arXiv:2304.13204v1 [math.NA] 26 Apr 2023

计算离散与连续拉普拉斯变换的数值方法

预印本

Yupeng Zhang [1†],Yueyang Shen [1†]、Rongqian Zhang [1]、Yuyao Liu [1]、Yunjie Guo [1], Daxuan Deng [1]、Ivo D. Dinov [1,2,3,*]

[1] 统计在线计算资源，密歇根大学，安娜堡，MI 48109 [2] 计算医学与生物信息学，密歇根大学，安娜堡，MI 48109 [3] 精准健康与密歇根数据科学研究所，密歇根大学，安娜堡，MI 48109

[†] 这些作者对本研究的贡献相同。

[*] 联系人：Ivo Dinov，SOCR，密歇根大学，statistics@umich.edu，https://www.SOCR.umich.edu，ORCID：0000-0003-3825-4375。

2023年4月27日

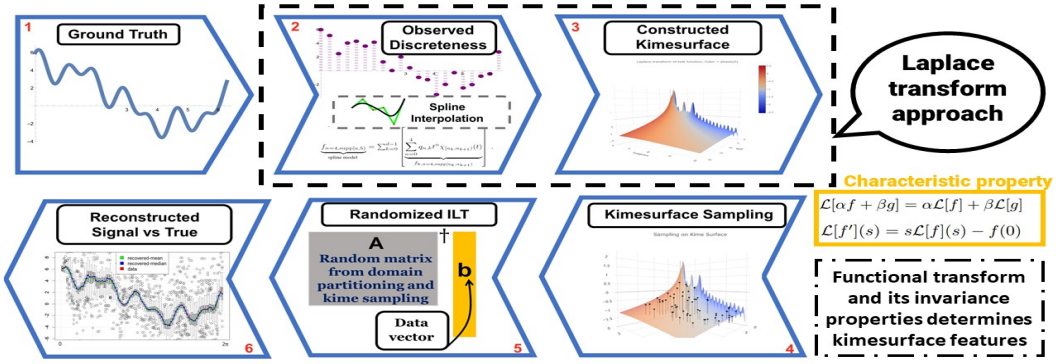


图0.1。 图文摘要

摘要

概述：通过专门的积分变换，将原始问题从其原生状态空间表示映射到另一个空间，可以显著简化许多数学模型和统计计算技术。其中的示例包括拉普拉斯变换（LT）及其逆变换（ILT），它们在当代数据科学、概率建模和统计推断中发挥着重要作用。然而，对于某些复函数、噪声数据或不完整观测，LT 和 ILT 的计算仍面临挑战。本文介绍了一种用于计算正向和逆拉普拉斯变换的新数值算法。该技术适用于连续函数和离散信号，并可产生计算高效且解析稳健的结果。

方法：我们提出一种数值方法，对离散信号进行样条插值，然后对相应的解析样条函数应用积分变换。这是一种稳健且计算高效的技术，可用于估计噪声数据的拉普拉斯变换。我们重新审视了用于计算拉普拉斯变换的 Meijer-G 符号方法，以及扩展规范观测时间序列的替代方法。离散量化方案为快速、可靠地估计逆拉普拉斯变换奠定了基础。我们推导了解析函数逆拉普拉斯变换的理论估计，并展示了验证该算法的实证结果

性能，并使用观测数据和模拟数据进行了验证。我们还介绍了拉普拉斯变换在更高维时空中的一种推广。

结果：我们在从已知精确拉普拉斯变换的解析函数采样所得的数据上测试了离散拉普拉斯变换算法。离散逆拉普拉斯变换的验证涉及使用已知解析逆拉普拉斯变换的复函数。对于离散信号，我们还报告了关于拉普拉斯变换矩阵最小奇异值的期望渐近行为的实验证据，$\mathbb{E}(\sigma_n(\mathbf{A})) \sim \frac{1}{n^\gamma}$ 对于某些 $\gamma \in (0, 2)$。我们分析了逆拉普拉斯变换算法中出现的随机矩阵的最小奇异值。我们证明，在理想化假设下，类似的数据矩阵可以得到界定。我们还证明，如果相位采样与定义域和径向策略相互独立，那么随机矩阵结果所需的各向同性很可能会被破坏。

结论：我们的拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换数值算法在估算各种离散和连续函数的拉普拉斯变换时表现良好。我们设计、实现、验证并分享了若干种拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换估算方法的 R 实现。这些技术既可应用于解析函数，也可用于观测信号。我们还提出一种克利福德代数方法，将拉普拉斯变换推广到高维时空过程，以区分空间与时间。

关键词。 拉普拉斯变换；积分变换；矩母函数；概率密度函数；复时间；spacekime；数据分析 s

1. 引言

1.1. 动机

许多具有挑战性的科学问题，其解决依赖于对特定自然过程的机制性理解。这种理解通常取决于复杂的计算、准确的模型近似、稳健的参数估计、高效的似然量化，或可靠样本统计量的推导。在实践中，通过专门的变换将原始的（复杂）问题从其原生状态空间表示映射到另一个（更简单的）空间，可以显著简化这一建模过程。例如，积分变换 将函数、方程和条件从其原始定义域映射到其他定义域，在这些定义域中，与原生定义域中的相应过程相比，后续的处理、建模和估计过程可能会大大简化。事实上，当在新状态空间中得到的解能够通过相应的逆变换有效地映射回原始空间，并为原始科学问题提供切实可行的解决方案时，这类变换最为有用。

傅里叶变换、小波变换和 离散拉普拉斯变换 [1] 是称为积分变换的一类特殊映射的示例
，其作用于定义域 $\mathcal{V}$ 和值域 $\mathcal{U}$，$T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$，可以表示为：

$$T[f](u) = F(u) = \int_{\mathcal{V}} K(v,u)\, d\mu(v) = \int_{\mathcal{U}} f(v)\, K(v,u)\, dv \tag{1.1.1}$$

ˆ 其中，函数 f 表示变换的输入 T，输出函数记为 $F(\cdot) \equiv f(\cdot) = T[f](\cdot)$，核函数 K 指定了与每种变换相关的具体数学运算，而 μ是定义域上的博雷尔测度。边缘概率函数是积分变换的一个具体示例，$f(u) = \int \frac{f_{VU}(v,u)\, f_V(v)}{} f_V(v)dv = \int f_{U|V}(u|v) f_V(v)dv$，其中条件分布 $f_{U|V}$在有限状态空间中可解释为马尔可夫转移矩阵，而在更一般的意义上则可解释为马尔可夫核。

一种用于促进核分析的形式化数学定义依托于再生核希尔伯特空间（RKHS）的概念，即 $\mathcal{H}_K(\mathcal{X})$，该空间与核 $K(\cdot,\cdot)$ 相关联。在 RKHS 中，$\forall f \in \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_K(\mathcal{X})$、$f(x) = \langle K(x,\cdot) f(\cdot) \rangle_{\mathcal{H}_K}(x)$[2]。在某些数据科学应用中，使用普通希尔伯特空间会带来问题，因为缺乏足够强的先验条件来支持有效的预测分析。例如，表示所有平方可积函数的希尔伯特空间 $L^2([-1,1])$ 可以容纳具有有限个点无穷大的函数，而这些函数仍然是平方可积的。然而，这类奇异性（有限个无穷大）会给数值计算和科学推断带来与分析相关的困难。RKHS 的主要限制确保求值泛函是有界的，即 $\forall t, \exists M > 0, |f(t)| \leq M\|f\|_{\mathcal{H}_K}(x)\ \forall f \in \mathcal{H}_K(\mathcal{X})$。随后，再生核性质由里斯表示定理导出，该定理保证存在唯一的核 $K(x,\cdot) \in \mathcal{H}_K(\mathcal{X})$ [3]。核与 RKHS 之间这种精确的一一对应关系被称为穆尔-阿隆赛因定理 [4, 5]。

核在统计学习理论中发挥着重要作用。一个例子是近期关于核回归与无限宽神经网络之间二元性的开创性发现[6], , 该发现促进了对核方法和神经网络

表示能力的自然比较研究。对于半正定且对称的核，$K(\cdot,\ \cdot)$: $\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$，可得到相应的积分变换算子，这些算子是紧的、连续的、自伴的且非负的。记该积分变换算子的特征函数和特征值分别为 ϕ_i 和 σ_i($\sigma_1\geq\sigma_2\geq....$)，即 $T\phi_i=\sigma_i\phi_i$。那么，Mercer 定理 [7, 8] 指出

$$K(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j\phi_j(x)\phi_j(y). \tag{1.1.2}$$

