arXiv:2304.13127v2 [math.FA] 9 Oct 2023

一类对称正则 de Branges 空间上的过采样

Luis O. Silva*[1] 和 Julio H. Toloza†[2]

[1]数学物理系，应用数学与系统研究所，墨西哥国立自治大学，邮编 04510，墨西哥城[2]数学研究所（INMABB），数学系，南方国立大学（UNS）-国家科学技术研究委员会，阿根廷布兰卡港

摘要

若常数函数属于 de Branges 空间 B 的伴随函数空间，则称 B 为正则空间；若 B 在映射 $F(z) \mapsto F(-z)$ 作用下等距不变，则称其为对称空间。设 $K_{\mathcal{B}}(z,\ w)$ 是 B 中的再生核，$S_{\mathcal{B}}$ 是独立变量乘法算子，其最大定义域包含于 B。

粗略地说，若存在 $J_{\mathcal{AB}}\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得对所有 $w\in\mathbb{C}$，$J(\cdot\ w)\in$B，则称 B 相对于其真子空间 A 具有 ℓ_p-过采样性质，其中 $p\in(2,\ \infty]$。

$$\sum_{\lambda\in\sigma(S_{\mathcal{B}}^{\gamma})}\left(\frac{|J_{\mathcal{AB}}(z,\lambda)|}{K_{\mathcal{B}}(\lambda,\lambda)^{1/2}}\right)^{p/(p-1)}<\infty\quad\text{and}\quad F(z)=\sum_{\lambda\in\sigma(S_{\mathcal{B}}^{\gamma})}\frac{J_{\mathcal{AB}}(z,\lambda)}{K_{\mathcal{B}}(\lambda,\lambda)}F(\lambda),$$

对于所有 $F\in$A 以及 $S_{\mathcal{B}}$ 的几乎所有自伴扩张 $S^{\gamma}{}_{\mathcal{B}}$。该定义源于 Paley-Wiener 空间众所周知的过采样性质。

本文给出了对称正则 de Branges 空间具有相对于其 de Branges 子空间链的 ℓ_p-过采样性质的充分条件。

关键词： de Branges 空间、过采样、采样理论、典范系统**2020 年数学学科分类：** 42C15 、 46E22 、 47A06 、 47B32 、 94A20

1 引言

1.1 deBranges 空间

整函数的再生核希尔伯特空间 B 是一个 de Branges 空间，当且仅当它在以下映射下等距不变

$$F(z)\mapsto F^{\#}(z)=F(z^*)^*\quad\text{and}\quad F(z)\mapsto\frac{z-w^*}{z-w}F(z),$$

其中 $w\in\mathbb{C}$ 表示函数 F的一个零点（如果存在）。此外，$\mathcal{B}$ 是正则的（有些文献中也称为短的 [4]），当它在映射下封闭时

$$F(z)\mapsto\frac{F(z)-F(w)}{z-w}$$

*Q silva@iimas.unam.mx

†Q julio.toloza@uns.edu.ar（通讯作者）

对于某个（因而也适用于任意一个）固定的 $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$；等价地，$\mathcal{B}$ 是正则的，当常数属于伴随函数空间 Assoc($\mathcal{B}$) [2]。最后，$\mathcal{B}$ 在映射下保持等距不变时称为对称的

$$F(z) \mapsto F^{-}(z) = F(-z).$$

de Branges 空间 B 的再生核记为 $K(z,w)$（或在需要消歧时记为 $K_{\mathcal{B}}(z,w)$），约定 $K(\cdot\ w) \in$ B ($w \in \mathbb{C}$)，因此

$$F(w) = \langle K(\cdot,w), F\rangle_{\mathcal{B}} \quad (F \in \mathcal{B}).$$

此外，$K(z,w) = K(w,z)^* = K(w^*,z^*)$。B 上的内积——或任何其他希尔伯特空间上的内积——均假定对第二个变量线性。

de Branges 空间可以由一个 Hermite-Biehler函数（或 de Branges 函数）生成，即由一个满足不等式 $|E(z)| > |E(z^*)|$ 的整函数 E 生成，其中对所有 $z \in \mathbb{C}_+$ （上开半平面）均成立。给定这样的函数 E，相应的 de Branges 空间是 Hardy空间 $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ 的一个子空间，即

$$\mathcal{B}(E) := \left\{F \text{ entire} : F/E, F^{\#}/E \in \mathcal{H}^2(\mathbb{C}_+)\right\}$$

赋予 $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ 的内积。根据 [2, 定理 23], ，给定一个（非平凡的）de Branges 空间 B，存在一个 Hermite-Biehler函数 E，使得 B $=$B(E) 等距地成立。如果 B 是正则的，那么 E 在实轴上无零点 [4, 第 6.2 节，命题 2]。根据 [4, 第 6.1 节，命题 4]，，B 对称，当且仅当 E 满足 $E^{\#}(z) = E(-z)$。因此，如果 B 是正则且对称的，则对于唯一的无零点 Hermite-Biehler函数E，B $=$B(E) 等距地成立，且 $E(0) = 1$ （见 [4, 第 6.1 节，命题 5]）。

B 的 de Branges 子空间是指一个自身也是 de Branges 空间的（闭）子空间 A $\subset$B（赋予 B 的内积）。给定 de Branges 空间的 de Branges 子空间的集合按包含关系构成全序：如果 A_1 和 A_2 是 B 的 de Branges 子空间，那么要么 $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2$，要么 $\mathrm{A}_2 \subset \mathrm{A}_1$ [2, 定理 35]；另见 [22, 定理 2.13]。根据定义，

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{B} : \mathcal{A} \text{ is a de Branges subspace}\}$$

是 B 的（嵌套）de Branges 子空间的极大链。有趣的是，Sub(B) 中的所有元素都是正则的，当且仅当其中一个元素是 [22, 注记 2.16]。

正则 de Branges 空间中的函数具有指数型，即

$$\tau(F) := \limsup_{R\to\infty} \frac{\max_{|z|=R} \log|F(z)|}{R} < \infty \quad (F \in \mathcal{B}).$$

此外，指数型在 B $=$B(E) 上一致有界。也就是说，

$$\tau(\mathcal{B}) = \sup_{F\in\mathcal{B}} \tau(F) = \tau(E) < \infty;$$

见 [11, 定理 3.4] （另见 [4, 第 6.2 节，命题 2]）。当 τ(B) > 0 时，B 为正规型；当 τ(B) $= 0$ 时，B 为极小型。

在 de Branges 空间理论中，最为重要的是独立变量乘法算子 S : D(S) $\to$ B（有时记作 $S_{\mathcal{B}}$），即

$$(SF)(z) := zF(z), \quad \mathcal{D}(S) := \{F(z) \in \mathcal{B} : zF(z) \in \mathcal{B}\}.$$

该算子是对称的，亏指数为 (1，1)，因此它具有由 S^{γ} 参数化的一参数族（典范）自伴扩张。为方便起见，我们假设 $\gamma \in [0,\pi)$。S 的定义域不一定在 B 中稠密，但其余维数始终不超过 1。这意味着，S 的自伴扩张除至多一个例外之外全都是算子（当且仅当 dimD(S) $^{\perp} = 1$ 时会出现这一例外），此时例外延拓是真线性关系。算子 S 也是正则的[1] [10, Cor. 4.7], ，这

[1]也就是说，给定 $z \in \mathbb{C}$，存在 $c_z > 0$ 使得对于所有 $F \in$ D(S)，k($S - zI$)Fk $\geq c_z$ kFk。

意味着任意谱 $\sigma(S^\gamma)$ 都由重数为 1 的孤立特征值组成，并且

$$\bigcup_{\gamma\in[0,\pi)} \sigma(S^\gamma) = \mathbb{R}, \quad \sigma(S^\beta) \cap \sigma(S^\gamma) = \emptyset \quad (\beta \neq \gamma).$$

