条件，因此，在这些情况下，最小配置的计算与向量加法系统 *[18]* 类似。

广播迁移是标记为 Σ_b 中字母的迁移。类似地，接收迁移是标记为 Σ_r 中字母的迁移。此外，对于每个字母 $a \in \Sigma$，我们将 B_a 定义为所有标记为 $!!a$ 的广播迁移的集合。类似地，我们将 R_a 定义为所有标记为 $??a$ 的接收迁移的集合。令$Rec = \bigcup_{a\in\Sigma} R_a$。

算法 1重配置语义的覆盖性算法

输入： 一个进程 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R, \leq)$ 和一个配置。 $s \in \mathcal{P}$
输出： s 在迁移系统 $RBN(\mathcal{P})$ 中是否可覆盖

$\mathcal{P}' := \mathcal{P}[R \leftarrow R \setminus Rec]$ ▷ 移除所有接收转换以获得 $\mathcal{P}'$
SubAlp$:= \Sigma$

重复
  AddT$:= \emptyset$
  对于所有 $a \in$ SubAlp **do** ▷ 查找可以在 $\mathcal{P}'$中广播的符号
    如果 $\exists c \in C_a$ 使得 c 在 $\mathcal{P}'$ 中可覆盖**则**
      AddT := AddT $\cup R_a$ ▷ 将接收迁移存储在 AddT中
      SubAlp := SubAlp $\setminus \{a\}$
    结束如果
  结束循环
  $\mathcal{P}' := \mathcal{P}'[R \leftarrow R \cup$AddT$]$ ▷ 将 AddT到 $\mathcal{P}'$的所有转换添加进来
直到 AddT $= \emptyset$

如果 s 在 $\mathcal{P}'$ 中可覆盖**则**
  返回真
否则
  返回 false
结束条件判断

RBN 的覆盖性算法见算法 1。算法流程如下：首先，从原始进程 $\mathcal{P}$ 中移除所有

Rec 中的转换，得到修改后的进程 $\mathcal{P}'$。（如论文开头所述，我们假设可以通过对 $\mathcal{P}$ 的有限规格进行适当操作来实现这一点。）在主循环的每次迭代中，对于每个字母a ，我们都会检查当前进程 $\mathcal{P}'$ 中是否至少有一个来自集合 C_a 的配置可被覆盖。直观来说，这意味着网络中的某个代理可以到达一个配置，并能从该配置广播字母a。此时，我们通过添加所有标记为 a 的接收转换来更新进程 $\mathcal{P}'$ 。（同样，这可以通过对有限规格进行适当操作来实现。）此后，只要某个代理想要执行标记为 ??a 的迁移，它就可以执行，因为我们可以让另一个代理到达能够广播 a 的配置，然后重新配置网络，使这两个代理共享一条边。（在判断某个配置是否可覆盖时，网络的重配置语义在这里发挥了重要作用。）我们不断重复这一过程，直到无法再添加新的迁移；随后，检查最终得到的进程中所需的配置是否可覆盖。

请注意，在算法的任意时刻，迁移系统 $\mathcal{P}'$ 始终是一个良结构迁移系统。事实上，在代码开始处， $\mathcal{P}'$ 正是从 $\mathcal{P}$ 中移除所有以 Σ_r 中的符号为标签的迁移后得到的迁移系统；由于 $\mathcal{P}$ 是良结构迁移系统， $\mathcal{P}'$ 也将继续保持良结构迁移系统。同样，每次更新 $\mathcal{P}'$时，我们都会添加所有形如 ??a 且对应某个符号 $a \in \Sigma$的迁移。因此，新的迁移系统 $\mathcal{P}'$仍然是良结构迁移系统。此外，如上所述，第 4 行和第 15 行中的操作假定通过给定的有限规格来执行。

第 10 行和第 18 行中的可覆盖性测试指的是迁移系统 $\mathcal{P}'$中的可覆盖性。还要注意，每当算法增加集合 AddT 的基数时，SubAlp 的大小就会减少 1。由于添加到 AddT 的迁移都以 SubAlp 中的符号为标签，且 SubAlp 是有限的，因此最终无法再向 AddT 添加更多迁移。由此，算法的第 16 行最终会变为真，因此算法总会终止。

