arXiv:2304.13171v1 [math.FA] 25 Apr 2023

双圆盘上的 Denjoy-Wolff 点：模型方法

MICHAEL T. JURY 和 GEORGIOS TSIKALAS

Abstract. 设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 表示一个没有内部不动点的双圆盘全纯自映射。众所周知，与圆盘自映射的情形不同，迭代序列

$$\{F^n := F \circ F \circ \cdots \circ F\}$$

不一定收敛。 $\{F^n\}$ 的聚点集在 Herv´e 于 1954 年发表的一篇经典论文中得到了描述。受 Herv´e 的工作以及 Agler、McCarthy 和 Young 关于边界正则性的希尔伯特空间视角的启发，我们针对坐标映射 ϕ, ψ. 提出了一种研究 Denjoy-Wolff 型边界点的新方法。我们建立了 Denjoy-Wolff 点的若干等价描述，其中一些只需检验特定的方向导数，因此特别便于应用。利用这些工具，我们得以细化 Herv´e 的定理，并证明在额外假设 ϕ 和 ψ 具有某些正则性性质的 Denjoy-Wolff 点的条件下，可以对 $\{F^n\}$.的行为得出更强的结论

1. INTRODUCTION

令 $\mathbb{D}$ 表示开单位圆盘。给定一个没有不动点的全纯映射 f : $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ，Wolff 的一个定理 [37] 指出，存在一个边界点 $\tau \in \partial\mathbb{D}$ ，使得每个在 τ处与$\mathbb{D}$内切的闭圆盘（换言之，每个包含 τ的等高线圆）在 f作用下都保持不变。由此可以推出经典的 Denjoy-Wolff 定理 [18], [35],[36]: 迭代序列

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ times}}$$

在 $\mathbb{D}$. 的紧子集上一致收敛于 τ。在这种情形下，点 τ （唯一的）被称为 f的 Denjoy-Wolff 点。有关详细内容及许多历史性评论，参见 [14] 。

许多研究致力于获得 Denjoy-Wolff 定理的高维推广。Herv´e[24]，首先证明了这一类结果：对于单位球 $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ 上无不动点的自映射，他证明了一个与 Denjoy-Wolff 定理完全对应的结果（另见 [27]）。后来，Abate[1]（另见优秀的综述 [2]）将这一结果推广到 $\mathbb{C}^n$ 中所有光滑有界强凸域，为进一步推广到

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：32H50；次要分类：32A40、32S05。
*Key words and phrases.*Denjoy-Wolff 点、迭代、双圆盘、Carath´éodory 条件、等高面。Jury 部分ได้รับ美国国家科学基金会 Grant DMS 2154494 的资助。Tsikalas 部分ได้รับ美国国家科学基金会 Grant DMS 2054199 及奥纳西斯基金会奖学金（ID：F ZR 061-1/2022-2023）的资助。

有限型与无限型伪凸域（见 [26] 及其中的参考文献）铺平了道路。最近，Budzy´nska [12]（另见 [11] 和 [13]）指出，如果将范围限制在严格凸域上，则可以去掉光滑性假设。

遗憾的是，在一般的有界域中，情况会变得复杂得多。上述结果的证明利用了某些f-不变域（通常称为等高面，因为它们推广了 Wolff拟圆），而在一般情形下，这些域与域的边界的交集可能过大，从而难以控制迭代序列的行为。事实上，尽管文献中已经考虑了具有不同一般性的若干种等高面（例如参见 [2], [4], [12], [16], [20], [29], ，其中重点关注有界凸域或有界对称域），但通常仍需要边界光滑性或额外的凸性假设（或二者的结合），才能控制其与边界的交集大小。即使在非常简单的有限维域中也是如此，例如单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$，其中存在（对于 $n \geq 2$而言）较大的“平坦”边界部分，会阻止迭代序列收敛。在这种情况下，人们希望理解$\{f^n\}$. 的聚点。尽管许多作者已经研究了 $\mathbb{D}^n$ 上的全纯动力学（对于一般的 n）（例如参见 [3],[4], [10], [17], [20], [30]），但在迭代理论问题方面取得的进展仍然有限。

如果将研究范围限定在双圆盘上，则可以得出更强的结论。设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 是全纯且没有不动点的映射。在这一情形下，关于迭代序列 $\{F^n\}$ 行为的已知一般性结果，可以在 Herv´e 的经典论文 [23] 中找到（关于双圆盘的较新研究还可参见 [20], [22], [31], [33] ）。Herv´e 注意到，所有全纯映射 ϕ: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ （不是坐标投影的映射）都可以根据切片函数 ϕ_μ： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 的 Denjoy-Wolff 点的位置分为两类（见定义 2.6），其中对于所有 λ、 $\mu \in \mathbb{D}$. ， $\phi_\mu(\lambda) = \phi(\lambda, \mu)$。随后，他通过考虑三种不同情形（见定理 2.7），描述了 $\{F^n\}$ 的聚点，具体取决于坐标函数 ϕ 和 ψ 所属的类别。 [23] 还包含了许多例子，说明从某种角度来看，这些结果是最佳的。

在本工作中，受 [7]和 [32], 的模型论技术启发，我们为全纯函数 ϕ的 Denjoy-Wolff 型点提出了新的定义： $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ （见定义 2.8 ）。这些点将是这样的边界点： ϕ满足温和的正则性条件（沿用 [7], 的术语，称为 B 点；定义见第 2 节），并且满足以模型函数表述的适当压缩性假设。我们证明了 Denjoy-Wolff 点的若干等价刻画，其中一些在实践中尤其容易验证，并涉及 ϕ 在相关点处的某些方向导数（见定理 2.9、2.10 和 2.11）。这偏离了在 $\mathbb{D}^2$情形下所采用的 Denjoy-Wolff 点的通常判据；后者依赖于不变 horosphere 的存在性。借助这些工具，我们得以改进 Herv´e 定理。在诸多结果中，我们证明：如果 ϕ 和 ψ 作为 F 的坐标函数，具有某些属于 B 点但不属于 C 点的 Denjoy-Wolff 点（即这些函数在那里没有角梯度），那么人们可以对其

迭代序列 $\{F^n\}$的行为进行更严格的控制（见定理 2.12 和 2.13）。粗略地说，这是因为在不是 C 点的 Denjoy-Wolff 点处，模型函数的结构使我们能够在那里推导出 Julia 不等式的许多不同（压缩性）版本，从而增加可用的不变 horosphere 数量（见推论 4.5 和 4.9）。我们还提供了例子，以说明定理中涵盖的不同情形。

本文安排如下。第 2 节介绍模型函数、B 点和 C 点等概念所需的背景知识，以及 [23] 的主要结果。同时，本节还给出我们对 Denjoy-Wolff 点的新定义，以及本文的主要结果。在第 3 节中，我们证明模型函数与 B 点处某些方向导数之间关系的一般性结果，并给出双圆盘上 Julia 不等式的一个精细版本（见定理 3.10）。这些结果将在后文中发挥重要作用，同时也具有独立的研究价值。在第 4 节中，我们证明 Denjoy-Wolff 点的若干等价刻画（见定理 2.9、2.10 和 2.11），给出唯一性结果（命题 4.4 和 4.8），并推导涉及加权 Julia 不等式的有用推论（推论 4.5 和 4.9）。接下来，在第 5 节中，我们重新考察 Herv´e 定理，并利用前几节中的工具建立若干部分精细化结果。这些精细化结果包括定理 2.12、2.13 和 5.2。我们还给出相关例子（见例 5.6 和 5.9）。最后，在第 6 节中，我们讨论 Frosini 关于双圆盘上 Denjoy-Wolff型点的工作，并说明如何利用我们的主要结果，从 [20] 关于某类此类点分类的一个定理中恢复出相应结论。

2. BACKGROUND AND MAIN RESULTS

2.1. 模型。令 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}_2$ 表示单变量和双变量 Schur 类，即分别定义在 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}^2$ 上且模长不超过 1 的解析函数集合。我们需要采用 [7] 中所述的 Schur 类函数模型概念。众所周知， $\mathcal{S}_2$ 中的每个函数都具有这样的模型，但在更高维的多圆盘中情况不再如此。

定义 2.1. 令 $\phi \in \mathcal{S}_2$. 。若 M、 u 满足： ϕ，则称 (M, u) 是 ϕ 的一个模型，其中 $M = M^1 \oplus M^2$ 是一个正交分解的可分希尔伯特空间，且 $u : \mathbb{D}^2 \to M$ 是一个解析映射，使得对于所有 $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ $\mu = (\mu^1, \mu^2) \in \mathbb{D}^2$,

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\mu)} = (1 - \lambda^1\overline{\mu^1})\langle u^1_\lambda, u^1_\mu\rangle + (1 - \lambda^2\overline{\mu^2})\langle u^2_\lambda, u^2_\mu\rangle. \tag{2.1}$$

在方程 (2.1) 中，我们将 u_λ 写作 $u(\lambda)$ $u^1(\lambda) = P_{M^1}u(\lambda)$，并将 $u^2(\lambda) = P_{M^2}u(\lambda)$。一般而言，给定 $v \in M$，我们将 v^1 记作 $P_{M^1}v$，并将 v^2 记作 $P_{M^2}v$。注意到，不失一般性，我们可以假设 $\{u^j(\lambda) : \lambda \in \mathbb{D}^2\}$ 张成 M^j 的一个稠密子空间，因为否则我们可以用该张成空间替换 M^j。然而， $\{u(\lambda) : \lambda \in \mathbb{D}^2\}$ 未必张成 M 的一个稠密子空间（这些观察可见于 [7, 第 3] 节）。

2.2. B 点和 C 点。如果 $S \subset \mathbb{D}^2$ 和 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$，我们称 S 非切向地趋近于 τ，如果 $\tau \in$cl(S)（其中 cl(S) 表示 S 的拓扑闭包），并且存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$||\tau - \lambda|| \leq c(1 - ||\lambda||), \tag{2.2}$$

对于所有 $\lambda \in S$，其中 $||(\lambda^1, \lambda^2)|| = \max\{|\lambda^1|, |\lambda^2|\}$。

现在，设 $\phi \in \mathcal{S}_2$，并称 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$. τ 是 ϕ 的 B 点，如果满足 Carath´eodory 条件

$$\liminf_{\lambda \to \tau} \frac{1 - ||\phi(\lambda)||}{1 - ||\lambda||} < \infty \tag{2.3}$$

成立。ϕ 在任何这样的 τ 处的非切向极限始终存在 [3]，并记作 $\phi(\tau)$。

在单变量情形中，Julia-Carath´eodory 定理 [15] 告诉我们，S 中的函数在任意 B 点 τ 都有角导数；然而，函数 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 不一定在其所有 B 点处都有角梯度。若 ϕ 在 τ 处确实有角梯度，我们就称 τ 是 ϕ 的 C 点。无论如何，ϕ 在 B 点沿任何指向双圆盘内部的方向始终有方向导数。此外，正如 [7], 中所证明的，这些方向导数关于方向全纯变化（实际上，这些导数可以用某些单变量 Pick 函数 [5], 来描述，不过这里不需要这一结果）。

为陈述相关定理，我们需要引入一些记号。设 (M, u) 是 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 的一个模型，并将该模型在 ϕ 的 B 点 τ 处的非切向聚点集 X_τ 定义为：对所有非切向收敛到 $\mathbb{D}^2$ 中 τ 的序列 $\{\lambda_n\}$，相应弱收敛序列 $\{u_{\lambda_n}\}$ 的弱极限所构成的集合。X_τ 最终会证明是 (M, u) 在 τ 处的聚点集的子集。该聚点集定义为：当 $\{\lambda_n\}$ 遍历 $\mathbb{D}^2$ 中以如下方式趋于 τ 的所有序列时，弱收敛序列 $\{u_{\lambda_n}\}$ 在 M 中的极限所构成的集合，即

$$\frac{1 - |\phi(\lambda_n)|}{1 - ||\lambda_n||} \tag{2.4}$$

保持有界。τ 处的聚点集记为 Y_τ. 。此外，设 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$，并对每个 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$ 定义，

$$\mathbb{H}(\tau) = \begin{cases} \tau^1\mathbb{H} \times \tau^2\mathbb{H} & \text{if } \tau \in \mathbb{T}^2, \\ \tau^1\mathbb{H} \times \mathbb{C} & \text{if } \tau \in \mathbb{T} \times \mathbb{D}, \\ \mathbb{C} \times \tau^2\mathbb{H} & \text{if } \tau \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}. \end{cases}$$

在本小节的其余部分，固定一个具有模型 (M, u) 的函数 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 和一个 B 点 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$. 。下一个引理可由 (2.1) 直接得到。

引理 2.2（见 [7], 命题 4.2）。我们有 $X_\tau \neq \emptyset$。此外，对于所有$x \in Y_\tau$ 和 $\lambda \in \mathbb{D}^2$,

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)} = \sum_{|\tau^j|=1} (1 - \lambda^j\overline{\tau^j})\langle u^j_\lambda, x^j\rangle. \tag{2.5}$$

作为推论，我们得到：

引理 2.3（见 [7],引理 8.10）。如果 $|\tau^j| < 1$ 对于 $j = 1$ 或 2 成立，则

$$Y_\tau = \{u_\tau\}, \quad where\ u^j_\tau = 0.$$

以下定理的一个推论是，面B点总是 C 点（参见 [8]，其中还介绍了该方向上的更多结果）。

定理 2.4（参见 [7], 推论 8.11）。 τ 是 ϕ 的 C 点，当且仅当X_τ 是单元素集合。

现在，由于 τ 是 ϕ的 B 点，我们知道对于每个 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$，方向导数

$$D_{-\delta}\phi(\tau) = \lim_{t\to 0+} \frac{\phi(\tau - t\delta) - \phi(\tau)}{t}$$

都存在。我们还可以得出更多结论。

定理 2.5（参见 [7], 定理 7.1、7.8）。对于任意 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$，非切向极限（按 M 的范数）

$$x_\tau(\delta) = \lim_{\tau - z\delta \xrightarrow{nt} \tau} u_{\tau - z\delta}$$

在 M中存在。此外，

(1) $x_\tau(\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{H}(\tau)$ 上的全纯 M值函数；(2) 对所有 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$，$x_\tau(\delta) \in X_\tau$；(3) 对所有满足 δ、$z\delta \in \mathbb{H}(\tau)$ 的 $z \in \mathbb{C}$， $x_\tau(z\delta) = x_\tau(\delta)$（即 $x_\tau(\cdot)$ 关于 δ是 0 次齐次的）；(4) $D_{-\delta}\phi(\tau)$ 是解析的，关于 δ 是 1 次齐次的，并满足

$$D_{-\delta}\phi(\tau) = -\phi(\tau) \sum_{|\tau^j|=1} \overline{\tau^j}\delta^j ||x_\tau^j(\delta)||^2.$$

2.3. 等高线圆与等高面。我们将需要使用等高面和等高线圆的语言来阐述迭代理论结果。回顾一下， $\mathbb{D}$ 中的等高线圆是形如 $E(\tau, R)$ 的集合，其中 $\tau \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ 且 $R > 0$，满足

$$E(\tau, R) = \left\{ \lambda \in \mathbb{D} : \frac{|\lambda - \tau|^2}{1 - |\lambda|^2} < R \right\}$$

当 $\tau \in \mathbb{T}$ 时，而 $E(\tau, R) = \mathbb{D}$ 在其他情况下。记 $D(z, r)$ 为 $\mathbb{C}$ 中以 z 为圆心、半径为 $r > 0$ 的欧几里得圆盘，不难看出，对于任意 $\tau \in \mathbb{T}$，我们总有

$$E(\tau, R) = D\left(\frac{\tau}{R+1}, \frac{R}{R+1}\right).$$

此外，对于 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \partial\mathbb{D}^2$ 以及 $R_1, R_2 > 0$，我们将（加权）等高面 $E(\tau, R_1, R_2)$ 定义为集合 $E(\tau^1, R_1) \times E(\tau^2, R_2)$。

现在，给定 $\phi \in \mathcal{S}$ 和一个 B 点 $\tau \in \mathbb{T}$，已知

$$\alpha := \lim_{\lambda \xrightarrow{\mathrm{nt}} \tau} \frac{1 - |\phi(\lambda)|}{1 - |\lambda|} \geq 0$$

存在。Julia 不等式 [15], [25]随后表明

$$\phi\big(E(\tau, R)\big) \subset E(\phi(\tau), \alpha R), \tag{2.6}$$

对所有 $R > 0.$，这一结果在双圆盘上的推广见 [2]和 [34] （另见 [7, 第 4] 节，其中给出了模型论证明）。特别地，已知给定 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 和一个 B 点 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$，对于任意 $\alpha \geq 0$，都有

$$\liminf_{\lambda \to \tau} \frac{1 - |\phi(\lambda)|}{1 - ||\lambda||} \leq \alpha$$

当且仅当

$$\phi(E(\tau,R,R)) \subset E(\phi(\tau),\alpha R), \tag{2.7}$$

对所有 $R>0$ （如果 $\alpha=0$，则 ϕ 为常数）。在第 3 节中，我们借鉴 [7] 的思想，建立先前等价关系的一个精细版本，该版本用加权horosphere来表述（见定理 3.10）。

最后，我们将偶尔使用 cl($\mathbb{D}^2$) 上的视界拓扑。该拓扑的基由 $\mathbb{D}^2$ 的所有开集，以及所有形如 $\{\tau\}\cup E(\tau,R_1,R_2)$ 的集合组成，其中 $\tau\in\partial\mathbb{D}^2$ 且 R_1、$R_2>0$ （更多细节见 [7, 第 4] 节）。注意，(2.7) 告诉我们，当 τ 是 B 点且 $\lambda\to\tau$ 以视界拓扑收敛时，$\phi(\lambda)\to\phi(\tau)$。

2.4. Herv´e 的结果。对于 $i\in\{1,2\}$，定义坐标投影 $\pi^i:\mathbb{D}^2\to\mathbb{D},\pi^i(\lambda)=\lambda^i$. 给定 $\phi\in\mathcal{S}_2$ 和 $\mu\in\mathbb{D}$，我们将切片函数记为 $\phi_\mu\in\mathcal{S}$

$$\phi_\mu(\lambda)=\phi(\lambda,\mu)\quad(\lambda\in\mathbb{D}).$$

此外，我们用 $\widetilde{\phi}\in\mathcal{S}_2$ 表示函数 $\widetilde{\phi}(\lambda)=\phi(\lambda^2,\lambda^1)$，其中该函数由交换自变量得到$\phi$。

全纯函数 $\phi:\ \mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$ 可以根据其切片的 Denjoy-Wolff 点进行分类。

定义 2.6。假设 $\phi\in\mathcal{S}_2$。若 ϕ，则称其为：

(i) 左 I 型函数，如果 $\phi\neq\pi^1$ 且存在 $\tau^1\in\mathbb{T}$，使得对于所有 $\mu\in\mathbb{D}$，τ^1 是映射 $\phi_\mu\in\mathcal{S}$ 的公共 Denjoy-Wolff 点；~(ii) 右 I 型函数，如果 ϕ 是左 I 型函数；(iii) 左型 II 函数，如果 $\phi\neq\pi^1$ 且存在全纯映射 $\xi:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$，使得对于所有 λ、$\mu\in\mathbb{D}$，我们有 $\phi_\mu(\lambda)=\lambda$ 当且仅当 $\xi(\mu)=\lambda$；~(iv) 右型 II 函数，如果 ϕ 是左型 II 函数。

令人惊讶的是，事实证明，任何不是坐标投影的 $\phi\in\mathcal{S}_2$ 要么是左 I 型函数，要么是左 II 型函数（相应地，要么是右 I 型函数，要么是右 II 型函数）；这一结果最初由 Herv´e 在 [23] 中证明。在第 4 节中，我们使用纯粹的模型论方法给出了这一结果的新证明（见定理 4.3）。