对这些事实（以及参考文献）的更详细叙述见 [16]。

注释 1.1。 假设 S^γ 是 $S_\mathcal{B}$ 的例外延拓（即 $\mathrm{D}(S_\mathcal{B})$ 未稠密定义的情形）。注意到 $K_\mathcal{B}(z, \lambda)$ 是与 $\lambda \in \sigma(S^\gamma)$ 对应的特征函数（相差一个常数因子），因此可以直接得到所谓的采样公式

$$F(z) = \sum_{\lambda\in\sigma(S^\gamma_\mathcal{B})} \frac{K_\mathcal{B}(z,\lambda)}{K_\mathcal{B}(\lambda,\lambda)} F(\lambda) \quad (F \in \mathcal{B}). \tag{1.1}$$

事实上，该公式在 B 与序列空间 $\ell_2(\mathrm{B}, \gamma)$ 之间建立了双射对应，其中

$$\ell_p(\mathcal{B},\gamma) := \left\{ \{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\sigma(S^\gamma_\mathcal{B})} \subset \mathbb{C} : \left\{ \frac{\alpha_\lambda}{K_\mathcal{B}(\lambda,\lambda)^{1/2}} \right\}_{\lambda\in\sigma(S^\gamma_\mathcal{B})} \in \ell_p \right\}.$$

也可以说，（1.1）在采样值的加权 ℓ_2 扰动下保持稳定。顺便指出，（1.1）在 $\mathcal{B}$ 的范数下收敛，这意味着在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。□

1.2 过采样

定义 1.2。 给定 $p \in (2, \infty]$，若存在函数 $J_{\mathcal{AB}}: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足以下性质，则 ***de Branges*** 空间 $\mathcal{B}$ 具有相对于 $\mathcal{A} \in \mathrm{Sub}(\mathcal{B})$ 的 ℓ_p-过采样性质：

(o1) 对所有 $w \in \mathbb{C}$, $J_{\mathcal{AB}}(\cdot\ w) \in \mathcal{B}$. 此外，

$$J_{\mathcal{AB}}(z,w) = J_{\mathcal{AB}}(w,z)^* = J_{\mathcal{AB}}(w^*, z^*).$$

(o2) 映射 $\mathcal{B} \ni F \mapsto \langle J_{\mathcal{AB}}(\cdot\ z)\ F(\cdot)\rangle_\mathcal{B} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ 定义了一个作用于 $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ 中的算子。此外，

$$\langle J_{\mathcal{AB}}(\cdot, z), F(\cdot)\rangle_\mathcal{B} = F(z)$$

对所有 $F \in \mathcal{A}$。

(o3) 存在 S^γ 的一个自伴扩张，使得 $S_\mathcal{B}$

$$\sum_{\lambda\in\sigma(S^\gamma_\mathcal{B})} \left(\frac{|J_{\mathcal{AB}}(z,\lambda)|}{K_\mathcal{B}(\lambda,\lambda)^{1/2}} \right)^{p/(p-1)}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集中一致收敛。

第二部分 （o2）等价于恒等式

$$F(z) = \sum_{\lambda\in\sigma(S^\gamma_\mathcal{B})} \frac{J_{\mathcal{AB}}(z,\lambda)}{K_\mathcal{B}(\lambda,\lambda)} F(\lambda),$$

对于每个 $F \in \mathsf{A}$ 以及 $S_{\mathcal{B}}$ 的每个自伴扩张 S^{γ} B（不包括那个例外扩张，因为它可能不是稠密定义的）。收敛是在 B 的范数意义下进行的，因此在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。具有性质（o1）和（o2）的函数有很多，例如 $K_{\mathcal{B}}(z,w)$、$K_{\mathcal{A}}(z,w)$ 及其凸线性组合。过采样之所以有趣，是因为（o3）。给定 $\epsilon \in \ell_p(\mathsf{B}\ \gamma)$ 和 $F \in \mathsf{A}$，定义

$$F_{\epsilon}(z) := \sum_{\lambda \in \sigma(S_{\mathcal{B}}^{\gamma})} \frac{J_{\mathcal{AB}}(z,\lambda)}{K_{\mathcal{B}}(\lambda,\lambda)} \left(F(\lambda) + \epsilon_{\lambda}\right).$$

那么，对于每个紧集 $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$，都存在 $C(\mathbb{K}) > 0$，使得

$$|F(z) - F_{\epsilon}(z)| \leq C(\mathbb{K}) \left\|\epsilon\right\|_{\ell_p(\mathcal{B},\gamma)} \quad (z \in \mathbb{K}).$$

换言之，我们得到一个关于$\mathcal{A}$中元素的采样公式，它使用与$\mathcal{B}$相关联的采样点，并且在加权 ℓ_p 扰动下保持稳定——而非 ℓ_2扰动下保持稳定（参见注1.1）。

本文的主要结果是推论4.3 和定理4.5，可概括如下（以稍弱的形式）：

定理 *1.3.* 设 *B* 是一个对称正则 *de Branges* 空间。令 $B_l \subset B$ 为与 $l \in (0,b]$（见定理 *3.1*）相关联的 *de Branges* 子空间。记 $\tau(l) = \tau(B_l)$。假设存在一个闭区间 $I \subset (0,b]$，使得 τ 在 I 上严格递增，且 τ' 在 I上绝对连续。那么，对于 I内部的每个 a，$B = B_b$ 相对于每个 $B_l \in \mathrm{Sub}(B_a)$，对每个 $p \in (2,\infty)$ 都具有 ℓ_p-过采样性质。此外，若 τ 在 I上是线性函数，则上述结论对 $p = \infty$也成立。

1.3 背景

过采样的概念源于 Paley-Wiener 空间理论 [13, 24], ，即由具有给定紧支撑且以零为中心的函数的傅里叶变换构成的空间，

$$\mathcal{PW}_a := \left\{ F(z) = \int_{-a}^{a} e^{-ixz} \phi(x) dx : \phi \in L^2(-a,a) \right\}.$$

线性集合 $\mathcal{PW}_a$，赋予范数 $\|F\| = \|\phi\|$后，是由 Hermite-Biehler函数 $E_a(z) = \exp(-iza)$ 生成的 de Branges 空间。在此设定下，采样公式（1.1）被称为 Whittaker-Shannon-Kotelnikov 定理，其形式为

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_a\left(z, \tfrac{n\pi}{a}\right) F\left(\tfrac{n\pi}{a}\right), \qquad \mathcal{G}_a(z,w) := \frac{\sin\left[a(z-\overline{w})\right]}{a(z-\overline{w})}. \tag{1.2}$$

函数 $\mathrm{G}_a(z,\ w)$ 被称为采样核，而采样点之间的间隔 π/a 被称为奈奎斯特率。

如 [13, 定理 7.2.5], 所示，每个 $F \in \mathrm{PW}_a \subset \mathrm{PW}_b\ (a < b)$ 都可表示为

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_{ab}\left(z, \tfrac{n\pi}{b}\right) F\left(\tfrac{n\pi}{b}\right), \tag{1.3}$$

使用修正采样核

$$\mathcal{G}_{ab}(z,w) := \frac{2}{b-a} \frac{\cos((z-\overline{w})a) - \cos((z-\overline{w})b)}{(z-\overline{w})^2}. \tag{1.4}$$

(1.2) 的收敛显然不受影响，即使采样值发生 ℓ_2-扰动 $F\left(\frac{n\pi}{a}\right)$。然而，过采样公式 (1.3) 更稳定，因为即使采样值发生ℓ_∞-扰动，它仍然收敛。也就是说，如果序列$\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 有界，并定义

$$F_\delta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{ab}\left(z, \tfrac{n\pi}{b}\right)\left[F\left(\tfrac{n\pi}{b}\right) + \delta_n\right],$$

然后 $|F_\delta(z) - F(z)|$ 在 $\mathbb{C}$的紧子集上是一致有界的。事实上，利用傅里叶分析的方法，可以证明（1.3）在实轴上一致有界。在信号分析的术语中，这是以更高的奈奎斯特率采集采样值为代价，获得了更稳定的采样公式。