令 $\text{AddT}_0 = \bigcup_{a\in\Sigma} B_a$ 表示对于 $i > 0$ 的 AddT_i ，即 AddT 集在最外层循环的第 i^{th} 次迭代结束时的内容。此外，令 $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}[R \leftarrow R \setminus Rec]$ 表示对于 $i > 0$ 的 $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}'_{i-1}[R \leftarrow R \cup \text{AddT}_i]$，即 $\mathcal{P}'_i$ 表示在最外层循环的第 i^{th} 次迭代结束时得到的进程。设最外层循环的总迭代次数为 w。因此，我们得到进程序列 $\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}'_1, \cdots, \mathcal{P}'_w$。

对于配置 s，如果存在一个初始图 θ_0 和一个图 θ ，使得 $\theta_0 \xrightarrow{*} \theta$ ，并且存在一个节点 $v \in \theta$ ，满足 $L(\theta)(v) \geq s$，则称 s 在 $RBN(\mathcal{P})$ 中是可覆盖的。该算法的正确性由一系列引理得出。

引理 23。 如果对于某个 i，配置 s 在 $\mathcal{P}'_i$ 中可达，那么在原始可重构广播网络 $RBN(\mathcal{P})$ 中可以覆盖 s 。

证明。令 s为迁移系统 $\mathcal{P}'_i$中一个可达的配置。此外，不失一般性，令 i 为满足 s 在 $\mathcal{P}'_i$中可达的第一个索引。我们将

对 i 进行归纳，证明配置 s 在广播网络 $RBN(\mathcal{P})$中同样可覆盖。

设 $i = 0$。由于 s 在 $\mathcal{P}'_0$中是可达的，因此在迁移系统 $\mathcal{P}'_0$中存在一条路径 $LP = s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_{n-1} \to s_n = s$。我们通过对 n进行第二次归纳来证明关于 $i = 0$ 的断言。对于 $n = 0$的基础情形，显然 s_0 是一个初始配置，因此 s_0 可以在 $RBN(\mathcal{P})$ 中被平凡地覆盖。设 $n > 0$。根据我们的第二归纳假设，配置 s_{n-1} 在 $RBN(\mathcal{P})$ 中是可覆盖的，即存在一个可达图 θ 和一个节点 $v \in \theta$，使得 $L(\theta)(v) = s_{n-1}$。由于 LP 是 $\mathcal{P}'_0$中的一条路径，迁移 $s_{n-1} \to s_n$必定是由某个符号 $!!a$标记的广播迁移。因此，节点 v可以广播 $!!a$ 并移动到配置 $s_n = s$。

假设 $i > 0$。同样，由于 s 在 $\mathcal{P}'_i$中可达，因此存在一条路径 $LP = s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_{n-1} \to s_n = s$，位于 $\mathcal{P}'_i$中。我们对 n进行第二次归纳来证明该结论。对于 $n = 0$的基例，显然 s_0 是一个初始配置，因此它在 $RBN(\mathcal{P})$ 中是可覆盖的。假设 $n > 0$。根据我们的第二归纳假设，在 $RBN(\mathcal{P})$ 中存在一条形式为 $\theta_0 \to \theta_1 \to \cdots \to \theta_m$ 的路径，以及一个节点 $v \in \theta_m$，使得 $L(\theta_m)(v) = s_{n-1}$。现在分两种情况讨论：假设 $s_{n-1} \to s_n$ 是一个标记为 $!!a$ 的广播迁移。显然，v 可以广播 $!!a$，从而转移到配置 $s_n = s$。