使用 I 型/II 型术语，[23] 的主要结果可以表述如下。

定理 2.7（Herv´）。设 $F=(\phi,\psi):\ \mathbb{D}^2\to\mathbb{D}^2$ 是双圆盘的一个没有不动点的全纯自映射。则以下情况中有且仅有一种发生：

(i) 如果 $\psi\equiv\pi^2$（分别地，$\phi\equiv\pi^1$），那么 $\{F^n\}$ 在紧集上一致收敛于（τ^1，π^2），其中 $\tau^1\in\mathbb{T}$（分别地，收敛于（π^1，τ^2），其中 $\tau^2\in\mathbb{T}$）；(ii) 如果 ϕ 是左 I 型函数且 ψ 是右 I 型函数，那么存在 τ^1、$\tau^2\in\mathbb{T}$，使得 (a) $\{F^n\}$ 的每个聚点都具有（τ^1，h）的形式，其中 h 或者是全纯函数 $\mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$，或者是常数 τ^2；(b) 或者 $\{F^n\}$ 的每个聚点都具有（g，τ^2）的形式，其中 g 或者是全纯函数 $\mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$，或者是常数 τ^1；

(iii) 如果 ϕ 是左 I 型函数且 ψ 是右 II 型函数（分别地， ϕ 是左 II 型函数且 ψ 是右 I 型函数），则存在 $\tau^1 \in \mathbb{T}$，使得 $\{F^n\}$ 的每个聚点都具有（τ^1， h）的形式，其中 $h \in \mathcal{S}_2$（分别地，存在 $\tau^2 \in \mathbb{T}$，使得 $\{F^n\}$ 的每个聚点都具有（ g， τ^2 ）的形式，其中 $g \in \mathcal{S}_2$）；(iv) 如果 ϕ 是左 II 型且 ψ 是右 II 型函数，那么存在 τ^1、 $\tau^2 \in \mathbb{T}$，使得 $\{F_n\}$ 在紧集上一致收敛于（τ^1， τ^2）。

2.5. 主要结果。我们首先给出 Denjoy-Wolff型点的模型论定义。

定义 2.8. 设 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 带有模型 (M, u)。首先假设 $\phi \neq \pi^1$。

(i) 点 $(\tau^1, \sigma) \in \mathbb{T} \times \text{cl}(\mathbb{D})$ 称为 ϕ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，如果它是一个 B 点， $\phi(\tau^1, \sigma) = \tau^1$，并且存在 $u_{(\tau^1,\sigma)} \in Y_{(\tau^1,\sigma)}$使得 $||u^1_{(\tau^1,\sigma)}|| \leq 1$ 且 $u^2_{(\tau^1,\sigma)} = 0$。(ii) 点 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$ 称为 ϕ 的左 II 型 DW 点，如果它是一个 B 点， $\phi(\tau) = \tau^1$，存在 $u_\tau \in Y_\tau$ 使得 $||u^1_\tau|| < 1$, 并且 τ 不是 ϕ. 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点。特别地，如果 $K > 0$ 是任意一个满足条件的常数

$$||u^1_\tau||^2 + K||u^2_\tau||^2 \leq 1,$$

我们称 τ 为常数为 K的左 II 型 DW 点。

现在，改为假设 $\phi \neq \pi^2$。

(iii) 点 $(\sigma, \tau^2) \in \text{cl}(\mathbb{D}) \times \mathbb{T}$ 称为 ϕ的右 I 型 DW 点，当且仅当 (τ^2, σ) 是 $\widetilde{\phi}$.的左 I 型 DW 点。(iv) 点 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$称为$\phi$的右 II 型 DW 点（常数为 $K > 0$），当且仅当 $\widetilde{\tau} = (\tau^2, \tau^1)$ 是$\widetilde{\ }\ \phi$ 的左 II 型 DW 点（常数为 $K > 0$）。

定义 2.8 的一个直接推论是，每个左（分别地，右）II 型 DW 点都是常数为K的左（分别地，右）II 型 DW 点，其中 $K > 0$.

以下刻画在第 4 节中得到证明（请注意，属于 I 型/II 型点这一性质最终与函数的模型无关）。

定理 2.9。设 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 具有模型 (M, u)，且 $\tau^1 \in \mathbb{T}$.。另假设$\phi \neq \pi^1$。以下断言等价:

(i) 存在 $\sigma \in \text{cl}(\mathbb{D})$，使得 (τ^1, σ) 是 ϕ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点;
(ii) $\{\tau^1\} \times \text{cl}(\mathbb{D})$ 中的每一点都是 ϕ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点;
(iii) ϕ 是一个左 I 型函数，且所有切片函数 $\phi_\mu \in \mathcal{S}$ 的公共 Denjoy-Wolff 点是 τ^1; (iv) 存在 $\sigma \in \text{cl}(\mathbb{D})$，使得 (τ^1, σ) 是一个 B 点，$\phi(\tau^1, \sigma) = \tau^1$并且

$$\frac{D_{-(\tau^1,\sigma M)}\phi(\tau^1, \sigma)}{-\tau^1} \leq 1, \quad \forall M > 0;$$

(v) 对于每个 $\sigma \in \mathrm{cl}(\mathbb{D})$，$(\tau^1, \sigma)$ 都是一个 B 点，$\phi(\tau^1, \sigma) = \tau^1$ 并且

$$\frac{D_{-(\tau^1, \sigma M)}\phi(\tau^1, \sigma)}{-\tau^1} \leq 1, \quad \forall M > 0.$$

此外，假设上述任一陈述成立，并令$\phi'_\mu(\tau^1)$表示 ϕ_μ在 τ^1处的角导数，则有

$$\lim_{M\to\infty} D_{-(\tau^1, \sigma M)}\phi(\tau^1, \sigma) = -\tau^1 \phi'_\mu(\tau^1),$$

对所有 $\mu \in \mathbb{D}$ 以及所有 $|\sigma| \leq 1$.

对于右 I 型 DW 点，也有类似的陈述（我们需要假设 $\phi \neq \pi^2$）。

定理 2.10. 设 $\phi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 是具有模型 (M, u) 的全纯函数。此外，设 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$，$K > 0$，并假设 $\phi \neq \pi^1$.。以下断言等价:

(i) τ 是 ϕ 的左 II 型 DW 点，常数为 K；(ii) ϕ 是左 II 型函数。此外，令 $\xi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 表示满足 $\phi(\xi(\mu), \mu) = \xi(\mu)$ 的全纯函数，对于所有 $\mu \in \mathbb{D}$，有 τ^2是 ξ的 B 点，$\xi(\tau^2) = \tau^1$并且

$$\liminf_{z\to\tau^2} \frac{1 - |\xi(z)|}{1 - |z|} \leq \frac{1}{K};$$

(iii) τ 是 ϕ的 B 点，对于 $\phi(\tau) = \tau^1$，数量 $D_{-(\tau^1, \tau^2 M)}\phi(\tau)$ 关于 $M > 0$ 不是常数，并且还存在 $A \geq K$ 使得

$$\frac{D_{-(\tau^1, \tau^2 A)}\phi(\tau)}{-\tau^1} = 1.$$

此外，假设上述任一陈述成立，

$$A = \left[\liminf_{z\to\tau^2} \frac{1 - |\xi(z)|}{1 - |z|}\right]^{-1}$$

将是满足以下条件的所有常数 $K > 0$ 中的最大值：τ 是 ϕ 的左 II 型 DW 点，常数为 K。它也将是满足以下条件的唯一正数：$D_{-(\tau^1, \tau^2 A)}\phi(\tau)/(-\tau^1) = 1$.

对于右 II 型 DW 点，也有类似的陈述（我们需要假设 $\phi \neq \pi^2$）。

定理 2.10 的一个推论是，并非所有 II 型函数都有 II 型 DW 点（例如，只需选择任意一个满足 ξ没有 B 点的左型 II 函数即可）。然而，在研究迭代理论问题时，II 型 DW 点确实会自然出现。特别是，如果 $F = (\phi, \psi) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 没有不动点，ϕ 是左 II 型且 ψ 是右 II 型，那么 ϕ 和 ψ 都会有 II 型 DW 点（详情请参见定理 5.1）。

定理 2.9–2.10 使我们能够给出对 I/II 类型 DW 点的一种简单且统一的刻画，这种刻画以方向导数的形式表达，在实践中比检查不变 horosphere 更容易验证。为陈述这一结果，设（对于任意满足 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 使得 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$ 为 B 点的函数）

$$K_\tau(M) = \frac{D_{-(\tau^1, \tau^2 M)}\phi(\tau)}{-\phi(\tau)} \quad (M > 0).$$

可以证明（见命题 3.5），$K_\tau(M)$ 关于 M 非负且递增。这一观察结合定理 2.9–2.10，得到：

定理 2.11. 设 $\phi \in \mathcal{S}_2$，并假设 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \partial\mathbb{D}^2$ 是一个 B 点，其中 ϕ 满足 $\phi(\tau) = \tau^1$. 。另假设 $\phi \neq \pi^1$.

(a) 若 $|\tau^2| < 1$，则 τ 是一个左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，同时也是 ϕ 的 C 点，当且仅当

$$K_\tau(M) = \alpha \leq 1, \quad \forall M > 0.$$

在其他情况下，τ 既不是左 I 型，也不是左 II 型 DW 点。

(b) 若 $|\tau^2| = 1$，则 τ 是：

(i) 左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，同时也是 C 点，当且仅当

$$K_\tau(M) = \alpha \leq 1, \quad \forall M > 0;$$

(ii) 是左 I 型 DW 点但不是 C 点，当且仅当 $\{K_\tau(M)\}_M$ 非常数，并且

$$K_\tau(M) < 1, \quad \forall M > 0;$$

(iii) 是左 II 型 DW 点，当且仅当 $\{K_\tau(M)\}_M$ 非常数，并且存在 $A > 0$ 使得

$$K_\tau(A) = 1;$$

(iv) 既不是左 I 型 DW 点，也不是左 II 型 DW 点，当且仅当

$$K_\tau(M) > 1, \quad \forall M > 0.$$

右型 I/II Denjoy-Wolff 点也有类似的结论（我们需要假设 $\phi \neq \pi^2$）。

利用我们关于 DW 点的研究，我们可以对定理 2.7 作出如下改进。

定理 2.12。设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 是全纯的，ϕ 是左 I 型，且 ψ 是右 II 型。令 τ^1 表示所有切片函数 ϕ_μ. 的公共 Denjoy-Wolff 点。如果存在 $\sigma \in \mathbb{T}$ 使得 (τ^1, σ) 对于 ψ 是右 II 型 DW 点，但对于 ϕ 不是 C 点，则 $F^n \to (\tau^1, \sigma)$ 在 $\mathbb{D}^2$. 的紧子集上一致收敛

定理 2.13. 假设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 是全纯的，ϕ 是左 I 型，且 ψ 是右 I 型。令 τ^1 和 τ^2 分别表示所有切片函数 $\phi(\cdot, \mu)$ 和 $\psi(\lambda, \cdot)$ 的公共 Denjoy-Wolff 点。如果 $\tau = (\tau^1, \tau^2)$ 对于 ϕ不是 C 点，则 $\{F^n\}$ 的每个聚点都具有 (τ^1, h) 的形式，其中 h 或者是全纯函数 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，或者是常数 τ^2。如果 τ 对于 ψ.不是 C 点，也可以得到类似的结论。

应用见例 5.6 和 5.9。定理 5.2 给出了进一步的改进。

3. B-POINTS AND DIRECTIONAL DERIVATIVES ALONG$(\tau^1, \tau^2 M)$

本节包含若干建立在 [7] 和 [8], 模型理论之上的技术性结果，其中的亮点是定理 3.3 和 3.9-3.10。这些结果对我们在第 4、5 节中的工作至关重要，但其本身也颇具意义。

现在，任取一个具有模型（M， u）的 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 以及一个 $\in \partial\mathbb{D}^2$的 B 点 $\tau = (\tau^1, \tau^2)$。在本节余下部分，它们将保持不变。回忆一下，我们可以定义

$$x_\tau(\delta) = \lim_{\tau - z\delta \overset{nt}{\longrightarrow} \tau} u_{\tau - z\delta},$$

对于任意 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$，其中极限是相对于 M 的范数而言的。(2.5) 的以下简单推论将在全文中反复使用。

引理 3.1。假设 $\tau \in \mathbb{T}^2$。那么，对于任意 $u_\tau \in Y_\tau$ 我们有

$$\langle x_\tau^1(\delta), u_\tau^1\rangle + \frac{\overline{\tau^2}\delta^2}{\overline{\tau^1}\delta^1}\langle x_\tau^2(\delta), u_\tau^2\rangle = ||x_\tau^1(\delta)||^2 + \frac{\overline{\tau^2}\delta^2}{\overline{\tau^1}\delta^1}||x_\tau^2(\delta)||^2,$$

对于所有 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$。

证明。将 (2.5) 应用两次可得

$$\langle u_\lambda^1, u_\tau^1\rangle + \frac{1-\lambda^2\overline{\tau^2}}{1-\lambda^1\overline{\tau^1}}\langle u_\lambda^2, u_\tau^2\rangle = \langle u_\lambda^1, x_\tau^1(\delta)\rangle + \frac{1-\lambda^2\overline{\tau^2}}{1-\lambda^1\overline{\tau^1}}\langle u_\lambda^2, x_\tau^2(\delta)\rangle,$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2$ 和 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$。令 $\lambda = \tau - r\delta$ 并令 $r \to 0+$，即可完成证明。□

我们还需要以下引理。

引理 3.2。假设 $\tau \in \mathbb{T}^2$。如果 u_τ、$v_\tau \in Y_\tau$ 满足：对某个 $i \in \{1, 2\}$ 有 $u_\tau^i = v_\tau^i = 0$，则必有 $u_\tau = v_\tau$.

证明。不妨设 $i = 2.$。将 (2.5) 应用两次，我们得到

$$\begin{aligned} 1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)} &= (1-\lambda^1\overline{\tau^1})\langle u_\lambda^1, u_\tau^1\rangle, \\ &= (1-\lambda^1\overline{\tau^1})\langle u_\lambda^1, v_\tau^1\rangle, \end{aligned}$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2$. 因此，$\langle u_\lambda^1$、$u_\tau^1 - v_\tau^1\rangle = 0$ 对所有 λ. 成立。这个等式结合以下事实：v_τ^1 和 v_τ^1 都是张成空间 $\{u_\lambda^1$ 中向量的弱极限：$\lambda \in \mathbb{D}^2\}$，从而推出

$$||u_\tau^1||^2 = ||v_\tau^1||^2 = \langle u_\tau^1, v_\tau^1\rangle.$$

因此，$v_\tau^1 = u_\tau^1$ 证明完毕。 □

我们的下一个结果表明，X_τ 中存在零分量向量会对函数的边界正则性产生出人意料的显著影响。我们的定理不包括面部 B 点，因为它们自动就是 C 点。

定理 3.3。假设 $\tau \in \mathbb{T}^2$，并且存在 x_τ（δ）$\in X_\tau$，满足x_τ^i（δ）$= 0$，其中某个 $i \in \{1, 2\}.$。那么，τ是 ϕ.的 C 点。

证明。 不失一般性，假设存在 $x_\tau(\delta_0) \in X_\tau$，满足$x_\tau^2(\delta_0) = 0$。我们可以假设 $x_\tau^1(\delta_0) \neq 0$，否则 ϕ将是一个模为 1 的常数。根据引理 3.1，我们得到

$$\langle x_\tau^1(\delta), x_\tau^1(\delta_0)\rangle = ||x_\tau^1(\delta)||^2 + \frac{\overline{\tau^2}\delta^2}{\overline{\tau^1}\delta^1}||x_\tau^2(\delta)||^2, \tag{3.1}$$

对所有 $\delta \in \mathbb{H}(\tau)$。任取 $\mathbb{H}(\tau)$ 的一个开子集 Ω，使得对于所有 $\delta \in \Omega$，$\frac{\overline{\tau^2}\delta^2}{\overline{\tau^1}\delta^1}$ 的正实部为正。（ 3.1 ）于是意味着

$$||x_\tau^1(\delta)|| \leq ||x_\tau^1(\delta_0)||$$

对于所有 $\delta \in \Omega$。事实上，如果情况并非如此，我们就可以写成

$$\Re\langle x_\tau^1(\delta), x_\tau^1(\delta_0)\rangle \leq ||x_\tau^1(\delta)|| \cdot ||x_\tau^1(\delta_0)||$$

$$< ||x_\tau^1(\delta)||^2$$

$$\leq ||x_\tau^1(\delta)||^2 + \Re\left(\frac{\overline{\tau^2}\delta^2}{\overline{\tau^1}\delta^1}\right)||x_\tau^2(\delta)||^2$$

每当 $\delta \in \Omega$ 时，便产生矛盾。

现在，假设对于所有 $\delta \in \Omega$，$||x_\tau^1(\delta)|| = ||x_\tau^1(\delta_0)||$。前面的不等式链于是意味着

$$\langle x_\tau^1(\delta), x_\tau^1(\delta_0)\rangle = ||x_\tau^1(\delta)||^2 = ||x_\tau^1(\delta_0)||^2,$$

对于所有 $\delta \in \Omega$。这说明在 Ω 上有 $x_\tau^1(\delta) = x_\tau^1(\delta_0)$，因此在 $\mathbb{H}(\tau)$ 上也成立。由（3.1）可得，$x_\tau^2(\cdot)$ 必须恒等于零。因此，$X_\tau = \{(x_\tau^1(\delta_0), 0)\}$，并且根据引理 2.4，我们得到 τ 是一个 C 点。

另一方面，假设我们可以找到 $\delta_1 \in \mathbb{H}(\tau)$，使得 $||x_\tau^1(\delta_1)|| \lhd ||x_\tau^1(\delta_0)||$。再次应用 2.5，其中 $\delta = \delta_0$和 $u_\tau = x_\tau(\delta_1)$，我们推得

$$\langle x_\tau^1(\delta_0), x_\tau^1(\delta_1)\rangle = ||x_\tau^1(\delta_0)||^2,$$

矛盾。证明至此完成。 □

注 3.4. 若我们仅假设存在 $u_\tau \in Y_\tau$ 使得对于某个 $i \in \{1, 2\}$有 $u_\tau^i = 0$，则 τ 未必是 C 点；参见例 5.6。

接下来，我们证明，沿着 $(\tau^1, \tau^2 M)$ 的 ϕ 的方向导数可以自然地与一个递增（关于 M）的正数序列相关联。事实上，令 $\delta_M = (\tau^1, \tau^2 M)$ 并定义

$$K_\tau(M) := \frac{D_{-\delta_M}\phi(\tau)}{-\phi(\tau)} = ||x_\tau^1(\delta_M)||^2 + M||x_\tau^2(\delta_M)||^2,$$

对所有 $M > 0$.

命题 3.5. 对任意 $u_\tau \in Y_\tau$，有

$$K_\tau(M) \leq ||u_\tau^1||^2 + M||u_\tau^2||^2, \quad \forall M > 0,$$

当且仅当 $x_\tau(\delta_M) = u_\tau$ 时等式成立。特别地， $K_\tau(M)$ 关于 M. 单调递增；当且仅当 $X_\tau \neq \{(x_\tau^1, 0)\}$ 时，它将严格递增。

证明。首先，假设 τ 是一个面B点。如果 $|\tau^2|<1$，则引理 2.3 告诉我们，$Y_\tau = X_\tau = \{(x_\tau^1, 0)\}$，因此 $K_\tau(M)$ 是常数，无需证明。如果 $|\tau^1|<1$，则 $Y_\tau = X_\tau = \{(0, x_\tau^2)\}$，$K_\tau(M)$ 关于 M 严格递增，定理显然成立。

现在，假设 $\tau \in \mathbb{T}^2$ 并固定 $u_\tau \in Y_\tau, M>0.$。根据引理 3.1，我们可以应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned} K_\tau(M) &= \langle x_\tau^1(\delta_M), u_\tau^1\rangle + M\langle x_\tau^2(\delta_M), u_\tau^2\rangle \\ &\le ||x_\tau^1(\delta_M)|| \cdot ||u_\tau^1|| + \left(\sqrt{M}||x_\tau^2(\delta_M)||\right)\left(\sqrt{M}||u_\tau^2||\right) \qquad (3.2)\\ &\le \sqrt{K_\tau(M)}\sqrt{||u_\tau^1||^2 + M||u_\tau^2||^2}. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

因此，$K_\tau(M) \le ||u_\tau^1||^2 + M||u_\tau^2||^2$.