采样公式（1.2）的推广主要一直在再生核希尔伯特空间理论中 [3,7–9]进行研究；其中一个经典结果是Kramer采样定理。与贝塞尔-汉克尔变换相关的再生核希尔伯特空间这一特殊情形已由 Higgins 研究 [6]。与斯图姆–刘维尔问题相关的采样定理已在 [23, 25, 26]中讨论。另见 [27]。

据我们所知，除了帕利–维纳类之外，关于de Branges 空间中过采样的研究直到最近才出现；近期已有研究涉及与正则薛定谔算子相关的（正则）de Branges 空间中的这一问题 [17]。文献 [18]已证明，在有限区间上与受扰贝塞尔算子相关的一类非正则 de Branges 空间中可以进行过采样。

注 1.4。 在完成本文的最后润色时，我们得知 Baranov 等人最近的一项工作 [1], 其中讨论了针对一类所谓模型空间的另一种过采样概念，而 de Branges 空间是其中的一个子类。值得指出的是，定义 1.2 将过采样确立为 de Branges 空间的一种几何性质。此外，与 [1], 不同，我们的方法基于这类空间与典范系统之间的关系。 □

1.4 论文结构

在第 2 节中，我们从某些有界算子存在性的角度刻画过采样性质。第 3 节概述正则典范系统与正则 de Branges 空间之间的联系。本文的主要结果将在第 4节中详细阐述。最后，第 5 节（附有附录）专门讨论一个对称正则 de Branges 空间的例子，该空间具有 ℓ_∞-过采样性质，但不属于定理 1.3的适用范围。

2 一些一般性陈述

de Branges 空间 B 相对于 de Branges 子空间 A 的 ℓ_p过采样性质，可以表述为存在一个从 B 到 ⊖A 的正交投影算子的适当变形。

命题 2.1。 函数 $J_{\mathcal{AB}}$： $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足 *(o1)* 和 *(o2)* 当且仅当

$$J_{\mathcal{AB}}(z,w) = \langle K_{\mathcal{B}}(\cdot,z), (P_{\mathcal{AB}} + \Omega_{\mathcal{AB}})K_{\mathcal{B}}(\cdot,w)\rangle_{\mathcal{B}}, \tag{2.1}$$

其中 $P_{\mathcal{AB}}$： $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 是到 $\mathcal{A}$ 上的正交投影算子，而 $\Omega_{\mathcal{AB}}$： $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ 是一个有界自伴算子，使得

$$\ker(\Omega_{\mathcal{AB}}) = \operatorname{ran}(P_{\mathcal{AB}}), \quad \operatorname{ran}(\Omega_{\mathcal{AB}}) \subset \operatorname{ran}(I - P_{\mathcal{AB}})$$

and

$$(\Omega_{\mathcal{AB}}F)^{\#}(z) = (\Omega_{\mathcal{AB}}F^{\#})(z) \quad (F \in \mathcal{B}). \tag{2.2}$$

证明。 （$\Longleftarrow$）令 $\Omega_{\mathcal{AB}}$ 为所述算子，并根据（2.1）定义 $J_{\mathcal{AB}}$。显然， （o1） 成立。注意到

$$J_{\mathcal{AB}}(z,w) = K_{\mathcal{A}}(z,w) + J_2(z,w)$$

其中 $J_2(z,\ w)$ $=\mathrm{h}K_{\mathcal{B}}(\cdot\ z)\ \Omega_{\mathcal{AB}}K_{\mathcal{B}}(\cdot\ w)\mathrm{i}_{\mathcal{B}}$，因此 $\mathrm{h}J_2(\cdot\ z)\ F\mathrm{i}_{\mathcal{B}}$ $=\mathrm{h}K_{\mathcal{B}}(\cdot\ z)\ \Omega_{\mathcal{AB}}F\mathrm{i}_{\mathcal{B}}$。换言之，

$$\langle J_{\mathcal{AB}}(\cdot,z), F(\cdot)\rangle_{\mathcal{B}} = ((P_{\mathcal{AB}} + \Omega_{\mathcal{AB}})F)(z),$$

这意味着 (o2)。

（$\Longrightarrow$）由于 (o1) 以及投影定理，有

$$J_{\mathcal{AB}}(z,w) = J_1(z,w) + J_2(z,w)$$

其中 $J_1(\cdot\ w) \in \mathcal{A}$ 和 $J_2(\cdot\ w) \in \mathcal{B} \ominus \mathcal{A}$。利用 (o2)，可立即得到 $J_1(z,\ w) = K_{\mathcal{A}}(z,\ w)$。最后，按照以下规则定义 $\Omega_{\mathcal{AB}}$：

$$(\Omega_{\mathcal{AB}}F)(z) = \langle J_2(\cdot,z), F\rangle_{\mathcal{B}}, \quad F \in \mathcal{B} \ominus \mathcal{A}.$$

显然， $\Omega_{\mathcal{AB}}$ 是一个有界算子。由于 (o1)，它是自伴的，并满足（2.2） . ■

鉴于前面的结果，我们可以说，$\mathcal{B}$ 相对于 ℓ_p-过采样性质 $\mathcal{A}$ 成立，当且仅当存在一个实的（就（2.2）而言）、自伴算子 $\Omega_{\mathcal{AB}} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}\ominus\mathcal{A})$，使得

$$\sum_{\lambda\in\sigma(S_{\mathcal{B}}^{\gamma})} \left(\frac{|\langle K_{\mathcal{B}}(\cdot,z), (P_{\mathcal{AB}} + \Omega_{\mathcal{AB}})K_{\mathcal{B}}(\cdot,\lambda)\rangle_{\mathcal{B}}|}{K_{\mathcal{B}}(\lambda,\lambda)^{1/2}}\right)^{p/(p-1)}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛，对所有自伴扩张 S^{γ} $_{\mathcal{B}}$ 而言， $S_{\mathcal{B}}$ 至多有一个例外。

注 2.2. 以下几个简单事实值得牢记：

1. 设 U 是 de Branges 空间 B 与 B′ $= U$B 之间的酉变换。假设 B 相对于 A $\in$ Sub(B) 具有 ℓ_p-过采样性质。那么 B′ 相对于 A′ $= U$A 具有 ℓ_p-过采样性质。

2. 设 A,B $\in$ Sub(复数域)，且 A $\subset$ B。假设 C 相对于 B 具有 ℓ_p-过采样性质。那么 C 相对于 A 具有 ℓ_p-过采样性质。□

3 典范系统与 de Branges 空间

3.1 典范系统概述

以下内容主要摘自 Remling 的著作 [14]。给定 $l \in (0,\ \infty)$，考虑如下形式的微分方程

$$\mathcal{J}y'(x) = -zH(x)y(x), \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in (0,l), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

其中 $H:(0,\ l)\to\mathbb{R}^{2\times2}$ 是一个可积、几乎处处非零的非负（因此是对称的）矩阵值函数。也就是说，对于（勒贝格）几乎处处的 $x\in(0,\ l)$,

$$H(x)=\begin{pmatrix}h_1(x) & h_3(x)\\ h_3(x) & h_2(x)\end{pmatrix},\quad H(x)\neq 0,\quad v^*H(x)v\geq 0 \text{ for all } v\in\mathbb{C}^{2\times2},$$

且 $\int_0^l|h_i\ (x)\ |\,dx\ <\ \infty$。不妨设 $\operatorname{tr}H\ (x)\ =\ 1$ 几乎处处成立于$x\ \in\ (0,\ l)$ [20]。具有上述所有性质的 2×2 矩阵值函数$\mathcal{C}\ (l)$ 将被称为

若一个极大开区间 $I\subset[0,l]$ 是奇异的（或称为 H-不可分的），则

$$H(x)=\xi_\phi\xi_\phi^t\quad \text{a.e. } x\in I,\quad \xi_\phi=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix},$$