否则，$s_{n-1} \to s_n$ 是一个标记为某个字母 $??a$ 的接收迁移。由于该迁移属于 $\mathcal{P}'_i$，它必定是针对某个 $j \leq i$ 被加入集合 AddT_j 的。但请注意，当且仅当存在 $c \in C_a$ 使得 c 在迁移系统 $\mathcal{P}'_{i-1}$ 中可覆盖时，我们才会在第 j^{th} 次迭代中加入一个标记为 $??a$ 的新接收迁移。因此，根据可覆盖性的定义，存在 $s' \geq c$ 使得 s' 在 $\mathcal{P}'_{i-1}$中可达。根据我们的第一归纳假设，s' 在 $RBN(\mathcal{P})$ 中是可覆盖的。因此，取 $RBN(\mathcal{P})$ 中的一条路径 $\theta'_0 \to \theta'_1 \to \cdots \to \theta'_l$，并令 $v' \in \theta'_l$ 满足 $L(\theta'_l)(v') = s'$。注意，根据兼容性这一性质，存在一个标记为 $!!a$ 的广播迁移，它在 s' 处已启用。

现在考虑初始图 θ_0 和 θ'_0。执行从 θ_0 开始的第一次运行，使其到达图配置 θ_m。接着，从初始图 θ'_0 执行第二次运行，使其到达图配置 θ'_l。这是可行的，因为这两次执行彼此独立。现在在 v 和 v' 之间添加一条链接，并从 v' 广播消息 a。因此，v 将接收到消息 a，并转移到配置 $s_n = s$。

□

引理 24。 *如果 s 在可重构广播网络 $RBN(\mathcal{P})$ 中是可覆盖的，那么 s 在 $\mathcal{P}'_w$ 中是可达的。*

证明。 假设 s 在可重构广播网络 $RBN(\mathcal{P})$ 中是可覆盖的。因此，存在一个初始图 θ_0、一条路径 $LP = \theta_0 \to \theta_1 \to \cdots \to \theta_{n-1} \to \theta_n$ 和一个节点 v，使得 $L(\theta_n)(v) = s$。我们将对 n 进行归纳来证明该断言。对于 $n = 0$ 的基础情形，该断言显然成立。

假设 $n > 0$。令 s' 为配置 $L(\theta_{n-1})(v)$。若 $s' = s$，则根据归纳假设，结论成立。假设 $s' \neq s$。因此，应该存在一条从 s' 到 s的迁移。现在分两种情况：

• 假设 $s' \to s$ 是一个标签为 !!a 的广播迁移。根据归纳假设， s' 在 $\mathcal{P}'_w$中可达。由于 $\mathcal{P}'_w$中包含所有广播迁移，因此 s 在 $\mathcal{P}'_w$ 中也可达。

• 假设 $s' \to s$ 是一个标记为 ??a 的接收迁移。因此， $V(\theta_{n-1})$ 中的节点v接收了一条消息 a，所以配置 s'_u 中应当存在一个节点$u \in V(\theta_{n-1})$，使得 u 向其广播了一条消息 a，从而到达图 θ_n中的某个配置 s_u。根据归纳假设， s'_u在迁移系统 $\mathcal{P}'_w$中是可覆盖的。因此，至少存在一条带有广播标签 !!a 的迁移，该迁移在 $\mathcal{P}'_w$中已启用。这意味着至少存在一个配置 $c \in C_a$，使得 c 在 $\mathcal{P}'_w$中是可覆盖的。因此，对于字母 a，算法第 10 行最终将变为真，于是迁移 $s' \to s$ 应已被添加到 $\mathcal{P}'_w$中。这意味着迁移 $s' \to s$ 存在于 $\mathcal{P}'_w$中。根据归纳假设， s' 在 $\mathcal{P}'_w$ 中是可达的，因此 s 也是可达的。

□

因此，我们有

定理 25。 可重配置良构广播网络中的可覆盖性是可判定的。

证明。 注意，算法根据给定配置 s 是否在 $\mathcal{P}'_w$ 中可覆盖来返回答案。

假设 s 在 $\mathcal{P}'_w$ 中可覆盖。因此，存在 $s' \geq s$，使得 s' 在 $\mathcal{P}'_w$ 中可达，根据引理 23， s' 在 $RBN(\mathcal{P})$ 中可覆盖。因此， s 在 $RBN(\mathcal{P})$ 中可覆盖。证明的另一方向可通过类似的论证得到，其中使用引理 24。 □