Mercer 定理可视为有限维空间中正半定（PSD）对称矩阵特征分解的无限维推广，即 $K=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i v_i v_i^T$。在基于核的支持向量机（SVM）聚类中，映射 $\psi=[\psi_1,\psi_2,\cdots]$ 负责将原始数据点云 $\{x_i\}_{i=1}^{M}$ 转换为线性可分数据集 $\{\psi(x_i)\}_{i=1}^{M}$。函数 ψ 与特征态 $\sqrt{\sigma_i}\phi_i=\psi_i$ 直接相关，并给出了紧凑的核技巧公式 $K(x,\ y)=\langle\psi_i(x)\ \psi_i(y)\rangle=\psi_i(x)\ \cdot\psi_i(y)$。

许多有趣的积分变换对应于可逆核 $K(t,\ u)\longleftrightarrow K^{-1}(u,\ t)$，它们自然导出相应的可逆积分变换，从而有助于函数或信号恢复

$$f(x)=\int_{\mathcal{U}}F(u)\ K^{-1}(u,x)\ du\ . \tag{1.1.3}$$

例如，经典拉普拉斯变换（LT）是一种具有非定义域对称核的积分变换$K(t,\ z)=e^{-tz}$，它将实变量 $t\in\mathbb{R}^{+}$（通常为时间）的函数映射为右半平面上的复频率变量函数 $z\in\mathbb{C}_{+}$，并可通过布罗姆维奇积分求逆

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}:L^2([0,\infty))\to H^2(\mathbb{C}_+),\quad \underbrace{\mathcal{L}(f)}_{F}(z)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-zt}dt\\&\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{F\}}_{f}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}F(z)\mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

经典拉普拉斯变换是一种有界线性算子，它将正实数上的平方可积函数映射到右半平面的 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{C}_+)$。该空间定义为 $H^2(\mathbb{C}_+)=\{f:\ \|f\|_{H^2}=\sup_{x>0}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dy}<\infty\}$，其中 $\|\mathcal{L}f\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}=\|f\|_{L^2([0,\infty))}$（见附录）。此外，$L^2([0,\infty))$ 与 $H^2(\mathbb{C}_+)$ 之间的酉同构由拉普拉斯变换实现，而其逆变换则由布罗姆维奇积分的一个特殊情形给出，即作为经 Wick 旋转的逆傅里叶变换。尽管这种可逆性很有用，但一组基本的多项式函数被排除在平方可积函数空间之外。因此，需要一个适当的衰减因子 γ（在布罗姆维奇积分中），通过指数衰减抑制多项式增长，即确保 $e^{-\gamma t}f(t)\in L^2([0,\infty))$，而这种充分的衰减使得能够将定义扩展到更广泛的复（频率）变量函数 $z\in\mathbb{C}\setminus\{Re(z)=-\infty\}$（复时间，即*kime* [9]）。

我们可以将拉普拉斯变换后的信号 $f(t)\to F(z)$ 解释为复时间频率的更一般函数，$z=re^{i\theta}\equiv r\cos\ \theta\ +ir\sin\ \theta$，其中复时间频率的实部 $\underbrace{Re(z)}$ 对应于指数衰减相关的阻尼程度，复时间频率的虚部 $\underbrace{Im(z)}$ 对应于正弦周期的速率（经典频率），相位 θ 表示重复受控实验中的随机（IID）采样，而幅值 r 对应于原始时间过程 [10] 的自然纵向事件排序 f。

请注意，拉普拉斯核不同于拉普拉斯变换的核，

$$\underbrace{K(x,y)=e^{-c\|x-y\|}}_{\text{Laplace (RBF) kernel}}\quad,\quad\underbrace{K(t,z)=e^{-tz}}_{LT\ kernel}. \tag{1.1.5}$$

拉普拉斯变换的核取两个核参数的乘积，而拉普拉斯算子取它们的差。拉普拉斯变换的定义域核不一定是对称的。

一个对称的再生核 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: $K(s,\ t) = \int_{\min(0}^{s} \xi e^{\xi} d\xi_{,\ t)}$ 可以生成一个希尔伯特空间，使其具有拉普拉斯变换的直接实数反演公式 [2]:

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Big(\int_0^{\infty} pu(p)F(p)u_n(p)dp \Big) v_n(t)\ , \tag{1.1.6a}$$

$$Lv_n = \lambda_n u_n, L^* u_n = \lambda_n v_n, \tag{1.1.6b}$$

其中，$Lf(p) = p(\mathcal{L}f)(p)$、$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_K(w)$ 和 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(u)$ 分别是空间$H_K(w)$和 $L(H_K(w))$ 中的正交归一系，而 w 和 u 是这些希尔伯特空间中相应的权函数。这里，$H_K(w) \equiv \{f:\ f(0) = 0,\ \|f\|_{H_K(w)} < \infty,\ f$在 $[0,\infty)\}$ 上是实值绝对连续函数，而 $L(H_K(w))$ 是由 $H_K(w)$ 经 L算子变换得到的函数空间。该算子 $\mathcal{L}$'的可逆性由 1.1.6b 中的基匹配条件保证。为说明这一点，我们可以在 u_n 基下展开 $pF(p) \in L(H_K(w))$，即 $pF(p) = p\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}F(p) = L\mathcal{L}^{-1}F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} qu(q)F(q)u_n(q)dq \Big) u_n(p)$，应用 1.1.6b 即可得到反演公式 1.1.6a。

LT 的许多应用都涉及求解微分方程 [11]，（将时空中的时间序列变换为空间-kime 中的 kime 曲面所对应的泛函分布方程 [9, 10, 12]。此类变换有助于增强统计推断 [13]。LT 的闭式解析表示便于将微分方程转换为代数方程，并将卷积运算转换为乘法 [14, 15]。具体而言，这些性质为求解非齐次常微分方程提供了方法，其中非齐次项可以是不连续的，并且不必是狄拉克 δ 函数，$\delta(t)$。

在本文中，我们利用拉普拉斯变换来表示经典的纵向过程，例如时间序列[16], ，将其表示为空间-kime 中复时间（kime） [17]的复值函数。这种将随时间变化的过程映射为 kime 曲面的动机有两个方面。首先，从具有某种潜在概率分布的明确定义过程中进行随机抽样，可以被视为 kime 曲面流形的离散叶状分解 [18, 19], ，其中每个叶对应于时间序列过程的一个观测实例 [9, 10]。其次，与使用重复独立同分布抽样进行经典时间序列分析相比，基于整体的（更高维）kime 流形进行数学建模和统计推断有望获得更稳健的推断。此外，空间-kime 域中的统计推断可以在贝叶斯框架下表示，这自然会导出限制在 kime 曲面叶状分解各叶上的相应时间序列分析。

我们提出了一种新的计算高效且解析稳健的表示方法，用于连续函数和离散信号的正向与逆拉普拉斯变换。该算法的 R 实现已通过模拟数据和真实数据（例如功能性磁共振成像，fMRI）进行了测试和验证。逆拉普拉斯变换是最困难的部分，因为许多应用都要求重建原始信号（完美重建或近乎完美重建），即对于所有 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$和 $F = \mathcal{L}(f)\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L})(f) \equiv f$and $\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1})(F) \equiv F$。
在本研究中，我们关注拉普拉斯变换的统计学和数据科学方面，大部分工作涉及定义在正实数上的函数，$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$。然而，定义在 $\mathbb{R}$ 上且支集为 $\mathbb{R}$ 的函数的更一般的双边拉普拉斯变换（$\mathcal{B}$）与支集为$\mathbb{R}^+$的函数的拉普拉斯变换之间存在联系。假设以下两个定积分存在，即 $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ 和 $\int_{-\infty}^{0} e^{-st} f(t)dt$，双边拉普拉斯变换定义为反常积分

$$\mathcal{B}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt. \tag{1.1.7}$$

直接关系 $\mathcal{L} \longleftrightarrow \mathcal{B}$ 可用*Heaviside* 阶跃函数表示,

$$H(x) = \mathbf{1}_{x>0} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to [0,1], \tag{1.1.8}$$

以及符号取反函数，$m(x) = -x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{B}(f \circ H) \iff \mathcal{B}(f) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(f \circ m) \circ m. \tag{1.1.9}$$

