arXiv:2304.13094v1 [cs.CG] 25 Apr 2023

Simply 实现不精确折线是 NP-困难的

Thijs van der Horst
乌得勒支大学信息与计算科学系，荷兰 荷兰埃因霍温理工大学数学与计算机科学系

TimOphelders
乌得勒支大学信息与计算科学系，荷兰 荷兰埃因霍温理工大学数学与计算机科学系

BartvanderSteenhoven
数学与计算机科学系，埃因霍温理工大学，荷兰

摘要

我们研究这样一个判定问题：给定一系列区域，是否可以从每个区域中各选择一个点，使得由此得到的折线是简单曲线或弱简单曲线，即允许与自身接触但不能自交。具体而言，我们考虑每个区域都是同一形状的平移副本的情形。我们证明，当该形状为单位圆盘或单位正方形时，该问题是NP-困难的。我们论证，当该形状为竖直单位线段时，该问题是NP完全的。

2012 ACM主题分类 计算理论 → 计算几何

关键词和短语 不精确折线、简单曲线、扰动

1 引言

由于其具有众多应用，寻找图的平面绘图一直受到广泛研究，例如在平面布局规划和可视化中 [7]。通常，当待绘制的图源自几何数据（如道路网络）时，每个顶点已经具有预先确定的位置。在这种情况下，如果我们坚持使用直线线段绘制边，则存在唯一对应的绘图。GPS轨迹等现实世界数据通常是不精确的。不精确性通常通过为每个顶点指定一个不精确区域来建模，而将每个顶点分配到其不精确区域中的某个点，称为一次实现。

过去已有针对不精确数据的算法研究 [5, 8]。对我们而言，一个特别相关的情形是：我们知道底层数据没有自相交。于是，我们可以寻找一种实现，使其绘图同样没有自相交。Godau [4]证明了，当不精确区域是半径各不相同的闭圆盘时，该问题是NP-困难的。在后续工作中，Angelini等人 [2] 证明了，当这些区域都是大小相等的圆盘、菱形或正方形，并且要求这些区域互不重叠时，对于直线绘图，该问题仍然是NP-困难的。在本文中，我们在一个非常受限的图类，即路径图中，研究这一问题。也就是说，我们要寻找的是一个简单折线的实现。现有算法可以确定一个多边形或折线是否为弱简单的 [1, 3]。与之最相关的工作是Löffler [6], 的研究；他证明了，当不精确区域是某个固定形状（如线段或圆）的缩放平移副本时，确定是否存在一个实现，使其成为弱简单多边形是NP-困难的。最后，Silveira 等人 [9] 证明了，对于每个顶点的度都恰好为一（即该图是一个匹配）的图的直线绘图，当使用单位长度垂直线段作为不精确区域时，该问题是NP完全的。

定义和问题陈述。 A 多边形链 或折线 是平面中的分段线性路径，由平面中的一系列 $P = (p_i)_{i=0}^{n}$ 点给出，这些点称为顶点。 P 的各个部分是连接相邻顶点的 n 线段。略微滥用记号，我们将 P 解释为折线，而不是其顶点。不精确折线

由平面中的一系列区域 $R = (r_i)_{i=0}^n$ 给出。如果对于每个 i，$_{i=0}^n$ 折线(p_i)是 R 的实现 $p_i \in r_i$，我们称其为 R 的实现。

如果一条折线不与自身交叉或接触，则称其为简单（或平面）。折线 $P = (p_i)_{i=0}^n$ 的 ε 扰动是满足 $\|p_i - p_i'\| \le \varepsilon$ 对所有 i都成立的折线 $P' = (p_i')_{i=0}^n$。如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个简单的 ε-扰动，则称折线 $(p_i)_{i=0}^n$ 为弱简单。我们关注的问题是，判断不精确折线 R 是否存在弱简单实现。

结果与结构。我们证明，即使每个区域都是同一形状的平移副本 S，该问题仍然是 NP 困难的。在第2节中，我们证明了当 S 为单位圆盘时的这一结论，并讨论如何调整构造，以证明单位正方形的情形也是 NP 困难的。由此可知，在 L_1、L_2和 L_∞ 范数下，计算使折线具有简单ε扰动的下确界 ε 是困难的。在第3节中，我们证明，当 S 为单位长度的垂直线段时，该问题是 NP 完全的。

2 作为区域的单位圆盘

我们通过从平面单调 3SAT 进行归约，证明当所有区域均为单位圆盘时，该问题是 NP-困难的。我们首先介绍平面单调 3SAT。单调 3CNF 公式是形如 $\varphi(x_1、\ldots\ldots、x_m)$ 的公式：$= \bigwedge_i C_i$ 其中包含布尔变量 $x_1、\ldots\ldots、x_m$，每个子句 C_i要么是正子句（形式为 $(x_j \vee x_k \vee x_l)$），要么是否定子句（形式为 $(\neg x_j \vee \neg x_k \vee \neg x_l)$）。单调 3CNF 公式的单调直线布局，是其子句与变量之间关联图的平面绘图，其中变量被绘制为 x-轴上彼此不相交的水平线段，所有正子句位于 x-轴上方，所有否定子句位于 x-轴下方，并且边为直线段，不穿过 x-轴，且至多有一个弯折。我们可以假设对于每个子句，其中间边不发生弯折，见图 1。平面单调 3SAT 是一个 NP完全问题：给定一个带有单调直线布局的单调 3CNF 公式φ，判断 φ 是否可满足。为进行归约，我们构造由不精确折线组成的构件，分别对应于布局中的变量、子句和边。随后，我们展示如何将这些构件连接成一条单一的不精确折线，使其具有弱简单实现，当且仅当公式 φ 可满足。