等式何时成立? 要使 (3.2) 成为等式，必须有 $c^i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，使得 $c^i x_\tau^i(\delta_M) = u_\tau^i$，其中 $i \in \{1,2\}.$。对于 (3.3)，我们需要

$$||x_\tau^1(\delta_M)|| \cdot ||u_\tau^2|| = ||x_\tau^2(\delta_M)|| \cdot ||u_\tau^1||. \qquad (3.4)$$

现在，假设 $x_\tau^i(\delta_M) = 0$ 或者 $u_\tau^i = 0$，其中某个 $i.$。为明确起见，设 $u_\tau^2 = 0$ （其他情形的证明完全相同）。根据 (3.4)，我们必有 $x_\tau^2(\delta_M) = 0$ 或者 $u_\tau^1 = 0.$。若后一种情形成立，则得到 $u_\tau = 0$，因此 ϕ 是一个模为 1 的常数，无须再证明。因此，我们可以假设 $x_\tau^2(\delta_M) = 0$。在这种情况下，我们可以在等式中用 $c^1 x_\tau^1(\delta)$ 替换 u_τ^1

$$||x_\tau^1(\delta_M)||^2 = K_\tau(M) = \langle x_\tau^1(\delta_M), u_\tau^1\rangle + M\langle x_\tau^2(\delta_M), u_\tau^2\rangle = \langle x_\tau^1(\delta_M), u_\tau^1\rangle$$

得到 $||x_\tau^1(\delta_M)||^2 = c^1||x_\tau^1(\delta_M)||^2$. 如果 $x_\tau^1(\delta_M) = 0$，我们再次得到 ϕ是一个模为 1 的常数，而 $x_\tau^1(\delta_M) \neq 0$ 意味着 $c^1 = 1$，因此 $x_\tau(\delta_M) = u_\tau$。

另一方面，假设 $x_\tau^1(\delta_M)\, x_\tau^2(\delta_M)\, u_\tau^1$，$u_\tau^2$都不为零。那么这给出 (3.4)
$c^1 = c^2 = c.$。在等式中用 $cx_\tau^i(\delta_M)$ 替换 u_τ^i

$$K_\tau(M) = \langle x_\tau^1(\delta_M), u_\tau^1\rangle + M\langle x_\tau^2(\delta_M), u_\tau^2\rangle,$$

我们得到 $c = 1$，因此 $x_\tau(\delta_M) = u_\tau$。

现在，我们证明 $K_\tau(M)$ 关于 $M.$ 单调递增。事实上，令$N > M > 0.$。将 $u_\tau = x_\tau(\delta_N)$ 代入我们先前的结果可得

$$K_\tau(M) \le ||x_\tau^1(\delta_N)|| + M||x_\tau^2(\delta_N)|| \le K_\tau(N),$$

如所愿。

现在，如果 $X_\tau = \{(x_\tau^1, 0)\}$，显然 $K_\tau(M)$ 将为常数（并且对所有 M 都等于 $||x_\tau^1||^2$）。另一方面，假设 X_τ 不是形如 $\{(x_\tau^1, 0)\}$ 的单元素集，但我们还可以找到正数 $M < N$，使得 $K_\tau(M) = K_\tau(N)$。正如我们已经看到的，这意味着 $x_\tau(\delta_M) = x_\tau(\delta_N)$; 结合 $K_\tau(M) = K_\tau(N)$，我们可以推导出 $x_\tau^2(\delta_M) = x_\tau^2(\delta_N) = 0.$。定理 3.3 随即告诉我们 $X_\tau = \left\{\left(x_\tau^1(\delta_M)\ 0\right)\right\}$，矛盾。□

现在我们探讨命题 3.5 的一些推论。

推论 3.6。给定任意 $M > 0$ 和 $u_\tau \in Y_\tau$，我们必有$||x_\tau^1(\delta_M)|| \le ||u_\tau^1||$ 或 $||x_\tau^2(\delta_M)|| \le ||u_\tau^2||$。此外，如果

(i) $||x_\tau^1(\delta_M)|| = ||u_\tau^1||$ （分别为 $||x_\tau^2(\delta_M)|| = ||u_\tau^2||$），则 $||x_\tau^2(\delta_M)|| \le ||u_\tau^2||$ （分别为 $||x_\tau^1(\delta_M)|| \le ||u_\tau^1||$）；

(ii) $||x_\tau(\delta_M)|| = ||u_\tau||$, *then* $x_\tau(\delta_M) = u_\tau$.

证明。假设对于所有 $i \in \{1,2\}.$, $||x_\tau^i(\delta_M)|| > |u_\tau^i||$。因此, $K_\tau(M) > ||u_\tau^1||^2 + M||u_\tau^2||^2$, 这与命题 3.5 矛盾。推论的其余部分通过以类似方式应用命题 3.5 得证。□

推论 3.7. 给定任意 $M, N > 0$, 以下情形中恰有一种成立:

(i) $||x_\tau^1(\delta_M)|| < ||x_\tau^1(\delta_N)||$（分别地, $||x_\tau^2(\delta_M)|| < ||x_\tau^2(\delta_N)||$）且 $||x_\tau^2(\delta_M)|| > ||x_\tau^2(\delta_N)||$（分别地, $||x_\tau^1(\delta_M)|| > ||x_\tau^1(\delta_N)||$）; (ii) $x_\tau(\delta_M) = x_\tau(\delta_N)$。

证明. 首先假设 $||x_\tau^1(\delta_M)|| < ||x_\tau^1(\delta_N)||$。若 $||x_\tau^2(\delta_M)|| \leq ||x_\tau^2(\delta_N)||$, 则可得

$$K_\tau(N) > ||x_\tau^1(\delta_M)||^2 + N||x_\tau^2(\delta_M)||^2,$$

这与命题 3.5 矛盾。因此, $||x_\tau^2(\delta_M)|| > ||x_\tau^2(\delta_N)||$。当 $||x_\tau^2(\delta_M)|| < ||x_\tau^2(\delta_N)||$ 时, 证明过程完全类似。

现在, 假设 $||x_\tau^1(\delta_M)|| = ||x_\tau^1(\delta_N)||$. 若 $||x_\tau^2(\delta_M)|| < ||x_\tau^2(\delta_N)||$, 则我们再次得到 $K_\tau(N) > ||x_\tau^1(\delta_M)||^2 + N||x_\tau^2(\delta_M)||^2$, 这与假设矛盾（可以用类似的方法排除不等式 $||x_\tau^2(\delta_M)|| > ||x_\tau^2(\delta_N)||$）。因此, 必有 $||x_\tau(\delta_M)|| = ||x_\tau(\delta_N)||$; 由命题 3.5 可知, $x_\tau(\delta_M) = x_\tau(\delta_N)$。□

接下来的命题虽然符合本节主题, 但后文不会用到, 因此我们只记录结论而不予证明（可以结合前两个引理使用命题 3.5）。

命题 3.8。假设 $\tau \in \mathbb{T}^2$. 则,

$$\lim_{M\to 0+} ||x_\tau^1(\delta_M)|| = \lim_{M\to 0+} \sqrt{K_\tau(M)} = \inf_{M>0} \left\{||x_\tau^1(\delta_M)||\right\}$$

（分别地, $\lim_{M\to+\infty} ||x_\tau^2(\delta_M)|| = \lim_{M\to+\infty} \sqrt{K_\tau(M)} = \inf_{M>0} \{||x_\tau^2(\delta_M)||\}$）。此外, 如果存在 $u \in Y_\tau$ 以及一个由正数组成的序列 $\{M_k\}$, 使得 $M_k \to 0$（分别地, $M_k \to \infty$）且对于所有 k都有 $||u_\tau^1|| \leq ||x_\tau^1(\delta_{M_k})||$（分别地, $||u_\tau^2|| \leq ||x_\tau^2(\delta_{M_k})||$）, 则

$$\lim_k x_\tau^1(\delta_{M_k}) = u_\tau^1 \quad in\ norm$$

（分别地, $\lim_k x_\tau^2(\delta_{M_k}) = u_\tau^2$按范数）。

现在我们证明一个定理, 用于描述 Y_τ 中具有零分量的那些向量（回顾引理3.2, 如果这些向量存在, 则它们必定是唯一的）。

定理 3.9。假设 B 点 $\tau \in \mathbb{T}^2$ 满足存在 $u_\tau \in Y_\tau$ 使得 $u_\tau^2 = 0$。那么,

$$\lim_{M\to+\infty} K_\tau(M) = ||u_\tau^1||^2$$

以及

$$\lim_{M\to+\infty} x_\tau(\delta_M) = u_\tau$$

在范数意义下。

此外, τ 是 ϕ 的 C 点, 当且仅当 $X_\tau = \{u_\tau\}$。在这种情况下, 任何满足 $v_\tau \neq u_\tau$的 $v_\tau \in Y_\tau$都必须满足 $||v_\tau^1|| > ||u_\tau^1||$和 $v_\tau^2 \neq 0$。

证明。我们首先证明该定理中关于 C 点的部分。如果 $X_\tau = \{u_\tau\}$，则由定理 2.4 可知 τ 是一个 C 点。反过来，假设 τ 是一个 C 点。记 $X_\tau = \{x_\tau\}$。于是由命题 3.5 可得

$$||x_\tau^1||^2 + M||x_\tau^2||^2 \leq ||u_\tau^1||^2,$$

对所有 $M > 0$均成立。因此， $x_\tau^2 = 0$。引理 3.2 随即给出 $x_\tau = u_\tau$，我们还可以写成

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)} = (1 - \lambda^1\overline{\tau^1})\langle u_\lambda^1, x_\tau^1\rangle \quad (\lambda \in \mathbb{D}^2). \tag{3.5}$$

假设 $x_\tau^1 \neq 0$ （否则结论显然成立），并令 $v_\tau \in Y_\tau$. 。引理 3.1 表明

$$\langle x_\tau^1, v_\tau^1\rangle = ||x_\tau^1||^2.$$

因此，要么 $||v_\tau^1|| > ||x_\tau||$，要么 $||v_\tau^1||^2 = ||x_\tau^1||^2 = \langle x_\tau^1、\ v_\tau^1\rangle$，这将导致 $v_\tau^1 = x_\tau^1$。但是，比较

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)} = (1 - \lambda^1\overline{\tau^1})\langle u_\lambda^1, v_\tau^1\rangle + (1 - \lambda^2\overline{\tau^2})\langle u_\lambda^2, v_\tau^2\rangle$$

与（3.5）可得 $v_\tau^2 = 0$，从而 $v_\tau = x_\tau$，如所需。最后，如果 $v_\tau^2 = 0$，我们可以应用引理 3.2，得到 $v_\tau = x_\tau$。

现在，我们证明定理的第一部分。如果 τ 是 C 点，则由我们之前的结果可得定理成立。因此，假设 τ 不是 C 点，在这种情况下，命题 3.5 表明 K_τ（M）严格递增。对于每个 $M > 0$，界 K_τ（M） $\leq ||u_\tau^1||^2$ 表明 $\lim_{M\to+\infty} x_\tau^2$（$\delta_M$） $= 0$ 在范数意义下成立，并且 $\{||x_\tau^1$（δ_M）$||\}$ 关于 M 有界。

现在，令 $\{M_k\}$ 为任意一个收敛到 $+\infty$ 的序列，使得 $x_\tau^1(\delta_{M_k})$ 弱收敛到某个 $x^1 \in M^1$ 。此外，固定一个递减零序列 $\{\epsilon_k\}$. 。根据定理 2.5，我们可以找到 $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}^2$ ，其收敛到 τ，并且对所有 k.，满足 $|\phi(\lambda_k) - \phi(\tau)| < \epsilon_k$，同时 $||x_\tau(\delta_{M_k}) - u_{\lambda_k}|| < \epsilon_k$。因此，$\lim_k \phi(\lambda_k) = \phi(\tau)$， $u_{\lambda_k}^1$ 弱收敛到 x^1 ，且 $u_{\lambda_k}^2$ 在范数意义下收敛到 0。现在，模型公式 (2.1) 蕴含

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\lambda_k)} = (1 - \lambda^1\overline{\lambda_k^1})\langle u_\lambda^1, u_{\lambda_k}^1\rangle + (1 - \lambda^2\overline{\lambda_k^2})\langle u_\lambda^2, u_{\lambda_k}^2\rangle,$$

对所有 k 和 $\lambda \in \mathbb{D}^2$. 。令 $k \to \infty$ ，则得到

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)} = (1 - \lambda^1\overline{\tau^1})\langle u_\lambda^1, x^1\rangle, \tag{3.6}$$

对所有 λ. 。然而，由于 $u_\tau \in Y_\tau$ ，我们也可以写成（根据 (2.5)）

$$1 - \phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)} = (1 - \lambda^1\overline{\tau^1})\langle u_\lambda^1, u_\tau^1\rangle,$$

对所有 λ. 将这个等式与 (3.6) 比较可得 $\langle u_\lambda^1, u_\tau^1\rangle = \langle u_\lambda^1, x^1\rangle$对所有 λ. 由于两个向量 u_τ^1, x^1 都是来自 $\{u_\lambda^1$ 中元素的弱极限： $\lambda \in \mathbb{D}^2\}$，因此我们可以得出结论 $u_\tau^1 = x^1$。但是，注意到（根据弱极限的一个标准性质）

$$\begin{aligned} ||u_\tau^1||^2 &= ||x^1||^2 \\ &\leq \liminf_k ||x_\tau^1(\delta_{M_k})||^2 \\ &\leq \limsup_k ||x_\tau^1(\delta_{M_k})||^2 \\ &\leq \limsup_k K_\tau(M_k) \\ &\leq ||u_\tau^1||^2, \end{aligned}$$

这意味着 $\lim_k x_\tau^1(\delta_{M_k}) = x^1$ 在范数意义下收敛，并且 $\lim_k K_\tau(M_k) = ||u_\tau^1||^2$。我们得出 $x_\tau^1(\delta_M)$ 在范数意义下收敛到 u_τ^1，并且 $\lim_{M\to+\infty} K_\tau(M) = ||u_\tau^1||^2$，如所要求。□

我们以双圆盘上的 Julia 不等式的加权版本结束本节，该版本在第 5 节中将发挥至关重要的作用。我们的方法受到 [7, 定理 4.9]证明的启发。

定理 3.10。设 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 和 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$. 另设 α 和 M 为正数。以下断言等价:

(i) τ 是 ϕ 的 B 点，并且

$$\frac{D_{-(\tau^1,\tau^2 M)}\phi(\tau)}{-\phi(\tau)} \le \alpha;$$

(ii) 存在一个序列 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}^2$，使得 $\lambda_n \to \tau$，$\lim_n \frac{1-|\lambda_n^2|}{1-|\lambda_n^1|} = M$ 并且

$$\lim_n \frac{1-|\phi(\lambda_n)|}{1-||\lambda_n||} \le \begin{cases} \alpha & if\ M \ge 1; \\ \frac{\alpha}{M} & if\ M < 1; \end{cases}$$

(iii) 存在 $\omega \in \mathbb{T}$ 使得

$$\phi(E(\tau, R_1, R_2)) \subset E(\omega, \max\{aR_1, aR_2/M\}), \quad \forall R_1, R_2 > 0.$$

如果 (iii) 成立，则 ω 必然等于 ϕ（τ）。

证明。设 (M, u) 是 ϕ. 的一个模型

首先，我们证明 (i) 蕴含 (ii)。假设 (i) 成立，令 $\delta_M = (\tau^1, \tau^2 M)$，并固定一个递减零序列 $\{r_n\}$. 。由于 τ 是一个 B 点，定理 2.5 允许我们推导出

$$||x_\tau^1(\delta_M)||^2 + M||x_\tau^2(\delta_M)||^2 \le \alpha, \tag{3.7}$$

并且 $\lim_n u_{\tau - r_n\delta_M} = x_\tau(\delta_M)$（按范数）。现在，假设 $M \ge 1$ 并令 $\lambda_n = \tau - r_n\delta_M$.，由 (2.1) 可写为:

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1-|\phi(\lambda_n)|}{1-||\lambda_n||} &= \lim_n \frac{1-|\phi(\lambda_n)|^2}{1-||\lambda_n||^2} \\ &= \lim_n \frac{1-|\phi(\lambda_n)|^2}{1-|\lambda_n^1|^2} \\ &= \lim_n \left(||u_{\lambda_n}^1||^2 + \frac{1-|\lambda_n^2|^2}{1-|\lambda_n^1|^2} ||u_{\lambda_n}^2||^2 \right) \\ &= ||x_\tau^1(\delta_M)||^2 + M||x_\tau^2(\delta_M)||^2 \\ &\le \alpha. \end{aligned}$$

关于 $M < 1$ 的证明完全类似，故略去。

接下来，我们证明 (ii) 蕴含 (iii)。(ii) 中的假设显然意味着 τ 是一个 B 点。但随后，我们可以像上文一样进行论证，从而推出 (3.7) 成立。因此，我们可以利用 (2.5) 得到

$$|1-\phi(\lambda)\overline{\phi(\tau)}| \le |1-\lambda^1\overline{\tau^1}| \cdot ||x^1(\delta_M)|| \cdot ||u_\lambda^1|| + |1-\lambda^2\overline{\tau^2}| \cdot ||x^2(\delta_M)|| \cdot ||u_\lambda^2||,$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2$.，令 $R_j = \frac{|\tau^j - \lambda^j|^2}{1-|\lambda^j|^2}$ $(j = 1,2)$，然后应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$|\phi(\tau)-\phi(\lambda)|^2 \le \big(||x^1(\delta_M)||^2+M||x^2(\delta_M)||^2\big)\left(|\tau^1-\lambda^1|^2||u_\lambda^1||^2+\frac{|\tau^2-\lambda^2|^2}{M}||u_\lambda^2||^2\right)$$

$$\le \alpha \max\{R_1, R_2/M\}\big((1-|\lambda^1|^2)||u_\lambda^1||^2 + (1-|\lambda^2|^2)||u_\lambda^2||^2\big)$$

$$= \max\{\alpha R_1, \alpha R_2/M\}\big(1-|\phi(\lambda)|^2\big),$$

这意味着

$$\frac{|\phi(\tau)-\phi(\lambda)|^2}{1-|\phi(\lambda)|^2} \le \max\{\alpha R_1, \alpha R_2/M\} \quad (\lambda \in \mathbb{D}^2)$$

我们的证明也就完成了。

最后，我们证明 (iii) 蕴含 (i)。令 $\lambda_n = \tau - r_n\delta_M$，其中 $\{r_n\}$ 是递减零序列。假设 (iii) 成立，则可得

$$\frac{|\omega-\phi(\lambda_n)|^2}{1-|\phi(\lambda_n)|^2} \le \alpha \max\left\{\frac{|\tau^1-\lambda_n^1|^2}{1-|\lambda_n^1|^2}, \frac{1}{M}\frac{|\tau^2-\lambda_n^2|^2}{1-|\lambda_n^2|^2}\right\}$$

$$= \alpha \max\left\{\frac{r_n}{2-r_n}, \frac{r_n}{2-Mr_n}\right\}$$

$$= R_n.$$

因此，我们可以写成

$$\phi(\lambda_n) \in \mathrm{cl}\big(E(\omega, R_n)\big) = \mathrm{cl}\left(D\left(\frac{\omega}{R_n+1}, \frac{R_n}{R_n+1}\right)\right),$$

对所有 $n \ge 1$.