我们对上述算法的复杂度作一个简短说明。注意到，该算法运行时间的主要瓶颈在于对迁移系统 $\mathcal{P}'$进行可覆盖性测试。我们声称，任意一类良结构迁移系统（WSTS）的可重构广播网络的可覆盖性问题，其速度不可能快于该类本身的可覆盖性问题。事实上，如果存在这样的更快算法，我们可以进行如下操作：给定该类中的任意带标签的良结构迁移系统 $\mathcal{P}$，将所有标签解释为广播迁移，从而得到一个可重构网络$RBN(\mathcal{P})$。容易看出，一个配置在$RBN(\mathcal{P})$中可达，当且仅当它在 $\mathcal{P}$中可达。现在对$RBN(\mathcal{P})$运行这一更快的算法，就会产生矛盾。另一方面，容易看出，如果我们能够快速计算每个字母的集合 C_a，那么我们向 $\mathcal{P}'$ 提出的可覆盖性测试次数至多为 $O(C^2)$，其中 $C = \sum_{a \in \Sigma} |C_a|$。因此，可重构网络中的可覆盖性算法的运行时间为 $O(C^2 \times Cov(\mathcal{P}))$，其中$Cov(\mathcal{P})$是 $\mathcal{P}$ 的可覆盖性算法的运行时间。对于算法所需的空间，同样的论证也成立。由于VASS的可覆盖性问题是 EXPSPACE-完全的 [23], ，由上述论证可知

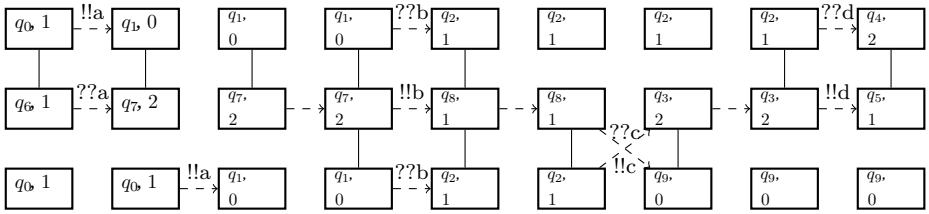

图3：在RBN中覆盖 q_4

定理26。 可重构*VASS*广播网络的可覆盖性是 EXPSPACE-完全的。

图3展示了由图1中的进程所指定的可重构广播网络中的一次运行。回想一下，在此情况下，必须进行重新配置才能覆盖 q_4。

最后，在模型中引入任意重新配置可能看起来不太现实。但事实上，就可覆盖性而言，该模型等价于：

1. 具有间歇性节点的静态拓扑，即不存在重配置，但节点可以在其崩溃时所处的**相同**控制状态下崩溃并重新启动。 [15]2. 具有消息丢失的静态拓扑，即不存在重配置，但消息可能任意丢失。 [15]3. 采用袋模型的异步广播网络。 [16]4. 采用有损先进先出队列的异步广播网络。 [16]5. 全局约束运行，即两次广播之间所允许的重配置次数最多为 $k \geq 1$。 [4]6. 局部约束运行，即**每个节点**在两次广播之间允许进行的重配置次数最多为 $k \geq 1$。 [4]

这些论文给出的证明针对的是进程为有限状态系统的情况。但通过注意到相应的证明在无限状态系统的情况下同样成立，可以证明这些结论对无限状态的情况也成立。直观地说，这是因为等价性证明只涉及底层模型的图拓扑。

5 下推广播网络

在上一节中，我们给出了一种算法，用于在底层进程为良结构时判定可重配置广播网络的可覆盖性。本节将看到，只需对该算法稍作修改，就能得到一种覆盖性算法，用于在底层进程为下推自动机时判定可重配置网络的可覆盖性。我们将简要回顾下推自动机所需的定义和定理。

就我们的目的而言，下推规范是一个元组 $(Q,\ \Sigma_b \cup \Sigma_r,\ \Gamma,\ Q_0,\ \Delta)$，其中 Q 是有限的状态集，Γ 是一个称为 栈字母表 的有限集，Q_0 是 Q 的子集，称为 初始状态，而 Δ 的形式为 $\Delta \subseteq Q \times \Sigma_b \cup \Sigma_r \times \Gamma \cup \{\epsilon\} \times Q \times \Gamma^*$。我们假设 Γ 具有一个特殊的 $\perp$ 符号，使得 $\perp$ 是栈底符号，任何转换都不会将其压入或弹出。