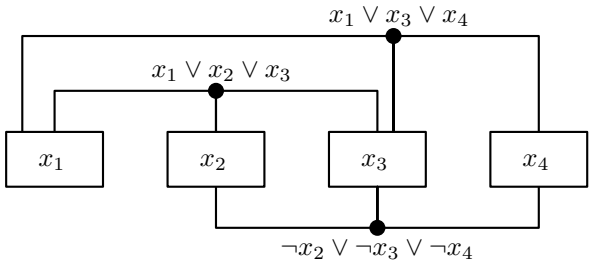

图 1 平面单调 3SAT 的诱导变量-子句图示例。

枢轴构件。 在为变量、子句和边构造构件之前，我们先介绍一个辅助构件：枢轴构件。枢轴构件的作用是强制任意弱简单实现中的一条给定边经过我们选定的某个固定点。该构件如图 2 所示，由三个组件组成。其中两个组件共同构成枢轴，使得第三个组件的边必须

经过枢轴的中心。如果我们希望强制这条边经过 (0，0)，顶部组件的坐标将为

$$1,\dots,7 \mapsto (-1-\varepsilon,2),(1,2),(1,5),(0,-1),(-1,5),(-1,2),(1+\varepsilon,2)$$

对于某个值 $\varepsilon > 0$，底部组件是顶部组件的旋转副本：

$$1',\dots,7' \mapsto (1+\varepsilon,-2),(-1,-2),(-1,-5),(0,1),(1,-5),(1,-2),(-1-\varepsilon,-2).$$

在选择区域 $1''$ 和 $2''$ 的放置位置时有一定自由度，但为确保实现经过枢轴，我们要求区域 $1''$ 的 x 坐标小于 -1，区域 $2''$ 的 x 坐标大于 1，并且圆对 $1''$ 和 $2''$ 的切线均与连接 $(0,-5)$ 和 (0,5) 的线段相交。通过将 $\varepsilon > 0$ 取得足够小，我们可以适应区域 $1''$ 和 $2''$ 之间边的任意角度。具体而言，应使得点 $(-\varepsilon,2)$（我们将在此处实现区域 1）位于从点 (0,0) 到区域 $1''$ 的切线之上，并使区域 7、 $1'$ 和 $7'$ 具有对称性质。

图 2(b) 展示了枢轴构件的一种弱简单实现。其他弱简单实现中，区域 1、7、 $1'$、 $7'$、 $1''$ 和 $2''$ 内点的放置可能有所不同，但连接 $1''$ 和 $2''$ 的线段始终必须经过 (0，0)。

▶**引理 1.** 对于任意弱简单实现，枢轴构件中连接区域 $1''$ 和 $2''$ 的线段必须经过 $(0,\ 0)$。

证明. 首先，我们单独考虑顶部的枢轴组件。观察仅由点 3、4 和 5 构成的任意折线部分，可以发现它们始终形成一个 V 形，而角度可以通过改变这些点的位置来调整。对于点 1、2、6 和 7 而言，连接 3 与 4、以及 4 与 5 的线段不妨视为无限延伸，因为按照已定义的区域放置方式，连接 1 与 2 的线段不可能从这些线段上方或下方通过。这意味着，连接 3 与 4、以及 4 与 5 的直线定义了（闭）半平面。为避免相交，在每种有效放置中，点 1 和 2 必须位于同一个半平面内。由于为区域 1 选择的任何点始终位于左半平面，我们知道区域 2 的点也必须位于左侧。同时，类似的推理表明，对于连接 3 、 4 和 5 的两条线段，区域 6 和 7 的点都必须位于右半平面。根据给定的区域放置方式，要做到这一点，唯一的方式是将区域 2、3、4、5 和 6 内的点全部放置在同一条垂直线上，这条垂直线必须