现在，假设 $M \ge 1$ （ $M < 1$ 的情形证明完全类似）。于是，$R_n = \frac{\alpha r_n}{2-Mr_n}$, $||\lambda_n|| = 1 - r_n$，我们可以计算

$$\frac{1-|\phi(\lambda_n)|}{1-||\lambda_n||} = \frac{1-|\phi(\lambda_n)|}{r_n}$$

$$\le \frac{|\phi(\lambda_n)-\omega|}{r_n}$$

$$\le \frac{2}{r_n}\frac{R_n}{R_n+1}$$

$$= \frac{2\alpha}{2+(\alpha-M)r_n} \to \alpha,$$

由于 $n \to \infty$.，这意味着 τ 是 ϕ 的一个 B 点，且 $\omega = \phi(\tau)$。此外，由于

$$\lim_n \frac{1-|\phi(\lambda_n)|}{1-||\lambda_n||} = ||x_\tau^1(\delta_M)||^2 + M||x_\tau^2(\delta_M)||^2,$$

我们得到（3.7）成立。定理 2.5 随即完成证明。 □

注记 3.11。在此定理中，我们只考虑了 τ 特殊边界中的点。对于面部 B 点，情况更为直接；参见 [8,定理 3.2]。

注记 3.12。注意，如果我们假设

$$\lim_{r\to 1-}\frac{1-|\phi(r\tau)|}{1-||r\tau||}=\liminf_{\lambda\to\tau}\frac{1-|\phi(\lambda)|}{1-||\lambda||}\leq\alpha,$$

我们得到 (ii) 与 $M=1.$ 一起成立。因此，

$$\phi(E(\tau,R,R))\subset E(\phi(\tau),\alpha\max\{R,R\})=E(\phi(\tau),\alpha R),$$

对所有 $R>0$，这就是双圆盘上 Julia 不等式的通常表述。

备注 3.13。Frosini 也研究了类似于定理 3.10(iii) 中的不等式 [20, ，见 [20], ，其中她使用 Busemann次水平集来得到类似的结论。具体而言，她的 Julia型引理 [20, 定理 1] 取决于沿着趋近边界点 τ 的选定复测地线，ϕ 的行为。于是，定理 3.10 可以看作该结果的改进，因为它实质上表明，Julia 不等式的每个“加权”版本，都等价于一个涉及 ϕ 在相应边界B点处的某些方向导数的不等式。

4. CRITERIA FOR DENJOY-WOLFF POINTS

现在我们将运用第 3 节的工作来研究第 2 节中定义的 I型/II型DW点。

我们从两个引理开始。

引理 4.1。设 $\phi\in\mathcal{S}_2$ 具有模型（M，u），并假设 ξ（μ） μ 是 $\mathbb{D}$ 中的点，满足 ϕ（ξ（μ） μ）$=\xi$（μ）。那么，$||u^1_{(\xi(\mu),\mu)}||\leq 1$。此外，$||u^1_{(\xi(\mu),\mu)}||=1$ 当且仅当 $u^2_{(\xi(\mu),\mu)}=0.$

证明。在（2.1）中，令（λ^1，λ^2）=（μ^1，μ^2）=（ξ（μ） μ），得到

$$1-|\xi(\mu)|^2=1-|\phi(\xi(\mu),\mu)|^2=(1-|\xi(\mu)|^2)||u^1_{(\xi(\mu),\mu)}||^2+(1-|\mu|^2)||u^2_{(\xi(\mu),\mu)}||^2.$$

由于 $|\xi$（μ）$|$，$|\mu|<1$，引理的结论很容易得到。 □

下一个引理是众所周知的（例如，它作为 [23] 中的定理 2 出现）。为完整起见，我们给出证明。

引理 4.2。假设 $\phi\in\mathcal{S}_2$，且存在 $\mu_0\in\mathbb{D}$，使得切片函数 ϕ_{μ_0} 在 $\mathbb{D}.$ 上是恒等映射。那么，$\phi\equiv\pi_1$。

证明。设（M，u）是 $\phi.$ 的模型。我们可以利用（2.1）得到

$$1=\frac{1-|\phi(\lambda,\mu_0)|^2}{1-|\lambda|^2}=||u^1_{(\lambda,\mu_0)}||^2+\frac{1-|\mu_0|^2}{1-|\lambda^2|}||u^2_{(\lambda,\mu_0)}||^2,\tag{4.1}$$

对所有 $\lambda\in\mathbb{D}.$ 因此，$||u^1_{(\lambda,\mu_0)}||\leq 1$，对所有 $\lambda\in\mathbb{D}$，当且仅当等式成立时 $u^2_{(\lambda,\mu_0)}=0.$

现在，固定 $\tau^1\in\mathbb{T}$ 并令 $\lambda\to\tau^1$ 取 (4.1) 中的值，从而得到 (τ^1,μ_0) 是 ϕ，$\phi(\tau^1,\mu_0)$ 的 B 点 $=\tau^1$，并且还存在 $u_{(\tau^1,\mu_0)}\in Y_{(\tau^1,\mu_0)}$ 使得 $||u^1_{(\tau^1,\mu_0)}||\leq 1$ 且 $u^2_{(\tau^1,\mu_0)}=0.$ (2.5) 进而意味着

$$1-\phi(\lambda,\mu)\overline{\tau^1}=(1-\lambda\overline{\tau^1})\langle u^1_{(\lambda,\mu)},u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle,\tag{4.2}$$

对所有 $\lambda, \mu \in \mathbb{D}.$，令 $\mu = \mu_0$，则得到

$$1 - \lambda\overline{\tau^1} = (1 - \lambda\overline{\tau^1})\langle u^1_{(\lambda,\mu_0)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle,$$

因此

$$\langle u^1_{(\lambda,\mu_0)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle = 1 \geq ||u^1_{(\lambda,\mu_0)}||^2, ||u^1_{(\tau^1,\mu_0)}||^2.$$

这意味着 $u^1_{(\lambda,\mu_0)} = u^1_{(\tau^1,\mu_0)}$（并且二者都必须是单位向量），同时对于所有 $\lambda \in \mathbb{D}$，还有 $u^2_{(\lambda,\mu_0)} = 0$。因此，

$$\begin{aligned} 1 - \phi(\lambda,\mu)\overline{\lambda'} &= 1 - \phi(\lambda,\mu)\overline{\phi(\lambda',\mu_0)} \\ &= (1 - \lambda\overline{\lambda'})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(\lambda',\mu_0)}\rangle = \\ &= (1 - \lambda\overline{\lambda'})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle, \end{aligned}$$

对于所有 $\lambda, \mu, \lambda' \in \mathbb{D}.$ 由于两边都是 λ' 的仿射函数，我们得到$\phi(\lambda, \mu) = \lambda$，对于所有 $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$，正如所需。□

现在，我们使用模型理论给出这样一个事实的新证明：每个$\phi \in \mathcal{S}_2$（即不是坐标投影的函数）必定是 I 型函数或 II 型函数，这一结果最初由 Herv´e 得出（见 [23, 定理 1]）。

定理 4.3. 每个 $\phi \in \mathcal{S}_2$，使得 $\phi \neq \pi^1$（分别为 $\phi \neq \pi^2$），都是左 I 型（分别为右 I 型）函数或左 II 型（分别为右 II 型）函数。

证明。首先，我们证明定理的左 I/II 型版本。注意，由于 $\phi \neq \pi^1$，引理 4.2 意味着，对于任意 $\mu \in \mathbb{D}.$，ϕ_μ 在 $\mathbb{D}$ 上不是恒等映射。因此，每个这样的切片函数都将有一个唯一的 Denjoy-Wolff 点（位于圆盘内部或边界上）。

首先，假设存在某个 $\mu_0 \in \mathbb{D}$，使得切片 ϕ_{μ_0} 的 Denjoy-Wolff 点 τ^1 位于 $\mathbb{T}$ 上。令 $\lambda_n = \rho_n\tau^1$，其中 $\{\rho_n\}$ 是一个趋于 1 的正数递增数列。根据 Denjoy-Wolff 点的单变量理论，我们有 $\lim_n \phi_{\mu_0}(\lambda_n) = \tau^1$，并且

$$\frac{1 - |\phi(\lambda_n, \mu_0)|^2}{1 - ||(\lambda_n, \mu_0)||^2} = \frac{1 - |\phi_{\mu_0}(\lambda_n)|^2}{1 - |\lambda_n|^2} \to \alpha_{\mu_0} \leq 1,$$

当 $n \to \infty.$ 时。因此，(τ^1, μ_0) 是 $\phi.$ 的 B 点。利用 ϕ 的模型公式，我们还可以看到

$$||u^1_{(\lambda_n,\mu_0)}||^2 + \frac{1 - |\mu_0|^2}{1 - |\lambda_n|^2}||u^2_{(\lambda_n,\mu_0)}||^2 = \frac{1 - |\phi_{\mu_0}(\lambda_n)|^2}{1 - |\lambda_n|^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

令 $n \to \infty$，并考虑到 $\frac{1-|\mu_0|^2}{1-|\lambda_n|^2} \to \infty$，我们得到满足$u_{(\tau^1,\mu_0)} \in Y_{(\tau^1,\mu_0)}$、$||u^1_{(\tau^1,\mu_0)}|| \leq \alpha_{\mu_0} \leq 1$ 以及$u^2_{(\tau^1,\mu_0)} = 0$ 的存在性。根据（2.5），我们可以写成

$$1 - \phi(\lambda,\mu)\overline{\tau^1} = (1 - \lambda\overline{\tau^1})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle, \tag{4.3}$$

对所有 λ、$\mu \in \mathbb{D}.$

现在，假设存在某个切片 ϕ_{μ_1} 使得 $\mu_1 \neq \mu_0$ 和 ϕ_{μ_1} 具有一个内部不动点 $p \in \mathbb{D}.$ 将 (4.3) 中的 $(\lambda, \mu) = (p, \mu_1)$ 代入可得

$$1 - p\overline{\tau^1} = (1 - p\overline{\tau^1})\langle u^1_{(p,\mu_1)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle,$$

因此 $\langle u^1_{(p,\mu_1)}\ u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle = 1$。引理 (4.1) 随即推出 $u^1_{(p,\mu_1)} = u^1_{(\tau^1,\mu_0)}$（且二者都是单位向量）以及 $u^2_{(p,\mu_1)} = 0$。于是，我们可以将 (2.1) 中的 $(\mu^1,\mu^2) = (p,\ \mu_1)$ 代入，从而得到

$$1-\phi(\lambda,\mu)\overline{p} = (1-\lambda\overline{p})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(p,\mu_1)}\rangle = (1-\lambda\overline{p})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle, \quad (4.4)$$

对所有 λ、$\mu \in \mathbb{D}.$，将 (4.4) 与 (4.3) 进行比较后，我们可以推断出 ϕ 等于恒等映射，这就产生了矛盾。

到目前为止，我们已经证明，每个切片函数 ϕ_μ 的 Denjoy-Wolff 点都必须位于 $\mathbb{D}$ 的边界上（假设其中至少有一个满足这一条件）。现在我们证明，τ^1（我们一开始所取切片 ϕ_{μ_0} 的 Denjoy-Wolff 点）实际上是所有切片 $\phi_\mu.$ 的 Denjoy-Wolff 点。事实上，假设我们可以找到一个切片 ϕ_{μ_1}，其 Denjoy-Wolff 点 $\sigma^1 \in \mathbb{T}.$ 不同。按照证明开头的论证，我们得到 $(\sigma^1,\ \mu_1)$ 是 ϕ 的 B- 点，其在 $(\sigma^1,\ \mu_1)$ 处的值为 σ^1，并且还存在 $u_{(\sigma^1,\mu_1)} \in Y_{(\sigma^1,\mu_1)}$，满足 $||u^1_{(\sigma^1,\mu_1)}|| \le 1$ 以及 $u^2_{(\sigma^1,\mu_1)} = 0$。(2.5) 表明

$$1-\phi(\lambda,\mu)\overline{\sigma^1} = (1-\lambda\overline{\sigma^1})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(\sigma^1,\mu_1)}\rangle, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{D}. \quad (4.5)$$

若在 (4.5) 中令 $(\lambda,\mu) \to (\tau^1,\mu_0)$，使得 $u^1_{(\lambda,\mu)}$ 弱收敛到 $u^1_{(\tau^1,\mu_0)}$，则可得到（由于 $\phi(\tau^1,\mu_0) = \tau^1$ 且 $\sigma^1 \neq \tau^1$）

$$\langle u^1_{(\sigma^1,\mu_1)}, u^1_{(\tau^1,\mu_0)}\rangle = 1 \ge ||u^1_{(\sigma^1,\mu_1)}||^2, ||u^1_{(\tau^1,\mu_0)}||^2,$$

因此 $u^1_{(\sigma^1,\mu_1)} = u^1_{(\tau^1,\mu_0)}$。将 (4.3) 与 (4.5) 比较可知，$\phi$ 等于恒等映射，矛盾。

另一方面，假设每个切片 ϕ_μ 都有一个（必然唯一的）内部不动点 $\xi(\mu)$。要证明 ϕ 是左 II 型函数，只需证明 $\xi:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 实际上是一个全纯函数。首先注意，在 (2.1) 中令 $(\lambda^1,\lambda^2) = (\xi(\mu)\ \mu)$ 且 $(\mu^1,\mu^2) = (\xi(\mu')\ \mu')$，可得

$$1-\xi(\mu)\overline{\xi(\mu')}$$

$$= (1-\xi(\mu)\overline{\xi(\mu')})\langle u^1_{(\xi(\mu),\mu)}, u^1_{(\xi(\mu'),\mu')}\rangle + (1-\mu\overline{\mu'})\langle u^2_{(\xi(\mu),\mu)}, u^2_{(\xi(\mu'),\mu')}\rangle, \quad (4.6)$$

对所有 μ、$\mu' \in \mathbb{D}.$

现在，若 $||u^1_{(\xi(\mu')\ \mu')}|| = 1$ 对于某个 $\mu' \in \mathbb{D}$，ϕ 的模型公式给出（由于 $u^2_{(\xi(\mu')\ \mu')} = 0$，鉴于引理4.1）

$$1-\phi(\lambda,\mu)\overline{\xi(\mu')} = (1-\lambda\overline{\xi(\mu')})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_{(\xi(\mu'),\mu')}\rangle, \quad (4.7)$$

对所有 λ、$\mu.$ 将 $(\lambda,\mu) = (\xi(\mu)\ \mu)$ 代入，得到 $\langle u^1_{(\xi(\mu),\mu)}$、$u^1_{(\xi(\mu')\ \mu')}\rangle = 1$，对所有 μ，因此 $u^1_{(\xi(\mu),\mu)} = u^1_\xi$ =是常数（范数为1），且对所有μ都有 $u^2_{(\xi(\mu),\mu)} = 0$。于是，我们得到

$$1-\phi(\lambda,\mu)\overline{\xi(\sigma)} = (1-\lambda\overline{\xi(\sigma)})\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_\xi\rangle, \quad (4.8)$$

对所有 λ、μ、$\sigma \in \mathbb{D}.$

现在需要考察两种不同的情形。要么对所有 λ,μ，都有 $\phi(\lambda,\mu)$ $= \lambda\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_\xi\rangle$，此时 (4.8) 表明 $\langle u^1_{(\lambda,\mu)}, u^1_\xi\rangle = 1$（对所有 λ,μ），

因此 $\phi = \pi^1$，这就产生了矛盾；要么我们可以找到 $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{D}$，使得 $\phi(\lambda_0, \mu_0) \neq {}^{\lambda_0}\langle u^1_{(\lambda_0,\mu_0)}\ u^1_\xi\rangle$。那么，(4.8) 表明

$$\overline{\xi(\sigma)} = \frac{\langle u^1_{(\lambda_0,\mu_0)}, u^1_\xi\rangle - 1}{\lambda_0\langle u^1_{(\lambda_0,\mu_0)}, u^1_\xi\rangle - \phi(\lambda_0,\mu_0)},$$

对所有 $\sigma \in \mathbb{D}$. 因此，ξ 是常数（并且平凡地全纯）。

还需考虑另一种可能性：假设对于所有 $||u^1_{(\xi(\mu')\ \mu')}|| < 1$ μ'.，则（4.6）变为

$$1 - \xi(\mu)\overline{\xi(\mu')} = (1 - \mu\overline{\mu'})\frac{\langle u^2_{(\xi(\mu),\mu)}, u^2_{(\xi(\mu'),\mu')}\rangle}{1 - \langle u^1_{(\xi(\mu),\mu)}, u^1_{(\xi(\mu'),\mu')}\rangle}, \tag{4.9}$$

对于所有 μ、$\mu' \in \mathbb{D}$。换言之，

$$\frac{1 - \xi(\mu)\overline{\xi(\mu')}}{1 - \mu\overline{\mu'}}$$

是半正定核 $\langle u^2_{(\xi(\mu),\mu)}$、$u^2_{(\xi(\mu')\ \mu')}\rangle$ 与 ${}^{1}{}_{1-\langle u^1_{(\xi(\mu),\mu)}}$，$u^1{}_{(\xi(\mu')\ \mu')}\rangle$ 的 Schur乘积（后者实际上是一个完全Pick核，见[6, 第 8]章），因此它也必须是半正定的。模型的自动全纯性（见 [9, 命题 2.32]）随后意味着 ξ 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，从而证明完毕。

定理的右 I/II 型版本可通过将左 I/II 型版本应用于函数 $\widetilde{\phi}$：$\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，其由 $\widetilde{\phi}(\lambda) = \phi(\lambda^2, \lambda^1)$ 定义，对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2$成立。□

接下来，我们给出 I 型 DW 点的判据，如第 2 节所述。回顾一下，给定带有模型 (M, u) 的 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 以及一个 B 点 $\tau \in \mathbb{T}^2$，我们定义了 $\delta_M = (\tau^1, \tau^2 M)$，并且

$$K_\tau(M) = ||x^1_\tau(\delta_M)||^2 + M||x^2_\tau(\delta_M)||^2,$$

对所有 $M > 0$.