该规范描述了一个下推转换系统 $\mathcal{P} = (S, \Sigma_b \cup \Sigma_r, S_0, R)$，其中 $S = Q \times \Gamma^*$ 是配置集，$S_0 = Q_0 \times \{\perp\}$ 是初始配置集，$R \subseteq S \times \Sigma_b \cup \Sigma_r \times S$ 是转换关系；当且仅当存在 $\exists (q, a, g, q', h)$ 使得 $s = (q, gw)$ 且 $s' = (q', hw)$ 时，有 $(s, a, s') \in R$。给定一个转换 $t \in \Delta$，使得 $t = (q, a, g, q', h)$，令配置 c_t 表示为 (q, g)。令 $C_a = \{c_t :\ t \in \Delta,\ t$ 的标签为 $!!a\}$

定义配置之间的次序如下：$s \leq s'$ 当且仅当 $s = (q,\ w)$ $s' = (q,\ w')$，并且 w 是 w'的前缀。注意，单词上的前缀关系**不是**良拟序。下推转换系统的可覆盖性（或控制状态可达性）问题如下：给定一个配置 s，判断是否存在 $s_0 \in S_0$ 和 $s' \geq s$ 使得 $s_0 \xrightarrow{*} s'$。已知可覆盖性问题是可判定的。事实上，可覆盖性问题可以在 [8]多项式时间内求解。

根据这些规范和 C_a 的定义，我们声称算法 1也可以解决可重配置下推广播网络的可覆盖性问题。事实上，引理 23 和 24经过略微修改后同样适用于下推转换系统。下文中，我们仅描述对原证明所需进行的主要修改，以获得可重配置下推广播网络中可覆盖性的可判定性。

在引理 23 和 24 中，我们调用底层进程的良结构迁移系统性质时，唯一涉及的是可覆盖性判定和转移兼容性。对于前一个条件，下推进程不存在问题，因为可覆盖性是可判定的。对于兼容性，我们必须证明：如果 $s' \geq s$且存在一个迁移 $(s, a, c) \in R$，那么还存在一个迁移 $(s', a, c') \in R$，使得 $c' \geq c$。根据 $(s, a, c) \in R$ 的定义，存在 $(q, a, g, q', h) \in \Delta$，使得 $s = (q, gw)$ 且 $c = (q', hw)$。由于 $s' \geq s$，可知 s' 的形式为 $s' = (q, gwv)$，其中 $v \in \Gamma^*$。因此，迁移 (q, a, g, q', h) 在 s' 处也已启用，因此 $(s', a, c') \in R$，其中 $c' = (q', hwv) \geq c$。

最后，我们讨论一下复杂度。不难看出，我们对底层下推转换系统进行的可覆盖性测试次数至多为 $O(|\Delta| \times |\Sigma|)$。由于下推系统的可覆盖性可以在多项式时间内判定，因此，可重配置下推广播网络的算法可以在多项式时间内运行。

因此，我们得到

定理 27。 可重配置下推广播网络中的可覆盖性属于P。

6 讨论与开放问题

我们已经证明，对于良结构进程和下推进程，可重配置广播网络的可覆盖性问题是可判定的。有限状态进程文献中研究的另外两个经典问题是目标问题和重复可覆盖性问题。我们在良结构进程的背景下表述这两个问题。

给定一个良结构进程 $\mathcal{P} = (S,\ \Sigma_b \cup \Sigma_r,\ S_0,\ R,\ \trianglelefteq)$，目标问题如下：给定一个向上闭配置集 $U \subseteq S$，判定是否存在 $\theta_0 \to \theta_1 \to \cdots \to \theta_m$ 中的一条运行，使得 $L(\theta_m) \subseteq U$。重复可覆盖性问题如下：给定一个配置 s，判定是否存在一条无限运行 $\theta_0 \to \theta_1 \to \cdots$ 和一个递增子序列 $i_1 < i_2 < \cdots$，使得对于每个 θ_{i_j}，都存在一个配置 $s_{i_j} \geq s$，满足 $s_{i_j} \in L(\theta_{i_j})$。