$x = 0$ 因为这是唯一一条穿过所有这些区域的线。镜像底部也是如此

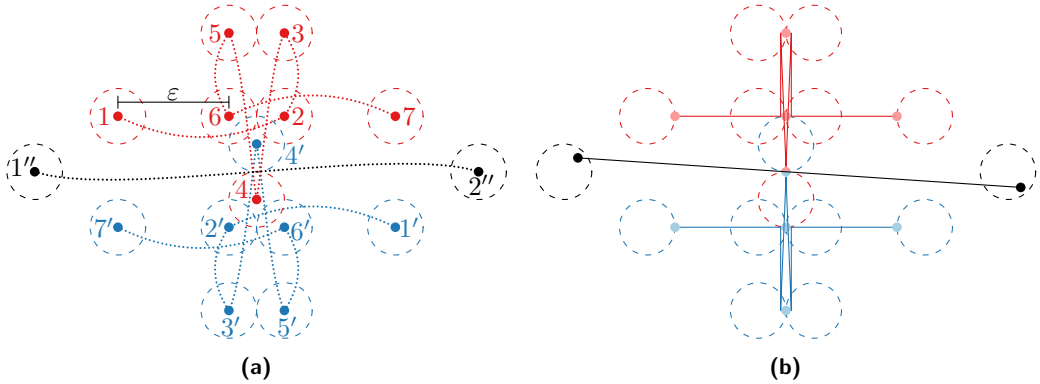

图 2 (a) 枢轴构件。(b) 一个弱简单实现，展示了一个简单扰动。请注意，该扰动将大多数顶点移到了其指定圆盘之外。

枢轴组件。这意味着点 4 和 $4'$ 位于同一条垂直线上。我们必须保证点 4 的 y 坐标大于或等于点 $4'$，否则 $1''$ 与 $2''$ 之间的线段将始终产生交点。点 4 不位于点 $4'$ 下方的唯一实现，是两者都放置在 (0，0) 的情况。由于圆对 $1''$ 和 $2''$ 的切线都与 (0，-5) 和 (0，5) 之间的线段相交，因此，位于这两个区域之间的任何线都不可能完全通过枢轴构件的上方或下方。于是，对于任何弱简单实现，点 (0，0) 就成为一条边能够在不产生交点的情况下从枢轴构件一侧通到另一侧的唯一位置。◀

▶**引理 2. </style}对于区域 和 中的任意点，只要连接它们的线段经过(0**,0)，就存在与之对应的枢轴构件弱简单实现。

证明。注意，与之前类似，区域 2 到 6 以及 $2'$ 到 $6'$ 中的点可以放置在一条垂直线上，使得一条从区域 $1''$ 到 $2''$ 且经过 (0, 0) 的边不会与其中任何一点相交。此外，我们选择了 ε，使得区域 1 、 7 、 $1'$ 和 $7'$ 不会导致任何相交。考察区域 1 即可看出这一点：在一种实现中，我们可以选择点 ($-\varepsilon$, 2)。我们选择 ε 时使该点位于从点 (0, 0) 到区域 $1''$的切线上方，这意味着该点位于任何经过 (0, 0) 且连接区域 $1''$ 和 $2''$ 的边上方。因此，从区域 1 到区域 2 的边不会与从 $1''$ 到 $2''$ 的边相交，构件其余三个角点所连的边也同样如此。◀

变量构件。 对于归约，我们希望构造一个能够呈现两种离散状态的变量构件，其中一种表示真，另一种表示假，以便利用两种状态之间的差异产生不同的行为。为此，我们设计了如图 3(a) 所示的变量构件。假设最左侧的点为我们的 (0，0)，并令 l 为满足 $l > 8$ 的任意值，则这些点的确切坐标和顺序如下：

$$1, \ldots, 6 \mapsto (0,0), (8,0), (5,2), (5,-2), (2,0), (l,0)$$

▶**引理 3**。 变量构件的区域恰好有两种不同的弱简单实现。

证明。 要理解其原因，首先注意，对于这些区域的任意实现，从区域 5 到区域 6 的线段若不与从区域 3 到区域 4 的线段相交，唯一的方式就是从其上方或下方通过。从区域 1 到区域 2 的线段也同样如此。由于这些区域的放置方式，只有当区域 3 的点位于其区域的最底部 $(5，1)$，且跨越该点的线段的两个端点均位于各自区域的最顶部 时，这些线段才能从 3 到 4 的线段上方通过。当线段需要从 3 到 4 之间的线段下方通过时，也具有类似的性质。最后，注意，将区域 1、2、5 和 6 的点全部放置在同一条水平线上，并不会形成弱简单折线。◀

如果从区域 5 到区域 6 的最终水平线位于区域 3 和 4 之间的阻挡竖线上方，则如图 3(b) 所示，构件处于假状态。我们将其位于下方的情况视为真状态（图 3(c)）。

子句构件。 子句构件用于表示形状（$x_1 \vee x_2 \vee x_3$）的析取式，其中变量也可以全部取反。该构件的区域初始放置如图 4(a)所示。在这些图中，为清晰起见，我们使用 X 形来示意表示在该位置放置了一个枢轴构件。区域 x_1、 x_2 和 x_3 对应子句的文字，而区域 1、2、3 和 4

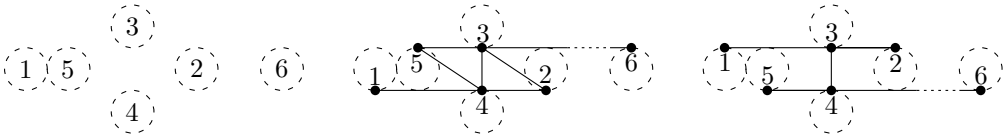

图3 (a) 变量构件。(b) 假状态。(c) 真状态。

用于对这些文字施加限制。该构件中各点的确切位置如下，将左上方的点取为（0，0）：

$$1, 2, 3, 4 \mapsto (0, 0), (0, -5), (6, -5), (6, 0)$$

我们将 x_1 对应的点放置在 $(1, -3)$，将 x_2 对应的点放置在 $(2, -4.6)$，并将 x_3 对应的点放置在 $(5, -3)$。用于连接这些文字的区域与变量构件的构造，以及枢轴构件的精确放置方式，将在后文解释。目前，只需知道：当一个变量为假时，通向文字点的折线部分只能完全竖直地穿过底部的枢轴构件，或完全水平地穿过侧面的枢轴构件。 x_1、 x_2 和 x_3 的区域经过精确放置，使得在这种情况下，只有一种不会与枢轴构件相交的实现。我们将变量在此实现中的位置称为其假位置；如果在某个解中，它位于由子句构件角点所确定的折线内部，就称其被覆盖。如果变量为真，那么直线可以倾斜穿过枢轴构件，这意味着文字点可以通过多种不同方式实现。具体而言，我们将 x_1、 x_2 和 x_3最靠左、最靠下和最靠右的位置分别称为它们的真位置。子句构件根据以下引理模拟布尔公式的子句：

