arXiv:2304.13196v1 [math.GT] 25 Apr 2023

简单闭曲线、非核同调与 Magnus嵌入

Adam Klukowski*

2023年4月27日

摘要

我们研究由简单闭曲线的提升所张成的覆盖空间同调子空间。我们的主要结果是证明了存在这样的无分歧覆盖：该子空间是一个真子空间。更一般地说，我们构造了这样的覆盖，其同调并非由基本群的某个固定可解商群的非核所生成。我们解释了Malestein和Putman 针对分歧覆盖所采用的现有方法与 Magnus代数之间的关系，这显著简化了他们的证明。随后，我们通过将曲面群嵌入某些代数的单位群中对该方法进行了推广，这一结果本身也可能具有独立意义。

1 引言

考虑一个可定向曲面的有限度覆盖 $p : \Sigma \to \Sigma_{g,n}$，该曲面 $\Sigma_{g,n}$ 的亏格为 g，有 n 个穿孔。简单闭曲线同调 $\mathrm{H}^{\mathrm{scc}|\Sigma_{g,1}^n}(\widetilde{\Sigma}; M)$ 定义为 $\mathrm{H}_1(\Sigma; M)$ 的子空间，由形如以下形式的元素张成

$$\left\{ [\widetilde{\gamma}] \in \mathrm{H}_1(\widetilde{\Sigma}; M) \;\middle|\; \widetilde{\gamma} \text{ is a component of } p^{-1}(\gamma) \text{ for a simple closed curve } \gamma \text{ on } \Sigma_{g,n} \right\} \quad (1)$$

我们的主要定理如下：

定理 1.0.1：对于任意 $g \geq 2$、$n \geq 0$ 和奇素数 r，存在一个覆盖 $\Sigma \to \Sigma_{g,n}$，其次数是 r 的幂，并且满足 $\mathrm{H}_1^{\mathrm{scc}}(\Sigma; \mathbb{Q}) \neq \mathrm{H}_1(\Sigma; \mathbb{Q})$。

$\mathrm{H}_1^{\mathrm{scc}} = \mathrm{H}_1$ 这一问题是March´e [10] 和Looijenga [7]独立提出的一个开放问题。Farb和Hensel [2]对图的阿贝尔覆盖和二步幂零覆盖给出了肯定答案。Koberda和Santharoubane [6] 利用TQFT方法找到了满足$\mathrm{H}_1^{\mathrm{scc}}(\Sigma; \mathbb{Z}) \neq \mathrm{H}_1(\Sigma; \mathbb{Z})$的曲面覆盖，但他们的方法无法排除$\mathrm{H}_1^{\mathrm{scc}}(\Sigma; \mathbb{Z})$具有有限指数的可能性（等价地说，该方法不适用于

*牛津大学，klukowski@maths.ox.ac.uk

有理系数而非整数系数）。Markovi´c和To˘si´c [12] 基于Markovi´c [11] 以及Bogomolov和Tschinkel [1]的研究，指出了一个满足$H_1^{\mathrm{scc}|\Sigma_2}(\Sigma_{648};\mathbb{Q}) \neq H_1(\Sigma_{648};\mathbb{Q})$的无分歧覆盖 $\Sigma_{648} \to \Sigma_2$示例。

本文建立在Malestein和Putman [9] 以及Farb和Hensel [2]的早期思想之上。在 [9] 中，他们构造了分歧（等价地，要求 $n \geq 1$）覆盖，使得$\widetilde{\Sigma}$ $\widetilde{H}_1^{\mathrm{scc}}(\Sigma;\mathbb{Q}) \neq H_1(\Sigma;\mathbb{Q})$。在此，我们解决了一般情形，并展示了在所有亏格下都存在无分歧覆盖$\widetilde{\Sigma}$ $\widetilde{\Sigma}$，满足$H_1^{\mathrm{scc}}(\Sigma;\mathbb{Q}) \neq H_1(\Sigma;\mathbb{Q})$。我们将早期方法与Magnus嵌入 [8]联系起来。随后，我们构造了曲面群的类似嵌入，这些嵌入本身可能也具有独立的研究价值。

1.1 覆盖空间和子群的同调

$\widetilde{\Sigma}$我们可以研究覆盖空间 Σ 中由更一般的集合张成的同调子空间。遵循 [2], ，我们将 $\gamma \in \pi_1\Sigma$ 的一个提升定义为$\widetilde{\Sigma}$的 γ 个提升的最小拼接[1] ，其在 Σ中构成一条闭曲线。给定 Σ 上的一组曲线 $\mathcal{O} \subseteq \pi_1\Sigma$ ，我们将$H_1^{\mathcal{O}|\Sigma}(\widetilde{\Sigma};\ M)$定义为$H_1(\widetilde{\Sigma};\ M)$中由以下对象张成的子空间

$$\left\{[\tilde{\gamma}] \;\middle|\; \tilde{\gamma} \text{ is an elevation of a curve } \gamma \in \mathcal{O}\right\} \tag{2}$$

我们在定理 1.1.2 中给出一个关于一大类子集的不足性结果。对于商群 $\theta\colon \pi_1\Sigma \to Q$，令 $H_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Q}) = H_1^{\pi_1\Sigma\setminus \theta|\Sigma\text{核}}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Q})$ 表示由在 Q 中非平凡的曲线的提升所张成的子空间。

定理 1.1.2：设 $g \geq 2$, $n \geq 0$，且 $\theta : \pi_1\Sigma_{g,\ n} \to Q$ 是一个非平凡的$\widetilde{\Sigma}$奇数阶有限可解商群。存在一个正规覆盖 $\Sigma \to \Sigma_{g,\ n}$ ，使得 $H_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q}) \neq H_1(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q})$。此外，我们可以要求该覆盖的次数的所有素因子都整除 $|Q|$。

我们指出 1.1.2 的一些推论，这些推论已见于现有文献的不同地方。

推论 1.1.3：设 $g \geq 2, n \geq 0$。对于 $\Sigma_{g,n}$ 上以下每一组圈 $\mathcal{O}$ ，都存在一个正规覆盖 $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma_{g,n}$，使得 $H_{\mathcal{O}|\Sigma_{g,1}\ \ ^n}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Q})$ 不等于整个 $H_1(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q})$。

1. 定理 1.0.1： $\mathcal{O}$ 由简单闭曲线组成。2. 本原同调： $\mathcal{O}$ 由属于某个极小生成集的元素组成的$\pi_1\Sigma_{g,\ n}$。3. 更一般地，任意集合 $\mathcal{O}$ 均包含于有限个 Aut($\pi_1\Sigma_{g,\ n}$)-轨道的并集中。4. d-本原同调 $H_1^{d-\mathrm{prim}}$ ： $\mathcal{O}$ 由所有映射到 $H_1(\Sigma_{g,\ n};\frac{\mathbb{Z}}{d})$ 中非零向量的环路组成，其中 $d > 1$ 为奇数无平方因子数。

[1]也就是说， $\tilde{\gamma}$ 是 γ^k 的提升，其中 k 是使 $\tilde{\gamma}$ 成为闭曲线的最小正整数

本原同调（2.）在 [2] 中首次提出。第 3 条和第 4 条分别是 [9] 中定理 C 和 D 的推广。上述两篇论文都只研究了自由基本群（$n \geq 1$），而我们同时研究自由群和曲面群。

注 1.1.4：在陈述 1、2、3 中，对于任意奇素数 r，我们还可以额外要求覆盖次数是 r 的幂。在 4 中，我们可以要求覆盖次数整除 d 的某个幂。

注 1.1.5：Kent [10] 曾提出，我们是否可以将 $\mathcal{O}$ 取为所有不填充 $\Sigma_{g,\,n}$ 的曲线所组成的集合。定理 1.1.2 并未回答这个问题：如果 $|Q|$ 是基本群的一个有限商群，且 γ 是一条非填充曲线，那么 $\gamma^{|Q|}$ 是非填充的，并且在 Q 中是平凡的。