定理 2.9 的证明。首先，我们证明 (iii) 蕴含 (ii)。事实上，假设 τ^1 是所有切片函数 ϕ_μ 的公共 Denjoy-Wolff 点，并令$|\sigma| \leq 1$. 我们将证明 (τ^1, σ) 是 ϕ的左侧 I 型 DW 点。

固定一个趋于 σ的序列 $\{\mu_n\} \subset \mathbb{D}$。现在，由于 τ^1 是 ϕ_μ的 Denjoy-Wolff 点，我们得到 τ^1 是 ϕ_μ的 B 点，$\phi_\mu(\tau^1) = \tau^1$ 并且

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\text{nt}} \tau^1} \frac{1 - |\phi_\mu(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} \leq 1,$$

对于所有 $\mu \in \mathbb{D}$. 因此，可以选择一个序列 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$ 非切向地收敛于 τ^1，并且收敛得足够快，从而得到 $\lim_n \phi_{\mu_n}(\lambda_n) = \tau^1$、$\lim_n \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|\mu_n|^2} = 0$ 以及

$$\limsup_n \frac{1 - |\phi(\lambda_n, \mu_n)|^2}{1 - ||(\lambda_n, \mu_n)||^2} = \limsup_n \frac{1 - |\phi_{\mu_n}(\lambda_n)|^2}{1 - |\lambda_n|^2} \leq 1, \tag{4.10}$$

这意味着 (τ^1,σ) 是 ϕ 的一个 B 点，并且 $\phi(\tau^1,\sigma)=\tau^1$.此外，$\phi$ 的模型公式告诉我们

$$||u^1_{(\lambda_n,\mu_n)}||^2+\frac{1-|\mu_n|^2}{1-|\lambda_n|^2}||u^2_{(\lambda_n,\mu_n)}||^2=\frac{1-|\phi(\lambda_n,\mu_n)|^2}{1-|\lambda_n|^2},$$

对所有 $n.$，令 $n\to\infty$，并考虑到极限 $\lim_n\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|\mu_n|^2}=0$ 和 (4.10)，我们可以推得存在 $u_{(\tau^1,\sigma)}\in Y_{(\tau^1,\sigma)}$，使得$||u^1_{(\tau^1,\sigma)}||\le 1$ 且 $u^2_{(\tau^1,\sigma)}=0$。这意味着 (τ^1,σ) 是 ϕ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点。由于 σ 是任意的，(ii) 得证。

(ii) 蕴含 (i) 是显而易见的。

现在我们证明 (i) 蕴含 (iii)。因此，假设存在 $|\sigma|\le 1$，使得 (τ^1,σ) 是 ϕ, $\phi(\tau^1,\sigma)=\tau^1$ 的一个 B 点，并且还存在$u_{(\tau^1,\sigma)}\in Y_{(\tau^1,\sigma)}$，使得$||u^1_{(\tau^1,\sigma)}||\le 1$ 且 $u^2_{(\tau^1,\sigma)}=0$。我们得到

$$1-\phi_\mu(\lambda)\overline{\tau^1}=1-\phi(\lambda,\mu)\overline{\tau^1}=(1-\lambda\overline{\tau^1})\langle u^1_{(\lambda,\mu)},u^1_{(\tau^1,\sigma)}\rangle,\tag{4.11}$$

对于所有 λ、$\mu\in\mathbb{D}.$，如果我们固定 μ，则可以重复定理 3.10 中“(ii) 蕴含 (iii)”的证明，从而得到

$$\frac{|\tau^1-\phi_\mu(\lambda)|^2}{1-|\phi_\mu(\lambda)|^2}=\frac{|\tau^1-\phi(\lambda,\mu)|^2}{1-|\phi(\lambda,\mu)|^2}\le\alpha_\sigma\frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2},$$

对于所有 λ、$\mu\in\mathbb{D}$，其中 $\alpha_\sigma=||u^1_{(\tau^1,\sigma)}||^2$。已知这样的等式蕴含（见第 2 节）：$\tau^1$ 是关于 ϕ_μ、$\phi_\mu(\tau^1)$ 的 B 点，$=\tau^1$，并且对于所有 $\mu\in\mathbb{D}.$，ϕ_μ 在 τ^1 处的角导数等于 $\alpha_\sigma\le 1$。由于我们还知道（根据引理 4.2），对于所有 $\mu\in\mathbb{D}$，$\phi_\mu\ne \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$，因此可以得出，$\tau^1$ 是每个切片函数的公共 Denjoy-Wolff 点，即 (iii) 成立。

在继续之前，我们先说明几点重要的观察。前面的论证表明，如果闭面 $\{\tau^1\}\times\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ 中至少有一个点是关于 ϕ 的左侧 I 型 DW 点，那么对于每个 $|\sigma|\le 1$，存在 $u_{(\tau^1,\sigma)}=(u^1_{(\tau^1,\sigma)}、0)\in Y_{(\tau^1,\sigma)}$，使得$||u^1_{(\tau^1,\sigma)}||\le 1$，并且对于所有 λ、$\mu\in\mathbb{D}.$，(4.11) 也成立。由于 σ 是任意的，(4.11) 表明向量 $u^1_{(\tau^1,\sigma)}$ 实际上不依赖于 σ，因此对于所有 $\sigma\in\mathrm{cl}(\mathbb{D})$，都有 $u_{(\tau^1,\sigma)}=u_{\tau^1}=(u^1_{\tau^1}, 0)$。特别地，令 $\phi'_\mu(\tau^1)$ 表示 ϕ_μ 在 τ^1 处的角导数，我们得到

$$\phi'_\mu(\tau^1)=||u_{\tau^1}||^2\le 1,\tag{4.12}$$

对于所有 $|\mu|<1.$ 此外，注意到，根据引理 3.2，u_{τ^1} 将是 $Y_{(\tau^1,\sigma)}$ 中唯一一个 M^2 分量等于 0 的向量，对于所有 $|\sigma|\le 1.$

接下来，我们证明 (iii) 蕴含 (v)。固定任意的 $\sigma\in\mathrm{cl}(\mathbb{D})$。根据我们之前的结果，$(\tau^1,\sigma)$ 是 ϕ, $\phi(\tau^1,\sigma)$ 的 B 点 $=\tau^1$，并且还存在 $u_{\tau^1}=(u^1_{\tau^1},0)\in Y_{(\tau^1,\sigma)}$（不依赖于 σ），使得 $||u_{\tau^1}||\le 1.$如果我们还假设 $|\sigma|<1$，那么 (τ^1,σ) 是一个面 B 点，因此 [8, 定理 3.2] 意味着 $Y_{(\tau^1,\sigma)}=\{u_{\tau^1}\}$，并且还

$$\frac{D_{-(\tau^1,\sigma M)}\phi(\tau^1,\sigma)}{-\tau^1}=\frac{D_{-(\tau^1,\sigma M)}\phi(\tau^1,\sigma)}{-\phi(\tau^1,\sigma)}=||u_{\tau^1}||^2\le 1,$$

对所有 $M > 0$ 都成立，正如所要求的。另一方面，假设 $|\sigma| = 1$。我们可以应用定理 2.5 和 3.9，得到

$$\frac{D_{-(\tau^1,\sigma M)}\phi(\tau^1,\sigma)}{-\tau^1} = K_{(\tau^1,\sigma)}(M) \leq ||u_{\tau^1}||^2 \leq 1,$$

对所有 $M > 0$。实际上，可以推导出更强的结论

$$\lim_{M\to\infty} \frac{D_{-(\tau^1,\sigma M)}\phi(\tau^1,\sigma)}{-\tau^1} = \lim_{M\to\infty} K_{(\tau^1,\sigma)}(M) = ||u_{\tau^1}||^2 = \phi'_\mu(\tau^1),$$

对所有 $\mu \in \mathbb{D}$. 由于 σ 是任意的，我们已经证明了 (v)。

(v) 蕴含 (iv) 是显然的，因此剩下的工作就是证明 (iv) 蕴含 (iii)。于是，假设存在 $(\tau^1,\sigma) \in \mathbb{T} \times \mathrm{cl}(\mathbb{D})$，使得 (iv) 的假设成立。如果 $|\sigma| < 1$，那么 $Y_{(\tau^1,\sigma)} = \{(u^1_{(\tau^1,\sigma)},0)\}$ 并且对于任意 $M > 0$，我们有

$$||u_{(\tau^1,\sigma)}||^2 = \frac{D_{-(\tau^1,\sigma M)}\phi(\tau^1,\sigma)}{-\tau^1} \leq 1.$$

这表明 (τ^1,σ) 是 ϕ 的左侧 I 型 DW 点，由此得到 (i)，因此 (iii) 成立。另一方面，假设 $|\sigma| = 1$. 固定一个趋于 ∞. 的递增数列 $\{M_k\}$ 由于根据假设，我们有

$$\frac{D_{-(\tau^1,\sigma M_k)}\phi(\tau^1,\sigma)}{-\tau^1} \leq 1,$$

对所有 k，定理 3.10 推出

$$\phi\big(E((\tau^1,\sigma),R_1,R_2)\big) \subset E(\tau^1,\max\{R_1,R_2/M_k\}),$$

对所有 $k \geq 1$ 和 $R_1,\ R_2 > 0$. 令 $k \to \infty$，得到

$$\phi\big(E((\tau^1,\sigma),R_1,R_2)\big) \subset E(\tau^1,R_1\}),$$

对所有 $R_1,\ R_2 > 0$，这转化为不等式

$$\frac{|\tau^1 - \phi_\mu(\lambda)|^2}{1-|\phi_\mu(\lambda)|^2} \leq \frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2},$$

对所有 $\lambda,\ \mu \in \mathbb{D}.$。正如在“(i) 推出 (iii)”的证明中已经提到的，这意味着对于所有 $\mu,\ \tau^1$ 是 ϕ_μ 的 Denjoy-Wolff 点，因此 (iii) 成立。

最后，为了证明定理的右侧 I 型版本，注意函数 $\widetilde{\phi}\colon\ \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 由 $\widetilde{\phi}(\lambda) = \phi(\lambda^2,\lambda^1)$ $(\lambda \in \mathbb{D}^2)$ 定义，其模型为 $(\widetilde{M},\widetilde{u})$，其中 $\widetilde{u}\colon\ \mathbb{D}^2 \to \widetilde{M} = M^2 \oplus M^1$ 定义为

$$\widetilde{u}(\lambda) = \langle \widetilde{u}^1_\lambda, \widetilde{u}^2_\lambda, \rangle = \langle u^2_{(\lambda^2,\lambda^1)}, u^1_{(\lambda^2,\lambda^1)}\rangle,$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2.$。根据定义，$(\sigma,\tau^2)$ 是 ϕ 的右 Type I DW 点，当且仅当 (τ^2,σ) 是 $\widetilde{\phi}.$ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点。因此，要得到定理 2.9 的右侧 I 型版本，只需将该定理的左 I 型版本应用于 ϕ. □

我们还证明了 I 型 DW 点的唯一性结果。

命题 4.4. 设 $\phi \in \mathcal{S}_2$ 为具有模型 (M, u) 的左 I 型函数，满足 $\phi \neq \pi^1$ 和 $\tau^1 \in \mathbb{T}$ 是所有映射 ϕ_μ. 的公共 Denjoy-Wolff 点。那么，存在 $u_{\tau^1} = (u^1_{\tau^1}, 0) \in M$，使得对于所有 $\mu.$，$||u_{\tau^1}||^2 = \phi'_\mu(\tau^1) \leq 1$。此外，给定任意 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{T} \times \text{cl}(\mathbb{D})$，若

(i) 对于 $\sigma^1 = \tau^1$ 和 $|\sigma^2| = 1$，我们有 $u_{\tau^1} \in Y_\sigma$。此外，对于任意给定的 $v_\sigma \in Y_\sigma$，$v^2_\sigma = 0$ 当且仅当 $v_\sigma = u_{\tau^1}$。如果进一步假设 σ 是一个 C 点，则可得每个不等于 u_{τ^1} 的 $v_\sigma \in Y_\sigma$ 都必须满足 $||v^1_\sigma|| > ||u_{\tau^1}||$ 和 $v^2_\sigma \neq 0$；(ii) 对于 $\sigma^1 = \tau^1$ 和 $|\sigma^2| < 1$，我们有 $Y_\sigma = \{u_{\tau^1}\}$；(iii) σ 是 ϕ 的 B 点，并且 $\phi(\sigma) = \sigma^1$，那么每个 $v_\sigma \in Y_\sigma$ 必须满足 $||v^1_\sigma|| > 1$ 或 $||v^1_\sigma|| = 1$ 和 $v^2_\sigma \neq 0$.

因此，如果 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{T} \times \text{cl}(\mathbb{D})$，那么 σ 是 ϕ 的左 I 型 DW 点，当且仅当 $\sigma^1 = \tau^1$. 此外，$\mathbb{T} \times \text{cl}(\mathbb{D})$ 中没有任何点可以是 ϕ的左 II 型 DW 点。

对于右 I 型 DW 点，也有类似的结论（我们需要假设 $\phi \neq \pi^2$）。

证明。设 ϕ 是满足我们假设的左 I 型函数，并记 $u_{\tau^1} \in Y_{(\tau^1,\sigma)}$（对所有 $|\sigma| \leq 1$），其中的向量是在定理 2.9 的证明中“(i) 蕴含 (iii)”部分之后所描述的向量。此外，设 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{T} \times \text{cl}(\mathbb{D})$。

首先，假设 $\sigma^1 = \tau^1$ 且 $|\sigma^2| = 1.$。此时，(i) 的结论可通过应用引理 3.2 和定理 3.9 得出。

另一方面，如果 $\sigma^1 = \tau^1$ and $|\sigma^2| < 1$，应用定理 2.4 即可得出所需结论。

现在，假设 $\sigma^1 \neq \tau^1, \sigma$ 是 ϕ and $\phi(\sigma) = \sigma^1$ 的 B 点。令 $v_\sigma \in Y_\sigma$ 满足 $||v^1_\sigma|| \leq 1$，并选取 $\{(\lambda_n, \mu_n)\} \subset \mathbb{D}^2$，使其收敛于 σ，且还满足 $\lim_n \phi(\lambda_n, \mu_n) = \sigma^1$ and $u_{(\lambda_n,\mu_n)} \to v_\sigma$ 弱收敛，当 $n \to \infty.$。令 $(\lambda, \mu) = (\lambda_n, \mu_n)$ 代入 (4.11)，并令 $n \to \infty$，即可得到

$$1 - \sigma^1\overline{\tau^1} = (1 - \sigma^1\overline{\tau^1})\langle v^1_\sigma, u^1_{\tau^1}\rangle.$$

由于 $\sigma^1 \neq \tau^1$，我们得到

$$\langle v^1_\sigma, u^1_{\tau^1}\rangle = 1 \geq ||v^1_\sigma||^2, ||u^1_{\tau^1}||^2,$$

这意味着 $v^1_\sigma = u^1_{\tau^1}$，并且二者都必须是单位向量。然而，如果我们还假设 $v^2_\sigma = 0$，则可得 σ 是 $\phi.$ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点。根据定理 2.9，所有映射 ϕ_μ 的公共 Denjoy-Wolff 点是 $\sigma^1 \neq \tau^1$，这就产生了矛盾（因为 $\phi \neq \pi^1$）。因此，我们必须有 $v^2_\sigma \neq 0$，(iii) 的证明至此完成。

最后，为了证明该定理的右侧 I 型版本，将左侧~I 型版本应用于 ϕ。□

还请注意定理 2.9 的以下推论，该推论（尤其是第二部分）将在第 5 节中发挥重要作用。

推论 4.5. 设 ϕ: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，$\phi \neq \pi^1$ 为全纯函数。则，ϕ 具有形如（τ^1, σ）$\in \mathbb{T} \times$ cl（$\mathbb{D}$）的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，当且仅当

$$\frac{|\tau^1 - \phi(\lambda, \mu)|^2}{1 - |\phi(\lambda, \mu)|^2} \leq \frac{|\tau^1 - \lambda^2|^2}{1 - |\lambda|^2}, \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{D}^2.$$

此外，若我们假设对于某个 $\tau^2 \in \mathbb{T}$， $\tau = (\tau^1, \tau^2)$ 不是 C 点，则对于任意趋于 ∞ 的递增数列 $\{M_k\} \subset \mathbb{R}^+$，都可以找到一个序列 $\{r_k\}$，使得 $r_k > 1$、$r_k \to 1$ 且

$$\frac{|\tau^1 - \phi(\lambda,\mu)|^2}{1-|\phi(\lambda,\mu)|^2} \leq \max\left\{\frac{1}{r_k}\frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}, \frac{1}{M_k}\frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}\right\},$$

对于所有 λ、$\mu \in \mathbb{D}$ 和 $k \geq 1$.

对于右 I 型 DW 点，也有类似的陈述。

证明。我们只证明左 I 型版本。由于 τ^1 将是每个映射 ϕ_μ 的 Denjoy-Wolff 点，根据定理 2.9，为了得到定理的第一部分，只需对每个 ϕ_μ· 应用单变量朱莉娅不等式即可

为了证明第二部分，假设存在 $\tau^2 \in \mathbb{T}$ 使得 $\tau = (\tau^1, \tau^2)$ 不是 C 点（它必然是 B 点）。根据命题 3.5 和定理 3.9，$\{K_\tau(M_k)\}_k$ 将严格递增，因此

$$||x_\tau^1(\delta_{M_k})||^2 + M_k||x_\tau^2(\delta_{M_k})||^2 < 1,$$

对于所有 $k \geq 1$. 。特别地，我们可以找到 $r_k > 1$ 使得

$$K_\tau\left(\frac{M_k}{r_k}\right) \leq \frac{1}{r_k}$$

对所有 $k \geq 1$. 定理 2.5 和 3.10 随即使我们能够推出所需的不等式。□

接下来，我们转向 II 型 DW 点。

定理 2.10 的证明。设 (M, u) 是 ϕ. 的一个模型

首先，我们证明 (i) 蕴含 (ii)。根据假设，τ 是 ϕ的一个 B 点，但不是左侧 I 型 DW 点，$\phi(\tau) = \tau^1$ 并且还存在 $u_\tau \in Y_\tau$ 使得 $||u_\tau^1|| < 1$ 以及

$$||u_\tau^1||^2 + K||u_\tau^2||^2 \leq 1. \tag{4.13}$$

首先，我们证明 ϕ 必须是左型 II 函数。事实上，反设 ϕ 是一个左 I 型函数，$\sigma^1 \in \mathbb{T}$ 是所有映射 ϕ_μ. 的公共 Denjoy-Wolff 点。我们不可能有 $\sigma^1 = \tau^1$，因为这样一来，根据定理 2.9，τ 将是一个左侧 I 型 D W 点，这与左侧 II 型 DW 点的定义相矛盾。另一方面，如果 $\sigma^1 \neq \tau^1$，根据命题 4.4(iii) 可得矛盾。因此，ϕ 不可能是左 I 型函数，我们由此（根据定理 4.3）得出 ϕ 是一个左型 II 函数。

现在，令 $\xi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 表示用于记录每个切片 ϕ_μ 的唯一（内部）不动点的全纯函数，即对于所有 $\mu \in \mathbb{D}.$，我们有 $\phi(\xi(\mu), \mu) = \xi(\mu)$。令 $0 < K' < K$。由于 4.13 成立且 $u_\tau^2 \neq 0$，因此当 $r > 1$ 充分接近 1 时，必有 $r||u_\tau^1||^2 + K'||u_\tau^2||^2 \leq 1$，于是

$$||u_\tau^1||^2 + \frac{K'}{r}||u_\tau^2||^2 \leq \frac{1}{r}.$$

由命题 3.5 可知

$$\frac{D_{-(\tau^1, \tau^2 K'/r)}\phi(\tau)}{-\tau^1} = K_\tau(K'/r) \leq 1/r.$$

根据定理 3.10，我们得到

$$\frac{|\tau^1-\phi(\lambda,\mu)|^2}{1-|\phi(\lambda,\mu)|^2}\le\max\left\{\frac{1}{r}\frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2},\frac{1}{K'}\frac{|\tau^2-\mu|^2}{1-|\mu|^2}\right\},\tag{4.14}$$

对所有 $\lambda,\mu\in\mathbb{D}.$，将 $\lambda=\xi(\mu)$ 代入 (4.14)，便得到

$$\frac{|\tau^1-\xi(\mu)|^2}{1-|\xi(\mu)|^2}\le\max\left\{\frac{1}{r}\frac{|\tau^1-\xi(\mu)|^2}{1-|\xi(\mu)|^2},\frac{1}{K'}\frac{|\tau^2-\mu|^2}{1-|\mu|^2}\right\},$$

对所有 $\mu\in\mathbb{D}.$。由于 $1/r<1$，这个不等式便推出

$$\frac{1}{r}\frac{|\tau^1-\xi(\mu)|^2}{1-|\xi(\mu)|^2}\le\frac{1}{K'}\frac{|\tau^2-\mu|^2}{1-|\mu|^2}$$

当 $r>1$ 充分接近 1 时成立。先令 $r\to1$，再令 $K'\to K$，得到

$$\frac{|\tau^1-\xi(\mu)|^2}{1-|\xi(\mu)|^2}\le\frac{1}{K}\frac{|\tau^2-\mu|^2}{1-|\mu|^2},$$

对所有 $\mu\in\mathbb{D}.$。随后，单变量朱莉娅不等式（见第 2 节）使我们可以推知，τ^2 是 ξ 的 B 点，$\xi(\tau^2)=\tau^1$，并且还有

$$A:=\left(\liminf_{\mu\to\tau^1}\frac{1-|\xi(\mu)|}{1-|\mu|}\right)^{-1}\ge K.\tag{4.15}$$