▶**引理4**。 对于三个文字中的任意两个，都存在一种实现可以揭示它们的假位置，而任意一种实现至多揭示两个假位置。

证明。文字 x_1、 x_2 和 x_3 的假位置分别为 $(1, -2)$、$(3, -4.6)$ 和 $(5, -2)$。由于区域1和2的放置，揭示位置 $(1, -2)$ 的唯一方法是将这两个区域的点都放置在最右侧的位置，即 $(1, 0)$ 和 $(1, -5)$。同样，揭示 x_3 的假位置的唯一方法是将区域3和4的点放置在最左侧的位置 $(5, -5)$ 和 $(5, 0)$。然而，这意味着从区域2到区域3的线是从 $(1, -5)$ 到 $(5, -5)$ 的水平线。 x_2 的假位置位于该线的上方，这意味着它未被揭示。由于只有这一种区域1至4的点的选择能够同时揭示 x_1 和 x_3 的假位置，因此不可能同时揭示全部三个假位置。

我们很容易看出，对于任意选择的两个文字，通过分别考虑各种情况，我们可以同时揭示两个假位置。为了揭示 x_1 和 x_2 的假位置，我们可以为区域 1 和 2 选择最右侧的位置，为区域 3 选择最顶部的位置，并为区域 4 选择区域内的任意位置。图 4(b) 展示了一个相应的（部分）弱简单实现，其中橙色线表示一个文字为假，蓝线表示其为真。我们已经描述过 x_1 和 x_3 的情况（见图 4(c)），而 x_2 和 x_3 的情况（图 4(d)）与 x_1 和 x_2 的情况对称。重要的观察是，对于任意弱简单实现，至少有一个变量点不能处于其假位置，因此必须将其设为真，就像在析取中一样。

◀

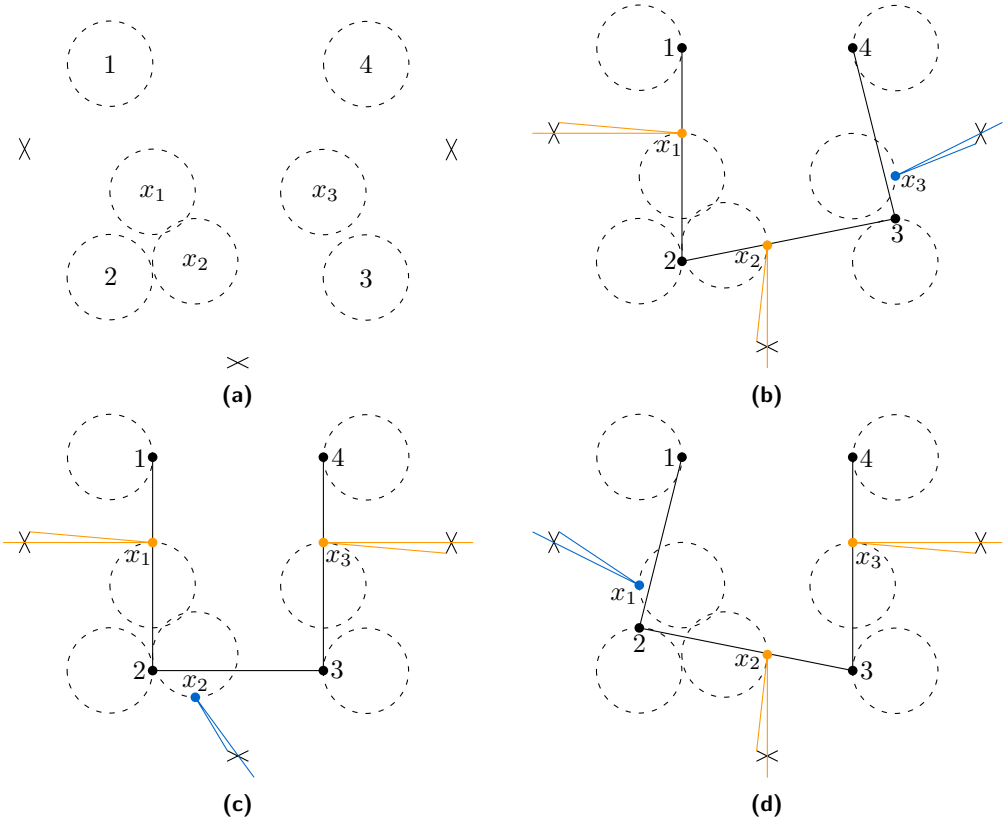

图4 （a）子句构件，以及其中（b） x_3、（c） x_2或（d） x_1 为真的实现。

连接变量与子句。 对于归约构造，我们仍然需要一种方法，以正确地将变量构件连接到子句构件。为此，我们考察平面单调 3SAT 所得到的诱导变量-子句图的形状。我们之前已经在图 1 中看过一个例子。子句总是以向下或向上的 E形连接到变量。为了保持该图的平面性，我们的归约应在足够程度上遵循这种形状。因此，子句构件应直接放置在某个变量构件的上方，另外两个变量构件则从侧面通过弯折与其连接。