其中常数 $\phi\in[0,\pi)$ 是奇异区间的类型。

令 $L_H^2\ (l)\ =L_H^2\ (0,\ l)$ 表示可测向量值函数 $f:\ (0,\ l)\to\mathbb{R}^2$ 所构成的等价类的线性集合，使得

$$\int_0^l f(x)^*H(x)f(x)dx<\infty;$$

赋予内积后，$L_H^2\ (l)$ 成为一个希尔伯特空间

$$\langle f,g\rangle_{L_H^2(l)}:=\int_0^l f(x)^*H(x)g(x)dx.$$

令 A_l 为与（3.1）相关联的如下线性关系:

$$A_l:=\left\{\begin{array}{c}\{f,g\}\in L_H^2(l)\oplus L_H^2(l):f \text{ has a representative } \mathring{f}\in \mathrm{AC}[0,l] \text{ such that}\\ \mathcal{J}\mathring{f}'(x)=-H(x)g(x) \text{ a.e. } x\in(0,l) \text{ and } \mathring{f}_2(0)=0\end{array}\right\}.$$

°若 $(0,\ l)$ 并非单个奇异区间，则上述定义中的代表元 f 是唯一的[14, 引理 2.1]。

定义

$$A_{l,0}:=\left\{\{f,g\}\in A_l:\mathring{f}(l)=0\right\}.$$

该关系是闭的且对称，亏指数为 $(1,\ 1)$。其自伴扩张为

$$A_l^\gamma=\left\{\{f,g\}\in A_l:\mathring{f}_1(l)\sin\gamma-\mathring{f}_2(l)\cos\gamma=0\right\},\quad \gamma\in[0,\pi).$$

3.2 相关的 *de Branges* 空间

设 $u(z,x)$ 是由 (3.1) 及给定区间 $(0,b)$ 上的初始条件$u(z,0)\ =\binom{1}{0}$ 所确定的初值问题的解；下文假设该区间不是单个奇异区间，因此 $u(z,x)$ 是唯一的。此外，对每个 $l\in(0,b]$，$u(z,\cdot)\in\ker(A_l-z)$，且 $u(\cdot\ x)$ 是一个整函数，使得 $u(z^*,x)^*=u(z,x)^t$。

如 [14, 定理 4.6],所示

$$E_l(z):=u_1(z,l)-iu_2(z,l)$$

对于每个 $l\in(0,\ b]$，它都是一个 Hermite-Biehler函数。相应的 de Branges 空间 $\mathrm{B}(E_l)$ 具有再生核

$$K_l(z,w)=\int_0^l u(z,x)^tH(x)u(w^*,x)dx=\frac{u(z,l)^t\mathcal{J}u(w^*,l)}{z-w^*}\quad (w\neq z^*).\tag{3.2}$$

此外，$\mathcal{B}(E_l) = \mathcal{B}_l$ 等距地（见 [14, 定理 4。7]），其中

$$\mathcal{B}_l := \left\{ F(z) = \int_0^l u(z,x)^t H(x) f(x) dx : f \in \overline{\mathcal{D}(A_l)} \right\}, \quad \|F\|_{\mathcal{B}_l} := \|f\|_{L^2_H(l)}.$$

正则 de Branges 空间的一些结构性质与其相关典范系统的性质有关。下述定理汇集了关于这一关系的相关结果；除少许修改外，这些结论取自 [14] 的定理 4.8、4.26、5.21 和 6.11。

定理 3.1. 设 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ 是一个正则 *de Branges* 空间，且满足 $E(0) = 1$。

(i) 存在 $b \in (0,\infty)$ 以及 $H \in$ 复数域(b)，使得 $E(z) = E_b(z)$。对偶 $\{b, H\}$ 在相差一个初始奇异区间（类型为 $\pi/2$）的意义下唯一。

(ii) 此外，当且仅当 $H(x)$ 几乎处处在 $x \in (0,b)$上为对角的时，$\mathcal{B}$ 才是对称的。

(iii) 假设 $(0,b]$ 的起始部分不是类型为 $\pi/2$ 的奇异区间。那么，

$$\mathrm{Sub}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{B}(E_l) : l \in (0,b] \ \textit{is a regular point of } H\}.$$

(iv) 对每个 $l \in (0,b]$，E_l ——因此 $\mathcal{B}(E_l)$——都是指数型，其类型为

$$\tau(l) = \int_0^l \sqrt{\det H(x)}\, dx.$$

注3.2。 1. 如果 B 是对称的，那么 Sub(B) 中的每个子空间也是对称的。

2. 从现在起，我们记 $\mathrm{B}_b := \mathrm{B}$、$S_l := S_{\mathcal{B}_l}$ 以及 $K_l(z, w) := K_{\mathcal{B}_l}(z, w)$。

3. 注意，如果 $H(x)$ 是对角的，并且在 $[x_1, x_2]$ 内没有奇异区间，那么 τ 在区间 $[x_1, x_2] \subset [0, b]$ 上严格递增。□

线性关系 $A_{l,\,0}$ 与 B_l 中的乘法算子 S_l 之间的对应关系如下建立（参见 [14, 定理 4.13]）。

定理 3.3。 设 $U: L^2_H(l) \to \mathcal{B}_l$ 是由以下规则定义的部分等距算子

$$(Uf)(z) := \int_0^l u(z,x)^t H(x) f(x) dx.$$

于是，$S_l = U A_{l,\,0} U^*$。此外，维数 $\mathcal{D}(S_l)^\perp = 1$ 当且仅当 $(0, l)$ 以某个 $\omega \in [0,\pi)$ 为类型的奇异区间 (c, l) 结束。如果是这样，例外延拓 S_l^ω 是一个真线性关系，

$$\mathcal{D}(S_l^\omega) = \mathcal{D}(S_l), \quad \textit{and} \quad \mathcal{D}(S_l)^\perp = \mathrm{span}(s_l^\omega(z)),$$

其中

$$s_l^\omega(z) = -u_1(z,l)\sin\omega + u_2(z,l)\cos\omega = \frac{i}{2}\left(e^{i\omega}E_l(z) - e^{-i\omega}E_l^\#(z)\right).$$

令 S_b^γ 表示 S_b 的典范自伴扩张。显然，$S_b^\gamma = U A_b^\gamma U^*$。假设 S_b^γ 并非例外情形，则有恒等式

$$F(z) = \sum_{\lambda\in\sigma(S_b^\gamma)} \frac{\langle u(z^*,\cdot), u(\lambda,\cdot)\rangle_{L^2_H(b)}}{\|u(\lambda,\cdot)\|^2_{L^2_H(b)}} \langle u(\lambda,\cdot), f\rangle_{L^2_H(b)} = \sum_{\lambda\in\sigma(S_b^\gamma)} \frac{K_b(z,\lambda)}{K_b(\lambda,\lambda)} F(\lambda),$$

对于每个 $F \in \mathrm{B}_b$，其中 $f \in L^2_H(b)$ 满足 $F(z) = \mathrm{h}u(z^*, \cdot)\ f\mathrm{i}_{L^2_H(b)}$。

4 主要结果

设 $a \in (0,\ b)$ 是 H 的一个正则点，并考虑 $F \in \mathrm{B}a_\circ$ 则对于某个 $f \in L^2_H(a)$，有 $F(z) = \mathrm{h}u(z^*,\ \cdot)\ f\mathrm{i}_{L^2_H(a)\circ}$ 将 f 扩展为 $L^2_H(b)$ 中的一个函数，令其在 $(a,\ b)$ 上等于 $0_\circ$ 令 $\omega:$ $[a,b] \to \mathbb{R}$ 为一个绝对连续函数，使得 $\omega(a) = 1$ 且 $\omega(b) = 0_\circ$ 定义

$$R_{ab;\omega}(x) := \chi_{[0,a]}(x) + \omega(x)\chi_{(a,b]}(x).$$

那么，

$$F(z) = \sum_{\lambda \in \sigma(S_b^\gamma)} \frac{\langle u(z^*,\cdot), R_{ab;\omega}(\cdot)u(\lambda,\cdot)\rangle_{L^2_H(b)}}{K_b(\lambda,\lambda)} F(\lambda).$$

为了使 B_b 相对于 $\mathrm{B}a$ 具有 ℓ_p-过采样性质，其中 $p \in (2,\ \infty]$，只需证明

$$\sum_{\lambda \in \sigma(S_b^\gamma)} \left(\frac{1}{K_b(\lambda,\lambda)^{1/2}} \left| \langle u(z^*,\cdot), R_{ab;\omega}(\cdot)u(\lambda,\cdot)\rangle_{L^2_H(b)} \right| \right)^q < \infty,$$