拉普拉斯变换在现代数据科学、概率建模和统计计算中发挥着重要作用。假设 $X \geq 0$ 是与某个特定过程和特定概率密度函数 f_X 相对应的随机变量: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$。那么，该密度的拉普拉斯变换，即（取正值）随机变量 X 的拉普拉斯变换，是 X 的指数函数的期望，即 $\mathcal{L}\{f_X\}(z) = \mathbb{E}_X\left[e^{-zX}\right] = \int e^{-zx} f_X(x)dx.$

$X \geq 0$ 的矩母函数（*MGF*）是将 $-t$ 代入拉普拉斯变换自变量 z 后得到的。这一点很重要，因为矩母函数有助于计算分布矩。正如良好函数（无限可微函数）的泰勒级数展开的系数能够在多项式基下完整描述该函数一样，知道一个良好分布的所有矩，也就能完整描述该分布。利用拉普拉斯变换，我们可以恢复连续随机变量 X 的累积分布函数 F_X，（1.1.10
）

$$\mathcal{L}\left\{F_X'\right\}(x) = \underbrace{F_X(0)}_{0} + s\mathcal{L}\left\{F_X\right\}(x) \Longrightarrow \boxed{F_X(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathbb{E}\left[e^{-sX}\right]\right\}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f_X\}(s)\right\}(x).}$$

在深入探讨新提出的数值算法之前，我们先回顾一些关于近似计算拉普拉斯变换逆变换（逆拉普拉斯变换）的既有工作。

1.2. 既有工作

Davies 和 Martin [20] 研究了多种数值求解拉普拉斯变换逆变换的方法。他们的研究采用了：(i) 利用指数函数展开 $f(t)$ 的方法；(ii) 运用高斯求积的技术；(iii) 双线性变换策略；以及 (iv) 傅里叶级数展开方法。他们的研究结果表明，对于多种测试函数，使用拉盖尔多项式或切比雪夫多项式能够加快逆拉普拉斯变换的收敛。然而，作者指出，没有一种方法在所有测试案例中都表现最优。

Miller 和 Guy [21] 研究了使用雅可比多项式求解拉普拉斯变换逆变换的数值策略。他们通过确定 $f(t)$ 关于雅可比多项式的级数展开中的有限个系数，近似求得离散点 $z = (\beta + 1 + k)\delta, \quad k = 0, 1, \cdots$ 处的复时间函数值 $F(z)$。

Honig和Hirdes [22] 通过同时减小离散化误差、加速傅里叶级数的收敛并近似求取自由参数，改进了逆拉普拉斯变换。研究报告称，在一系列应用中，仅使用拉普拉斯变换的少量函数值进行数值逆拉普拉斯变换也能取得良好效果。

Valkó和Abate [23] 比较了使用Gaver泛函、Salzer求和、Wynn的ρ算法、Levin的u变换、Lubkin的迭代w变换以及Brezinski的θ算法进行拉普拉斯变换数值逆变换的效果。尽管一些经验性发现令人鼓舞，但这些结果并未得到推广，因而无法确定使逆拉普拉斯变换重建误差最小的具体条件。

López-Fernández和Palencia使用求积公式和sinc插值对拉普拉斯变换进行逆变换 [24]。与所使用求积近似节点数相关的先前误差界相比，该技术改进了误差界。

Abate和Whitt [25] 专门研究了概率分布函数的逆拉普拉斯变换数值近似问题。他们的方法基于傅里叶级数表示，并使用有限傅里叶余弦变换。

Durbin提出了一种用于数值反演LT的方法，该方法使重构信号的误差上界与自变量 t 无关，并指出，即使在困难的测试案例中，也可以控制误差率。

最近，Brzezi´nski [26] 使用C++ 和Python实现研究了不同ILT数值算法的性能。通过采用经典和困难的测试案例，作者评估了多种技术，并报告称，涉及变形Bromwich轮廓积分和傅里叶级数展开的方法收敛更快，在恢复原始信号方面具有高精度，并且应用范围更广（即具有更强的通用性）。

Rani、Mishra和Cattani [27, 28, 29] 使用正交归一Bernstein运算矩阵获得了ILT的数值解。他们的算法核心是使用Bernstein基多项式的截断级数来近似未知的纵向信号。作者通过积分运算矩阵估计Bernstein多项式的系数。研究结果表明，精确信号与恢复的纵向信号之间的均方根误差很小，并且他们获得了误差的粗略上界。同一研究团队还采用数值逆拉普拉斯变换求解分数阶微分方程。他们的方法基于将线性分数阶微分方程转换为线性代数方程组，并将未知函数表示为正交多项式级数；具体而言，采用第二类切比雪夫多项式。

Firouzjaei、Adibi 和 Dehghan [30] 使用拉普拉斯变换，并结合局部不连续Galerkin方法，求解分布阶时间分数阶扩散波方程。通过使用 LT 将偏微分方程转换为与时间无关的问题，作者采用局部不连续Galerkin方法求解这些稳态方程，并同时对扩散算子进行离散化。逆拉普拉斯变换提供了一种直接机制，使我们能够推导出原始波动方程的解。这种方法在计算上颇具吸引力，因为它不仅有效，还为并行执行提供了机制。

在拓展大多数既有研究的基础上，本文重点探讨针对离散信号和连续信号的稳健且实用的逆拉普拉斯变换问题数值解法。本文的组织结构如下：第 2 节回顾拉普拉斯变换及其各种扩展。第 3 节突出介绍我们方法的贡献。第 4 节定义不同类型函数和域量化对应的拉普拉斯变换与逆拉普拉斯变换的解析形式及其算法近似。我们还介绍了适用于高维时空信号的拉普拉斯变换推广形式。第 5 节利用解析函数、观测数据和模拟数据，为逆拉普拉斯变换算法验证提供理论和实验证据。在此，我们还阐明相关假设，并分析离散逆拉普拉斯变换算法相对于随机域划分以及每个区域内数据点选择的近似性。第 5 节展示了核心实验和算法验证结果，同时给出关于适当假设以及理论近似极限的一些猜想。最后，第 6 节总结研究结论，并提出算法改进的未来方向。扩展附录（第 8 节）讨论拉普拉斯变换的有界性、一些渐近分析推导，以及使用均匀、指数项和等距断点进行随机域划分的其他示例。

2. 拉普拉斯变换及其扩展

2.1. 拉普拉斯变换与狄利克雷级数

（连续）拉普拉斯变换的离散类比可以定义如下

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots .$$

拉普拉斯变换和狄利克雷级数都可以通过拉普拉斯-斯蒂尔切斯积分表示

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mu(t) .$$

当 $\mu(t)$ 是连续测度时，这会产生拉普拉斯变换；而当 $\mu(t)$ 是阶梯函数（其中微分为狄拉克函数）时，这实际上会产生狄利克雷级数表达式。如果狄利克雷级数在某点 z_0 收敛，那么该收敛级数可以帮助为 $Re(z') > Re(z_0)$ 内的紧子集给出合理的数值近似。

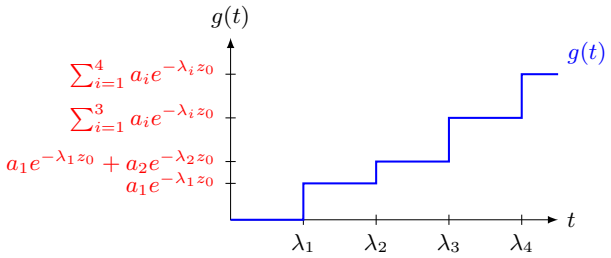


图 2.1。 阶梯函数

具体而言，$\forall Re(z) > 0$，设 $g(t) = \sum_{\lambda_n \le t,\ n \ge 1} a_n e^{-\lambda_n z_0}$ 表示一个阶梯函数（我们在图 2.1 中展示了一个实数情形）

$$\frac{f(z+z_0)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z_0} \frac{e^{-\lambda_n z}}{z} = \int_{\lambda_1}^{\infty} \Big(\sum_{\lambda_n \le t} a_n e^{-\lambda_n z_0} \Big) e^{-tz} dt = \mathcal{L}\Big(H(t-\lambda_1) g(t) \Big). \tag{2.1.1}$$

方程 2.1.1 建立了阶梯信号的拉普拉斯变换与其在邻域中的图景之间的对应关系。这表明，使用阶梯函数进行近似可能是一种计算并求逆拉普拉斯变换的可行数值策略，我们将在后面的章节中看到这一点。