我们首先考察从右侧变量到子句的连接。在这种情况下，连线构件包含三个区域和两个枢轴构件，如图 5(a) 所示。此处，区域 1 与对应于该子句右文字的变量构件水平对齐。根据图3，我们将这些变量区域放置在区域 2 和 6 之间；这意味着，取决于变量构件的状态，我们的实现会在顶部有一条水平线（图 5(a) 中为橙色）（若状态为假），或在底部有一条水平线（蓝色）（若状态为真）。我们将区域 1 的位置记为 (0，0)。区域 3 是子句构件的右文字区域。子句构件对应的两种状态以蓝色和橙色绘出。该区域的位置由子句构件决定，不应受连线构件影响。设区域 3 位于 $(-a,\ b)$，其中 $a,\ b > 0$。对于连线构件，我们将区域 2 放置在位置 $(1,\ b+1)$，并将两个枢轴构件分别放置在 $(1-\frac{a}{2},\ b+1)$ 和 $(0,\ 1+\frac{b}{2})$，方向适当。我们在不改变其有效性的情况下拉伸变量-子句图，使 a and b 足够大，从而连线构件的组件不会重叠。

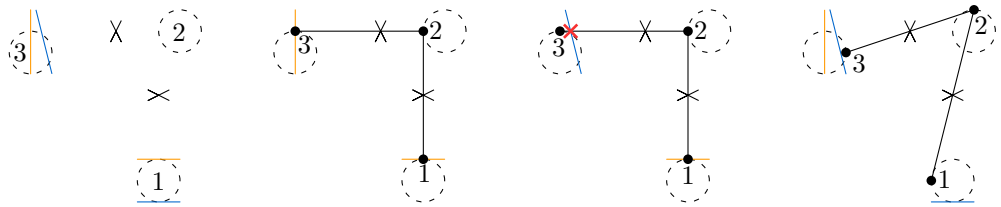

图 5 (a) 用于连接变量与子句的右侧导线构件。(b) 两者均处于假状态时的实现；(c) 变量处于假状态而子句处于真状态时的实现；(d) 变量构件处于真状态时的实现。

▶**引理 5.** 如果 x_i 的变量构件处于假状态，那么任何弱简单实现都会将 x_i 放置在其假位置。否则， x_i 可以放置在其真位置或假位置。

证明。 如果变量构件处于假状态，其水平线将位于区域 1 的顶部。为了避免与这条线交叉，区域 1 中的点只能放在区域的最顶端 $(0,\ 1)$。由于枢轴构件，通往区域 2 的线必须完全垂直，此时它只会在位置 $(0,\ b+1)$处接触该区域，因此该区域中的点必须放在那里。同理，由于第二个枢轴构件，区域 3 中的点必须放在位置 $(a,\ b+1)$，也就是它的假位置。这种实现如图 5(b) 所示，并且是唯一不会直接导致相交的实现。如果变量构件处于假状态，而子句构件处于真状态，则必然会导致交叉。例如，图 5(c) 展示了这种情况。如果变量构件处于真状态，水平线就位于区域 1 的底部，这意味着我们在该区域中选择点的位置不受限制。尤其是，我们可以将点放在位置 $(-1,\ 0)$，由此便可以在区域 2 中选择点 $(1,\ b+2)$，并在区域 3 中选择真位置 $(a+1,\ b)$。这意味着，无论子句构件处于何种状态，折线的这一部分都不会发生交叉（见图 5(d)）。请注意，与假状态下的实现不同，这里描述的真状态下的实现并非唯一可能的实现。只要选择的坐标能使第三区域中的点位于蓝线右侧且不造成交叉，就是有效的。◀

用于将子句的左侧文字连接到其变量构件的连线构件，是右侧导线构件的镜像版本。中间导线构件是一个简化版本，只需要一个枢轴构件，因为这种连接无需形成弯折。连线构件的这三个版本均可在图 6 中看到其实际效果。

归约。 一种通用的归约方法应能够将平面单调 3SAT 公式的任意单调直线布局转换为一组单位圆盘，使得当且仅当该公式可满足时，这组单位圆盘存在弱简单实现。

一般构造如下进行。首先，我们按照从平面单调 3SAT 实例中获得的布局所规定的位置放置所有构件。接下来，我们以平面方式连接这些构件。为此，我们按照图 6 所示，从左到右连接各变量。我们通过按如下方式处理外面上的子句（位于 x-轴上方），并将处理结果从左到右连接，来连接构造上半部分的构件。将该子句连接到其右侧导线（及其枢轴构件），然后递归处理并连接由其右侧导线和中间导线围成的区域中的子句，接着连接中间导线，然后递归处理并连接由

中间导线和左侧导线围成的区域中的子句，最后连接左侧导线。下半部分的构件以对称方式连接。由于我们的变量构件的特性，从下方进行连线构件连接会自动得到变量的取反值，这与平面单调 3SAT 的定义一致。此外，下半部分连线构件的区域不会与上半部分的区域发生干扰（产生交叉），因为变量构件的水平线确保它们保持分隔，即使它们的区域发生重叠。