注 1.1.6：当 $n \geq 1$ 时，我们可以从定理 1.1.2 中去掉 G 的奇数阶限制——参见注 3.1.13。不过，我们的证明仍然依赖于可解性（这就是我们强调这一点的原因，尽管每个奇数阶有限群本身已经是可解的 [4]）。
代数解释 令 R 为 π_1 的有限指数子群（$\Sigma_{g,\,n}$），且 $\mathcal{O} \subseteq \pi_1\Sigma_{g,\,n}$。从代数角度看，$\gamma$ 的提升是元素 γ^m 的[2]，其中 m 是满足 $\gamma^m \in R$ 的最小正整数。于是，$\mathrm{H}_1^{\mathcal{O}}(R;\,M)$ 是由集合张成的 $\mathrm{H}_1(R;\,M)$ 的子空间

$$\left\{[x^m] \in \mathrm{H}_1(\pi_1\Sigma_{g,n}; M)\,\middle|\, x \in \pi_1(\Sigma_{g,n}) \text{ and } m \in \mathbb{Z} \text{ such that } x^m \in R\right\} \tag{3}$$

当 $R = \pi_1\widetilde{\Sigma}$ 是与覆盖对应的子群时，自然有 $\mathrm{H}_1^{\mathcal{O}}(R;\,M) \cong \mathrm{H}_1^{\mathcal{O}}(\widetilde{\Sigma};\,M)$。

备注 1.1.7：就本文的结果而言，边界分支与穿孔的表现完全相同。

曲面群的其他推论 Malestein 和 Putman 注意到了一些关于自由群的有趣论断（ [9] 中的定理 F 和 G），其论证基于 [6] 的一个论证。我们的定理 1.1.2 允许将他们的论证应用于曲面群，从而得到以下推论。

定理 1.1.FG：设 $g \geq 2$，且 $\theta\colon\ \pi_1\Sigma_g \to Q$ 是一个奇数阶有限可解商群。存在一个整数线性表示 $\rho : \pi_1\Sigma_g \to \mathrm{GL}_d\mathbb{Z}$，其像为无限像，并且 $\rho(\pi_1\Sigma_g \setminus \ker\theta)$ 中的每个元素都具有有限阶。

如果我们可以将核的补集替换为推论 1.1.3 中的任意特殊子集，那么 1.1.FG 的表述仍然成立。

致谢 我谨感谢 Vlad Markovi´c、Misha Schmalian、Ognjen To˘si´c、Dawid Kielak 和 Ric Wade 提出的宝贵建议并参与讨论。本研究得到了西蒙斯基金会的资助。

[2]按照我们对定义的设定，代数提升是唯一的，而拓扑提升则不是。这是因为在进行代数描述时，我们隐含地为 $\widetilde{\Sigma}$ 选择了一个首选基点。

1.2 概述与结构安排

我们的方法包含两个步骤。

$$\begin{array}{c}\text{thm 1.1.2, cor 1.1.3}\\ \mathrm{H}_1^{\mathrm{scc}},\mathrm{H}_1^{\mathcal{O}},\mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}\neq\mathrm{H}_1\end{array}\xleftarrow{\text{sec 2.2}}\begin{array}{c}\text{cor 1.1.3.4}\\ \mathrm{H}_1^{d-\mathrm{prim}}\neq\mathrm{H}_1\end{array}\xleftarrow{\text{sec 2.3}}\begin{array}{c}\text{sec 3}\\ \text{prop 2.3.9}\\ (G,C,\rho,\alpha,\Psi)\end{array}$$

第一步在第 2 节中介绍，内容是构造一些覆盖空间，使其同调能够识别出有趣的曲线。在第 2.2 节中，我们由定理 1.1.2 推出关于简单闭曲线同调的定理 1.0.1，并将定理 1.1.2 化归为其特殊情形——推论 1.1.3 第 4 部分中的 d-本原同调。

第 2.3 节是第一步与第二步之间的桥梁。在此，我们将关于 d-本原同调的推论 1.1.3.4 化归为一个群论命题 2.3.9。其思路是将覆盖空间的同调视为覆盖变换群的一个表示，并寻找具有某些特殊性质的覆盖变换群表示。

第二步是在第 3 节中构造基本群的一个特殊商群，并证明命题 2.3.9。我们先在第 3.1 节讨论带孔曲面的情形，并将 Malestein 和 Putman 的证明转写为 Magnus嵌入的语言，从而大幅简化论证。在第 3.2 节中，我们对曲面群进行类似的构造。

2 覆盖空间同调之间的关系

本节旨在联系各种形式的覆盖空间同调，并最终将 $\mathrm{H}_1^{\mathrm{scc}}$、$\mathrm{H}_1^{\mathcal{O}}$ 和 $\mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}$ 的不足性归结为 $\mathrm{H}_1^{d-\mathrm{prim}}$ 的不足性。我们的方法是：给定 Σ 上的一组 $\mathcal{O}$ 曲线，寻找一个覆盖空间 $\widehat{\Sigma}\to\Sigma$，使其具有更优的一组 $\widehat{\mathcal{O}}$（$\widehat{\Sigma}$ 上的曲线），从而所有进一步的覆盖空间 $\widetilde{\Sigma}\to\Sigma$ 都满足

$$\mathrm{H}_1^{\mathcal{O}|\Sigma}\left(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q}\right)\ \subseteq\ \mathrm{H}_1^{\widehat{\mathcal{O}}|\widehat{\Sigma}}\left(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q}\right). \tag{4}$$

于是，$\widehat{\mathcal{O}}$-同调的不足性意味着 $\mathcal{O}$-同调的不足性。

2.1 取覆盖空间时曲线特征的稳定性

我们注意到，每个重要性质在取覆盖空间时都保持稳定。这些事实将在第 2.2 节中用于将一般定理 1.1.2 归约到 d-本原同调的特殊情形。

引理 2.1.8：设 $p:\ \widetilde{\Sigma}\to\Sigma$ 是一个有限度覆盖，γ 是 Σ 上的一条曲线，$\tilde{\gamma}$ 是其到 Σ 的提升。则：

1. 如果 γ 是简单的，那么 $\tilde{\gamma}$也是。

2. 如果 γ 是简单且非分离的，那么 $\tilde{\gamma}$也是。3. 如果 γ 没有填充 Σ，那么 $\tilde{\gamma}$ 也没有填充 Σ。4. 如果 $[\gamma] \neq 0$ 属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$，那么 $[\tilde{\gamma}] \neq 0$ 也属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$。5. 如果该覆盖是正规覆盖，且 $[\gamma] \neq 0$ 属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$，那么 $[\tilde{\gamma}] \neq 0$ 也属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$。

证明：1. $\tilde{\gamma}$ 的一个横截自交将在 p下映射为γ 的一个横截自交。

2. 取与 γ 相交一次的 $\delta \in \pi_1\Sigma$ 。于是， δ 的某些提升的连接是一条连接 $\tilde{\gamma}$两条相对边的路径。因此， $\tilde{\gamma}$ 的补集是连通的。

3. 设 X 是 $\Sigma \setminus \gamma$的一个非拓扑圆盘分支。其原像 $p^{-1}(X)$是 $\widetilde{\Sigma} \setminus p^{-1}(\gamma)$的一个分支，并且不同胚于圆盘，因此 $p^{-1}(\gamma)$不填充$\widetilde{\Sigma}$。由于 $\tilde{\gamma}$是 $p^{-1}(\gamma)$的子集，它也不填充 $\widetilde{\Sigma}$。

4. $[\tilde{\gamma}]$ 在 p_* 下的像是 $[\gamma]$ 的正倍数，因而非零。

5. 首先，假设 $\tilde{\gamma}$ 以与互素的次数映射到 γ d r $p_*[\tilde{\gamma}] = d[\gamma] \neq 0$ 上。于是（ ）属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$，因此 $[\tilde{\gamma}] \neq 0$属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$。