（其中为 $q \in [1,2)$，在 $\mathbb{C}$ 的紧集上一致成立。从现在起，我们记

$$J_{ab;\omega}(z,w) := \langle u(z^*,\cdot), R_{ab;\omega}(\cdot)u(w^*,\cdot)\rangle_{L^2_H(b)}.$$

如果 $w \neq 0$，那么

$$\begin{aligned} J_{ab;\omega}(z,w) &= \int_0^a u(z,x)^t H(x) u(w^*,x)dx + \int_a^b u(z,x)^t H(x) u(w^*,x)\omega(x)dx \\ &= -\frac{1}{w^*}\int_0^a u(z,x)^t \mathcal{J} u'(w^*,x)dx - \frac{1}{w^*}\int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u'(w^*,x)\omega(x)dx. \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^a u(z,x)^t \mathcal{J} u'(w^*,x)dx = u(z,a)^t \mathcal{J} u(w^*,a) - z\int_0^a u(z,x)^t H(x) u(w^*,x)dx$$

and

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(x) u(z,x)^t \mathcal{J} u'(w^*,x)dx = &-u(z,a)^t \mathcal{J} u(w^*,a) - \int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(w^*,x)\omega'(x)dx \\ &- z\int_a^b u(z,x)^t H(x) u(w^*,x)\omega(x)dx, \end{aligned}$$

有

$$(z - w^*)J_{ab;\omega}(z,w) = -\int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(w^*,x)\omega'(x)dx.$$

因此，如果 $z \in \mathbb{K}$ （ $\mathbb{C}$的一个紧子集），且 N 足够大，

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma(S_b^\gamma) \\ |\lambda| > N}} \left(\frac{|J_{ab;\omega}(z,\lambda)|}{K_b(\lambda,\lambda)^{1/2}} \right)^q = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(S_b^\gamma) \\ |\lambda| > N}} \left(\frac{\left| \int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(\lambda,x)\omega'(x)dx \right|}{|z-\lambda|\,\|u(\lambda,\cdot)\|_{L^2_H(b)}} \right)^q, \tag{4.1}$$

因此，我们只需处理最后一个表达式的收敛性。

注记 4.1。 有趣的是，当用相应 de Branges 空间中的元素表示时， $J_{ab;\omega}(z,\ w)$ 的形式是什么样的。显然，

$$J_{ab;\omega}(z,w) = -\int_a^b K_x(z,w)\omega'(x)dx$$

由（3.2）可知。 □

命题 4.2。 假设 H 具有一个正则点区间 $[x_1, x_2]$，其中

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+g_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-g_0 \end{pmatrix}, \quad g_0 \in (-1/2, 1/2). \tag{4.2}$$

给定 $a \in [x_1, x_2)$ 和 $c \in$（a、 x_2], 定义

$$\omega(x) := \begin{cases} \dfrac{c-x}{c-a}, & x \in [a,c], \\ 0, & x \in (c,b]. \end{cases} \tag{4.3}$$

于是，

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A_b^\gamma)} \frac{|J_{ab;\omega}(z,\lambda)|}{K_b(\lambda,\lambda)^{1/2}} < \infty$$

对于每个 $\gamma \in [0,\pi)$ （除例外延拓外），在 的紧子集上一致成立。证明。 令 $a \in [x_1, x_2)$ 以及 $c \in$（a， x_2]。在 $[a,c]$ 方程（3.1）变为

$$-y_1'(x) = z\left(\tfrac{1}{2}-g_0\right)y_2(x)$$
$$y_2'(x) = z\left(\tfrac{1}{2}+g_0\right)y_1(x)$$

满足边界条件 $u(z,\ a)$。该区间内的解为

$$u(z,x) = \begin{pmatrix} A\cos(z\kappa x) + B\sin(z\kappa x) \\ \alpha A\sin(z\kappa x) - \alpha B\cos(z\kappa x) \end{pmatrix},$$

其中 A 和 B 由 $x = a$处的边界条件定义，

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+2g_0}{1-2g_0}}, \quad \text{and} \quad \kappa = \frac{1}{2}\sqrt{1-4g_0^2}.$$

因此，

$$\|u(\lambda,\cdot)\|^2_{L^2_H(b)} \geq \int_a^c u(\lambda,x)^t H(x)u(\lambda,x)dx = \left(\tfrac{1}{2}+g_0\right)\left(A^2+B^2\right)(c-a).$$

此外，

$$\begin{aligned}\int_a^c u(z,x)^t \mathcal{J}u(\lambda,x)dx &= \alpha\left(A^2+B^2\right)\int_a^c \sin\left((z-\lambda)\kappa x\right)dx \\ &= -\frac{\alpha\left(A^2+B^2\right)}{(z-\lambda)\kappa}\cos\left((z-\lambda)\kappa x\right)\Big|_a^c.\end{aligned}$$

因此，对于足够大的 N，

$$\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(A_b^\gamma)\\ |\lambda|>N}} \frac{\left|\int_a^c u(z,x)^t\mathcal{J}u(\lambda,x)dx\right|}{|z-\lambda|\,\|u(\lambda,\cdot)\|_{L^2_H(b)}} \leq C(\mathbb{K}) \sum_{\lambda\in\sigma(A_b^\gamma)} \frac{1}{1+\lambda^2} < \infty,$$

其中收敛性由 [14, 定理 3.4]得出。 ■

下文中，若 $I=[x_1,x_2]$，我们使用记号 $I_\circ$ 表示形如 $[x_1,x_2)$的半闭区间。

推论 4.3。 设$\mathcal{B}$ 是一个对称正则 *de Branges* 空间。记作 $\tau(l)=\tau(\mathcal{B}_l)$。假设$\tau$ 是闭区间 $I\subset(0,b]$上的一个（非恒定）线性函数。那么，当 $a\in I_\circ$时，$\mathcal{B}=\mathcal{B}_b$ 相对于每个$\mathcal{B}_l\in\mathrm{Sub}(\mathcal{B}_a)$ 都具有ℓ_∞-过采样性质。

证明。 根据定理 $H\in$复数域(b)，令其为与B 相关联的系数矩阵，其中依据定理 3.1(i)。根据定理 3.1(ii)，可写为

$$H(x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+g(x) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}-g(x)\end{pmatrix},\quad g\in L^1(0,b),\quad g(x)\in[-1/2,1/2]. \tag{4.4}$$

令 $I=[x_1,x_2]\subset(0,b]$ 为是线性函数所在的区间。由此可知，det在该区间上是非零常数，因此$(-1/2,1/2)$。现在应用命题 4.2。 ■

下文将用到振荡理论 [15]。假设 $z=\lambda\in\mathbb{R}$，令 $R(\lambda,x)>0$和 $\theta(\lambda,x)$ 为绝对连续的实值函数，且满足 $u(\lambda,x)=R(\lambda,x)\xi_{\theta(\lambda,x)}$。用这些函数表示，并对采用参数化 (4.4)（这总是可以做到的），初值问题为

$$\mathcal{J}u'(x)=-\lambda H(x)u(x),\quad u(\lambda,0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

变为

$$\begin{aligned}\theta'(x)&=\lambda\left[\tfrac{1}{2}+g(x)\cos 2\theta(x)\right],\quad \theta(\lambda,0)=0,\\ R'(x)&=\lambda R(x)g(x)\sin 2\theta(x),\quad R(\lambda,0)=1.\end{aligned} \tag{4.6}$$

此外，边界条件

$$u_1(\lambda,b)\sin\gamma-u_2(\lambda,b)\cos\gamma=0$$

转化为

$$\theta(\lambda,b)=\gamma\mod\pi, \tag{4.7}$$

即 ， $\lambda\in\mathbb{R}$ 是特征值，当且仅当存在 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $\theta(\lambda,\ b)=\gamma+n\pi$.