为证明 (ii) 推出 (i)，假设 ϕ 是左型 II 函数，且 ξ 满足给定的假设。将 $\lambda=\xi(\mu)$ 代入模型公式

$$1-|\phi(\lambda,\mu)|^2=(1-|\lambda|^2)||u^1_{(\lambda,\mu)}||^2+(1-|\mu|^2)||u^2_{(\lambda,\mu)}||^2$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{1-|\phi(\xi(\mu),\mu)|^2}{1-|\mu|^2}&=\frac{1-|\xi(\mu)|^2}{1-|\mu|^2}\\&=\frac{1-|\xi(\mu)|^2}{1-|\mu|^2}||u^1_{(\xi(\mu),\mu)}||^2+||u^2_{(\xi(\mu),\mu)}||^2,\end{aligned}\tag{4.16}$$

对于所有 $\mu\in\mathbb{D}.$ 根据假设，我们可以找到一个（径向）序列 $\{\mu_n\}\subset\mathbb{D}$ 使得 $\lim_n\mu_n=\tau^2$、$\lim_n\xi(\mu_n)=\lim_n\phi(\xi(\mu_n)\ \mu_n)=\tau^1$ 以及

$$\lim_n\frac{1-|\xi(\mu_n)|}{1-|\mu_n|}=\lim_n\frac{1-|\xi(\mu_n)|^2}{1-|\mu_n|^2}\le\frac{1}{K}.$$

还需注意，$\lim_n\frac{1-|\xi(\mu_n)|}{1-|\mu_n|}>0$，否则单变量 Julia 不等式将推出 ξ 是一个模为 1 的常数，这与假设矛盾。因此，将 $\mu=\mu_n$ 代入 (4.16) 并令 $n\to\infty$，我们可以得出 τ 是关于 ϕ, $\phi(\tau)=\tau^1$ 的 B 点，并且还存在 $u_\tau\in Y_\tau$ 使得

$$||u^1_\tau||^2+K||u^2_\tau||^2\le1.$$

此外，由于 ϕ 是左型 II 函数，定理 2.9 表明 τ不可能是左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点且 $u^2_\tau\neq0$，因此 $||u^1_\tau||<1$，证毕。

注意，前面的论证实际上表明，A（如（4.15）中所定义）是所有满足以下条件的常数 $K>0$ 中的最大值：τ 是 ϕ 的左 II 型DW点，且其常数为 K。

接下来，我们证明（i）蕴含（iii）。因此，假设所有相关假设均得到满足。注意，我们不可能有

$$\frac{D_{-(\tau^1,\tau^2 M)}\phi(\tau)}{-\tau^1} = K_\tau(M) \leq 1$$

对所有 $M > 0$ 均成立，因为在这种情况下，定理 2.9）将推出 τ 是左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，这就矛盾了。由于 $K_\tau(M)$ 连续、递增且 $K_\tau(K) \leq 1$，必定存在 $C \geq K$ 使得 $K_\tau(C) = 1$。此外，$K_\tau(M)$ 不可能是常数（同样由定理 2.9 可知），因此 (iii) 成立。

现在证明其逆命题。假设 τ 是 ϕ 的一个 B 点，$\phi(\tau) = \tau^1$，$K_\tau(M)$ 关于 M 不是常数，并且还存在 $C \geq K$ 使得 $K_\tau(C) = 1$，因此

$$||x_\tau^1(\delta_C)||^2 + C||x_\tau^2(\delta_C)||^2 = 1.$$

不可能有 $x_\tau^2(\delta_C) = 0$（否则，定理 3.3 将推出 $K_\tau(M)$ 是常数），因此 $||x_\tau^1(\delta_C)|| < 1$. 此外，$\tau$ 不可能是左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，因为根据定理 2.9 和等式 $K_\tau(C) = 1$，若要出现这种情况，唯一可能的情形是对所有 $M > 0$ 均有 $K_\tau(M) = 1$，这就矛盾了。因此，τ 是一个左侧 II 型 DW 点，且其 $C \geq K$ 为常数，证毕。

我们可以对常数 C（它是唯一确定的，因为 $K_\tau(M)$ 严格递增）作进一步说明。事实上，我们先前的论证表明，τ 是常数为 C. 的左 II 型 DW 点。现在，若 $C' > C$，则

$$1 = K_\tau(C) < K_\tau(C'),$$

因此，鉴于“(i) 蕴含 (iii)”，我们得到 τ 不可能是常数为 C'. 的左 II 型 DW 点。这意味着 C 是具有此性质的最大常数，因此 $C = A$，如 (4.15) 中所定义。

最后，正如定理 2.9 证明的末尾所示，要证明该定理的右 II 型版本，只需将左 II 型版本 $\widetilde{\ }$ 应用于 ϕ。□

结合我们先前的所有结果，定理 2.11 的证明便可轻松得出。

定理 2.11 的证明。结合定理 2.9–2.10、引理 2.3、定理 3.3 和命题 3.5。□

注 4.6. 设 $\xi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为全纯函数。那么，总能找到 $\phi \in \mathcal{S}_2$（其必然是一个左型 II 函数），使得ϕ（ξ（μ） μ） $= \xi$（μ）对所有 $\mu \in \mathbb{D}$. 均成立。事实上，可以很容易验证该函数

$$\phi(\lambda, \mu) := \frac{\lambda + \xi(\mu)}{2}$$

具有所述性质。

备注4.7。如第 2 节中已经提到的，存在没有左 II 型 DW 点的左型 II 函数。事实上，例如，如果 ϕ 是任意一个左型 II 函数，使得映射 ξ 满足 $\xi(\mathbb{D}) \subset r\mathbb{D}$ 对某个 $r \in (0, 1)$ 成立，那么定理 2.10 蕴含 ϕ 没有任何左 II 型 DW 点（因为 ξ 没有任何 B 点）。

我们还可以证明关于 II 型 DW 点的某些唯一性结果。

命题 4.8. 设 $\phi: \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 的模型为 (M, u)，满足 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$ 是左 II 型 DW 点，其中 $\xi: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 满足$\phi(\xi(\mu)\ \mu) = \xi(\mu)$，对所有 $\mu \in \mathbb{D}$ 均成立，并且 $A > 0$ 如 (4.15) 中所定义。则以下断言均成立。

(i) $x_\tau(\delta_A)$ 是满足以下条件的唯一向量 $u_\tau \in Y_\tau$

$$||u_\tau^1||^2 + A||u_\tau^2||^2 \le 1. \tag{4.17}$$

(ii) $\mathbb{T} \times \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ 中没有任何点能成为 ϕ. 的左 I 型 DW 点

(iii) 若 $\sigma \in \mathbb{T}$ 且 $\sigma \neq \tau^1$，则 (σ, τ^2) 不是 ϕ 的左 II 型 DW 点。

右 II 型 DW 点也有类似的结果。

证明。首先，我们证明 (i)。注意到 $x_\tau(\delta_A)$ 显然满足

$$||x_\tau^1(\delta_A)||^2 + A||x_\tau^2(\delta_A)||^2 = 1,$$

因为 $K_\tau(A) = 1$. 此外，如果 $u_\tau \in Y_\tau$ 满足 (4.17)，则命题 3.5 蕴含 $||u_\tau^1||^2 + A||u_\tau^2||^2 = 1$和 $x_\tau(\delta_A) = u_\tau$，如所要求。

(ii) 是命题 4.4 的直接推论。

最后，(iii) 是定理 2.10 的一个简单应用，因为 ξ 在其 B 点 τ^2. □处不可能具有两个不同的值（至少不能以非切向极限的意义具有两个不同的值）

以下 Julia型不等式是定理 2.10 的一个推论。(ii) 和 (iii) 部分的重要性将在第 5 节中显现。

推论 4.9。假设 $\phi: \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 具有一个左 II 型 DW 点 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$，并令 $A > 0$按照 (4.15) 定义。此外，固定 $A_- < A$和$r_1 < 1$.

(i) 对于所有 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{D}^2$，有

$$\frac{|\tau^1 - \phi(\lambda,\mu)|^2}{1 - |\phi(\lambda,\mu)|^2} \le \max\left\{\frac{|\tau^1 - \lambda|^2}{1 - |\lambda|^2}, \frac{1}{A}\frac{|\tau^2 - \mu|^2}{1 - |\mu|^2}\right\};$$

(ii) 此外，如果 $r_2 > 1$ 充分接近 1，则

$$\frac{|\tau^1 - \phi(\lambda,\mu)|^2}{1 - |\phi(\lambda,\mu)|^2} \le \max\left\{\frac{1}{r_2}\frac{|\tau^1 - \lambda|^2}{1 - |\lambda|^2}, \frac{1}{A_-}\frac{|\tau^2 - \mu|^2}{1 - |\mu|^2}\right\},$$

对于所有 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{D}^2$;

(iii) 最后，如果 $x_\tau^1(\delta_A) \neq 0$ 且 $A < A_+$ 充分接近 A，则

$$\frac{|\tau^1 - \phi(\lambda,\mu)|^2}{1 - |\phi(\lambda,\mu)|^2} \le \max\left\{\frac{1}{r_1}\frac{|\tau^1 - \lambda|^2}{1 - |\lambda|^2}, \frac{1}{A_+}\frac{|\tau^2 - \mu|^2}{1 - |\mu|^2}\right\},$$

对于所有 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{D}^2$.

对于右II型Denjoy-Wolff点，也有类似的结果。

证明。为证明（i），结合定理3.10和定理2.10。

对于 (ii)，注意到，由于 $||x_\tau^1(\delta_A)||^2 + A||x_\tau^2(\delta_A)||^2 = 1$，$A_- < A$ 以及$x_\tau^2(\delta_A) \neq 0$ （根据左 II 型 DW 点的定义），可得

$$r_2||x_\tau^1(\delta_A)||^2 + A_-||x_\tau^2(\delta_A)||^2 \le 1,$$

对所有充分接近 1 的 $r_2 > 1$ s 成立，因此 $K_\tau(A_-/r_2) \le 1/r_2$. 应用定理 3.10 即可完成证明。

(iii) 的证明方式类似（注意，由于并非所有左 II 型 DW 点都具有这一性质，我们必须假设$x^1_\tau(\delta_A) \neq 0$）。□

5. REFINING HERVÉ'S THEOREM

令 $F = (\phi, \psi)$ 表示 $\mathbb{D}^2$ 的一个没有内部不动点的全纯自映射。我们使用

$$F^n = (\phi_n, \psi_n) = \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ times}}$$

表示 F. 的迭代序列。注意，对于所有 $n \ge 1.$, $\phi \circ F^n = \phi_{n+1}$ 和 $\psi \circ F^n = \psi_{n+1}$

如第 1 节中已经提到的，Herv´e 通过分别考察三种情形来分析 $\{F^n\}$ 的行为，这三种情形取决于 ϕ 和 ψ. 的类型。在本节中，我们研究 Herv´e 的结果与第 4 节中定义的 DW 点之间的联系。特别地，我们将证明：如果假设 ϕ 和/或 ψ 的 DW 点不是 C 点，则定理 2.7 的结论可以得到加强。

5.1.（I 型，II 型）情形。我们首先讨论 ϕ 和ψ 分别为左 II 型函数和右 II 型函数的情形。尽管一般而言并非每个 II 型函数都有 II 型 DW 点（见备注 4.7），但 F 没有内部不动点这一条件会极大地改变情况，正如下述定理所示。其证明（不使用模型术语）基本包含在 [21, 定理 2] 中（另见 [23, 第 16]节）。我们将利用目前为止建立的结果给出另一种证明。

定理 5.1。假设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 是全纯的，并且 ϕ和 ψ 分别为左 II 型函数和右 II 型函数。此外，令 ξ、η： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$表示满足下列条件的（唯一）函数：对所有 λ、$\mu \in \mathbb{D}.$, $\phi(\xi(\mu)\ \mu) = \xi(\mu)$且 $\psi(\lambda, \eta(\lambda)) = \eta(\lambda)$。那么， F 没有内部不动点，当且仅当

(i) 存在 $\tau \in \mathbb{T}^2$ 和 $K > 0$，使得 τ 同时是 ϕ 的左 II 型 DW 点，其常数为 K；也是 ψ 的右 II 型 DW 点，其常数为 $1/K$；此外，(ii) $\phi \circ \eta \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ 且 $\eta \circ \phi \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$。

此外，假设 F 没有内部不动点，则上述点 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$ 是唯一确定的：τ^1 是 $\xi \circ \eta$ 的 Denjoy-Wolff 点，而 τ^2 是 $\eta \circ \xi$. 的 Denjoy-Wolff 点

证明。令 (M, u) 和 (N, v) 分别为 ϕ 和 ψ 的模型。此外，对于 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$，我们将相应的聚点集记为 Y^ϕ_τ 和 Y^ψ_τ.

首先，假设 F 没有内部不动点。令 $0 < r_n \uparrow 1$，并考虑函数 $r_n \cdot F$。由于 $\mathrm{cl}(r_n F(\mathbb{D}^2)) \subset \mathbb{D}^2$，对于每个 n，Earle-Hamilton 定理 [19] 蕴含每个 $r_n F$ 都有一个不动点 $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{D}^2$。由于$F$ 在 $\mathbb{D}^2$中没有不动点，我们得到 $(\lambda_n, \mu_n) \to \partial\mathbb{D}^2$。需要考察三种可能的情况。

如果 $\lim_n \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|\mu_n|^2} = 0$，那么 $(\lambda_n, \mu_n) \to \tau = (\tau^1, \sigma) \in \mathbb{T} \times \mathrm{cl}(\mathbb{D})$。我们可以使用 ϕ 的模型公式写出

$$1 - |\lambda_n|^2 \geq 1 - \frac{1}{r_n^2}|\lambda_n|^2 = 1 - |\phi(\lambda_n, \mu_n)|^2$$

$$= (1 - |\lambda_n|^2)||u^1_{(\lambda_n,\mu_n)}||^2 + (1 - |\mu_n|^2)||u^2_{(\lambda_n,\mu_n)}||^2.$$

因此，当 n 足够大时，我们得到

$$1 \geq \frac{1 - |\phi(\lambda_n, \mu_n)|^2}{1 - ||(\lambda_n, \mu_n)||^2} = \frac{1 - |\phi(\lambda_n, \mu_n)|^2}{1 - |\lambda_n|^2}$$

$$= ||u^1_{(\lambda_n,\mu_n)}||^2 + \frac{1 - |\mu_n|^2}{1 - |\lambda_n|^2}||u^2_{(\lambda_n,\mu_n)}||^2. \tag{5.1}$$

令 $n \to \infty$，我们得到（根据 $\lim_n \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|\mu_n|^2} = 0$ 和 $\lim_n \phi(\lambda_n, \mu_n) = \tau^1$），$\tau = (\tau^1, \sigma)$ 是关于 ϕ, $\phi(\tau) = \tau^1$ 的 B 点，并且还存在一个弱极限 $u_\tau \in Y_\tau^\phi$，使得 $||u^1_\tau|| \leq 1, u^2_\tau = 0$。这意味着 τ 是 ϕ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，这与 ϕ 是左型 II 函数这一事实矛盾。

如果 $\lim_n \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|\mu_n|^2} = \infty$，则可以用类似于前一种情形的方式论证，推出 ψ 具有一个右 Type I DW 点，这再次导致矛盾。

最后，假设 $\lim_n \frac{1-|\lambda_n|^2}{1-|\mu_n|^2} = \frac{1}{K} \in (0, \infty)$。因此，$(\lambda_n, \mu_n) \to \tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$。令 $n \to \infty$ 代入（5.1），则得到 τ 是 ϕ 的一个 B-点，$\phi(\tau) = \tau^1$，并且还存在 $u_\tau \in Y_\tau^\phi$ 使得 $||u^1_\tau||^2 + K||u^2_\tau||^2 \leq 1.$。注意到 $u^2_\tau \neq 0$，否则 τ 将会是一个左侧 I 型 DW 点。因此，由于 ϕ 是一个左型 II 函数，τ 必定是 ϕ 的一个左 II 型 DW 点，其常数为 K。此外，针对 ψ 的模型公式进行类似论证可知，τ 是 ψ 的一个 B-点，$\phi(\tau) = \tau^2$，并且还存在 $v_\tau \in Y_\tau^\psi$ 使得 $(1/K)$ $||v^1_\tau||^2 + ||v^2_\tau||^2 \leq 1.$。另外，$v^1_\tau \neq 0$，因为 ψ 不是右 I 型函数。因此，τ 必定是 ψ 的一个右 II 型 DW 点，其常数为$1/K$，这就证明了 (i)。为证明 (ii)，注意到例如若对于某个 $\lambda \in \mathbb{D}$ 有 $\xi(\eta(\lambda)) = \lambda$，那么

$$F(\xi(\eta(\lambda)), \eta(\lambda)) = \big(\phi(\xi(\eta(\lambda)), \eta(\lambda)), \psi(\xi(\eta(\lambda)), \eta(\lambda))\big)$$

$$= (\xi(\eta(\lambda)), \eta(\lambda)),$$

矛盾。特别地，我们得到更强的结论：$\xi \circ \eta$ 和 $\eta \circ \xi$ 都不可能具有内部不动点。

反之，假设 (i) 和 (ii) 均成立。根据定理 2.10，(i) 意味着，对于 η，τ^1 是 B 点；对于 ξ，τ^2 是 B 点，$\xi(\tau^2) = \tau^1$、$\eta(\tau^1) = \tau^2$，并且（根据单变量 Julia 不等式）

$$\xi(E(\tau^2, R)) \subset E(\tau^1, R/K) \quad \text{and} \quad \eta(E(\tau^1, R)) \subset E(\tau^2, KR),$$

对所有 $R > 0$. 因此，$(\xi \circ \eta)(E(\tau^1, R)) \subset \xi(E(\tau^2, KR)) \subset E(\tau^1, R)$，对所有$R > 0$均成立；结合 $\xi \circ \eta \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ 必定只有一个 Denjoy-Wolff 点这一事实，我们可以推断 τ^1 是 $\xi \circ \eta$的 Denjoy-Wolff 点。类似的论证表明，τ^2 是 $\eta \circ \xi$. 的 Denjoy-Wolff 点。因此，点 τ 确实是唯一确定的。此外，请注意，

鉴于这些观察， $\xi \circ \eta$ 和 $\eta \circ \xi$ 都不可能有内部不动点。现在，设(λ_0, μ_0)是 F的一个内部不动点。我们得到

$$\phi(\lambda_0, \mu_0) = \lambda_0 \quad \text{and} \quad \psi(\lambda_0, \mu_0) = \mu_0.$$

因此， $\xi(\mu_0) = \lambda_0$ 和 $\eta(\lambda_0) = \mu_0$，这意味着 $\xi(\eta(\lambda_0)) = \lambda_0$，矛盾。□

现在，令 $F = (\phi, \psi) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$, $\tau \in \mathbb{T}^2$ 和 $K > 0$ 如定理 5.1 所示，其中 F 没有内部不动点。回顾一下，在这种情形下，可以得到单变量 Denjoy-Wolff 定理的一个完美类比，即迭代序列 $\{F^n\}$ 在紧集上一致收敛于τ (定理 2.7(iv))。Herv´e 证明这一事实的一个关键要素是由不变 horosphere

$$F(E(\tau, R, KR)) \subset E(\tau, R, KR), \tag{5.2}$$

应用推论 4.9 得到的。

因此，我们知道整个序列 $\{F^n\}$必然收敛于 τ，但我们能否利用 (5.2) 得到更多信息？本小节的主要结果是对 $[23, $引理 $2], $的改进，该结果涉及轨道 $\{F^n(\lambda, \mu)\}_n$相对于不变 horosphere (5.2) 边界的位置。为陈述该结果，固定 $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{D}^2$。为方便起见，我们将用 $F^n = (\phi_n, \psi_n)$ 代替 $F^n(\lambda_0, \mu_0) = (\phi_n(\lambda_0, \mu_0)\ \psi_n(\lambda_0, \mu_0))$。我们还定义：

$$A_n = \frac{|\tau^1 - \phi_n|^2}{1 - |\phi_n|^2} \quad \text{and} \quad B_n = \frac{|\tau^2 - \psi_n|^2}{1 - |\psi_n|^2}.$$

定理 5.2. 设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$, $\tau \in \mathbb{T}^2$ 和 $K > 0$ 如定理 5.1 中所述，且 F 没有内部不动点。那么，要么 $F^n \to \tau$在视界拓扑中，要么存在 $\rho_0, \rho_1 \geq 0$ （取决于（ λ_0, μ_0 ））且不同时为 0，使得

$$A_{2n} \to \rho_0, \quad A_{2n+1} \to \rho_1, \quad B_{2n+1} \to K\rho_0, \quad B_{2n} \to K\rho_1.$$

此外，如果对于 ϕ 或 ψ, τ 都不是 C 点，我们可以取 $\rho_0 = \rho_1$.