2.2. 矩阵指数的拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义可以扩展到矩阵指数的情形；该定义自然源于对复杂系统的考察，这些系统可以用连续时间齐次一阶常微分方程组建模 $\dot{x} = Ax$，其中 A 是一个 $n \times n$ 矩阵。这是某些生物系统和观测到的时不变线性动力过程的有效模型 [31]。可以通过拉普拉斯变换及逆拉普拉斯变换来研究该方程的稳定性和演化，其中 $f(t) = e^{tA}$，$f: \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} e^{tA} dt = \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{\text{resolvent}} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \cdots , \text{ for } |s| \text{ sufficient large} \tag{2.2.1a}$$

(2.2.1b) $$x(t) = e^{tA}x(0), \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1}) = e^{tA} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots,$$

其中，时间平移不变性表现为 $x(t + t') = e^{tA}x(t')\ \forall t' > 0$。

2.3. 克利福德代数拉普拉斯变换扩展

克利福德代数，又称几何代数 [32, 33, 34], 是线性向量代数的一种推广。克利福德提出将内积与格拉斯曼外积结合，以推广格拉斯曼代数

(2.3.1) $$\underbrace{\boldsymbol{ab}}_{\substack{\text{geometric algebra}\\ \text{geometric product}}} = \underbrace{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}_{\substack{\text{linear algebra}\\ \text{symmetric inner product}}} + \underbrace{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}_{\substack{\text{Grassman algebra}\\ \text{antisymmetric Wedge product}}}, \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}), \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}).$$

这一表述形成了一个统一框架，可灵活地编码四元数（$\mathbb{H} \cong \mathrm{Cl}_{0,2}(\mathbb{R})$）、复数（$\mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}_{0,1}(\mathbb{R})$）和时空代数（$\mathrm{Cl}_{3,1}(\mathbb{R})$）。此外，可通过 $\mathrm{Cl}_{3,0}(\mathbb{R})$ 表示来研究电磁场 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}i$，其中使用三个双向量表示磁场 B [35, 36]。几何代数 $\mathrm{Cl}_{p,q}(\mathbb{R})$ 提供了灵活的编码方式，可将多维数据嵌入由正交基集 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{p+q}\}$ 张成的高维空间中；这些数据可以表示为基向量的组合 2^{p+q} $\Big\{\underbrace{1}_{scalars}, \underbrace{e_1, e_2, \ldots, e_{p+q}}_{singltons}, \underbrace{e_1e_2, \cdots, e_{p+q-1}e_{p+q}}_{pairs}, \ldots, \underbrace{e_1e_2 \cdots e_{p+q}}_{n-tuples}\Big\}$，代数结构则由范数和反交换性质$e_i^2 = \|e_i\|^2 = 1$ 规定：$1 \le i \le p$对应 $e_j^2 = \|e_j\|^2 = -1$，$p + 1 \le j \le p + q$对应 $e_ie_j = -e_je_i$，$i \ne j$对应

(2.3.2)

接下来，通过变换 $\boldsymbol{f}(x)$ 的多向量值向量分量，我们将阐明各种情况下 Clifford傅里叶变换的定义。

• 情况 1：$\mathrm{Cl}_{2,0}(\mathbb{R})$。该代数的向量空间 G^2 包含基 $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$，即 G^2 =张成$\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$。一个有趣的事实是 $(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_2e_2e_1 = -1$。双向量 e_1e_2 与赝标量（对应于最高阶基）$i_2 = e_1e_2$ 相关联，$i_2^2 = -1$。赝标量为基分解 $\boldsymbol{f}(x) = f_0 + f_1e_1 + f_2e_2 + f_{12}e_{12}$ =$1(f_0(x) + f_{12}(x)i_2) + e_1(f_1(x) + f_2(x)i_2)$ 提供了另一种表达形式。在代数约束下，i_2 的行为类似于虚数单位 i；因此，分别作用于旋量（$f_0(x) + f_{12}(x)i_2$）和向量（$f_1(x) + f_2(x)i_2$）分量的二维克利福德傅里叶变换自然定义为 [35]

(2.3.3) $$\hat{\boldsymbol{f}}(\xi) = \mathcal{F}\{\boldsymbol{f}\}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{f}(x)e^{-2\pi i_2\langle x,\xi\rangle}dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

(2.3.4) $$\boldsymbol{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\boldsymbol{f}\}\}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\boldsymbol{f}}(\xi)e^{2\pi i_2\langle x,\xi\rangle}d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

• 情况 2：$\mathrm{Cl}_{0,2}(\mathbb{R})$。四元数 ($\mathbb{H} \cong \mathrm{Cl}_{0,2}(\mathbb{R})$) 的欧拉公式遵循类似的分解，其中$e^{|\xi|\boldsymbol{\xi}} = \cos|\xi| + \boldsymbol{\xi}\sin|\xi|$。单纯四元数 $\boldsymbol{\xi} = b\hat{\boldsymbol{i}} + c\hat{\boldsymbol{j}} + d\hat{\boldsymbol{k}}, b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 在典型欧拉公式中发挥着与虚数 $\boldsymbol{i}$ 类似的作用。因此 [37]

$$\boldsymbol{\xi}^n = \begin{cases} (-1)^k \text{ if } n = 2k, \\ (-1)^k\boldsymbol{\xi} \text{ if } n = 2k + 1 \end{cases} \quad e^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{|\xi|^{2k}}{(2k)!} + \boldsymbol{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{|\xi|^{2k+1}}{(2k)!} = \cos|\xi| + \boldsymbol{\xi}\sin|\xi|.$$

这使我们能够将一般完整四元数的极坐标表示推广为

(2.3.5) $$q = a + b\hat{\boldsymbol{i}} + c\hat{\boldsymbol{j}} + d\hat{\boldsymbol{k}} = |q|\Big(\frac{a}{|q|} + \boldsymbol{\xi}\frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{|q|}\Big) = |q|e^{\boldsymbol{\xi}\phi} = |q|(\cos\phi + \boldsymbol{\xi}\sin\phi),$$

其中 $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$，$\boldsymbol{\xi} = \frac{b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$，$\phi = \arctan(\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a})$。Clifford傅里叶变换和四元数傅里叶变换可以定义为不同的形式，从而产生不同的性质 [38, 39]

(2.3.6) $$\mathcal{F}^{cl}\{f\}(\underbrace{u_1, u_2}_{\boldsymbol{u}}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})e^{-2\pi e_1u_1x_1}e^{-2\pi e_2u_2x_2}d\boldsymbol{x},$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{F}^{-1})^{cl}\{\hat{f}\}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\boldsymbol{u}) e^{2\pi e_2 x_2 u_2} e^{2\pi e_1 x_1 u_1} d\boldsymbol{u} \,. \tag{2.3.7}$$

请注意，由于非交换性，为获得原始的 f，指数项的排列顺序至关重要。针对四元数的更专业化变换是使用指数项将函数夹在中间 [38, 39]

$$\mathcal{F}^{q}\{f\}(\underbrace{u_1, u_2}_{\boldsymbol{u}}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi e_1 u_1 x_1} f(\boldsymbol{x}) e^{-2\pi e_2 u_2 x_2} d\boldsymbol{x} \tag{2.3.8}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{F}^{-1})^{q}\{\hat{f}\}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi e_1 x_1 u_1} \hat{f}(\boldsymbol{u}) e^{2\pi e_2 x_2 u_2} d\boldsymbol{u} \,, \tag{2.3.9}$$

^^^^^ 其中 $e_1 = \boldsymbol{i}$，$e_2 = \boldsymbol{j}$，$e_1 e_2 = \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$。

- 情形 3：时空代数$\mathrm{Cl}_{3,\,1}(\mathbb{R})$。我们可以将定义扩展到复符号，并利用赝标量以及具有度规符号 (+，+，+，−) 的四元数傅里叶变换定义，获得时空代数的变换 [39, 40]

$$\hat{f}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{F}\{f\}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^{3,1}} e^{-2\pi e_0 t s} f(\boldsymbol{x}) e^{-2\pi i_3 \langle x,u\rangle} d^4\boldsymbol{x} \,, \tag{2.3.10}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{F}^{-1})\{\hat{f}\}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^{3,1}} e^{2\pi e_0 t s} \hat{f}(\boldsymbol{u}) e^{2\pi i_3 \langle x,u\rangle} d^4\boldsymbol{u} \,, \tag{2.3.11}$$