已知，对于有限状态进程，在静态且具有有界路径拓扑的情况下，目标问题是不可判定的 [13]。当允许重配置时，该问题变为可判定的 [12]。我们认为，在可重配置情况下，对于良结构进程，目标问题变为不可判定的，但目前尚未对此给出证明。

对于静态拓扑，即使是有限状态系统，重复可覆盖性问题也变得不可判定。即使将图的集合限制为路径有界，这一结论仍然成立 [13]。然而，当允许重配置时，对于有限状态系统，重复可覆盖性再次变得可判定[10]。对于良结构进程，情况并非如此。由于良结构迁移系统中的重复可覆盖性一般是不可判定的 [3], ，因此可重配置良构广播网络中的重复可覆盖性问题同样是不可判定的。然而，对于一类称为$very\text{-}WSTS$ 的 WSTS，重复可覆盖性是可判定的 [7]。如果底层进程是 very-WSTS，那么研究可重配置网络中的重复可覆盖性是否可判定将会很有意义。

7 结论

本文定义了良结构进程的广播网络，并证明了各种语义下可覆盖性的可判定性。具体而言，我们给出了一种算法，用于确定在重配置语义下的任意运行中是否可以覆盖给定配置。我们还研究了若干类受限拓扑的判定过程，其中包括所有路径有界图、所有团，以及所有具有有界直径和度的图。这些判定过程中的一个重要组成部分是构造另一个良基结构转移系统，以判定可覆盖性的

sion 过程是构造另一个良基结构转移系统，以判定配置的可覆盖性。

参考文献

[1] Parosh Aziz Abdulla、Karlis Cerans、Bengt Jonsson 和 Yih-Kuen Tsay。无限状态系统的一般可判定性定理。载于第*11*届 *IEEE* 计算机科学逻辑研讨会论文集，第313–321页，1996年。doi:10.1109/LICS.1996.561359.

[2] Parosh Aziz Abdulla、Giorgio Delzanno、Othmane Rezine、Arnaud Sang- nier 和 Riccardo Traverso。定时自组网络的验证。载于定时系统的形式化建模与分析——第*9*届国际会议 *FORMATS*，第256–270页，2011年。doi:10.1007/ 978-3-642-24310-3_18.[3] Parosh Aziz Abdulla 和 Bengt Jonsson。验证使用不可靠信道的程序。信息与计算，127(2):91–101，1996年。doi:10.1006/inco. 1996.0053.[4] A. R. Balasubramanian、Nathalie Bertrand 和 Nicolas Markey。受限可重构广播网络中同步的参数化验证。载于系统构造与分析工具及算法——第*24*届国际会议 *TACAS*，第38–54页，2018年。doi:10.1007/978-3-319-89963-3_3.[5] Nathalie Bertrand 和 Paulin Fournier。多个相同概率定时进程的参数化验证。载于*IARCS*软件技术与理论计算机科学基础年会，*FSTTCS*，第501–513页，2013年。doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2013.501.[6] Nathalie Bertrand、Paulin Fournier 和 Arnaud Sangnier。探索可重构广播网络中的概率。载于软件科学与计算结构基础——第*17*届国际会议 *FOSSACS*，第134–148页，2014年。doi:10.1007/978-3-642-54830-7_9.[7] Michael Blondin、Alain Finkel 和 Jean Goubault-Larrecq。良结构迁移系统的前向分析，第三部分：Karp-Miller树。载于第*37*届 *IARCS*软件技术与理论计算机科学基础年会，*FSTTCS 2017*，*2017*年*12*月*11—15*日，印度坎普尔，第16:1–16:15页，2017年。doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2017.16.[8] Ahmed Bouajjani、Javier Esparza 和 Oded Maler。下推自动机的可达性分析：模型检验的应用。载于*CONCUR '97*：并发理论，第*8*届国际会议，波兰华沙，*1997*年*7*月*1—4*日，论文集，第135–150页，1997年。doi:10.1007/ 3-540-63141-0_10。