证明。对于每个 $n \geq 1$，令 R_n 表示满足 $F_n \in E_n := \mathrm{cl}\big(E(\tau, R_n, KR_n)\big)$ 的最小半径。根据（5.2），序列 $\{R_n\}$ 是非增的。然而， $\{A_n\}, \{B_n\}$ 不一定也是非增的，但根据 R_n 的定义，它们必须满足 $\max\{KA_n, B_n\} = KR_n$，对所有 n 都成立。

现在，如果 $R_n \to 0$，那么 A_n、 $B_n \to 0$ ，由此我们得出 $F_n \to \tau$ 属于视界拓扑。因此，假设 R_n 收敛于 $\rho > 0$。

首先，考虑 τ 对于 ϕ 或 ψ. 都不是 C 点的情形。不妨设 τ 不是 ϕ. 的 C 点。令 u_τ 表示 Y_τ^ϕ 中满足 $||u_\tau^1||^2 + K||u_\tau^2||^2 \leq 1$ 的任意向量（其存在性由定理 2.10 保证）。根据定理 3.3，必然有 $u_\tau^1 \neq 0.$ 。我们将证明 $A_n \to \rho$ 和 $B_n \to K\rho$。

事实上，为了导出矛盾，假设 $B_n \not\to K\rho$ （$A_n \not\to \rho$ 的情形可以用类似的方式处理）。根据等式 $\max\{KA_n, B_n\} = KR_n$，存在一个子序列 $\{n_k\}$ 和 $r \in (0, \rho)$, 使得对所有 k 都有 $B_{n_k} \leq Kr$ 。这意味着对所有 k 都有 $A_{n_k} = R_{n_k}$ 。现在，给定

$0 < K_- < K$ 充分接近于 K，我们可以选择充分接近于 1 的 $r_2 > 1$，使得 $Kr/K_- < \rho/r_2$，并且根据推论 4.9(ii),

$$\frac{|\tau^1 - \phi(\lambda,\mu)|^2}{1-|\phi(\lambda,\mu)|^2} \le \max\left\{\frac{1}{r_2}\frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}, \frac{1}{K_-}\frac{|\tau^2-\mu|^2}{1-|\mu|^2}\right\},$$

对所有 λ、$\mu \in \mathbb{D}.$，特别地，我们有

$$\begin{aligned} A_{n_k+1} &= \frac{|\tau^1 - \phi_{n_k+1}|^2}{1-|\phi_{n_k+1}|^2} \\ &\le \max\left\{\frac{1}{r_2}A_{n_k}, \frac{1}{K_-}B_{n_k}\right\} \\ &\le \max\left\{\frac{1}{r_2}R_{n_k}, \frac{1}{K_-}Kr\right\} \\ &= \frac{R_{n_k}}{r_2}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

当 $\frac{Kr}{K_-} < \frac{\rho}{r_2} \le \frac{R_{n_k}}{r_2}$时，对所有 $k.$。现在，令 v_τ 表示 Y_τ^ψ 中满足 $\tilde{K}||v_\tau^1||^2 + ||v_\tau^2||^2 \le 1$ 的任意向量，其中 $\tilde{K} = 1/K$（与 u_τ 的情形一样，我们通过定理 2.10 得到该向量的存在性）。根据 $v_\tau^2 \neq 0$ 是否成立，我们分别讨论两种情况。

因此，假设 $v_\tau^2 \neq 0$。在这种情况下，给定充分接近 1 的 $r_1 < 1$，我们可以找到充分接近 $\tilde{K}$ 的 $\tilde{K} < \tilde{K}_+$，使得 $\frac{K_+ r}{r_1} < \tilde{K}\rho$；此外，鉴于推论 4.9(iii) 的右 I 型版本，

$$\frac{|\tau^2 - \psi(\lambda,\mu)|^2}{1-|\psi(\lambda,\mu)|^2} \le \max\left\{\frac{1}{\tilde{K}_+}\frac{|\tau^1-\lambda|^2}{1-|\lambda|^2}, \frac{1}{r_1}\frac{|\tau^2-\mu|^2}{1-|\mu|^2}\right\},$$

对所有 λ、$\mu \in \mathbb{D}.$，特别地，我们有

$$\begin{aligned} B_{n_k+1} &\le \max\left\{\frac{A_{n_k}}{\tilde{K}_+}, \frac{B_{n_k}}{r_1}\right\} \\ &\le \max\left\{\frac{R_{n_k}}{\tilde{K}_+}, \frac{r}{\tilde{K}r_1}\right\} \\ &= \frac{R_{n_k}}{\tilde{K}_+}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

当 $\frac{r}{\tilde{K}r_1} < \frac{\rho}{\tilde{K}_+} \le \frac{R_{n_k}}{\tilde{K}_+}$时，对所有 k。结合（5.3）与（5.4），可得

$$KR_{n_k+1} = \max\{KA_{n_k+1}, B_{n_k+1}\} < cKR_{n_k},$$

对某个 $c \in \in$(0,1) 以及所有充分大的 k。令 $k \to \infty$，则会导致矛盾。

现在，假设 $v_\tau^2 = 0$。根据 (5.3)，我们可以找到 $r' < \rho$，使得对于所有足够大的 k，都有 $A_{n_k+1} \le r' < \rho$。此外，由于 $v_\tau^1 \neq 0$，我们可以仿照 (5.3) 的证明（以 ψ 代替 ϕ），从而得到：对于某个$c_1 \in$ (0, 1) 以及所有足够大的 k，有 $B_{n_k+2} < c_1 KR_{n_k+1}$。类似地，由于 $u_\tau^1 \neq 0$，我们可以仿照 (5.4) 的证明（以 ϕ 代替 ψ），从而得到存在 $c_2 \in$ (0, 1)，使得对于所有足够大的 k，有 $A_{n_k+2} \le c_2 R_{n_k+1}$。因此，我们得到结论 $KR_{n_k+2} = \max\{KA_{n_k+2}, B_{n_k+2}\} < \max\{c_1, c_2\}KR_{n_k+1}$, 对于所有足够大的$k$ 均成立；当令 $k \to \infty.$ 时，这将导致矛盾

剩下唯一需要考察的情形是 $R_n \to \rho > 0$ and $u_\tau^1 = v_\tau^2 = 0$。仿照定理 3.10 中“(ii) implies (iii)”的证明，我们可以得出

$$A_{n+1} \le \frac{B_n}{K} \text{ and } B_{n+1} \le KA_n,$$

对所有 $n \ge 1$. 因此，

$$A_{n+2} \le A_n \text{ and } B_{n+2} \le B_n,$$

这意味着序列 $\{A_{2n}\}$、$\{A_{2n+1}\}$、$\{B_{2n}\}$ 和 $\{B_{2n+1}\}$ 都是非递增的。因此，存在非负数 ρ_0、ρ_1、ρ_0'、ρ_1'，使得 $A_{2n} \to \rho_0$、$A_{2n+1} \to \rho_1$、$B_{2n+1} \to \rho_1'$ 和 $B_{2n} \to \rho_0'$. 。不等式 $A_{2n+1} \le \frac{B_{2n}}{K}$ 和 $B_{2n} \le KA_{2n-1}$ 分别给出 $\rho_1 \le \rho_0'/K$ 和 $\rho_0' \le K\rho_1$。因此，$\rho_0' = K\rho_1$，完全类似的论证表明 $\rho_1' = K\rho_0$. 。我们得出

$$A_{2n} \to \rho_0, \quad A_{2n+1} \to \rho_1, \quad B_{2n+1} \to K\rho_0, \quad B_{2n} \to K\rho_1,$$

其中 $\max\{\rho_0, \rho_1\} = \rho$（根据 ρ 的定义），因此 ρ_0 和 ρ_1 不可能同时为零。证明完毕。□

5.2. （I 型，II 型）情形。现在假设 ϕ 和 ψ 分别是左 I 型函数和右 II 型函数。这立即意味着 $F = (\phi, \psi)$ 没有任何内部不动点。在这种情况下，Herv´e 证明了，迭代序列 $\{F^n\}$ 的任意聚点都必须具有 (τ^1, h) 的形式，其中 h 或者是一个全纯函数 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，或者是一个模为 1 的常数，而 τ^1 是所有切片 ϕ_μ 的公共 Denjoy-Wolff 点（定理 2.7(iii)）。说明这一结论一般无法进一步改进的例子见 [23, 第 11] 节。

现在，如果我们进一步假设存在 $\sigma \in \mathbb{T}$，使得 (τ^1, σ) 是 ψ 的一个右 II 型 DW 点，那么可以对 $\{F^n\}$. 的聚点集得出更强的结论

命题 5.3. 假设 $F = (\phi, \psi)$: $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 满足: ϕ 是一个左 I 型函数（其中 τ^1 是所有切片 ϕ_μ 的公共 Denjoy-Wolff 点），且 ψ 具有形如 $\tau = (\tau^1, \sigma) \in \mathbb{T}^2$ 的右 II 型 DW 点。那么，存在 $K > 0$ 使得

$$F(E(\tau, R, KR)) \subset E(\tau, R, KR),$$

对所有 $R > 0$. 因此，迭代序列 $\{F^n\}$ 的任意聚点都必须具有 (τ^1, h) 的形式，其中 h 或者是一个全纯函数 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，或者是常数 σ.

证明. 假设 ψ 具有形如 $\tau = (\tau^1, \sigma)$ 的右 II 型 DW 点，则结合推论 4.5 与推论 4.9 可得

$$F(E(\tau, AR, R)) \subset E(\tau, AR, R),$$

对所有 $R > 0$，其中 $A = \left(\liminf_{\lambda \to \tau^1} \frac{1-|\eta}{1-|\lambda|} \left(\frac{\lambda}{} \right)^{-1} > 0 \right)$，且 η: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是满足 $\psi(\lambda, \eta(\lambda)) = \eta(\lambda)$ 的全纯函数，对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$均成立。

要得出关于迭代序列行为的结论，将前面的结果与定理 2.7(iii) 结合起来，并注意到，对于任意$R > 0$, $\mathrm{cl}(E(\tau, AR, R)) \cap \mathbb{T}^2 = \tau$. □

备注 5.4. 如果对于ψ不存在形如(τ^1,σ)的右 II 型 Denjoy-Wolff 点，那么 $\{F^n\}$ 的行为可能会复杂得多。事实上，甚至可能存在无穷多个模长为 1 的常数 $\{\sigma(i) \mid i\in I\}$，使得常数 $(\tau^1,\sigma(i))$ 对于每个$i\in I$都是 $\{F^n\}$的聚点；参见 [23, 第 11]节中的第 2 个例子。

在命题 5.3 的设定下，显然（根据定理 2.9），(τ^1,σ) 对于 ϕ 始终是左侧 I 型 DW 点，无论 $\sigma.$ 的值为何。令人惊讶的是，若 (τ^1,σ) 不是 ϕ 的 C 点，则会迫使整个序列 $\{F^n\}$ 收敛到 (τ^1,σ)。这正是定理 2.12 的内容，其证明并未使用 Herv´e 的结果。

定理 2.12 的证明。假设 $\tau=(\tau^1,\sigma)\in\mathbb{T}^2$ 满足该定理的假设。显然，ϕ 和 ψ 分别将是左侧 I 型函数和右 II 型函数，所有切片 ϕ_μ 的公共 Denjoy-Wolff 点为 $\tau^1.$。根据命题 5.3，存在 $K>0$ 使得

$$F(E(\tau,KR,R))\subset E(\tau,KR,R), \tag{5.5}$$

对所有 $R>0.$现在，固定 $(\lambda_0,\mu_0)\in\mathbb{D}^2$。为方便起见，我们将用 $F^n=(\phi_n,\psi_n)$ 代替 $F^n(\lambda_0,\mu_0)=(\phi_n(\lambda_0,\mu_0)\ \psi_n(\lambda_0,\mu_0))$。我们还定义：

$$A_n=\frac{|\tau^1-\phi_n|^2}{1-|\phi_n|^2}\quad\text{and}\quad B_n=\frac{|\sigma-\psi_n|^2}{1-|\psi_n|^2},$$

对所有 $n\geq 1.$推论 4.5 随即得出，$\{A_n\}$ 是非递增的。

首先，我们证明 $A_n\to 0.$事实上，反设 $A_n\to\rho>0.$(5.5) 蕴含存在 $B>0$ 使得 $B_n<B,$ 对所有 $n\geq 1.$此外，令 $\{M_k\}\subset\mathbb{R}^+$ 为任意一个趋于 $\infty.$ 的递增数列。推论 4.5 蕴含我们可以找到一个递减序列 $\{r_k\}, r_k\to 1$，使得

$$A_{n+1}\leq\max\left\{\frac{A_n}{r_k},\frac{B_n}{M_k}\right\}, \tag{5.6}$$

对所有 $n,k\geq 1.$ 令 $\epsilon>0$ 并选择 $k=k_0$ 使得 $B/M_{k_0}<\rho.$此外，由于 $r_{k_0}>1$，我们可以找到 $N\geq 1$ 使得 $A_N/r_{k_0}<\rho$。因此，(5.6) 得出

$$A_{N+1}\leq\max\left\{\frac{A_N}{r_{k_0}},\frac{B_N}{M_{k_0}}\right\}<\rho,$$

矛盾。因此，$A_n\to 0.$ 我们还将证明 $B_n\to 0$。事实上，假设 $B_n\not\to 0$。(5.5)结合 $A_n\to 0$ 这一事实可推出 $\liminf_n B_n=s>0.$ 此外，鉴于 $0<K_-<K$，由推论 4.9 可知，对于任意充分接近 1 的 $t_2>1$，均有

$$B_{n+1}\leq\text{最大值}\left\{\frac{A_n}{K_-},\frac{B_n}{t_2}\right\}, \tag{5.7}$$

对所有 $n\geq 1.$ 现在，取 n_0 使得 $A_{n_0}/K_-<s/2$，且 $B_{n_0}/t_2<s.$。根据 (5.7)，我们得到

$$B_{n_0+1}\leq\max\left\{\frac{A_{n_0}}{K_-},\frac{B_{n_0}}{t_2}\right\}<s,$$

矛盾。因此我们得出 $A_n、B_n\to 0$，这给出了 $F^n=F^n(\lambda_0,\mu_0)\to(\tau^1,\sigma)$。由于 (λ_0,μ_0) 是任意的，故结论成立。□

注 5.5。实际上，我们得出了更强的结论：在定理 2.12 的情形下，对于任意 $\lambda \in \mathbb{D}^2$.，迭代序列 $F^n(\lambda)$ 都在视界拓扑中收敛到 (τ^1, σ)

例 5.6。定义 ϕ、ψ： $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 为

$$\phi(\lambda) = \frac{1 - \lambda^1\lambda^2}{2 - \lambda^1 - \lambda^2}$$

and

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \frac{(\lambda^2-\lambda^1)-2(1-\lambda^1)(1-\lambda^2)\log\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\frac{1-\lambda^1}{1+\lambda^1}\right)}{(\lambda^2-\lambda^1)+2(1-\lambda^1)(1-\lambda^2)\log\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\frac{1-\lambda^1}{1+\lambda^1}\right)} & \text{if } \lambda^1 \neq \lambda^2, \\ \frac{-3+5\lambda^1}{5-3\lambda^1} & \text{if } \lambda^1 = \lambda^2, \end{cases}$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2$ （ψ 取自 [28]）。

由于切片函数 ϕ_0 以 1 为其 Denjoy-Wolff 点，定理 2.9 蕴含，整个闭面 $\{1\} \times \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ 由 ϕ 的 B 点组成，并且 $\phi(1, \sigma) = 1$，对所有 $|\sigma| \leq 1$. 实际上，不难看出，只要 $\sigma \neq 1.$， ϕ 就能解析延拓到 $(1, \sigma)$ 的另一侧。现在，对于 $\sigma = 1$，可以验证

$$\frac{D_{-(1,M)}\phi(1,1)}{-\phi(1,1)} = -D_{-(1,M)}\phi(1,1) = \frac{M}{M+1} < 1,$$

对所有 $M > 0$。因此，(1,1) 不是 ϕ 的 C 点，而且，由于 $\lim_{M\to\infty} M/(M+1) = 1$，每个切片函数 ϕ_μ在其 Denjoy-Wolff 点 1 处的角导数都必须等于 1（也可以直接验证这一点，因为在此情形下切片函数很容易计算）。

现在，我们来看 ψ. 由于 $\psi(0, 0) = 0$， ψ 显然是一个左（也是右）II 型函数。此外，正如 [28], 所示，(1, 1) 是 ψ 的一个 B 点，但不是 C 点，而 $\psi(1, 1) = 1$. 我们希望确定 (1, 1) 是否也是 ψ. 的左 II 型 DW 点。然而，计算函数 $\xi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$，使得对所有 $\mu \in \mathbb{D}$都有 $\psi(\xi(\mu)\ \mu) = \xi(\mu)$，在这里似乎不切实际。因此，我们将考察 ψ 在 (1, 1) 处沿 $\delta_M = (1, M)$ 的方向导数，然后使用定理 2.11。事实上，在 [28, 第 4] 节中已经确定

$$K_{(1,1)}(M) = \frac{D_{-(1,M)}\psi(1,1)}{-\psi(1,1)} = -D_{-(1,M)}\psi(1,1)$$

$$= 4M\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1-t)+(1+t)M}$$

$$= \begin{cases} 4\frac{M\ln M}{M-1} & \text{if } M \neq 1, \\ 4 & \text{if } M = 1. \end{cases}$$

由于 $K_{(1,1)}(1) > 1$ 且 $\lim_{M\to 0+} K_{(1,1)}(M) = 0$，存在 $C > 0$ 使得 $K_{(1,1)}(C) = 1.$。定理 2.11 随即推出，(1,1) 是 ψ的一个左 II 型 DW 点。此外，由于 $\psi(\lambda^1, \lambda^2) = \psi(\lambda^2, \lambda^1)$，(1,1) 也必然是 ψ.的一个右 II 型 DW 点

现在，定义 $F = (\phi, \psi)$： $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$. 鉴于我们之前的观察，对于 ϕ，(1, 1) 是一个并非 C 点的左侧 I 型 DW 点，同时它也是 ψ. 的右侧 II 型 DW 点。定理 2.12 随后使我们能够得出结论： $F^n \to (1, 1)$ 在 $\mathbb{D}^2$. 的紧子集上一致收敛

在结束本小节之前，我们指出，(II 型，I 型) 情形可以完全类似地处理。

5.3. （I 型，I 型）情形。最后，假设 ϕ 和 ψ 分别是左 I 型函数和右 I 型函数，因此 $F = (\phi, \psi)$ 没有任何内部不动点。以下刻画是定理 2.9 的直接推论，故证明从略。

命题5.7. 设 $F = (\phi, \psi) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 为全纯函数。那么， ϕ 和 ψ 分别是左 I 型函数和右 I 型函数，当且仅当存在 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$，它是 ϕ 的左侧 I 型 Denjoy-Wolff 点，同时也是 ψ. 的右 Type I DW 点。