其次，考虑覆盖变换群 $\mathrm{Aut}(\widetilde{\Sigma}/\Sigma) \cong \frac{\mathbb{Z}}{r}$ 为阶为 r 、由 γ生成的循环群的情形。五项正合列的一部分为

$$0 = H_2(\tfrac{\mathbb{Z}}{r}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\widetilde{\Sigma}; \mathbb{Z})_{\mathrm{Aut}(\widetilde{\Sigma}/\Sigma)} \xrightarrow{p_*} H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\tfrac{\mathbb{Z}}{r}; \mathbb{Z}) = \tfrac{\mathbb{Z}}{r} \longrightarrow 0 \quad (5)$$

因此，存在一些基，使得 p_* 成为标准嵌入

$$H_1(\widetilde{\Sigma}; \mathbb{Z})_{\mathrm{Aut}(\widetilde{\Sigma}/\Sigma)} \cong r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}^m \cong H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \quad (6)$$

令 $\pi : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 为到第一因子的投影。 γ 生成覆盖变换群，因此 $\pi(\gamma) \in \mathbb{Z} \setminus r\mathbb{Z}$，且 $\pi \circ p(\tilde{\gamma}) = \pi(\gamma^r) \in r\mathbb{Z} \setminus r^2\mathbb{Z}$。于是 $r^{-1} \cdot \pi \circ p_*$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模同态 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$，它将 $[\tilde{\gamma}]$ 映至 $\mathbb{Z} \setminus r\mathbb{Z}$，所以 $[\tilde{\gamma}] \neq 0$属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$。

第三,为令一般的循环覆盖。它可以实现为一个由素数次数循环覆盖组成的循环覆盖塔。我们已经穷尽了这些情形，因此由归纳法得出 $[\gamma] \neq 0 \Rightarrow [\tilde{\gamma}] \neq 0$。

最后考虑一般正规覆盖 $p : \Sigma \to \Sigma$。定义空间 $\Sigma = \Sigma/\langle\gamma\rangle_{\mathrm{Aut}(\widetilde{\Sigma}/\Sigma)}$。它包含于序列中

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{p}{\frown} & & \\ \widetilde{\Sigma} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \widehat{\Sigma} & \xrightarrow{\hat{p}} & \Sigma \\ \tilde{\gamma} & \longmapsto & \hat{\gamma}^m & \hat{\gamma} & \longmapsto \gamma \end{array} \quad (7)$$

覆盖映射，其中 $\hat{\gamma}$ 是 γ 到 Σ 的提升，而 m 是 γ 在自同构群(Σ/Σ)中的阶。$\hat{p}$ 将 $\widehat{\Sigma}$ $\widetilde{\Sigma}$ $\widehat{\Sigma}$$\hat{\gamma}$ 映射到 γ，次数为 1，因此 $[\hat{\gamma}] \neq 0$ 属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$。$\tilde{p}$： $\Sigma \to \Sigma$ 是一个循环覆盖，而 $\tilde{\gamma}$ 是 $\hat{\gamma}$的$\widetilde{\Sigma}$提升，因此 $[\tilde{\gamma}] \neq 0$ 属于 $H_1(\Sigma; \mathbb{F}_r)$。□

2.2 化简为 d-本原同调

这里我们将定理 1.1.2 和推论 1.1.3 归约为推论 1.1.3 的陈述 4—— d-本原同调的不充分性。

假设定理 1.1.2，证明推论 1.1.3

3.（轨道） $\Rightarrow$ 1。（简单闭曲线）：Mcg($\Sigma_{g,\ n}$) 在非分离简单闭曲线上传递作用，而分离简单闭曲线的轨道只有有限多个，这些轨道由亏格和穿孔的划分参数化（参见 [3] 中的第 1.3 章）。Mcg($\Sigma_{g,\ n}$) 通过自同构作用于 $\pi_1\Sigma_{g,\ n}$，因此简单闭曲线的集合包含于有限多个 Aut($\pi_1\Sigma_{g,\ n}$)-轨道的并集中。

3.（轨道） $\Rightarrow$ 2。（本原元）：Aut($\pi_1\Sigma_{g,\ n}$) 在本原元上传递作用。

定理 1.1.2 $\Rightarrow$ 3。（轨道）：设 r 是素数。自由群和曲面群都是剩余 r-群，因此存在一个有限 r-群商群 θ：$\pi_1\Sigma_{g,\ n} \to Q$，其核与 $\mathcal{O}$ 不相交。那么，对于任意覆盖 $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma_{g,\ n}$，$\mathrm{H}_1^{\mathcal{O}}(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q})$。此外，$Q$ 是一个 r-群，因而是可解的。□

显然，关于 d-本原同调的推论 1.1.3.4 只是定理 1.1.2 的一个特例，即当商群 Q 是 $\mathrm{H}_1(\Sigma;\frac{\mathbb{Z}}{d})$ 时。下面我们将一般情形化归为这一特例。

^假设推论 1.1.3.4，证明定理 1.1.2 令 Σ 为对应于 $\ker\theta$ 的覆盖。将 Q 的导出列记为

$$Q = Q^{(0)} \triangleright Q^{(1)} \triangleright \cdots \triangleright Q^{(s)} = \{1\} \tag{8}$$

如有必要进行细化后，我们可以假设 $\frac{Q^{(i)}}{Q^{(i+1)}}$ 是无平方因子阶的阿贝尔群。令 $\Sigma^{(i)}$为对应于 $\theta^{-1}(Q^{(i)})$ 的覆盖。这给出一列阿贝尔覆盖

$$\widehat{\Sigma} = \Sigma^{(s)} \to \Sigma^{(s-1)} \to \cdots \to \Sigma^{(0)} = \Sigma_{g,n} \tag{9}$$

考虑 $\gamma \in \pi_1\Sigma_{g,n} \setminus \ker\theta$ 到 $\widehat{\gamma}$的一个提升 $\hat{\gamma}$。如果 $\hat{\gamma}$ 以次数 1 映到 γ 上，则 $\pi_1\Sigma$ 包含 γ 的一个共轭元，这是不可能的。令 i 为最大的指标，使得 $\hat{\gamma}$ 以大于 1 的次数映到其在 $\Sigma^{(i)}$ 中的像 $\gamma^{(i)}$ 上。这意味着$\theta(\gamma^{(i)}) \in Q^{(i)} \setminus Q^{(i+1)}$，因此其在 $\frac{Q^{(i)}}{Q^{(i+1)}}$ 中的像是非平凡的，所以对于某个整除 $|Q|$的 p，$[\gamma^{(i)}] \neq 0$ 属于 $\mathrm{H}_1(\Sigma^{(i)};\mathbb{F}_p)$。但是 $\hat{\gamma}$ 是 $\gamma^{(i)}$的一个提升，因此根据“ r-非平凡性的稳定性”——引理 2.1.8 的第 ^5 部分——我们知道 $[\hat{\gamma}] \neq 0$ 属于 $\mathrm{H}_1(\Sigma;\mathbb{F}_p)$。

我们已经证明 $\widehat{\Sigma}$ 中是非平凡的，其中任意曲线的任意提升 $\widehat{\Sigma}$ 在 $\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma};\frac{\mathbb{Z}}{d})$ 中是非平凡的 θ 其中 d 是 $|Q|$ 的任意提升。因此，对于任意进一步的覆盖 $\widetilde{\Sigma} \to \widehat{\Sigma}$，我们有

$$\mathrm{H}_1^{\theta\neq 1|\Sigma_{g,n}}(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q}) \subseteq \mathrm{H}_1^{d-\mathrm{prim}|\widehat{\Sigma}}(\widetilde{\Sigma};\mathbb{Q}) \tag{10}$$