其中 $f\colon\ \mathbb{R}^{3,\,1} \to \mathrm{Cl}_{3,1}(\mathbb{R})$，且 i_3 是 $\mathrm{Cl}_{3,0}(\mathbb{R})$ 中的赝标量，其中时空向量和时空频率分别定义为 $\boldsymbol{x} = te_0 + x$，$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$和 $\boldsymbol{u} = se_0 + u$，$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$。

在克利福德代数和矩阵代数等非交换代数上定义一致的指数变换，主要挑战体现在贝克-坎贝尔-豪斯多夫（BCH）条件上

$$\begin{aligned} e^{M_1} e^{M_2} &= e^{M_1 + M_2 + \frac{1}{2}[M_1,M_2] + \frac{1}{12}([M_1,[M_1,M_2]] + [M_2,[M_2,M_1]]) + \cdots} \\ e^{M_1} e^{M_2} &\neq e^{M_1 + M_2} \text{ for } [M_1, M_2] \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

克利福德-傅里叶变换可直接应用于深度学习和信号处理 [35, 37, 39]。可以通过多种方式扩展定义克利福德-拉普拉斯变换 [41, 42], 但是，这些变换的应用可能需要实验支持，以及逆变换公式可处理性的证据。这可能需要在未来的前瞻性研究中单独进行调查。

作为激励性示例，考虑一个功能性磁共振成像（fMRI）信号 $f\colon\ \mathbb{R}^{1,\,3} \to \mathbb{F}$，其中 f 将时空位置映射到 $(t,\ x,\ y,\ z)$ 处的某个实数值或复数值：

$$w = f(t, x, y, z). \tag{2.3.13}$$

在前一个表达式中，$t \in \mathbb{R}^+$ 是纵向时间维度，x，y，z 表示空间笛卡尔坐标。克利福德代数中的区别在于度规符号的符号约定选择不同，其中 $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ 对应于度规符号 (+，−，−，−)。因此，扩展拉普拉斯变换的一种自然方式是用双线性形式 [41] 替代规范标量积

$$g(p) = \mathcal{L}_4(f)(p) := \int_{\mathbb{R}^{1,3}} f(t, x, y, z) e^{\langle p,q\rangle} d^4\boldsymbol{x} \tag{2.3.14}$$

其中 p，$q = t\gamma^0 + x\gamma^1 + y\gamma^2 + z\gamma^3 \in \mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$，而 $\langle p, q\rangle$ 由极化恒等式 $\langle p, q\rangle = \frac{1}{2}(Q(p+q) - Q(p) - Q(q))$ 定义，其中 Q 为二次型，例如 $p = p_0\gamma^0 + p_1\gamma^1 + p_2\gamma^2 + p_3\gamma^3$、$Q(p) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$和 $f\colon\ \mathbb{R}^{1,\,3} \to \mathbb{F}$、$d^4\boldsymbol{x} = dtdxdydz$、$\gamma_0^2 = 1$、$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1$

通过与 Clifford 值滤波器进行卷积，可以得到克利福德代数值表示，从而将原始信号空间提升为克利福德谱，其中定义域中的每个点（$t,\ x,\ y,\ z$）都通过函数映射 F 与时空 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ 中的元素相关联。通过这一过程，可以得到另一种拉普拉斯变换类比形式，位于

克利福德谱为 $F:\ \mathbb{R}^{1,\ 3}\to \mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$，我们可以在 $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ 上定义（扩展的克利福德代数）拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_{cl}$：

$$\begin{aligned} g(p)=\mathcal{L}_{cl}(f)(p):&=\int_{\mathbb{R}^{1,3}}F(t,x,y,z)e^{-pq}d^4\boldsymbol{x}\\ &=\int_{\mathbb{R}^{1,3}}F(t,x,y,z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-pq)^n}{n!}d^4\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

其中 $g(p)\in \mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$，我们需要为克利福德代数中的元素提供伽马矩阵 γ^i 表示，以执行完整的指数化运算。尽管这一过程不会产生新的信息，但克利福德“频率”可能会为原始信号 f 编码某些（复数）物理对称性提供一种新的表示。此外，它还为我们所需的分析提供了时间分量与空间分量之间的区分。目前，我们还没有可处理的反演公式，预计将对收敛性进行形式化研究。

2.4. 群上的拉普拉斯变换

根据 Peter 和 Weyl 的结果，傅里叶分析的规范分析可以扩展到拓扑群 [43], ，这被称为非交换调和分析[44]。紧群上的正向和逆广义傅里叶变换 G 如下给出： [45, 46, 47, 48]

$$\begin{aligned} \text{Forward}: \hat{f}(\rho_l)=[\mathcal{F}_G f]_l&=\int_G f(g)\rho_l(g)dg,\\ \text{Backward}: \left[\mathcal{F}_G^{-1}\hat{f}\right]_l&=\sum_l d_{\rho_l}tr\left[\hat{f}(\rho_l)\rho_l(g^{-1})\right], \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

其中 $dg=d\mu_G(g)$ 和 $\mu_G(g)$ 是 Haar 测度，即群 G 上的不变体积测度； d_{ρ_l}是表示 ρ_l 的维数：$H\to\mathbb{C}^{d_{\rho_l}\times d_{\rho_l}}$，而 H 是 G 的子群。 ρ_l 表示类型为 l 的不可约表示（irrep），紧群 G 的任意酉表示 ρ' 都可以通过换基分解为不可约表示的直和 $\oplus$。也就是说， [49],

$$\rho'(g)=D^{-1}(\underbrace{\rho_1\oplus\rho_2\oplus\cdots}_{\rho})D\approx D^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix}\rho_1(g)&&\\&\ddots&\\&&\rho_N(g)\end{bmatrix}}_{\text{block diagonal form }\rho^{(N)}}D \tag{2.4.2}$$

这些不可约表示不一定是有限的，但在实际计算中，我们会以合理的精度将 ρ 截断为块对角形式 $\rho^{(N)}$。请注意，换基通过某个变换 D 实现；该变换作用于有限维向量空间时由矩阵表示，而作用于无限维向量空间时则由 $D=\mathcal{F}_G$ 表示， $\forall f\in L^2(G)$。下面考虑两个特殊情形的例子。

$SO(2)$ 示例。在 $SO(2)$ 中，这一表述相当直接，因为复平面上的单位圆群与 $SO(2)$ 同构。这是因为我们可以将复数真旋转 $e^{i\theta}\in U(1)$ 与正交矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)$ 联系起来，即 $U(1)=S^1\cong SO(2)$。由于一维复不可约表示 $\rho_l(g\equiv e^{i\theta})=e^{il\theta},\ l\in\mathbb{Z}$ 就是圆谐函数，而这恰好是 $L^2([0,2\pi])$ 中一维傅里叶级数所用的复傅里叶 - 欧拉基 $\left\{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{in\theta}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$。因此，广义傅里叶变换的 Peter-Weyl 理论，正是基于 $[0,2\pi]$ 进行基分解的一维傅里叶级数展开，即

$$f(x)=\overbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{il\theta}d\theta}_{\mathcal{F}_G f}\cdot e^{-ilx}}^{\mathcal{F}_G^{-1}\hat{f}}. \tag{2.4.3}$$

此外，还值得注意的是它与微分方程的联系：圆谐函数（$SO(2)$）和球谐函数（$SO(3)$）分别对应于极坐标和球坐标拉普拉斯微分方程的基解[12]。

$SO(3)$ 示例。 $SO(3)$ 情形比 $SO(2)$稍微复杂一些，因为不可约表示是 Wigner D 矩阵，在 S^2 中表示球谐函数。群元素 $R \in SO(3)$ 可以用三个欧拉角 α， $\gamma \in [0, 2\pi)$ 进行参数化，并且 $\beta \in [0, \pi]$ 其中 [50]

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.4.4}$$

这些参数表示 $z - x - z$ 欧拉角。 $SO(3)$的不可约矩阵表示由 Wigner D 矩阵给出。类型为$^{l}\, D^{(l)} \equiv [D^{l}_{mn}]^{l}_{m,}$ $_{n=-l}$ 的 Wigner D 矩阵是一个（$2l+1$） $\times$ （$2l+1$）矩阵，而 $SO(3)$上的傅里叶展开为

$$f(R) = \sum_{l\geq 0} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{n=-l}^{l} (2l+1) \left(\underbrace{\int_{SO(3)} f(R) D^{(l)}_{mn}(g) dg}_{\hat{f}^{(l)}_{mn}} \right) D^{l}_{nm}(R^{-1}). \tag{2.4.5}$$