引理 4.4。 假设存在一个区间 $[a,c]\subset(0,\ b]$，使得 $g|_{[a,c]}$ 是绝对连续的，并且 $g(x)\in[-1/2+\delta,1/2-\delta]$，其中某个 $\delta>0$ 位于此区间内。那么，

$$\|u(\lambda,\cdot)\|_{L^2_H(b)}\geq C_1R(\lambda,a)$$

对于某个正数常数 C_1 （与谱参数无关）。

证明。 我们关于 g 的假设意味着

$$\|u(\lambda,\cdot)\|^2_{L^2_H(b)}\geq\int_a^b R(\lambda,x)^2\left[\tfrac{1}{2}+g(x)\cos 2\theta(\lambda,x)\right]dx\geq C_0\int_a^b R(\lambda,x)^2dx$$

对于某个正数常数 C_0。由于

$$R(\lambda,x)=R(\lambda,a)e^{\lambda\int_a^x g(s)\sin 2\theta(\lambda,s)ds}, \tag{4.8}$$

只需证明指数因子关于谱参数一致有界即可。

鉴于（4.6），$\theta(\lambda, s)$关于s对每个$\lambda \neq 0$都是可逆的。如果$s(\lambda, \theta)$是这个逆，那么

$$\int_a^x g(s)\sin 2\theta(\lambda,s)ds = \frac{1}{\lambda}\int_{\theta(\lambda,a)}^{\theta(\lambda,x)} \frac{2g(s(\lambda,\theta))\sin 2\theta}{1+2g(s(\lambda,\theta))\cos 2\theta}d\theta.$$

But

$$\frac{2g(s(\lambda,\theta))\sin 2\theta}{1+2g(s(\lambda,\theta))\cos 2\theta} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\log\left(1+2g(s(\lambda,\theta))\cos 2\theta\right) + \frac{\frac{d}{d\theta}g(s(\lambda,\theta))\cos 2\theta}{1+2g(s(\lambda,\theta))\cos 2\theta}$$

and

$$\frac{d}{d\theta}g(s(\lambda,\theta)) = \frac{2g'(s(\lambda,\theta)}{\lambda\left(1+2g(s(\lambda,\theta))\cos 2\theta\right)}.$$

因此，

$$\int_a^x g(s)\sin 2\theta(\lambda,s)ds = \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{1+2g(a)\cos 2\theta(\lambda,a)}{1+2g(x)\cos 2\theta(\lambda,x)}\right)^{1/2} + \frac{1}{\lambda}\int_a^x \frac{g'(x)\cos 2\theta(\lambda,x)}{1+2g(x)\cos 2\theta(\lambda,x)}dx.$$

由此等式可知（4.8）的一致有界性。 ■

定理 4.5。 设$\mathcal{B}$是一个对称正则 *de Branges* 空间。记$\tau(l) = \tau(\mathcal{B}_l)$。假设$\tau$在闭区间$I \subset (0, b]$上严格递增，且$\tau'$在$I$上绝对连续。那么，$\mathcal{B} = \mathcal{B}_b$相对于每个$\mathcal{B}_l \in \mathrm{Sub}(\mathcal{B}_a)$都具有$\ell_p$-过采样性质，对每个$p \in (2, \infty)$以及$a \in I$。均成立。

证明。 令$H \in \mathcal{C}(b)$为根据定理$\mathcal{B}$按照定理3.1（i）关联的系数矩阵。于是，

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+g(x) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-g(x) \end{pmatrix}, \quad g \in L^1(0,b), \quad g(x) \in [-1/2, 1/2].$$

令$I = [v_1, v_2] \subset (0, b]$为$\tau$严格递增且$\tau'$绝对连续的区间。由此可知，$g$在那里也绝对连续，并且对于某个$x_0 \in (v_1, v_2)$，$g(x_0) \in (-1/2, 1/2)$。于是，给定足够小的$\delta > 0$，存在$[x_1, x_2] \subset I$使得$g(x) \in [-1/2+\delta, 1/2-\delta]$对所有$x \in [x_1, x_2]$均成立。

取$a \in [x_1, x_2)$，$c \in (a, x_2]$并考虑由$\omega \in \mathrm{AC}[a,b]$定义的4.3）。那么，给定一个紧子集$\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$，存在一个正数常数$C_2(\mathbb{K})$，使得

$$\left|\int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(\lambda,x)\omega'(x)dx\right| \leq \int_a^c R(\lambda,x)\left|u(z,x)^t\mathcal{J}\xi_{\theta(\lambda,x)}\right|dx \leq C_1(\mathbb{K})R(\lambda,a).$$

因此，考虑到（4.4），存在$C(\mathbb{K})$和$N > 0$，使得只要$\lambda \notin \mathbb{K}$且$|\lambda| > n$，回顾（4.1），

$$\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(S_b^\gamma)\\ |\lambda|>N}} \left(\frac{|J_{ab;\omega}(z,\lambda)|}{K_b(\lambda,\lambda)^{1/2}}\right)^q = C(\mathbb{K}) \sum_{\substack{\lambda\in\sigma(S_b^\gamma)\\ |\lambda|>N}} \frac{1}{|\lambda|^q}. \tag{4.9}$$

但是，由于$\mathcal{B}_b$是正则的，$\sigma(S_b^\gamma)$满足 [21, 定理 11], 中的条件 (C2)，进而可推出对于任意 4.9，式（$q \in 1, 2$）均收敛。 ■

5 一个例子

考虑定义在区间 $[0,b]$ 上的、由未进行迹归一化的系数矩阵 H 确定的典范系统。定义

$$y(x) := \int_0^x \operatorname{tr} H(s)ds. \tag{5.1}$$

如果 $u(z,\ x)$ 是下列方程的解

$$\mathcal{J}u'(x) = -zH(x)u(x), \quad x \in (0,b),$$

那么 $v(z,\ y) := u(z,\ x(y))$ 是下列方程的解

$$\mathcal{J}v'(y) = -zH_1(y)v(y), \quad y \in (0,b_1),$$

其中

$$H_1(y) := \frac{1}{\operatorname{tr} H(x(y))} H(x(y))$$

并且 $b_1 = y(b)$ [14, 定理 1。5]。显然， $H_1 \in$复数域(b_1)。变量替换（5.1）也诱导出一个等距映射

$$L^2_H(b) \xrightarrow{V} L^2_{H_1}(b_1)$$

根据以下规则

$$(Vf)(y) = f(x(y)).$$

因此，如果 B$(H,\ b)$ 表示与 $\{b,\ H\}$ 相关联的 de Branges 空间，那么 B$(H,\ b) \equiv$ B$(H_1,\ b_1)$ 等距地成立。此外，如果 $\tau_1(s_1)$ 是 de Branges 子空间 B$(H_1,\ s_1)$ 的指数型，那么 $\tau_1(s_1) = \tau(s)$，其中 $s_1 = y(s)$ 和 $\tau(s)$ 分别是 B$(H,\ s)$ 的指数型。

现在直接考虑与下述典范系统相关联的 de Branges 空间 B$(H,\ b)$:

$$H(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in [0,b], \tag{5.2}$$

以及在 $x = 0$ 处的边界条件 $\binom{1}{0}$。如前所述，B$(H,\ b)$ 与 B$(H_1,\ b_1)$ 等距相等，其中

$$H_1(y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+2y}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1+2y}-1}{\sqrt{1+2y}} \end{pmatrix}, \quad y \in [0,b_1], \quad b_1 = b + \tfrac{1}{2}b^2,$$

以及在 $x = 0$ 处的相同边界条件。注意， $\tau(s) = \frac{3}{2}s^{3/2}$。

对于系数矩阵（5.2），方程（3.1）变为

$$\begin{aligned} -u_1'(x) &= zxu_2(x), \\ u_2'(x) &= zu_1(x). \end{aligned} \tag{5.3}$$

显然，这等价于求解二阶微分方程

$$u_2''(x) = -z^2 x u_2(x), \quad x \in [0,b], \quad z \in \mathbb{C},$$

满足边界条件 $u_2(0) = 0$ 和 $u_2'(0) = 1$。因此，方程（5.3）的解为

$$\begin{aligned} u_1(z,x) &= \mathrm{Si}'(-z^{2/3}x), \\ u_2(z,x) &= -z^{1/3}\,\mathrm{Si}(-z^{2/3}x), \end{aligned}$$