^证明相对于 Σ 的 d-本原同调不足的证据（推论 1.1.3 的第 4 部分），同时也是 $\Sigma_{g,\ n}$ 的定理 1.1.2 的证据。□

d-本原同调的不足

这里我们证明推论 1.1.3 的第 4 部分。我们假设下文的关键命题 2.3.9，其证明留待第 3 节给出。

命题 2.3.9：设 F 是一个自由群或曲面群，并设 n 为 F 的秩。对于任意奇素数 r 以及足够大的 $k \in \mathbb{N}$，存在有限 r-群 G、一个中心子群 $C \leq G$，以及群同态 ρ：$F \to G$、α：$G \to \mathbb{F}_r^n$ 和 Ψ：$C \to \mathbb{F}_r$，使得

- 复合 $\alpha \circ \rho$ 正是模 r 阿贝尔化 $F \twoheadrightarrow \mathbb{F}_r^n = \mathrm{H}_1(F;\ \mathbb{F}_r)$。
- 若 $g \in G \setminus \ker \alpha$，则 g^{r^k} 属于 $C \setminus \ker \Psi$。

我们将使用下面两个引理，将覆盖的同调与覆盖变换群的表示论联系起来。第一个引理是 Gasch¨utz [5] 的经典结果。

引理 2.3.10a：设 $R \triangleleft F_n$、$G = \frac{F_n}{R}$ 和 k 为特征为 0 的域。则 $\mathrm{H}_1(R;k) \cong k \oplus k[G]^{n-1}$ 作为 G- 模。

曲面群的情况并没有太大不同。

引理 2.3.10b：设 $R \triangleleft \pi_1\Sigma_g$、$G = \frac{\pi_1\Sigma_g}{R}$ 和 k 是特征为 0 的域。则 $\mathrm{H}_1(R;k) \cong k^2 \oplus (k[G])^{2g-2}$ 作为 G-模。

证明：设 $F = \pi_1(\Sigma_g)$ 是一个曲面群。取 Σ_g 的标准胞腔复形，并令 Σ_R 为相应的覆盖。链复形 $C_\bullet(\Sigma_R) \otimes k$ 为

$$k[G] \xrightarrow{\partial_2} k[G]^{2g} \xrightarrow{\partial_1} k[G] \tag{11}$$

记 $I = \{x \in k[G] | \sum_{g\in G} x_g = 0\}$ 为增广理想。

当且仅当任意两个 2-胞腔具有相同的系数时，一个 2-链才会被映射到 0，因此 $\ker \partial_2 \cong k$ 和 $\mathrm{im}\, \partial_2 \cong I$。由半单性，$C_1(\Sigma_R) \otimes k = U \oplus k \oplus k[G]^{2g-1}$，其中 $U \cong I$ 和 $\mathrm{im}\ \partial_2 = U \oplus 0 \oplus 0$。

我们有 $\mathrm{im}\ \partial_1 = I$。再次利用半单性，$C_1(\Sigma_R) \otimes k = V \oplus k \oplus k[G]^{2g-1}$ for some$V \cong I$，在此分解中这样的 ∂_1 是到 V的投影。

由于 $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$，子空间 U、V的交平凡。因此 $C_1(\Sigma_R) \otimes k = U \oplus V \oplus k^2 \oplus k[G]^{2g-2}$，所以 $H_1(\Sigma_R;k) = k^2 \oplus k[G]^{2g-2}$。□

现在我们可以证明 d-本原同调的不足之处了。

推论 1.1.3 第 4 部分的证明（以命题 2.3.9 为条件）：

首先处理一个技术细节：在命题 2.3.9 中，我们将“素数 r”推广为“无平方因子 d”。为此，取足够大的 $k \in \mathbb{N}$，分解 $d = \prod_i r_i$，并对第 i 个素因子 r_i，取由命题 . . . 给出的 ($G_i\ C_i\ \rho_i\ \alpha_i\ \Psi_i$ 2 3 9 $G = \prod_i G_i\ \ C = \prod_i C_i \leq , , , ,)$。然后定义 , ( ), $Z\ G$ $\rho = \prod_i \rho_i$ $\pi_1\Sigma_{g\,n} \to G$ $q_i \equiv \delta_{ij}$ r_j^{k+1} 以及：, 。根据 ChRT，存在 (mod)。设$\alpha = \sum_i q_i \cdot \alpha_i$: $G \to \mathrm{H}_1(\Sigma_{g,n};\ \frac{\mathbb{Z}}{d})$，以及 $\Psi = \sum_i q_i \cdot \Psi_i$: $C \to \frac{\mathbb{Z}}{d}$。不难验证

这些定义良好，且满足

• 复合 $\alpha \circ \rho$ 是标准映射 $F \to \mathrm{H}_1(\Sigma_{g,n};\ \frac{\mathbb{Z}}{d})$ • 对于任意 $g \in G \setminus$ 核 α，我们都有 $g^e \in C \setminus$ 核 Ψ，其中 $e = \sum_i q_i r_i^k$。

具有上述性质的结构 $(G, C, \rho, \alpha, \Psi)$ 确定后，我们继续构造 V的一个非平凡不可约有理表示，使得 $G \setminus$ 核 α中的元素没有非零不动向量。令 ω 为一个原始的 d次单位根，并令 $W = \mathbb{Q}[\omega]$ 为分圆域。我们通过令 $c \in C$ 按 $\omega^{\Psi(c)}$作用，将 W 构造成 C 的一个表示，然后诱导得到 $V' = \mathrm{Ind}_C^G W$。

假设 $g \in G \setminus$ 核 α 固定了某个 $v \in V'$。根据 G的性质， g 有一个幂$c \in C \setminus$ 核 Ψ，它也必然固定 v。选取 Λ 的一组陪集代表元，用于表示 C 在 G中的陪集，使我们能够将诱导表示明确写成 $V' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot W$。利用这一描述，我们可以写出 $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot v_\lambda$。由于 c是中心的，我们有

$$v = c \cdot v = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot (c \cdot v_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \cdot \omega^{\Psi(c)} v_\lambda = \omega^{\Psi(c)} v \tag{12}$$

但是 $\Psi(c) \not\equiv 0 \pmod{d}$，因此 v 必定是零向量。因此，我们可以取 V 为 V'的任意不可约因子。

现在我们手头有 G的一个非平凡不可约表示 V，使得任意 $g \in G \setminus$ 核 α都只固定 0。令 $R =$ 核 ρ。根据引理 2.3.10a 和 2.3.10b，$\mathrm{H}_1(R;\mathbb{Q})$ 包含 $\mathbb{Q}[G]$ 作为直和项，因此也包含 V。取任意 d-本原 x，并注意到这意味着 $\rho(x) \in G \setminus$ 核 α。假设 $x^m \in R$。向量 $[x^m] \in \mathrm{H}_1(R;\mathbb{Q})$ 被 $\rho(x)$ 固定，因此其在 V 上的投影必为 0。但对于 d- 本原同调的任意生成元，这一点都成立，因此 $\mathrm{H}_1^{d-\mathrm{prim}}(R;\mathbb{Q}) \cap V = \{0\}$，这意味着 $\mathrm{H}_1^{d-\mathrm{prim}}(R;\ \mathbb{Q}) \neq \mathrm{H}_1(R;\ \mathbb{Q})$。□

3 命题 2.3.9 的证明

本节证明命题 2.3.9。我们将其分为两种情况：命题 3.1.9a 中的自由基本群（$n \geq 1$），以及命题 3.2.9b 中的曲面群（$n = 0$）。后一种情况遵循类似的基本思路，但需要进行一些修改，以保留曲面群中的关系。

我们需要一个预备引理

引理 3.0.11：对于任意 $n \geq 1$、素数 r 以及满足 $r^k > (n-1)(r-1)$ 的 k，存在一个次数为 r^k、在 $\mathbb{F}_r^n \setminus \{0\}$ 上非零的齐次多项式 $P \in \mathbb{F}_r[a_1, \ldots, a_n]$。