现在，设 τ^1 和 τ^2 如命题5.7中所述。在此情形下，Herv´e 证明了：要么 $\{F^n\}$ 的每个聚点都具有 (τ^1, h) 的形式，其中 h 要么是全纯函数 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，要么是常数 τ^2；要么每个聚点都具有 (g, τ^2) 的形式，其中 g 要么是全纯函数 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$，要么是常数 τ^1 （定理 2.7(ii)）。此外，不难看出，例如在前一种情形下，存在一个以 Denjoy-Wolff 点 τ^2 为不动点的（抛物型）分式线性变换 T，使得只要 (τ^1, h_1) 和 (τ^1, h_2) 都作为 $\{F^n\}$ 的非常数聚点出现，就必有 $h_1 = T \circ h_2$ （见 [23, 第 14] 节中的第二条备注）。 [23, 第 15] 节中包含了说明这些结论一般无法进一步改进的例子。

遗憾的是，定理2.7(ii)的证明（见 [23, 第 12-13] 节）并未明确说明，是否可以“事先”确定两个常数（τ^1 或 τ^2）中的哪一个将作为 $\{F^n\}$. 每个聚点的坐标出现。我们将证明，在附加假设（τ^1, τ^2）对于 ϕ或 ψ 均不是 C 点的条件下，可以得出更强的结论。我们的证明独立于 Herv´e 的结果。

定理 2.13 的证明。假设 $\tau = (\tau^1, \tau^2) \in \mathbb{T}^2$满足该定理的假设。显然， ϕ 和 ψ 分别将是左 I 型函数和右 I 型函数。此外，推论 4.9 告诉我们

$$F(E(\tau, R_1, R_2)) \subset E(\tau, R_1, R_2), \tag{5.8}$$

对于所有 $R_1, R_2 > 0.$，对任意固定的 $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{D}^2$，定义：

$$A_n = \frac{|\tau^1 - \phi_n(\lambda_0, \mu_0)|^2}{1 - |\phi_n(\lambda_0, \mu_0)|^2} \quad \text{and} \quad B_n = \frac{|\tau^2 - \psi_n(\lambda_0, \mu_0)|^2}{1 - |\psi_n(\lambda_0, \mu_0)|^2},$$

对所有 $n \geq 1.$，由（5.8）可知， $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 均为非增函数。随后，我们可以像定理 2.12 的证明中那样进行论证，从而推出 $A_n \to 0$（假设 τ 不是 ϕ上的 C 点）。因此， $\{F^n\}$ 的每个聚点都将具有 (τ^1, h) 的形式，其中 h 在 $\mathbb{D}^2$ 上是全纯的，且其绝对值不超过 1。此外，由于 $\{B_n\}$ 有界，可以推知 h 必定是一个全纯映射 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 或常数 τ^2. □

备注 5.8。实际上，我们已经得出了更强的结论：在定理 2.13 的设定下，例如当 τ 对于 ϕ 不是 C 点时，对于任意 $\lambda \in \mathbb{D}^2.$，点 $\phi_n(\lambda)$ 都在单位圆盘的视界拓扑中收敛于 τ^1

例 5.9。定义 $\phi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ 为

$$\phi(\lambda) = -\frac{3\lambda^1\lambda^2 - \lambda^1 - \lambda^2 - 1}{3 - \lambda^1 - \lambda^2 - \lambda^1\lambda^2},$$

对所有 $\lambda \in \mathbb{D}^2$ （此例出现在 [33] 中）。容易验证，切片函数 $\phi_0(z) = (z+1)/(3-z)$ 的 Denjoy-Wolff 点等于 1。因此，定理 2.9 表明，闭面 $\{1\} \times \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ 由 ϕ 的 B 点组成，并且 $\phi(1,\sigma) = 1$，对所有 $|\sigma| \leq 1$ 成立。此外，我们可以计算

$$\frac{D_{-(1,M)}\phi(1,1)}{-\phi(1,1)} = -D_{-(1,M)}\phi(1,1) = \frac{M}{M+1},$$

对所有 $M > 0$. 因此，$(1,1)$ 不是 ϕ 的 C 点（并且对所有 $\mu \in \mathbb{D}$， $\phi'_\mu(1) = \lim_{M\to\infty} M/(M+1) = 1$ 也成立）。

现在，令 $F = (\phi, \psi) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$，其中 ψ 是任意（全纯）的右 I 型函数，使得所有切片函数 $\psi(\lambda, \cdot)$ 的 Denjoy-Wolff 点都等于 1。定理 2.13 于是表明， $\{F^n\}$ 的每个聚点都将具有 $(1, h)$ 的形式，其中 h 要么是全纯函数 $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}$ ，要么是常数 1。现在，若取 ψ 为例如

$$\psi(\lambda^1, \lambda^2) = \frac{1 - \lambda^1\lambda^2}{2 - \lambda^1 - \lambda^2},$$

我们从例 5.6 中得到的观察（以及 $\psi(\lambda^1, \lambda^2) = \psi(\lambda^2, \lambda^1)$ 这一事实）表明，对于 ψ 而言，$(1,1)$ 将是一个不是 C 点的右 Type I DW 点。再次应用定理 2.13，便得到（对于 ψ 的这一特定选择） $F^n \to (1,1)$ 在 $\mathbb{D}^2$. 的紧子集上一致收敛

6. 与 Frosini 工作的联系

对于全纯映射 F ，Denjoy-Wolff 类型的点： $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 已由 Frosini 在 [20], [21], [22] 中研究。她将 F 的 Denjoy-Wolff 点定义为这样的不动边界点： F-不变 horosphere 以其为中心；具体定义取决于所讨论的 horosphere 类型。特别地，受 [3], 中“小”horosphere 和“大”horosphere 定义的启发，她定义了（见 [22, 定义 3.2-3.3]） F 的准 Wolff 点和 Wolff 点，分别指这样的一类不动边界点：小 horosphere 被映射到大 horosphere 中，以及小 horosphere 被映射到小 horosphere 中。遗憾的是，准 Wolff 点的存在通常并不能很好地帮助描述 $\{F^n\}$ 的行为，因为大 horosphere 对迭代序列提供的控制非常有限。另一方面，尽管 Wolff 点确实给出限制性强得多的 Julia型不等式，但它们并不总是存在（见 [22, 定理 4.1] ，其中刻画了任意自映射 F of $\mathbb{D}^2$ 的 Wolff 点集合）。最后，在 [20, 第 8], 节中，Frosini 研究了广义 Wolff 点，这启发了我们的下一个定义。

定义 6.1. 设 $F = (\phi, \psi) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 为全纯函数，且满足 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$。若存在 $M \in (0, \infty)$，使得

$$F(E(\tau, R, MR)) \subset E(\tau, R, MR),$$

对所有 $R > 0, \tau$ ，都称其为 F. 的广义 Denjoy-Wolff 点

根据双圆盘上的 Julia 不等式， F 的任意广义 Denjoy-Wolff 点 $\tau \in \partial\mathbb{D}^2$ 都必须同时是 ϕ 和 ψ 的 B 点，且满足 $F(\tau) = \tau$。另请注意，与 [20, 定义 33], 不同，我们不假设存在任何复测地线，而仅依赖 F 不变的“加权”等高面（不过，这些定义最终证明是等价的，见注 3.13）。

令 $W(F)$ 表示 F 的所有广义 Denjoy-Wolff 点的集合。我们的下一个结果是对 [20, 定理 39], 的略微加强，是直接应用本文所建立的结果得到的。注意， τ^1, τ^2 始终表示 $\mathbb{T}$ 中的点。

定理6.2. 设 $F = (\phi, \psi) : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ 为全纯映射，满足 $\phi \neq \pi^1$,$\psi \neq \pi^2$ ，且没有任何内部不动点。那么，以下三种情形中恰有一种成立：

(i) $W(F) = \{(\tau^1, \tau^2)\}$ 当且仅当 ϕ 为左 II 型且 ψ 为右 II 型；(ii) $\{\tau^1\} \times \mathbb{D} \subset W(F) \subset \big(\{\tau^1\} \times \mathbb{D}\big) \cup \{(\tau^1, \tau^2)\}$（分别地， $\mathbb{D} \times \{\tau^2\} \subset W(F) \subset \big(\mathbb{D} \times \{\tau^2\}\big) \cup \{(\tau^1, \tau^2)\}$）当且仅当 ϕ 为左 I 型且ψ 为右 II 型（分别地， ϕ 为左 II 型且 ψ 为右 I 型）；(iii) $W(F) = \big(\{\tau^1\} \times \mathbb{D}\big) \cup \{(\tau^1, \tau^2)\} \cup \big(\mathbb{D} \times \{\tau^2\}\big)$ 当且仅当 ϕ 为左 I 型且 ψ 为右 I 型。

证明。定理 4.3 表明，(i)–(iii) 包含所有可能的情形。

首先，假设 ϕ 是左 II 型，且 ψ 是右 II 型。定理 5.1 和推论 4.9 表明，对于某些 τ^1、$\tau^2 \in \mathbb{T}$，有 $W(F) \supset \{(\tau^1, \tau^2)\}$，其中 (τ^1, τ^2) 同时是 ϕ 的左 II 型 DW 点，其常数为 M，也是 ψ 的右 II 型 DW 点，其常数为 $1/M$. 。现在，假设 $(\sigma^1, \sigma^2) \in W(F)$。如果 $\sigma^1 \in \mathbb{D}$或 $\sigma^2 \in \mathbb{D}$，则推论 4.5 将分别推出 ψ 是右 I 型或 ϕ 是左 I 型，这与假设矛盾。因此，$(\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{T}^2$。但是，定理 3.10 和定理 2.10 表明，$(\sigma^1, \sigma^2)$ 同时是 ϕ 的左 II 型 DW 点，其常数为 $M' > 0$ ，也是 ψ 的右 II 型 DW 点，其常数为 $1/M'$。根据定理 5.1，我们得到 $(\sigma^1, \sigma^2) = (\tau^1, \tau^2)$，从而 $W(F) = \{(\tau^1, \tau^2)\}$.

反之，如果 $W(F) = \{(\tau^1, \tau^2)\}$，推论 4.5 意味着 ϕ不可能是左 I 型函数，且 ψ不可能是右 I 型函数（否则， $W(F)$ 也必须包含面边界点）。随后由定理 4.3 可得， ϕ 是左 II 型，而 ψ 是右 II 型。

接下来，我们证明（ii）。我们只处理（I 型，II 型）版本。首先，假设 ϕ 是左 I 型， ψ 是右 II 型，且 τ^1 是所有函数 ϕ_μ. 的公共 Denjoy-Wolff 点。推论 4.5 表明，$\{\tau^1\} \times \mathbb{D} \subset W$（$F$）。如果 W（F）$= \{\tau^1\} \times \mathbb{D}$，则结论成立。否则，假设我们可以找到另一个点（$\sigma^1$， σ^2）$\in W$（F）。我们必须有 $\sigma^1 \in \mathbb{T}$，否则 ψ 将是一个右 I 型函数。此外，我们可以假设 $\sigma^2 \in \mathbb{T}$（否则根据推论 4.5，我们将有 $\sigma^1 = \tau^1$）。现在，定理 3.10（具体而言，(iii) 蕴含 (i) 这一事实）说明（σ^1， σ^2）对于 ϕ. 必须是左 I 型或左 II 型 DW 点。命题 4.4 随即告诉我们， $\sigma^1 = \tau^1$. 。注意，根据定理 3.10， （τ^1， σ^2）必然是 ψ. 的右 II 型 DW 点。此外，如果（t^1， t^2）$\in W$（F）不包含于 $\{\tau^1\} \times \mathbb{D}$ 中，我们之前的论证表明， $t^1 = \tau^1$，并且（t^1， t^2）是

此外， ψ 的一个右 II 型 DW 点。命题 4.8 随即推出 $\sigma^2 = \tau^2$.。我们得出结论， $\{\tau^1\} \times \mathbb{D} \subset W\ (F)\ \subset \big(\{\tau^1\} \times \mathbb{D}\big) \cup \{\ (\tau^1,\ \sigma^2)\ \}$，其中 $\sigma^2 \in \mathbb{T}$.

反之，假设 $\{\tau^1\} \times \mathbb{D} \subset W(F)\ \subset \big(\{\tau^1\} \times \mathbb{D}\big) \cup \{(\tau^1, \tau^2)\}$，其中$\tau^1$, $\tau^2 \in \mathbb{T}$.推论 4.5 随即表明， ϕ是一个左 I 型函数，而 ψ是一个右 II 型函数（否则， $W(F)$ 将不得不包含一个形如$\mathbb{D} \times \{\sigma^2\}$的面），如所要求的。

最后，(iii) 的证明基于推论 4.5、命题 4.4 和定理 3.10；可以采用与 (ii) 的证明类似的方式进行论证。细节从略。□

注 6.3。如前一个证明所示，(ii) 中的点 (τ^1, τ^2) 属于 W(F) 当且仅当它对于 ψ. 是一个右 II 型 DW 点

致谢。第二作者谨向 John McCarthy 和 Greg Knese 致谢，感谢他们提出的宝贵建议。

References

[1] Marco Abate. “全纯映射的等高面与迭代序列”。载于：《数学杂志》198.2 (1988)，第 225–238 页。 ISSN: 0025-5874。[2] Marco Abate. 全纯映射在 taut 流形上的迭代理论。数学研究与讲义。复分析与几何。Mediterranean Press，Rende，1989，第 xvii+417 页。[3] Marco Abate. “多圆盘中的 Julia-Wolff-Carath´eodory 定理”。载于：《分析与数学杂志》74 (1998)，第 275–306 页。 ISSN: 0021-7670。[4] Marco Abate 和 Jasmin Raissy. “非光滑凸域中的 Wolff-Denjoy 定理”。载于：Ann. Mat. Pura Appl. (4) 193.5 (2014)，第 1503–1518 页。[5] J. Agler、R. Tully-Doyle 和 N. J. Young. “通过广义模型研究二元解析函数的边界行为”。载于：《数学探索》(N.S.) 23.4 (2012)，第 995–1027 页。[6] Jim Agler 和 John E. McCarthy. Pick 插值与希尔伯特函数空间。第 44 卷。数学研究生教材。美国数学会，普罗维登斯，RI，2002，第 xx+308 页。 ISBN: 0-8218-2898-3。[7] Jim Agler、John E. McCarthy 和 N. J. Young. “通过希尔伯特空间方法证明双圆盘上的 Carath´eodory 定理”。载于：《数学年刊》352.3 (2012)，第 581–624 页。[8] Jim Agler、John E. McCarthy 和 N. J. Young. “双圆盘上解析函数的面行为”。载于：《伦敦数学会通报》43.3 (2011)，第 478–494 页。[9] Jim Agler、John Edward McCarthy 和 Nicholas Young. 算子分析——复分析中的希尔伯特空间方法。第 219 卷。剑桥数学论丛。剑桥大学出版社，剑桥，2020，第 xv+375 页。ISBN: 978-1-108-48544-9。[10] Leandro Arosio 和 Pavel Gumenyuk. “多圆盘全纯自映射的 Valiron 方程与 Abel 方程”。载于：Internat. J. Math. 27.4 (2016)，第 16500

34,

16.[11] Monika Budzy´nska。“复巴拿赫空间中的有界严格凸域内压缩映射的 Denjoy-Wolff 定理”。载于：《Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.》39.2（2014），第 919–940 页。[12] Monika Budzy´nska。“ $\mathbb{C}^n$中的 Denjoy-Wolff 定理”。载于：Nonlinear Anal. 75.1（2012），第 22–29 页。[13] Monika Budzy´nska、Tadeusz Kuczumow 和 Simeon Reich。“Denjoy-Wolff型定理”。载于：《Ann. Mat. Pura Appl.》（第 4 辑）192.4（2013），第 621–648 页。

[14] R. B. Burckel。“圆盘的解析自映射的迭代”。载于：《美国数学月刊》88.6（1981），第 396–407 页。[15] C. Caratheodory。《复变函数论》。第 2 卷。F. Steinhardt 译。Chelsea Publishing Co.，纽约，1954 年，第 220 页。[16] Cho-Ho Chu 和 Michael Rigby。“有界对称域上的视球与全纯映射的迭代”。载于：《数学进展》311（2017），第 338–377 页。[17] Cho-Ho Chu 和 Michael Rigby。“希尔伯特球乘积上的自映射迭代”。载于：《数学分析及其应用杂志》411.2（2014），第 773–786 页。 ISSN: 0022-247X。[18] A. Denjoy。“关于解析函数的迭代”。载于：《巴黎科学院报告》182（1926），第 255–257 页。 ́Clifford J. Earle 和 Richard S. Hamilton。“全纯映射的不动点定理”。载于：《整体分析》（纯数学专题讨论会论文集，第 XIV、XV、XVI 卷，加利福尼亚州伯克利，1968 年）。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970 年，第 61–65 页。[19] Chiara Frosini。“多圆盘上的布塞曼函数与 Julia-Wolff-Caratheodory 定理”。载于：《Adv. Geom.》10.3（2010），第 435–463 页。[20] Chiara Frosini。《复双圆盘上的动力学》。2004 年。 ́: https://arxiv.org/abs/math/0402014。[21] Chiara Frosini。“有界域上的动力学”。载于：《 URL-调和方程与分析领域的最新进展》。第 370 卷。《Contemp. Math.》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005 年，第 99–117 页。[22] Michel Herv pe。“双圆盘中的解析变换迭代”。载于：《Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.》（第 3 辑）71（1954）。[23] Michel Herv ́e。“从一个 ́维球到其自身的解析映射的若干性质”。载于：《J. Math. Pures Appl.》（第 9 辑）42（1963），第 117–147 页。 ́Gaston Julia。“Schwarz 引理的新推广”。载于：《数学学报》42.1（1920），第 349–355 页。[24] Tran Vu Khanh 和 Ninh Van Thu。“ ́中有限型与无限型伪凸域上的全纯自映射的迭代”。载于：《美国数学会会刊》144.12（2016），第 5197–5206 页。 ́ Barbara D. MacCluer。“C ́中单位球的全纯自映射的迭代”。载于：《Michigan Math. J.》30.1（1983），第 97–106 页。 ̀John E. McCarthy 和 James E. Pascoe。“重新审视双圆盘上的 Julia-Caratheodory 定理”。载于：《Acta Sci. Math. (Szeged)》83.1-2（2017），第 165–175 页。 m : 0001-6969。[25] P. Mellon。“有限秩有界对称域上的 Wolff定理”。载于：《数学分析及其应用杂志》456.1（2017），第 57–68 页。[26] : 0022-247X。 $\mathbb{C}^n$P. Mellon。“有限维有界对称域上的 Denjoy-Wolff理论”。载于：《Ann. Mat. Pura Appl.》（第 4 辑）195.3（2016），第 845–855 页。[27] : 0373-3114。 ^{N}Jason Nowell。《多圆盘上解析映射的 Denjoy-Wolff集》。博士论文——佛罗里达大学，2019 年。[28] Donald Sarason。《单位圆盘中的子Hardy希尔伯特空间》。第 10 卷。阿肯色大学数学科学讲义。Wiley-Interscience 出版物。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1994 年，第 xvi ́页。 ISSNAlan Sola 和 Ryan Tully-Doyle。“[29] 上的低阶有理内扭积的动力学”。载于：《波兰数学年刊》128.3（2022），第 249–273 页。 ISSN: 0066-2216。[30] Kazimierz W lodarczyk。“ ISSN-代数的 Julia引理与 Wolff定理”。载于：《美国数学会会刊》99.3（1987），第 472–476 页。

[35] J. Wolff。《有界函数的迭代》。载于：《巴黎科学院报告》182（1926），第 200–201 页。[36] J. Wolff。《全纯函数在某个区域内的迭代，且其值属于该区域》。载于：《巴黎科学院报告》182（1926），第 42–43 页。[37] J. Wolff。《Schwarz 定理的一种推广》。载于：《巴黎科学院报告》182（1926），第 918–920 页。DEPARTMENT OF MATHEMATICS、 UNIVERSITY OF FLORIDA、 GAINESVILLE、 FL*Email address*： mjury@ufl.edu
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS、 WASHINGTON UNIVERSITY IN ST. LOUIS、 ST. LOUIS、 MO*Email address*： gtsikalas@wustl.edu