我们以仅包含三个变量和一个子句的极简单情况为例，如图 6(a) 所示。构造完成后，我们得到一系列区域。在图 6(b) 中，我们看到了一种潜在的弱简单实现，其中变量 x_2 被设为真。图 6(c) 展示了另一个例子，此时 x_1 变量构件为真。当然，在这个例子中，也可能同时有多个变量构件处于真状态。

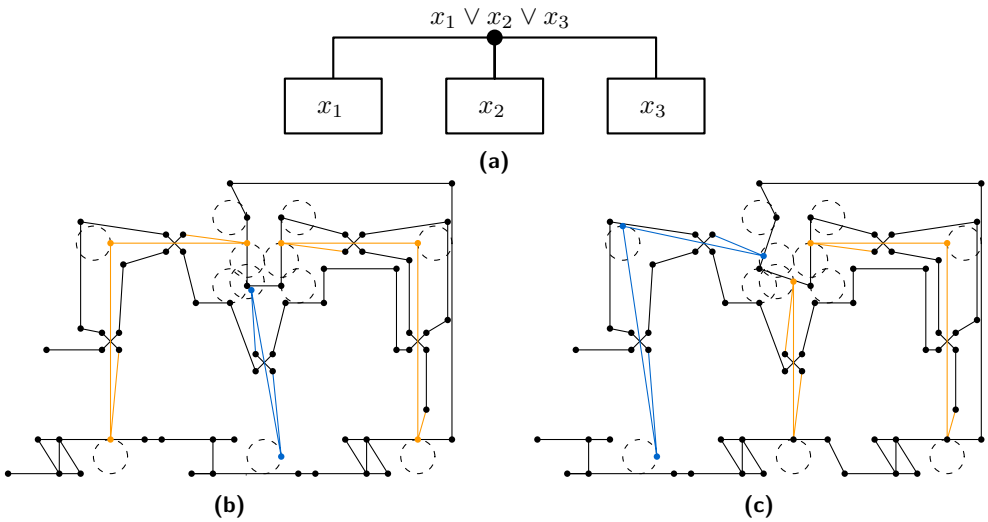

图 6 变量-子句图构造示例 (a)。(b) 中的弱简单实现将 x_2 设为真，而 (c) 中的实现将 x_1 设为真。

一个潜在问题是，当变量-子句图中存在嵌套子句时，可能没有足够的空间在外层子句定义的包围区域内完整绘制子句构件及其导线。通过对变量-子句图进行缩放，同时保持平面性，可以解决这一问题。

归约的正确性源于各个构件的正确性；我们在描述这些构件时已经对此进行了论证。此外，每个构件和连接都使用固定数量的区域，并且可以根据变量-子句图确定它们的位置，因此该归约在规模和时间上都是多项式的。由此我们可以得出以下结论：

▶**定理 6**。 给定一个单位圆盘序列，判断是否存在一个弱 y 简单实现的问题是 *NP*-困难的。

▶**观察 7**。 在我们的构造中，如果存在弱简单实现，那么就存在一种实现，只使用每个不精确区域的最上、最右、最下或最左的点。因此，如果我们使用包含这四个点的不同不精确区域，那么只要最初存在弱简单实现，仍然会存在弱简单实现。而且，如果每个区域都是原区域的子集，那么如果第二个区域中存在弱简单实现，原区域中也存在弱简单实现。

原区域中，那么如果第二个区域中存在弱简单实现，原区域中也存在弱简单实现。

我们所研究的问题也可以从不同的角度来看待。可以将序列中每个区域的中心视为输入折线上的一个点，而将这些区域本身视为我们可以对这些点进行扰动的范围。在这种情况下，我们所讨论的单位圆盘设置可以看作允许在 L_2 范数下将点移动单位距离。因此，研究 L_1 和 L_∞ 范数下的情形或许会很有趣。在 L_1 范数下，这些区域呈菱形。根据上述观察，该问题仍然是 NP-困难的。此外，如果将所有内容旋转 45 度，并适当缩放构件，我们可以将 L_∞ 范数下的方形区域视为 L_1 范数下的区域。这意味着在这种情况下，该问题仍然是 NP-困难的。

3 垂直线段作为区域

除前面讨论的情形外，我们还考虑另一种情况：如果所有区域都是大小相同的垂直线段，会怎样？我们证明，即使在这种情况下，该问题仍然是 NP-困难的。我们再次可以通过从平面单调 3SAT 进行归约来证明这一点。由于该归约与第2节中的归约非常相似，我们将简要介绍。在我们的归约中，我们将使用长度为 2 的垂直线段，因为这样坐标会更加清晰，但也可以很容易地将其调整为单位长度垂直线段。

枢轴构件。 与之前一样，在我们的归约中，我们将使用枢轴构件，迫使直线经过特定的点。然而，用于圆盘的区域放置方式并不适用于垂直线段，因为在这种情况下，不可能将区域 2 至 6（以及 $2'$ 至 $6'$）的点全部放置在同一条垂直线上。不过，由于作为区域的垂直线段只允许其点的 x 坐标取单一值，因此可以构造出一个更简单的枢轴构件，如图 7(a) 所示。它与单位圆盘的枢轴构件相同，只是将区域 2、3、5 和 6 替换为两个处于完全相同位置的区域（图中的 2 和 4），并对底部组件进行同样的处理。与之前类似，枢轴构件要求弱简单实现中的任意直线都经过如图 7(b) 所示的正中心。不过，现在存在一个区别：由于区域被限制为垂直线段，构件无法旋转。