其中，函数 Si 是附录中所讨论的艾里函数的某个线性组合。根据（A.1），显然 $u(\cdot\ x)$ 是一个实整 $\mathbb{C}^2$-函数。

令 A_b^γ 为相应的自伴算子，其在 $x = b$ 处的边界条件由 $\gamma \in [0, \pi$定义。其谱为

$$\sigma(A_b^\gamma) = \left\{\lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{Si}'(-\lambda^{2/3}b)\sin\gamma + \lambda^{1/3}\,\mathrm{Si}(-\lambda^{2/3}b)\cos\gamma = 0\right\}.$$

特别地，狄利克雷型谱为

$$\sigma(A_b^0) = \left\{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : \mathrm{Si}(-\lambda^{2/3}b) = 0\right\} \cup \{0\};$$

注意到它关于 0 对称分布。特征值（均为单特征值）将按递增顺序排列，即

$$\sigma(A_b^\gamma) = \{\lambda_n(\gamma)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{where} \quad \lambda_n(\gamma) < \lambda_{n+1}(\gamma).$$

令 y_n 为函数 Si$(-x)$ 的零点。那么，狄利克雷型谱满足 $\lambda_n(0)^{2/3}b = y_n$ 因此特别有 $\lambda_0(0) = 0$ 并且根据（A.4），

$$\lambda_{\pm n}(0) = \pm\tfrac{3}{2}\frac{\pi}{b^{3/2}}(n+\tfrac{1}{12})\left[1+\mathcal{O}(n^{-2})\right] \quad (n\to\infty).$$

对于 $\gamma \in (0,\pi)$，定义 $\beta := (\cot\gamma)/b^{1/2}$。令 $w(\lambda, x)$ 为由（A.3）定义的函数。我们注意到以下事实：若 $\lambda > 0$，则

$$\lambda \in \sigma(A_b^\gamma) \quad \text{if and only if} \quad w(\beta, \lambda^{2/3}b) = 0,$$

而如果 $\lambda < 0$，则

$$\lambda \in \sigma(A_b^\gamma) \quad \text{if and only if} \quad w(-\beta, (-\lambda)^{2/3}b) = 0.$$

因此 $\lambda_0(0) < \lambda_0(\gamma) < \lambda_1(0)$，并且根据（A.5），

$$\lambda_{\pm n}(\gamma) = \pm\tfrac{3}{2}\frac{\pi}{b^{3/2}}(n+\tfrac{7}{12})\left[1 \mp \frac{\arctan\beta}{\pi}(n+\tfrac{7}{12})^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2})\right] \quad (n\to\infty).$$

现在，让我们看看（4.1）中的分母。下文假设 $\lambda \neq 0$，则有

$$\begin{aligned}
\|u(\lambda,\cdot)\|^2_{L^2_H(b)} &= \lambda^{-2/3}\left[\int_{-\lambda^{2/3}b}^0 \mathrm{Si}'(y)^2dy - \int_{-\lambda^{2/3}b}^0 y\,\mathrm{Si}(y)^2dy\right] \\
&= \frac{\lambda^{-2/3}}{3}\left[\mathrm{Si}(y)\,\mathrm{Si}'(y) + 2y\,\mathrm{Si}'(y)^2 - 2y^2\,\mathrm{Si}(y)^2\right]_{-\lambda^{2/3}b}^0 \\
&= \frac{\lambda^{-2/3}}{3}\Big[2(\lambda^{2/3}b)^2\,\mathrm{Si}(-\lambda^{2/3}b)^2 \\
&\qquad + 2\lambda^{2/3}b\,\mathrm{Si}'(-\lambda^{2/3}b)^2 - \mathrm{Si}(-\lambda^{2/3}b)\,\mathrm{Si}'(-\lambda^{2/3}b)\Big]
\end{aligned}$$

（详情请参见 [19, §3.2.2] ）。特别是，

$$\|u(\lambda_{\pm n}(0),\cdot)\|^2_{L^2_H(b)} = \tfrac{2}{3}b\,\mathrm{Si}'(-y_n)^2 = \tfrac{2}{3}bC_0^2(\tfrac{3}{2}\pi n)^{1/3}\left[1+\mathcal{O}(n^{-1})\right].$$

同样，

$$\|u(\lambda_{\pm n}(\tfrac{\pi}{2}),\cdot)\|^2_{L^2_H(b)} = \tfrac{2}{3}bx_n(0)\,\mathrm{Si}(-x_n(0))^2 = \tfrac{2}{3}bC_0^2(\tfrac{3}{2}\pi n)^{1/3}\left[1+\mathcal{O}(n^{-1})\right]. \tag{5.4}$$

经过一些额外的推导，可以证明（5.4）对所有 $\gamma \in [0,\pi)$ 都成立。因此，我们得到如下关于采样空间的一致刻画：

$$\ell_p(\mathcal{B},\gamma) = \left\{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \left\{\frac{\alpha_n}{(1+|n|)^{1/6}}\right\} \in \ell_p\right\}$$

对每个 $\gamma \in [0,\pi)$ 和 $p \in (2,\ \infty]$。

最后，我们来看（4.1）中的分子，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(\lambda,x)dx \\
&\quad = \int_a^b u_2(z,x)u_1(\lambda,x)dx - \int_a^b u_1(z,x)u_2(\lambda,x)dx \\
&\quad = -\int_a^b z^{1/3}\,\mathrm{Si}(-z^{2/3}x)\,\mathrm{Si}'(-\lambda^{2/3}x)dx + \int_a^b \lambda^{1/3}\,\mathrm{Si}(-\lambda^{2/3}x)\,\mathrm{Si}'(-z^{2/3}x)dx.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

上面的第一项可写为：

$$\begin{aligned}
\text{1st term} = -C_0\lambda^{1/6}\int_a^b x^{1/4}\cos(\tfrac{2}{3}\lambda x^{3/2} - \tfrac{\pi}{12})z^{1/3}\,\mathrm{Si}(-z^{2/3}x)dx \\
- \int_a^b z^{1/3}\,\mathrm{Si}(-z^{2/3}x)g(\lambda^{2/3}x)dx,
\end{aligned}$$

其中 $g(x) = \mathcal{O}(x^{-5/4})$，当 $x \to \infty$ 时（见（A.2））。由分部积分可知，对于任意紧子集 $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$，存在 $C(\mathbb{K}) > 0$ 使得

$$|\text{1st term}| \le \frac{C(\mathbb{K})}{|\lambda|^{5/6}}$$

对所有 $z \in \mathbb{K}$。由于对（5.5）中的第二项也可进行类似推导，因此得到

$$\left|\int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(\lambda,x)dx\right| \le \frac{2C(\mathbb{K})}{|\lambda|^{5/6}}.$$

总而言之，给定 $\gamma \in [0,\pi)$ 和任意紧子集 $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得$\lambda_n(\gamma) \notin \mathbb{K}$ 对所有 $|n| \ne n_0$ 以及

$$\sum_{|n|\ge n_0} \frac{\left|\int_a^b u(z,x)^t \mathcal{J} u(\lambda_n(\gamma),x)dx\right|}{|\lambda_n(\gamma)-z|\,\|u(\lambda_n(\gamma),\cdot)\|_{L^2_H(b)}} \le C(\mathbb{K}) \sum_{|n|\ge n_0} \frac{1}{n^2}$$

对所有 $z \in \mathbb{K}$。也就是说，$\mathrm{B}(H,\ b)$ 相对于其中的每个 de Branges 子空间都具有 ℓ_∞-过采样性质。

致谢

本研究基于南方国立大学（阿根廷）PGI 24/L117 项目资助开展。J. H. T. 感谢 IIMAS-UNAM 的热情接待。L. O. S. 获得 CONACyT CF-2019 No304005 项目资助。