[9] Patricia Bouyer、Nicolas Markey、Mickael Randour、Arnaud Sangnier 和 Daniel Stan。随机调度器下寄存器协议网络中的可达性。载于第*43*届自动机、语言与编程国际研讨会，*ICALP 2016*，第106:1–106:14页，2016年。doi:10.4230/ LIPIcs.ICALP.2016.106.[10] Peter Chini、Roland Meyer 和 Prakash Saivasan。广播网络中的活性。载于网络化系统——第*7*届国际会议 *NETYS 2019*，摩洛哥马拉喀什，*2019*年*6*月*19—21*日，第52–66页，2019年。doi: 10.1007/978-3-030-31277-0_4.[11] Giorgio Delzanno、Arnaud Sangnier 和 Riccardo Traverso。寄存器自动机广播网络的参数化验证。载于可达性问题——第*7*届国际研讨会 *RP*，第109–121页，2013年。doi: 10.1007/978-3-642-41036-9_11.[12] Giorgio Delzanno、Arnaud Sangnier、Riccardo Traverso 和 Gianluigi Za- vattaro。可重构广播网络中参数化可达性的复杂度。载于*IARCS*软件技术与理论计算机科学基础年会，*FSTTCS*，第289–300页，2012年。doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2012.289.[13] Giorgio Delzanno、Arnaud Sangnier 和 Gianluigi Zavattaro。自组网络的参数化验证。载于*CONCUR 2010*——并发理论，第*21*届国际会议，第313–327页，2010年。doi: 10.1007/978-3-642-15375-4_22.[14]Giorgio Delzanno、Arnaud Sangnier 和 Gianluigi Zavattaro。团在自组网络参数化验证中的作用。载于软件科学与计算结构基础——第*14*届国际会议 *FOSSACS*，第441–455页，2011年。doi:10.1007/ 978-3-642-19805-2_30.[15] Giorgio Delzanno、Arnaud Sangnier 和 Gianluigi Zavattaro。存在节点故障和通信故障时自组网络的验证。载于分布式系统形式化技术——*IFIP WG 6.1*联合第*14*届国际会议 *FMOODS* 和第*32*届国际会议 *FORTE*，第235–250页，2012年。doi:10.1007/978-3-642-30793-5_15.[16] Giorgio Delzanno 和 Riccardo Traverso。异步广播网络验证的可判定性与复杂度结果。载于语言与自动机理论及应用——第*7*届国际会议 *LATA 2013*，第238–249页，2013年。doi:10.1007/978-3-642-37064-9_22.[17] Guoli Ding。子图与良拟序。《图论杂志》，16(5):489–502，1992年。doi:10.1002/jgt.3190160509。

[18] Catherine Dufourd、Alain Finkel 和 Philippe Schnoebelen。可判定性与不可判定性之间的重置网。载于自动机、语言与编程，第*25*届国际专题讨论会，*ICALP'98*，奥尔堡，丹麦，第103–115页，1998年。doi:10.1007/BFb0055044。[19] Javier Esparza。保障群体安全：论参数化验证的复杂度（特邀报告）。载于第*31*届计算机科学理论方面国际研讨会（*STACS 2014*），*STACS*，第1–10页，2014年。doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2014.1。[20] Alain Finkel 和 Philippe Schnoebelen。无处不在的良结构迁移系统！理论计算机科学，256(1-2):63–92，2001年。doi:10.1016/ S0304-3975(00)00102-X。[21] Steven M. German 和 A. Prasad Sistla。关于多进程系统的推理。*ACM*学报，39(3):675–735，1992年。doi:10.1145/146637。146681。[22] Alan J. Hoffman 和 Robert R. Singleton。关于直径为2和3的Moore图。*IBM*研究与开发杂志，4(5):497–504，1960年。doi:10.1147/rd.45.0497。[23] Charles Rackoff。向量加法系统的覆盖问题和有界性问题。理论计算机科学，6:223–231，1978年。doi:10.1016/ 0304-3975(78)90036-1。