变量构件。 第2节中的变量构件只利用区域的最顶部和最底部位置。因此，在垂直线段的情形下，变量构件可以保持完全不变。

子句构件。 第2节中的子句构件从根本上利用了圆盘区域在垂直和水平方向上的极端位置。这意味着我们需要为垂直线段定义一个可用的新子句构件。新子句构件按以下顺序放置区域：

$$1, \ldots, 6 \mapsto (0,0), (0,-3), (4,-5), (6,-5), (10,-3), (10,0)$$

两个枢轴构件的中心分别位于 (2，-4) 和 (8，-4)。文字区域应分别放置在 (1，-4)、(5，-6) 和 (9，-4)，对应于 x_1、x_2 和 x_3。构造的简化可视化如图 8(a) 所示。对于文字区域，当其对应的文字

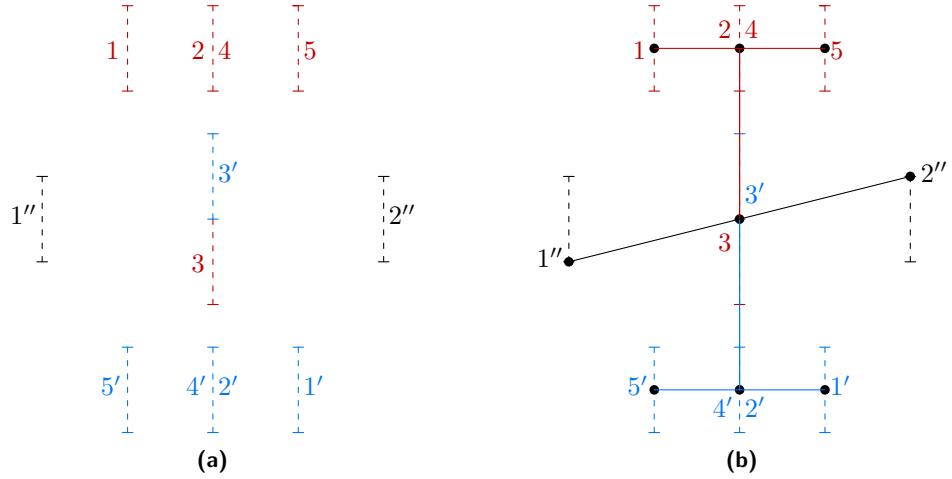

图 7 （a）**其中** 垂直线段的枢轴构件。（b）一种较弱的实 现。

为假时，我们强制点放置在其最顶部位置（图中的橙色点）。与之前一样，我们将该位置称为文字的假位置。只有当文字为真时，点才允许放置在其真位置，即区域的底部（蓝色点）。使该构造生效的变量构件与子句构件之间的具体构造将在后文解释。同样，与之前一样，子句构件最多只能同时显露两个文字区域的假位置。在图 8(b) 中，我们看到 x_2 和 x_3 出现了这种情况，这意味着 x_1 必须为真，才能避免交叉。在图 8(c) 中， x_2 出现了这种情况，并且 x_3 还存在第三种实现。

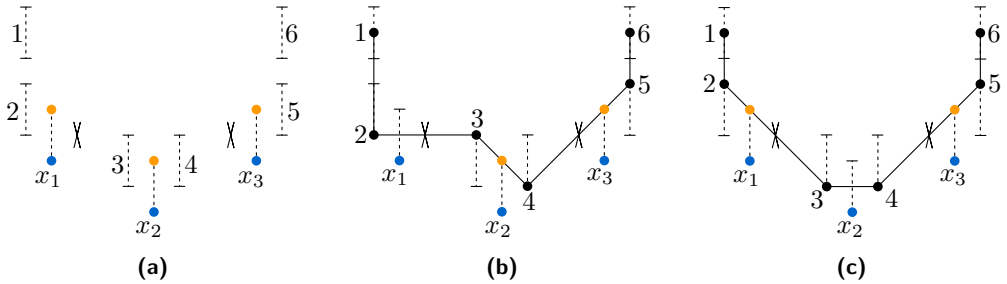

图 8 （a）垂直线段的子句构件，其中（b） x_1 或（c） x_2 应为真。

连线构件。和之前一样，我们需要定义一个连线构件，将子句构件中的文字区域连接到对应的变量构件。该构件由三个区域（其中一个是文字区域）和两个枢轴构件组成。图 9 展示了这条连线，以及两种重要的弱简单实现。区域 1 仍放置在 (0,0)，并与一个变量构件水平对齐。接着，假设文字区域 3 位于 $(-a, b)$，其中 $a, b > 0$，则区域 2 必须放置在 $(2, b)$，两个枢轴构件则分别放置在 $(1, \frac{b}{2})$ 和 $(\frac{-a}{2} + 1, b)$。将这些枢轴构件恰好放置在相邻两个区域的正中间后，解折线中位于各自区域最顶端或最底端的点便会呈现交替模式，如图 9(b) 和图 9(c) 所示。这个思路也可用于连接子句构件中间的文字；与单位圆盘的情况不同，这次确实需要一个中间区域和两个枢轴构件。