不同于 Peter-Weyl 理论（该理论针对紧群）， [43], 大多数研究都尝试将拉普拉斯变换的表述扩展到半群或局部紧群情形 [51, 52]。Mackey 的 [51] 研究局部紧阿贝尔群 G 的方法，是借鉴经典拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的类比$e^{-st} = e^{-Re(s)t} e^{-i\cdot Im(s)t}$，并将第一项推广为实特征 r（t）（取正实数上的值，其中 r（$x \cdot y$） $= r$（x） $\cdot\, r$（y））， 将第二项推广为普通特征 χ_y（t）（取单位复圆上的值，其中 $\chi_{y_1+y_2} = \chi_{y_1}\chi_{y_2}$）： $\mathcal{L}f$（χ_y） $= \int_G f$ （t） r（t） χ_y（t） dt。我们来考虑下面这个例子。

洛朗级数示例：如果 $t \in G =$ (ℤ, +) 是整数加法群， $y \in \hat{G} =$ (𝕋, ·) 是圆乘法群， $r(t) \in \mathbb{R}_+$。这就退化为离散拉普拉斯变换的类比（洛朗级数或双边 Z 变换）

$$\mathcal{L}f(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^n. \tag{2.4.6}$$

2.5. 拉普拉斯变换作为 Meijer-G 符号计算的一个特例

一般 Meijer-G 函数的主要特征之一是其紧凑的表示形式，这使其非常适合抽象符号计算。

$$G^{m,n}_{p,q}(a_1,...a_p; b_1, b_2, ...b_q|z) \equiv G^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right) \equiv G^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} \overbrace{a_1,...,a_n}^{\text{n component}}; \overbrace{a_{n+1},...,a_p}^{\text{p-n component}} \\ \underbrace{b_1,...,b_m}_{\text{m component}}; \underbrace{b_{m+1},...,b_q}_{\text{q-m component}} \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(b_1 - s)...\Gamma(b_m - s)\Gamma(1 - a_1 + s)...\Gamma(1 - a_n + s)}{\Gamma(1 - b_{m+1} + s)...\Gamma(1 - b_q + s)\Gamma(a_{n+1} - s)...\Gamma(a_p - s)} z^s ds\,. \tag{2.5.1}$$

Meijer-G 函数在拉普拉斯变换 [53] 的作用下保持封闭。因此，可以通过符号 Meijer-G 计算来近似信号的变换和逆变换（参见 [54]， 了解神经网络符号回归示例）。这一封闭性可从核 e^{-st} 是一个 Meijer-G 函数这一事实看出，其中

$$e^{-sx} = G^{1,0}_{0,1}\left(sx \middle| \begin{matrix} ; \\ 0; \end{matrix} \right) \tag{2.5.2}$$

而两个 Meijer-G 函数乘积的积分又是一个 Meijer-G 函数 [55]

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{\sigma-1} G_{p,q}^{m,n}\left(wx \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right) G_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}\left(\eta x^{k/\rho} \middle| \begin{matrix} c_\gamma \\ d_\delta \end{matrix}\right) dx \\
&= C_1 \cdot G_{\rho\gamma+kq,\rho\delta+k\rho}^{\rho\alpha+kn,\rho\beta+km}\left(\frac{\eta^\rho \rho^{\rho(\gamma-\delta)}}{w^k k^{k(p-q)}} \middle| \begin{matrix} \overbrace{\Delta(\rho,c_1),...,\Delta(\rho,c_\beta),\Delta(k,1-b_1-\sigma),...\Delta(k,1-b_m-\sigma)}^{\beta\rho+km}; \\ \underbrace{\Delta(\rho,d_1),...,\Delta(\rho,d_\alpha),\Delta(k,1-a_1-\sigma),...\Delta(k,1-a_n-\sigma)}_{\rho\alpha+kn}; \end{matrix}\right. \\
&\left. \begin{matrix} \overbrace{\Delta(k,1-b_{m+1}-\sigma),...,\Delta(k,1-b_q-\sigma),\Delta(\rho,c_{\beta+1}),...,\Delta(\rho,c_\gamma)}^{\rho(\gamma-\beta)+k(q-m)} \\ \underbrace{\Delta(k,1-a_{n+1}-\sigma),...,\Delta(k,1-a_p-\sigma),\Delta(\rho,c_{\alpha+1}),...,\Delta(\rho,c_\delta)}_{\rho(\delta-\alpha)+k(p-n)} \end{matrix}\right),
\end{aligned} \tag{2.5.3}
$$

其中

$$
C_1 = w^{-\sigma}\rho^{1+\frac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sum_{j=1}^{\gamma}c_j-\sum_{j=1}^{\delta}d_j} k^{\sigma(p-q)+\frac{1}{2}(q-p)+\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j} (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}(2\alpha+2\beta-\gamma-\delta)} (2\pi)^{\frac{k-1}{2}(2m+2n-p-q)}
$$

以及记号 $\Delta(\cdot,\cdot)$ 是 Meijer-G函数中一组指标参数的简写。例如，$\Delta(\rho,c_j) = \{\frac{c_j+1}{\rho}, \frac{c_j+2}{\rho}, ..., \frac{c_j+\rho-1}{\rho}\}$，其中索引默认为非负整数。Meijer-G函数性质的完整证明见（附录 8.4）。利用 2.5.3、2.5.2 并令 $\sigma = k = \rho = 1$，我们可以得到拉普拉斯变换的一种可能形式

$$
\int_0^\infty e^{-wx} G_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}\left(\eta x \middle| \begin{matrix} c_\gamma \\ d_\delta \end{matrix}\right) dx = \frac{1}{w} G_{\gamma+1,\delta}^{\alpha,\beta+1}\left(\frac{\eta}{w} \middle| \begin{matrix} 0, c_\gamma \\ d_\delta \end{matrix}\right). \tag{2.5.4}
$$

部分动画和补充教程可在 https://www.socr.umich.edu/TCIU/HTMLs/Chapter4_拉普拉斯_变换_Meijer_G_Functions.html获取。

3. 贡献与应用

我们的数值策略对信号的良好表现程度作出了假设。在本研究中，我们不尝试解码函数奇点附近的任何信息，而这些区域往往包含有用的物理信息[56]。我们利用拉普拉斯变换，因为它为将时间序列自然扩展到 kime 曲面提供了途径。下面将介绍并论证这一方法的动机和合理性。

- 这一**从一维到二维的过程** 将时域变换为复时间空间，反映了许多人的体验，例如多个听众对音频信号（或音乐表演）的共同体验、对随时间变化的视觉场景的共同感知，或对文本内容或一系列二维电影图像的共同解读。
- 需要一个稳健且**可逆的** 时间序列 $\rightarrow$ kime 曲面 $\rightarrow$ 时间序列处理流程，而对于平方可积函数，拉普拉斯变换是可逆的。
- 从概率论的角度来看，矩母函数能够唯一确定一个随机变量的分布，并刻画其统计矩序列。
- 最后，我们指出，拉普拉斯变换与数学的许多分支相交融，并以图示概述这种相互作用（见图 3.1）。

当然，还有多种替代方法，例如，梅杰尔 G 函数几乎可以自然地推广任何实值特殊函数，因此能自然地给出 kime曲面表示。以下引理说明了这一特定方法的性质。具体而言，对于解析函数，拉普拉斯变换仅从两条基本原理——**自**线性和代数可微性——自然地导出。这凸显了该方法的特性及其应用场景

引理 3.1。 给定任意解析函数 f，以下两个条件确定一个唯一的积分变换：

- 线性： $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{L}[f] + \beta\mathcal{L}[g]$
- 代数导数： $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$

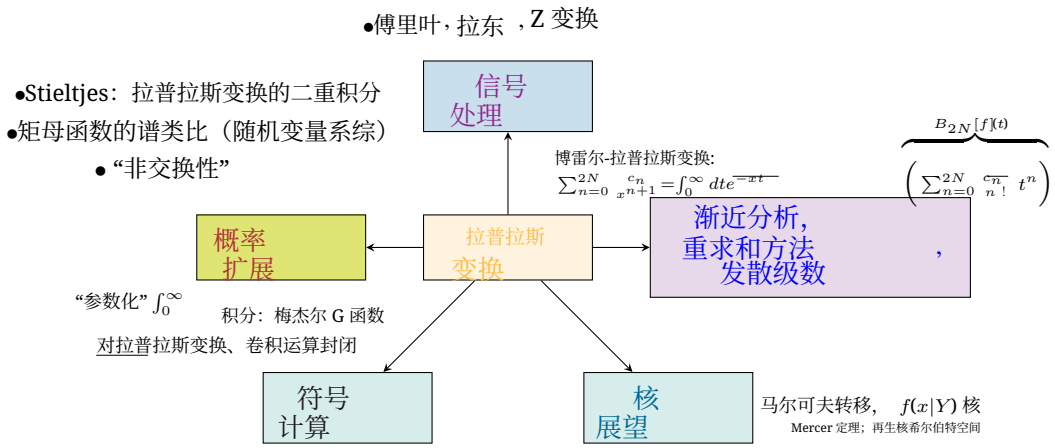


图 3.1。 拉普拉斯变换景观示意图。

拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ 是满足这两个性质（线性和代数可微性）的唯一变换。

对于具有有限支撑的信号这一特殊情况，在不失一般性的前提下，我们将函数支撑限制在紧区间 $[0, 2\pi]$ 内。在这种情况下，代数导数条件会进行轻微修改，以反映函数周期性的可能性：

- Algebraic Derivatives(finite): $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) + e^{-2\pi s} f(2\pi)$.