证明：令

$$P_1(a_1, a_2) = a_1 - a_1 a_2^{r-1} + a_2 \tag{13}$$

当 $a_2 \neq 0$ 时， $P_1(a_1, a_2)$ 的值等于 a_2；否则等于 a_1。无论哪种情况，只要其任一参数非零，$P_1 \neq 0$。

然后我们通过归纳定义

$$P_i(a_1,\dots,a_{i+1}) = P_1\left(P_{i-1}(a_1,\dots,a_i), a_{i+1}\right) \tag{14}$$

多项式 P_{n-1} 在 $\mathbb{F}_r^n \setminus \{0\}$上非零，其总次数为 $(n-1)(r-1)+1$，且其每个单项式的次数模 $r-1$均同余于 1。

考虑一个 P_{n-1} 的单项式 m，其次数为 e，并假设变量 a_i 以非零指数出现。则单项式 $m' = a_i^{r^k-e} m$ 在 $\mathbb{F}_r^n$上的处处取值都与 m 相同，且次数为 r^k。将 P_{n-1} 的每个单项式 m 替换为这样的 m'，即可得到一个满足引理 3.0.11 前提的多项式。□

3.1 自由群

回顾

命题 3.1.9a：对于 $n \in \mathbb{N}_+$、素数 r以及充分大的 k，存在有限r-群 G、中心子群 $C \le G$、群同态 $\rho\colon F_n \to G$、 $\alpha\colon G \to \mathbb{F}_r^n$以及$\Psi\colon C \to \mathbb{F}_r$，使得

- 复合 $\alpha \circ \rho$ 是模-r 阿贝尔化 $F_n \twoheadrightarrow \mathbb{F}_r^n = \mathrm{H}_1(F_n;\mathbb{F}_r)$。
- 如果 $g \in G \setminus$ 核 α，那么 $g^{r^k} \in C \setminus$ 核 Ψ。

证明：令

$$\mathcal{F} = \frac{\mathbb{F}_r\langle X_1,\dots,X_n\rangle}{(X_1,\dots,X_n)^{r^k+1}} \tag{15}$$

它是截断于次数 r^k的自由结合 $\mathbb{F}_r$-代数，定义为：$\mathcal{F}$由系数为 $\mathbb{F}_r$的非交换变量 X_1、...、X_n组成的次数至多为 r^k的多项式构成。

在 $\mathcal{F}$ 中包含所有尾项为 1 的多项式

$$G_{\mathcal{F}} = 1 + (X_1,\dots,X_n) = \{P \in \mathcal{F} | P(0,\dots,0) = 1\} = \{1 + (\text{degree} \ge 1)\} \tag{16}$$

这是一个关于乘法的群。唯一需要检查的非平凡事项是逆元的存在性，而逆元可以通过以下方式得到:

$$(1+A)^{-1} = 1 + \sum_{e=1}^{r^k} (-1)^e A^e \tag{17}$$

我们定义 ρ，将 F_n 的第 i 个生成元映射为 $1 + X_i \in G_{\mathcal{F}}$。群 $G_{\mathcal{F}}$ 通过遗忘二次及更高次数而满射到 $\mathbb{F}_r^n$

$$\alpha : 1 + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n + (\deg \ge 2) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{18}$$

这些映射是相容的，即 $\alpha \circ \rho$ 是模-r 阿贝尔化 $F_n \to \mathrm{H}_1(F_n;\, \mathbb{F}_r)$。

在 $\mathcal{F}$ 中我们还拥有

$$C_{\mathcal{F}} = 1 + (X_1, \ldots, X_n)^{r^k} = \Big\{1 + (\text{terms of degree } r^k)\Big\} \tag{19}$$

在 $\mathcal{F}$中，次数至少为 $r^k + 1$ 的所有项都消失，因此 $C_{\mathcal{F}}$作为 $\mathcal{F}$的子代数是中心的，所以它作为 $G_{\mathcal{F}}$ 的子群也是中心的。作为一个群，它同构于由次数为 r^k 的单项式张成的 $\mathbb{F}_r$-向量空间，其运算为加法。

在 $\mathcal{F}$ 中提升至 r^k次幂会

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + (\deg \geq 2)\right)^{r^k} = 1 + \sum_{i_1, \ldots, i_{p^k}} \prod_{j=1}^{n} a_j^{\#\text{ of occurences of } j \text{ among i's}} \cdot \prod_{l=1}^{r^k} X_{i_l} \tag{20}$$

由于项 $\prod_{l=1}^{r^k} X_{i_l}$ 构成 $C_{\mathcal{F}}$的一个基，我们可以通过群同态 $C \to \mathbb{F}_r$读出20中的系数。形式上，群 $G_{\mathcal{F}}$ 具有以下性质

性质3.1.12a：对于任意次数为 r^k 的齐次多项式 $P \in \mathbb{F}_r[a_1, \ldots, a_n]$，我们可以找到一个群同态 Ψ_P：$C_{\mathcal{F}} \to \mathbb{F}_r$，使得对于 $g \in G_{\mathcal{F}}$，有 $g^{r^k} \in C_{\mathcal{F}}$和 $\Psi_P\big(g^{r^k}\big) = P\big(\alpha(g)\big)$。

设 k 满足 $r^k > (n-1)(r-1)$。根据引理 3.0.11，存在一个次数为 r^k 的齐次多项式 $P \in \mathbb{F}_r[a_1, \ldots, a_n]$，它在 $\mathbb{F}_r^n \backslash \{0\}$ 上不为零。令 Ψ_P 为由性质 3.1.12a 提供的、与 P 对应的同态。则 $(G_{\mathcal{F}}, C_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha, \Psi_P)$ 满足命题 3.1.9a 的要求。□

备注 3.1.13：当 $r = 2$ 时，该证明仍然成立。

备注 3.1.14：通过向 $\mathcal{F}$ 添加关系 $\{X_i X_j = 0\}_{i>j}$，我们可以使群 $G_{\mathcal{F}}$ 变得更小。

3.2 曲面群

这里我们证明命题 2.3.9 的曲面情形。

命题 3.2.9b：对于任意 $g \geq 2$、奇素数 r 以及充分大的 k，存在有限 r-群 G、一个中心子群 $C \leq G$、群同态 $\rho:\ \pi_1(\Sigma_g) \to G$、$\alpha : G \to \mathbb{F}_r^{2g}$ 以及 $\Psi:\ C \to \mathbb{F}_r$，使得

- 复合 $\alpha \circ \rho$ 是模-r 阿贝尔化 $\pi_1(\Sigma_g) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_r^{2g} = \mathrm{H}_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_r)$。
- 如果 $g \in G \setminus$ 核 α，那么 $g^{r^k} \in C \setminus$ 核 Ψ。

我们的证明策略将是模仿命题 3.1.9a 证明中的构造。在第 3.2.2 和 3.2.3 小节中，我们构造两类代数，其单位群接受一个来自“具有适当线性项”的曲面群的同态。

两种代数都带有与自由情形 3.1 中的（G， C， ρ， α， Ψ）类似的数据。我们将这些对象组装起来，并在第 3.2.4 小节中完成证明。关于整个构造的图，请参见 37。

3.2.1 记号与初步观察

固定表示 $\pi_1\Sigma_g = \langle x_1、\ y_1、\ \ldots\ldots、\ x_g、\ y_g \mid \prod_{i=1}^{g} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \rangle$。那么 $\mathrm{H}_1(\pi_1(\Sigma_g); k)$ 同构于 k^{2g}，其基为 $\{x_i, y_i\}_{1\le i\le g}$。我们先对变量 $\{x_i, y_i\}_{1\le i\le g}$ 中在 $\mathbb{F}_r^{2g} \setminus \{0\}$ 上不为零的多项式进行更仔细的分析。