A 附录

定义

$$\mathrm{Si}(z) := \pi\left[\mathrm{Ai}(0)\,\mathrm{Bi}(z) - \mathrm{Bi}(0)\,\mathrm{Ai}(z)\right],$$

其中，Ai 和 Bi 分别是第一类和第二类艾里函数。这个实整函数是满足初始条件 $\mathrm{Si}(0) = 0$ 以及 $\mathrm{Si}'(0) = 1$的艾里微分方程的解。利用例如 [12, §9.2 和 §9.4], 可以验证

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c(k)}{(3k+1)!} z^{3k+1}, \quad \text{where} \quad c(k) = \prod_{l=0}^{k-1}(2+3l). \tag{A.1}$$

Si 和 Si′ 具有各种渐近展开，这些展开在复平面的不同环形扇区中关于 $z \to \infty$ 是一致的。我们这里只提及本文将使用的展开，即

$$\mathrm{Si}(-z) = C_0 z^{-1/4}\left[-\sin(\zeta - \phi_0)P(\zeta) + \cos(\zeta - \phi_0)Q(\zeta)\right]$$

and

$$\mathrm{Si}'(-z) = C_0 z^{1/4}\left[\cos(\zeta - \phi_0)R(\zeta) + \sin(\zeta - \phi_0)S(\zeta)\right],$$

当 $z \to \infty$ 且 $|\arg(z)| \le 2\pi/3 - \delta$时，其中 δ 是任意小的正数。这里

$$\zeta = \tfrac{2}{3}z^{3/2}, \quad C_0 = \sqrt{\pi(\mathrm{Ai}(0)^2 + \mathrm{Bi}(0)^2)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} \quad \text{and} \quad \phi_0 = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\mathrm{Bi}(0)}{\mathrm{Ai}(0)}\right) = \frac{\pi}{12};$$

详见 [12]，渐近展开 P、Q、R 和 S的定义见 [5]。特别地，

$$\mathrm{Si}(-x) = -C_0 x^{-1/4}\sin(\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{\pi}{12}) + \mathcal{O}(x^{-7/4})$$

and

$$\mathrm{Si}'(-x) = C_0 x^{1/4}\cos(\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{\pi}{12}) + \mathcal{O}(x^{-5/4}), \tag{A.2}$$

当 $x \to \infty$ 沿实轴变化时。此外，我们按以下规则定义 w： $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$w(\beta, x) := \mathrm{Si}'(-x) + \beta x^{1/2}\,\mathrm{Si}(-x). \tag{A.3}$$

显然,

$$w(\beta, x) = C_0 x^{1/4}\left[\cos(\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{\pi}{12}) - \beta\sin(\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{\pi}{12})\right] + \mathcal{O}(x^{-5/4}) \quad (x \to \infty).$$

设 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{x_n(\beta)\}_{n=0}^{\infty}$ 分别为 $\mathrm{Si}(-x)$ 和 $w(\beta,\ x)$ 的零点序列，并按值递增排列。注意，$y_0 = 0$，而当所有 $\beta \in \mathbb{R}$ 时，$x_0(\beta) > 0$。运用渐近展开的反演标准技术，并结合用于枚举所得零点序列的相位原理（见 [5]），可以证明

$$y_n = \left(\tfrac{3}{2}\pi(n + \tfrac{1}{12})\right)^{2/3}\left[1 + \mathcal{O}(n^{-2})\right] \tag{A.4}$$

and

$$x_n(\beta) = \left(\tfrac{3}{2}\pi(n + \tfrac{7}{12})\right)^{2/3}\left[1 - \arctan\beta\left(\tfrac{3}{2}\pi(n + \tfrac{7}{12})\right)^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2})\right], \tag{A.5}$$

如 $n \to \infty$。

参考文献

[1] A. Baranov、P. Jaming、K. Kellay 和 M. Speckbacher，模型空间中的 Carleson 测度与过采样，预印本 arXiv:2304.02385 [math.CA],[2] L. de Branges，《整函数希尔伯特空间》，Prentice-Hall公司，恩格尔伍德克利夫斯，1968年。[3] P.L. Butzer、G. Schmeisser 和 R.L. Stens，指数型整函数的经典采样定理与近似采样定理及其等价性，《逼近理论杂志》179（2014），94–111。[4] H. Dym 和 H.P. McKean，《高斯过程、函数论与逆谱问题》，学术出版社，纽约，1976年。[5] B.R. Fabijonas 和 F.W.J. Olver，关于渐近展开的反演与艾里函数的零点，《SIAM评论》41（1999），762–773。[6] J.R. Higgins，与贝塞尔-汉克尔变换相关的插值级数，《伦敦数学学会杂志》（2）5，707–714（1972）。[7] A.G. García、M.A. Hernández-Medina 和 F.H. Szafraniec：解析 Kramer核、拉格朗日型插值级数与 de Branges 空间，《复变函数与椭圆方程》58，79–97（2013）[8] J.R. Higgins，积分变换与采样定理，《积分变换与特殊函数》17(1)，45–52（2006）。[9] P. Jorgensen 和 F. Tian，非均匀采样、再生核及相应的希尔伯特空间，《采样理论、信号与图像处理》15（2016），37–72。[10] M. Kaltenbäck 和 H. Woracek，整函数的 Pontryagin空间 I，《积分方程与算子理论》33（1999），34–97。[11] M. Kaltenbäck 和 H. Woracek，指数型 de Branges 空间：增长的一般理论，《塞格德数学科学学报》71（2005），231–284。[12] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark，《NIST数学函数手册》，美国商务部、美国国家标准与技术研究院，华盛顿特区，2010年。[13] J.R. Partington，《插值、辨识与采样》，《伦敦数学学会专著》（新系列）第17卷，牛津大学出版社，纽约（1997）。[14] C. Remling，《典范系统的谱理论》，De Gruyter数学研究丛书，第70卷，De Gruyter出版社，柏林，2018年。[15] C. Remling 和 K. Scarbrough，振荡理论与半有界典范系统，《谱理论杂志》10（2020），1333–1359。[16] L.O. Silva 和 J.H. Toloza，de Branges 空间与 Kreˇın 的整算子理论，载于：《算子理论》，Springer出版社，巴塞尔（2015）。[17] L.O. Silva、J.H. Toloza 和 A. Uribe，源自正则薛定谔算子的 de Branges 空间中的过采样与欠采样，《复分析与算子理论》13（2019），2303–2324。

[18] J.H. Toloza 和 A. Uribe，贝塞尔算子所产生的 *de Branges* 空间中的过采样与混叠，《数学分析与应用杂志》492 (2020)，124428。[19] O. Vallée 和 M. Soares，《艾里函数及其在物理学中的应用》（第*2*版），帝国理工学院出版社，伦敦（2010）。[20] H. Winkler 和 H. Woracek，非迹范数化哈密顿量的重新参数化，《算子理论进展与应用》221 (2912)，667–690。[21] H. Woracek，在差商运算下封闭的整函数 *de Branges* 空间，《积分方程与算子理论》37 (2000)，238–249。[22] H. Woracek，*de Branges*空间链的扰动，《数学分析杂志》135 (2018)，271–312。[23] A.I. Zayed，关于与一般 *Sturm–Liouville*边值问题相关的 *Kramer*采样定理和拉格朗日插值，《SIAM应用数学杂志》51 (1991)，575–604。[24] A.I. Zayed，*Shannon*采样理论进展，CRC出版社，博卡拉顿（1993）。[25] A.I. Zayed、M.A. El-Sayed 和 M.H. Annaby，关于与自伴边值问题相关的拉格朗日插值和 *Kramer*采样定理，《数学分析与应用杂志》158 (1991)，269–284。[26] A.I. Zayed、G. Hinsen 和 P.L. Butzer，关于与 *Sturm–Liouville*问题相关的拉格朗日插值和 *Kramer*型采样定理，《SIAM应用数学杂志》50 (1990)，893–909。[27] A.I. Zayed 和 M.A. Shubov，由 *Regge*问题生成的带限*Hardy*空间函数的采样定理，《应用与计算调和分析》31 (2011)，125–142。