换言之，线性和代数可微性完全刻画了（有限域）拉普拉斯变换$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)dt$。

该引理的证明见附录 8.3。
总结如下：

1. 代数导数条件表明，这种方法可能具有独特优势：利用离散采样观测，以**方便且稳健的方式重建一阶动态函数** f'，其中边界项可以通过样条插值计算。同样， $s\mathcal{L}[f](s)$项也可以通过数值方法计算。2. 规范线性意味着该方法自然地将加法和标量乘法结构继承到 kime 域中。3. 拉普拉斯变换有助于分析线性时不变系统；对于以特定观测时间为基准、采用不同采样点的重复观测过程，这些系统编码了类似的信息。

4. 数值拉普拉斯变换/逆拉普拉斯变换方法

我们将首先提出用于估计正向和逆拉普拉斯变换的域划分和函数基表示策略。

4.1. 正向拉普拉斯变换

在实践中，许多观测信号是定义域受限（有限支撑）的离散过程的加窗版本。这些离散信号可以用连续解析函数、样条函数、多项式、泰勒级数或傅里叶级数展开来近似。其中一些插值基于幂函数，例如 $f_n(t) = t^n$。

本节将介绍一种通过样条插值并对相应解析函数进行精确积分来对观测离散数据进行拉普拉斯变换的方法。在此类解析展开中，减小幂函数的支集对于控制参数趋于无穷时（模型函数或基函数）的极端增长或衰减是必要的。

半开实区间的特征函数（又称示性函数） $[a,b)\chi_{[a,b)}(t)$，可以用赫维赛德函数表示为 $H_a(t)$：

$$\underbrace{\chi_{[a,b)}}_{\text{characteristic indicator}}(t) = H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0, t < a \\ 1, a \le t < b \\ 0, t \ge b \end{cases} \quad ; \quad \underbrace{H}_{\text{Heaviside}}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \ge 0 \end{cases} . \tag{4.1.1}$$

例如，为了将幂函数 $f_n(t) = t^n$ 的支集限制在区间 $[0, 2\pi)$，我们可以将其乘以$\chi_{[0,2\pi)}(t)$，即：

$$f_{n,\text{supp}[0,2\pi)}(t) = f_n(t) \times \chi_{[0,2\pi)}(t) = \begin{cases} f_n(t) = t^n, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} . \tag{4.1.2}$$

作为线性算子，在区间 $[a,b)$ 上具有紧支集的幂函数的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\left(f_{n,\text{supp}[a,b)}\right)(z) = \mathcal{L}\left(f_n \chi_{[a,b)}\right)(z) = \underbrace{\mathcal{L}\left(f_n H(t-a)\right)(z)}_{A_a(z)} - \underbrace{\mathcal{L}\left(f_n H(t-b)\right)(z)}_{A_b(z)} . \tag{4.1.3}$$

我们需要通过三个推导来阐明加窗幂函数的拉普拉斯变换。首先，让我们验证幂函数的拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}(f_n(\cdot)H(\cdot))(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$。这基于柯西-古尔萨定理 [58]，该定理指出，对于边界 ∂D 表示其边界闭合轮廓的单连通开集 $D \subseteq \mathbb{C}$，若函数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ 在 D 中处处全纯，则：

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0. \tag{4.1.4}$$

这是因为所有全纯函数

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad z = x + iy, \quad dz = dx + idy \tag{4.1.5}$$

满足柯西-黎曼方程：

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{vmatrix} . \tag{4.1.6}$$

因此，

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} f(z)dz = \oint_{\partial D} (u+iv)(dx+idy) = \oint_{\partial D} (udx - vdy) + i \oint_{\partial D} (vdx + udy) \underbrace{=}_{\text{Green's Thm}} \\ \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

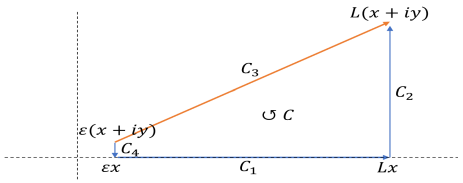
让我们使用以下变量替换变换来证明 $\mathcal{L}(f_n(\cdot)H(\cdot))(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$。我们从以下内容开始—

$$u = zt = (x+iy)t, \quad \epsilon \le t = \frac{u}{z} \le L, \quad zdt = du \tag{4.1.8}$$

然后，

$$\int_\epsilon^L t^n e^{-zt} dt = \oint_{C_3} \left(\frac{u}{z}\right)^n e^{-u} d\frac{u}{z} = \oint_{x\epsilon+iy\epsilon}^{xL+iyL} \left(\frac{u}{z}\right)^n e^{-u} d\frac{u}{z} = \frac{1}{z^{n+1}} \oint_{x\epsilon+iy\epsilon}^{xL+iyL} u^n e^{-u} du \, . \tag{4.1.9}$$

我们将复平面中的一般路径线积分记为 $I_C = \int_C u^n e^{-u} du$，并考虑闭合（边界）围道 $C = C_1 + C_2 - C_3 + C_4$，如图 4.1所示。我们将在开集 D的整个边界$\partial D = C_1 + C_2 - C_3 + C_4$ 上应用柯西-古尔萨定理。主要思路是将 I_{C_3}（即拉普拉斯变换）变为更便于处理的项 I_{C_1}，如下所示



(4.1.10)

$$\underbrace{\oint u^n e^{-u} du}_{I_C} = \underbrace{\oint_{C_1} u^n e^{-u} du}_{I_{C_1}} + \underbrace{\oint_{C_2} u^n e^{-u} du}_{I_{C_2}} - \underbrace{\oint_{C_3} u^n e^{-u} du}_{I_{C_3}} + \underbrace{\oint_{C_4} u^n e^{-u} du}_{I_{C_4}} = 0.$$

图 4.1。 积分路径

让我们证明 $\lim_{L\to\infty} I_{C_2} = \lim_{\epsilon\to 0} I_{C_4} = 0$:

$$\begin{aligned}
&|I_{C_2}| = \left|\oint_{C_2} u^n e^{-u} du\right| = \left\{ \begin{array}{c} u = Lx + iy' \\ du = idy' \end{array} \right\} = \left|\int_0^L (Lx + iy')^n e^{-(Lx+iy')} \cdot idy'\right| \\
&\leq \max_{u\in C_2} L\left|u^n e^{-u}\right| = \max_{u\in C_2} L\left|u^n\right| e^{-Re(u)} = L\left|(\sqrt{x^2+y^2}L)^n\right| e^{-Lx} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \\
&|I_{C_4}| = \left|\oint_{C_4} u^n e^{-u} du\right| = \left\{ \begin{array}{c} u = \epsilon x + iy \\ du = idy \end{array} \right\} = \left|\int_0^{\epsilon} (\epsilon x + iy)^n e^{-(\epsilon x+iy)} \cdot idy\right| \\
&\leq \max_{u\in C_4} \left|u^n e^{-u}\right| \epsilon = \max_{u\in C_4} \left|u^n\right| e^{-Re(u)} \epsilon = \epsilon\left|(\sqrt{x^2+y^2}\epsilon)^n\right| e^{-\epsilon x} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