观察 3.2.15：引理 3.0.11 给出的多项式只有三种单项式：

- I 型：单个变量的幂 a_j^v，其中 $v \equiv 1$ 模 $(r-1)$
- II 型：至少三个不同变量的幂的乘积
- III 型：形如 $a_j^v a_{j'}^{v'}$ 的单项式，其中 $v \equiv 1$、$v' \equiv 0$ 模 $(r-1)$

证明：方程 13 中的初始 P_1 仅包含 I 型和 III 型单项式。归纳方程 14 可以复制已有单项式、由旧单项式产生新的 II 型或 III 型单项式，并添加一个 I 型单项式。最后的齐次化步骤保留每个指数模 $r-1$ 的值。□

将 III 型单项式细分为 IIIa 型和 IIIb 型：如果它们涉及 x_i、x_j 或 y_i、y_j 或 x_i、y_j with$i \neq j$，则属于 IIIa 型；如果它们的形式为 $x_i^u y_i^v$，则属于 IIIb 型。

3.2.2 代数 $\mathcal{M}$ 以及 I 型、II 型和 IIIa 型项

本节将展示代数 $\mathcal{M}$，它允许一个有趣的映射 $\pi_1\Sigma_g \to G_{\mathcal{M}}$。它将构成图 37 的上行，并在其中提供处处非零多项式的 I 型、II 型和 IIIa 型项。

定义

$$\mathcal{M} = \frac{\mathbb{F}_p\langle X_1, Y_1, \ldots, X_g, Y_g\rangle}{(X_i, Y_i)^{r^k+1} + (X_iY_i, Y_iX_i)} \tag{21}$$

也就是说，这是一个关于 X_i、Y_i 的自由结合代数，其中我们忽略所有总次数大于 r^k 的项，以及含有相邻 X_i、Y_i 的项。注意，对于 $i \neq j$，我们仍然保留 X_iY_j。

我们按照方程（16、18和19）中的方式，类似地定义 $G_{\mathcal{M}}$、$\alpha_{\mathcal{M}}$和 $C_{\mathcal{M}}$。

符号 X_i和 Y_i在代数 $\mathcal{M}$中可交换，因此 $1+X_i$和 $1+Y_i$在群$G_{\mathcal{M}}$中可交换。因此，我们有一个定义良好的群同态 $\rho_{\mathcal{M}}$： $\pi_1\Sigma_g \to G_{\mathcal{M}}$，其定义为

$$x_i \mapsto 1 + X_i \qquad\qquad y_i \mapsto 1 + Y_i \tag{22}$$

注意，这与阿贝尔化相容，即 $\alpha_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{M}}$ 是典范映射 $\pi_1\Sigma_g \to \mathrm{H}_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_r)$。

群 $G_{\mathcal{M}}$ 具有较弱的性质

性质 3.2.12b'：对于任意由 I 型、II 型或 IIIa 型项组成的次数 r^k 多项式 P，我们可以找到 Ψ_P： $C_{\mathcal{M}} \to \mathbb{F}_r$，使得对于所有 $g \in G_{\mathcal{M}}$，都有 $g^{r^k} \in C_{\mathcal{M}}$和 $\Psi_P\big(g^{r^k}\big) = P\big(\alpha_{\mathcal{M}}(g)\big)$。

证明：群 $C_{\mathcal{M}}$ 同构于 $\mathbb{F}_r$ 向量空间，其基由次数为 r^k 且不含相邻 X_i、Y_i 的单项式构成。当 P 是 I 型、II 型或 IIIa 型单项式时，我们将构造 Ψ_P，使其成为到某个合适基向量上的投影（参见公式 20）。

首先，考虑 I 型单项式 $P = x_i^{r^k}$。那么 $X_i^{r^k}$ 是一个基向量，我们可以取 Ψ_P 为到其张成空间上的线性投影。对 $y_i^{r^k}$ 也同样处理。

其次，假设 P 是 II 型或 IIIa 型单项式。那么它必有两个因子，它们并非来自同一对生成元；不失一般性，设对于 $i \neq j$，这两个因子为 $x_i^{u_i}$、$y_j^{v_j}$。考虑相应的形式乘积 $Q = X_i^{u_i} Y_j^{v_j}$。现在，遍历 P的其余因子。对于每个因子 $x_l^{u_l}$（分别为 $y_l^{v_l}$），将相应的符号$X_l^{u_l}$（分别为 $Y_l^{v_l}$）乘到 Q 上。每一步中，Q 最左端和最右端的符号都不同，因此无论左乘还是右乘，都能避免产生相邻的 X_iY_i。遍历完 P 的所有因子后，我们得到一个形式乘积 Q，它在 $\mathcal{M}$ 中不为零，且其指数与 P的相应指数相匹配。于是 Q 是 $C_{\mathcal{M}}$ 的一个基向量，而到该基向量上的投影就是所需的 Ψ_P。□

3.2.3 代数 $\mathcal{H}$ 和 IIIb 型

我们将在此构造代数 $\mathcal{H}$ 和一个有趣的映射 $\pi_1\Sigma_2 \to G_{\mathcal{H}}$。我们将在图 37 的底行中使用它，用于向处处非零多项式提供 IIIb 型项。

考虑交换环 $\mathbb{F}_r[A,B]$ $(A^{r^k+1}、A^{r^k}B、B^2)$，并取其四元数代数

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\mathbb{F}_r[A,B]}{(A^{r^k+1}, A^{r^k}B, B^2)} \right)[i,j,k] \tag{23}$$

变量 A、B彼此交换，并且与 i、j、k交换。注意，$\mathcal{H}$ 也可以被视为反交换环 $\mathbb{F}_r[i,j,k]$上的多项式环。

如前所述，我们定义乘法群 $G_{\mathcal{H}} = 1 + (A,B)$ 及其中心子群$C_{\mathcal{H}} = 1 + (A,B)^{r^k} = 1 + (A^{r^k}, A^{r^k-1}B)$。明确地，

$$C_{\mathcal{H}} = \left\{ 1 + \sum_{l \in \{1,i,j,k\}} a_l A^{r^k} l + b_l A^{r^k-1} B l \;\middle|\; a_l, b_l \in \mathbb{F}_r \right\} \cong \mathbb{F}_r^8 \tag{24}$$

忽略二次项及更高次项是一个同态 $G_{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}_r^8$，定义为

$$\alpha' : 1 + \sum_{l \in \{1,i,j,k\}} a_l A l + b_l B l + (\deg \geq 2) \;\mapsto\; (a_l, b_l)_{l \in \{1,i,j,k\}} \in \mathbb{F}_r^8 \tag{25}$$

我们只需要 α' 中的部分信息。定义 x_1、y_1、x_2、y_2： $G_{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}_r$ 分别为对 Ai、Bj、Aj、Bi 的系数进行线性投影（即提取a_i、b_j、a_j、b_i），并令

$$\alpha_{\mathcal{H}} = (x_1, y_1, x_2, y_2) : G_{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}_r^4 \tag{26}$$

现在我们来确立关于这些对象的两个事实。首先，存在一个来自具有适当线性项的曲面群的同态（引理 3.2.16）。其次， r^k 次幂会从线性化中产生一个 IIIb 型项（性质 3.2.12b"）。

引理 3.2.16：存在一个同态 τ： $\pi_1\Sigma_2 \to G_{\mathcal{H}}$ 满足

$$\tau(x_1) \equiv 1+Ai, \quad \tau(y_1) \equiv 1+Bj, \quad \tau(x_2) \equiv 1+Aj, \quad \tau(y_2) \equiv 1+Bi \qquad \mod (A,B)^2 \tag{27}$$

证明：只需安排方程（27）中的尾项，使其消去 $\pi_1(\Sigma_2)$ 中的关系。我们设

$$\tau(x_1) = 1 + Ai + Ek \quad \tau(y_1) = 1 + Bj \quad \tau(x_2) = 1 + Aj - Ek \quad \tau(y_2) = 1 + Bi \tag{28}$$