；与单位圆盘的情况不同，这次确实需要一个中间区域和两个枢轴构件。

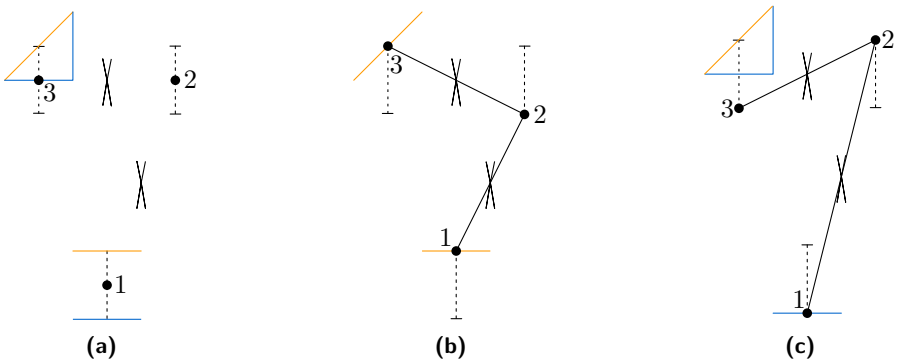

图 9 （a）垂直线段的右侧导线构件。（b）子句构件和变量构件均处于假状态时的弱简单实现，以及（c）变量构件处于真状态时的弱简单实现。

归约。 在考察完整归约之前，我们可以论证，垂直线段的情形实际上属于 NP。我们的论证与 Silveira 等人所采用的论证类似 [9]，他们利用任意解都可以表示为一个线性约束系统的解这一事实，论证了一个类似问题属于 NP；该线性约束系统可以在非确定性多项式时间内猜出。考虑一个弱简单实现及其对应的简单扰动。该简单扰动会诱导出一个序型：对于任意顶点和任意边，记录该顶点位于该边的支撑直线上、上方还是下方。该序型会诱导出一个多项式规模的线性约束系统；通过选取足够小的扰动，我们可以确保该弱简单实现位于该约束系统的解空间闭包中。我们可以在非确定性多项式时间内猜出这个线性约束系统，并在其闭包中找到一个实现。随后，将该实现作为其中一个算法的输入 $[1, 3]$，以验证该实现是否弱简单。由于这些算法的输出仅取决于序型，因此它们会报告该实现确实是弱简单的。定理 8 得证。

▶**定理 8**。 给定一组单位长度垂直线段，判断是否存在这些区域的弱简单实现这一问题属于 *NP*。

将构件调整为适用于区域为垂直线段的情况后，归约的其余部分保持不变。我们通过以下步骤，将公式的单调直线布局转换为问题的一个实例：首先构造所有变量构件，然后从右向左依次构造上半部分的所有子句和导线，最后从左向右构造下半部分的所有子句和导线。

▶**定理 9**。 给定一组单位长度垂直线段，判断是否存在这些区域的弱简单实现这一问题是 *NP* 完全的。

4 讨论

我们证明了，当每个区域都是单位圆盘、单位正方形或垂直单位线段时，判定一个不精确多边形是否存在弱简单实现是 NP-困难的。只需将每个区域稍微扩大

，便可同样得出，判定是否存在简单实现也是 NP-困难的。垂直线段的情形是 NP 完全的，而第2节中的问题是否属于 NP 尚不明确，因为目前无法确定是否只需多项式数量的比特就足以编码一个解。第2节中的这些情形属于复杂度类 $\exists\mathbb{R}$，我们想知道这些情形是否是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。

参考资料

1 Hugo A. Akitaya、Greg Aloupis、Jeff Erickson 和 Csaba D. Tóth。《识别弱简单多边形》。离散计算几何，58(4)：785–821，2017。2 Patrizio Angelini、Giordano Da Lozzo、Marco Di Bartolomeo、Giuseppe Di Battista、Seok-Hee Hong、Maurizio Patrignani 和 Vincenzo Roselli。平面图的锚定绘图。载于*GD*，第 8871 卷，《计算机科学讲义》，第 404–415 页。Springer，2014。3 Hsien-Chih Chang、Jeff Erickson 和 Chao Xu。检测弱简单多边形。载于*SODA*，第 1655–1670 页。SIAM，2015。4 Michael Godau。关于带有不精确性的平面图嵌入难度。载于 *GD*，第 894 卷，《计算机科学讲义》，第 254–261 页。Springer，1994。5 Maarten Löffler。《计算几何中的数据不精确性》。博士学位论文，乌得勒支大学，2009。6 Maarten Löffler。不精确点上巡回路线的存在性与计算。《国际计算几何与应用杂志》，21(1)：1–24，2011。7 Takao Nishizeki 和 Md. Saidur Rahman。《平面图绘制》，第 12 卷，《计算学讲义系列》。World Scientific，2004。8 Marcel Roeloffzen。在不精确点上寻找结构。硕士学位论文，埃因霍温理工大学，2009。9 Rodrigo I. Silveira、Bettina Speckmann 和 Kevin Verbeek。具有几何约束的不相交路径。《离散数学理论与计算机科学》，21(3)，2019。