对于稍后确定的多项式 $E \in A^2\mathbb{F}_r[A]$。那么交换子 $[\tau(x_1)\ \tau(y_1)]$变为

$$\begin{aligned}
&\tau(x_1)\tau(y_1)\tau(x_1)^{-1}\tau(y_1)^{-1} = \\
&\qquad = (1 + Ai + Ek)(1 + Bj)(1 + Ai + Ek)^{-1}(1 + Bj)^{-1} = \\
&\qquad = 1 + [Ai + Ek, Bj](1 + A^2 + E^2)^{-1}(1 - Ai - Ek)(1 - Bj) = \\
&\qquad = 1 + 2B(1 + A^2 + E^2)^{-1}(Ak - Ei - A^2j - E^2j)
\end{aligned} \tag{29}$$

对第二个交换子 $[\tau(x_2)\ \tau(y_2)]$进行类似计算，得到

$$\tau(x_2)\tau(y_2)\tau(x_2)^{-1}\tau(y_2)^{-1} = 1 + 2B(1 + A^2 + E^2)^{-1}(-Ak - Ej - A^2i - E^2i) \tag{30}$$

该关系应为

$$[\tau(x_1), \tau(y_1)][\tau(x_2), \tau(y_2)] = 1 - 2B(1 + A^2 + E^2)^{-1}(A^2 + E + E^2)(i + j) \tag{31}$$

因此，只需找到一个不含常数项或线性项的幂级数 $E \in \mathbb{F}_r[\![A]\!]$，使得 $A^2 + E + E^2 = 0$。该幂级数为

$$E = \tfrac{1}{2}\left(\left(1 - 4A^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \tag{32}$$

在 $\mathbb{F}_r[\![A]\!]$ 中定义良好，因为 $\sqrt{1+x}$ 的泰勒展开中的分母是 2 的幂。□

性质 3.2.12b"：存在一个群同态 $\Psi_{\mathcal{H}}:\ C_{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}_r$，以及一个仅由 II 型项组成的多项式 $R \in \mathbb{F}_r[x_1, y_1, x_2, y_2]$，使得对于任意 $g \in \mathsf{im}\ \tau \leq G_{\mathcal{H}}$，都有 $\Psi_{\mathcal{H}}\big(g^{r^k}\big) = x_1(g)^{r^k-1} y_1(g) + R\big(\alpha_{\mathcal{H}}(g)\big)$，其中 x_1、y_1 是公式 26 中定义的阿贝尔化坐标

证明：取 $g \in G_{\mathcal{H}}$ 为 $g = 1 + x_1 Ai + y_1 Bj + x_2 Aj + y_2 Bi +$（$\deg \geq 2$）形式。则 g 在 $\alpha_{\mathcal{H}}$ 下的像为向量 $(x_1, y_1, x_2, y_2)^\top \in \mathbb{F}_r^4$。此外，

$$\begin{aligned} g^{r^k} &= 1 + \big((x_1 A + y_2 B)i + (x_2 A + y_1 B)j\big)^{r^k} = \\ &= \big[-(x_1 A + y_2 B)^2 - (x_2 A + y_1 B)^2\big]^{\frac{r^k-1}{2}} \cdot \big[(x_1 A + y_2 B)i + (x_2 A + y_1 B)j\big] \end{aligned} \tag{33}$$

j 旁边的表达式为 $(-1)^{\frac{r^k-1}{2}}$ 倍的

$$\begin{aligned} &\big[(x_1^2 + x_2^2)A^2 + 2(x_1 y_2 + x_2 y_1)AB\big]^{\frac{r^k-1}{2}} \cdot (x_2 A + y_1 B) = \\ &= \big[(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-1}{2}} A^{r^k-1} - (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-3}{2}} (x_1 y_2 + x_2 y_1) A^{r^k-2} B\big] \cdot (x_2 A + y_1 B) = \\ &= x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-1}{2}} A^{r^k} + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-3}{2}} \big((x_1^2 + x_2^2) y_1 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) x_2\big) A^{r^k-1} B = \\ &= x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-1}{2}} A^{r^k} + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-3}{2}} (x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2) A^{r^k-1} B \end{aligned} \tag{34}$$

回顾公式 24：群 $C_{\mathcal{H}}$ 与 $\mathbb{F}_r^8$ 同构，其基为

$$\Big\{ A^{r^k-1} \cdot A^u B^{1-u} \cdot l \Big| u \in \{0, 1\}, l \in \{1, i, j, k\} \Big\} \tag{35}$$

令 $\Psi_{\mathcal{H}}:\ C_{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}_r$ 为到 $A^{r^k-1} Bj$ 上的投影。则（可能相差一个符号 n)

$$\Psi_{\mathcal{H}}\big(g^{r^k}\big) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{r^k-3}{2}} (x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2) \tag{36}$$

这是一个 IIIb 型单项式 $x_1^{r^k-1} y_1$ 与 $r^k - 4$ 个 II 型项之和，正如所需。□

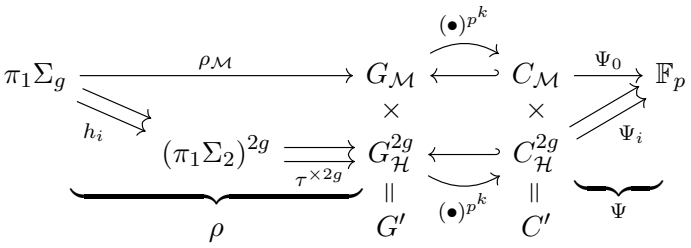
3.2.4 命题 3.2.9b 的证明

回顾一下，为了证明命题 3.2.9b，我们需要找到一个 r-群 G、中心的 $C \leq G$、同态 $\rho: \pi_1 \Sigma_g \to G$、$\alpha:\ G \to \mathbb{F}_r^{2g}$ 和 $\Psi:\ C \to \mathbb{F}_r$，使得

- 复合 $\alpha \circ \rho:\ \pi_1 \Sigma_g \to \mathbb{F}_r^{2g} = \mathrm{H}_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_r)$ 是 Hurewicz 映射
- 如果 $g \in G \setminus \ker \alpha$，那么 $g^{r^k} \in C \setminus \ker \Psi$。

作为构造的一部分，我们将使用第 3.2.2 节中的 $(G_{\mathcal{M}}, C_{\mathcal{M}}, \rho_{\mathcal{M}}, \alpha_{\mathcal{M}})$ 和第 3.2.3 节中的 $(G_{\mathcal{H}}, C_{\mathcal{H}}, \tau, \alpha_{\mathcal{H}}, \Psi_{\mathcal{H}})$。我们将按照以下方式将它们组合起来

图:



(37)

顶行将提供处处非零多项式中的 I 型、II 型和 IIIa 型项，而底行将逐一提供 IIIb 型项。

命题 3.2.9b 的证明 定义

$$G' = G_{\mathcal{M}} \times G_{\mathcal{H}}^{2g} \tag{38}$$

并令 $f_{\mathcal{M}}$、$\{f_{\mathcal{H},i}\}_{1\le i\le 2g}$ 为到各个因子的投影。

我们需要构造一个同态 ρ： $\pi_1\Sigma_g \to G'$。对于 $1 \le i \le g$，令 h_{2i}、h_{2i+1} 为投影 $\pi_1\Sigma_g \to \pi_1\Sigma_2$，即除去除两对生成元对之外的所有生成元对，其定义为

$$h_{2i}: \begin{cases} x_{i+a} & \mapsto & x_a & \text{if } a \in \{0,1\} \\ y_{i+a} & \mapsto & y_a & \text{if } a \in \{0,1\} \\ x_j, y_j & \mapsto & 1 & \text{if } j \notin \{i, i+1\} \end{cases} \qquad h_{2i+1}: \begin{cases} x_{i+a} & \mapsto & y_a & \text{if } a \in \{0,1\} \\ y_{i+a} & \mapsto & x_a & \text{if } a \in \{0,1\} \\ x_j, y_j & \mapsto & 1 & \text{if } j \notin \{i, i+1\} \end{cases} \tag{39}$$

或者 $h_{2i+1} = r \circ h_{2i}$，其中 r 是 $\pi_1\Sigma_2$ 的自同构，它交换 $x_{1、2} \leftrightarrow y_{1、2}$。从几何上看，这些映射源于将 Σ_g 的 $g-2$ 个把手压缩为点。定义 $\rho = \rho_{\mathcal{M}} \times \prod_{i=1}^{2g} \tau \circ h_i$，其中 τ 是引理 3.2.16 所提供的同态 $\pi_1\Sigma_g \to G_{\mathcal{H}}$。

定义 $G = \mathrm{im}\ \rho \le G'$。

我们有一个映射 $\alpha = \alpha_{\mathcal{M}} \circ f_{\mathcal{M}}$： $G \to \mathbb{F}_r^{2g}$。于是 $\alpha \circ \rho$ 等于 $\alpha_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{M}}$，即标准映射 $\pi_1\Sigma_g \to H_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_r)$。注意，在 G 上，这与各因子 $G_{\mathcal{H}}$给出的阿贝尔化相容，即 $\alpha_{\mathcal{H}} \circ f_{\mathcal{H},\ i}\big|_G$ 等于 α再接一个坐标投影 $\mathbb{F}_r^{2g} \to \mathbb{F}_r^4$。

子群 $C' = C_{\mathcal{M}} \times C_{\mathcal{H}}^{2g}$ 是 G'的中心子群，并且包含所有 r^k次幂。我们定义 $C = G \cap C'$。

假设 k 满足 $r^k > (n-1)(r-1)$，并令 P 为由引理 3.0.11 产生的、次数为 r^k 且在 $\mathbb{F}_r^{2g}$上处处不为零的多项式。根据观察 3.2.15，可以假设它具有如下形式

$$P(x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g) = Q(x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g) + \sum_{i=1}^{g} a_i x_i^{r^k-1} y_i + b_i x_i y_i^{r^k-1} \tag{40}$$

其中 a_i、$b_i \in \mathbb{F}_r$ 和 Q 仅包含 I 型、II 型或 IIIa 型的项。

根据性质 3.2.12b”，存在群同态 Ψ_{2i}、Ψ_{2i+1}：$C_{\mathcal{H}} \to \mathbb{F}_r$，使得对于任意满足 $\alpha(g) = (x_i, y_i)_i^\top$ 的 $g \in G$，我们有

$$\Psi_{2i} \circ f_{\mathcal{H},i}\left(g^{r^k}\right) = x_i^{r^k-1} y_i + R_{2i}\big(\alpha(g)\big) \qquad \Psi_{2i+1} \circ f_{\mathcal{H},i}\left(g^{r^k}\right) = x_i y_i^{r^k-1} + R_{2i+1}\big(\alpha(g)\big) \tag{41}$$

其中 R_j 再次只包含 I 型、II 型或 IIIa 型的项。根据性质 3.2.12b’，存在一个群同态 $\Psi_0 : G_{\mathcal{M}} \to \mathbb{F}_r$ 满足

$$\Psi_0 \circ f_{\mathcal{M}}\left(g^{r^k}\right) = \left(Q - \sum_{i=1}^{g} (a_i R_{2i} + b_i R_{2i+1})\right)\big(\alpha(g)\big) \tag{42}$$

最后，将它们组合为

$$\Psi = \left(\Psi_0 \circ f_{\mathcal{M}} + \sum_{i=1}^{g} a_i \Psi_{2i} \circ f_{\mathcal{H},2i} + b_i \Psi_{2i+1} \circ f_{\mathcal{H},2i+1}\right)\Bigg|_C \tag{43}$$

根据构造，$\Psi\big(g^{r^k}\big) = P\big(\alpha(g)\big)$。于是（$G$，$C$，$\rho$，$\alpha$，$\Psi$）是命题 3.2.9b 的一个见证。□

4 条注释

自然会问，定理 1.1.2 中关于可解性的假设是否必要。我们提出以下问题

问题 4.0.17：设 $g \geq 2$、$n \geq 0$ 以及 $\theta : \pi_1\Sigma_{g,\,n} \to G$ 是任意有限商。是否存在一个覆盖 $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma_{g,\,n}$，使得 $\mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma}; \mathbb{Q}) \neq \mathrm{H}_1(\widetilde{\Sigma}; \mathbb{Q})$?

我们的证明从根本上依赖于利用阿贝尔商检测环路，因此在当前方法下，可期待的最一般情形似乎是可解群G。让我们指出针对猜想 4.0.17 的潜在方法所面临的一个简单障碍：

观察 4.0.18：设 $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ 是一个覆盖变换群为 G的有限正规覆盖，并且$\theta : \pi_1\Sigma \to Q$ 是一个有限非平凡商群。如果 G 和 Q 的阶互素，那么 $\mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma}; \mathbb{Z}) = \mathrm{H}_1(\widetilde{\Sigma}; \mathbb{Z})$。

证明：考虑 $\gamma \in \pi_1\Sigma \quad \gamma \notin \widetilde{\Sigma} \quad \theta \quad [\gamma] \in {}_1\Sigma\,\mathbb{Z} \quad \lambda \in$。如果 ker，那么 H (;)。否则，取任意 ker 。$\pi_1\Sigma \setminus \theta \quad \lambda^{|G|}$ 那么它是中的一个环路，并且

$$\theta\left(\gamma\lambda^{|G|}\right) = \theta\left(\lambda^{|G|}\right) \neq 1_Q \tag{44}$$

因此 $[\gamma\lambda^{|G|}], [\lambda^{|G|}] \in \mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Z})$。它们相差一个 gamma，因此 $[\gamma] \in \mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Z})$。所以对于任意 $\gamma \in \pi_1\widetilde{\Sigma}$，$[\gamma] \in \mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Z})$，于是 $\mathrm{H}_1^{\theta\neq 1}(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Z}) = \mathrm{H}_1(\widetilde{\Sigma};\ \mathbb{Z})$。□

参考文献

[1] Fedor Bogomolov 和 Yuri Tschinkel。非分歧对应。载于《代数数论与代数几何》，第 300 卷，第 17–25 页。美国数学学会，2002 年。[2] Benson Farb 和 Sebastian Hensel。图的有限覆盖、其本原同调与表示论。《纽约数学杂志》，22：1365–1391，2016 年。[3] Benson Farb 和 Dan Margalit。《映射类群入门》（PMS-49）。普林斯顿大学出版社，2012 年。[4] Walter Feit 和 John G Thompson。奇数阶群的可解性。《太平洋数学杂志》，1963 年。.[5] Wolfgang Gasch¨utz。由自由群诱导的有限群的模表示。《数学杂志》，60：274–286，1954 年。[6] Thomas Koberda 和 Ramanujan Santharoubane。通过量子表示研究曲面群的商群与有限覆盖的同调。《数学发明》，206：269–292，2016 年。[7] Eduard Looijenga。与映射类群相关的一些代数几何，2015 年 6 月。[8] Wilhelm Magnus、Abraham Karrass 和 Donald Solitar。组合群论：用生成元与关系表示群。多佛出版社，2004 年。[9] Justin Malestein 和 Andrew Putman。Out(F_n) 的简单闭曲线、曲面的有限覆盖与幂子群。《杜克数学杂志》，168(14)：2701–2726，2019 年。[10]Julien March´e。由简单曲线的提升生成的同调。https://mathoverflow.net/questions/86894。[11]Vladimir Markovi´c。非分歧对应与映射类群的虚性质。2022 年。https://people.maths.ox.ac.uk/markovic/M-mod.pdf，预印本。[12]Vladimir Markovi´c 和 Ognjen To˘si´c。Hodge 范数的第二变分与高阶 Prym 表示。https://people.maths.ox.ac.uk/~markovic/MT-hodge.pdf，预印本。