因此，在极限情况下， $I_C = I_{C_1} - I_{C_3} = 0$， $I_{C_1} = I_{C_3}$，并且

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{L\to\infty} I_{C_1}(\epsilon, L) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{L\to\infty} \oint_{\epsilon x}^{Lx} u^n e^{-u} du \underbrace{=}_{I_{C_1}=I_{C_3}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du\,. \tag{4.1.12}$$

综上，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(f_n(\cdot)H(\cdot)\right)(z) &= \frac{1}{z^{n+1}} \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{L\to\infty} I_{C_3}(\epsilon, L) = \frac{1}{z^{n+1}} \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{L\to\infty} I_{C_1}(\epsilon, L) \\
&= \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^{\infty} u^{(n+1)-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n!}{z^{n+1}}, n = \text{ integer} \\ \frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}}, n > 0 \end{array} \right. .
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

接下来，为估计项 $A_{a,\ n}(z) = \mathcal{L}(f_n(t)H(t-a))(z)$ $n \in \mathbb{Z}$ 注意到 $s = t - a$:

$$\begin{aligned}
A_{a,n}(z) &= \mathcal{L}\left(f_n(t)H(t-a)\right)(z) = e^{-az}\mathcal{L}\left(f_n(s+a)H(s)\right)(z) = e^{-az}\mathcal{L}\left((s+a)^n H(s)\right)(z) \\
&= e^{-az}\int_0^{\infty} (s+a)^n e^{-zs} ds = e^{-az}\int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) s^k a^{n-k}\right) e^{-zs} ds \\
&= e^{-az}\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} \int_0^{\infty} s^k e^{-zs} ds\right] = e^{-az}\sum_{k=0}^{n} \left[\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} \underbrace{\frac{k!}{z^{k+1}}}_{\mathcal{L}(s^k H(s))(z)}\right].
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

窗函数拉普拉斯变换的幂函数可通过将 a 替换为 b得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(f_{n,\,\text{supp}\,[a,b)}\right)(z) = \mathcal{L}\left(f_n \chi_{[a,b)}\right)(z) = A_{a,n}(z) - A_{b,n}(z) = \\
&e^{-az}\textstyle\sum_{k=0}^{n} \left[\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} \frac{k!}{z^{k+1}}\right] - e^{-bz}\sum_{k=0}^{n} \left[\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) b^{n-k} \frac{k!}{z^{k+1}}\right].
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

实际上，可以使用分部积分，以闭式解析表达式的形式实现拉普拉斯变换

$$\int t^n e^{-zt} dt = -\frac{t^n}{z} e^{-zt} + \frac{n}{z}\int t^{n-1} e^{-zt} dt = \frac{1}{z^{n+1}} e^{-zt}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right), \tag{4.1.16}$$

其中，我们需要估计系数 c_k，并将不定积分变为支集上的定积分$[a, b)$ 。

现在，假设我们处理的是在有限时间区间 $[a, b]$ 内采样的离散数据。计算离散信号拉普拉斯变换的一种方法是直接进行数值积分。或者，我们可以先用某些基函数近似数据，这些基函数能够得到具有闭式形式的拉普拉斯变换解析表示。然后，我们可以

将所有基函数的分段线性变换汇总起来，从而推导出完整离散数据集的拉普拉斯变换解析近似。例如，假设我们决定对离散信号进行预处理，使用离散数据集的四阶四次样条插值来建模观测值，以防模型设定错误。因此，我们将通过数值计算，得到数据在时间区间 $t \in [a,b)$ [59] 上的有限支集样条模型 $f(t) = f_{n=4,\text{支集 }[a,b)}(t)$。通过对该样条模型与指数项进行积分，可以将其拉普拉斯变换精确地计算为解析函数：

$$\mathcal{L}\left(f_{n=4,\,\text{supp}\,[a,b)}\right)(z) = \int_0^\infty f_{n=4,\text{supp}[a,b)}(t)e^{-zt}dt = \int_a^b f_{n=4}(t)e^{-zt}dt. \tag{4.1.17}$$

当然，实际应用中可以采用更高阶的样条插值，以反映对过程的特定先验假设，例如归纳偏置。为简单起见，我们将使用固定的超参数值（4），并假设四阶样条模型平滑地拼接一组 d 4 阶多项式函数，$f_{n=4,\text{支集 }[a,b)} \equiv \left\{ f_{k,n=4,\text{支集 }[a_k,a_{k+1})} \right\}_{k=0}^{d-1}$，这些函数定义在相应划分 $\forall 0 \le k \le d-1$ 上的定义域支撑集内。

(4.1.18)

$$\overbrace{f_{n=4,\text{supp}[a,b)}}^{\text{spline model}} = \sum_{k=0}^{d-1}\Big[\overbrace{\sum_{n=0}^{4} q_{n,k}t^n\chi_{[a_k,a_{k+1})}(t)}^{f_{k,n=4,\text{supp}[a_k,a_{k+1})}}\Big]$$

$$\underbrace{[a,b)}_{\text{support}} = \bigcup_{k=0}^{d}\overbrace{[a_k,a_{k+1})}^{\text{support}}{}^{\text{partition interval}}, a \equiv a_o < \cdots < a_d \equiv b,$$

$$\overbrace{f_{k,n=4,\text{supp}[a_k,a_{k+1})}}^{\text{spline model component}} = \sum_{n=0}^{4} q_{n,k}t^n\chi_{[a_k,a_{k+1})}(t)$$

然后，闭式 的（近似）信号的拉普拉斯变换解析表达式可推导为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\text{ signal })(z) \cong \mathcal{L}\left(f_{n=4,\text{supp}[a,b)}\right)(z) &= \int_0^\infty f_{n=4,\text{supp}[a,b)}(t)e^{-zt}dt = \sum_{k=0}^{d-1}\left[\sum_{n=0}^{4}\left(q_{n,k}\left(A_{a_k,n}(z) - A_{a_{k+1},n}(z)\right)\right)\right] \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{d-1}}_{\text{spline}}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{4}}_{\text{polynomial}}\left(\underbrace{q_{n,k}}_{\text{poly coef}}\underbrace{\int_{a_k}^{a_{k+1}} t^n e^{-zt}dt}_{\mathcal{L}\left(f_{n,\,\text{supp}\,[a_k,a_{k+1})}\right)(z)}\right)\right] =: F_{d,4}(z),\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

其中

$$A_{a_k,n}(z) - A_{a_{k+1},n}(z) = e^{-a_k z}\sum_{l=0}^{n}\left[\binom{n}{l}a_k^{n-l}\frac{l!}{z^{l+1}}\right] - e^{-a_{k+1}z}\sum_{l=0}^{n}\left[\binom{n}{l}a_{k+1}^{n-l}\frac{l!}{z^{l+1}}\right]. \tag{4.1.20}$$

因此，先对离散信号进行样条插值，再对这些解析函数进行精确积分的策略，为数值积分观测信号提供了一种替代方法，即使存在大量噪声时也适用。该方法避免了潜在的不稳定性和极其耗时的数值积分。为了得到数据集的拉普拉斯变换，我们实际上将幂函数的拉普拉斯变换积分求和，遍及

poly次幂 0，1，2，$\cdots$，n，以及信号时域支撑集的样条分割 .

通过估计误差幅度的上界，我们可以对比拉普拉斯变换的解析定义，$F_a(z) := \mathcal{L}(f)(z)$，与其估计值 $F_{d,\,4}(z)$，

$$\begin{aligned}|F_{d,4}(z) - F_a(z)| &= \left|\int_a^b (f_{n=4,\text{supp}[a,b)}(t) - f(t))e^{-zt}dt\right| \le \int_a^b \sup_{a\le t<b}|f_{4,\text{supp}[a,b)}(t) - f(t)|\cdot|e^{-zt}|dt \\ &= \sup_{a\le t<b}|f_{4,\text{supp}[a,b)}(t) - f(t)| \times \frac{e^{-Re(z)a} - e^{-Re(z)b}}{Re(z)}.\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

当样条函数与原函数之间的差异最小时，我们的离散拉普拉斯变换方法与解析方法兼容。在实践中，我们通常处理定义在同一时间区间上的函数或信号，例如，固定

$a = 0$, $b = 2\pi$。然后，该算法的精度仅取决于所选样条逼近函数的拟合效果。另一方面，如果我们考虑自然形成的离散数据集，离散拉普拉斯变换仍然可以独立地提供有效定义。

对于时变函数 $f(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$，拉普拉斯变换（$\mathcal{L}$）与傅里叶变换（$\mathcal{F}$）之间也存在直接联系，其中 $H(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ 是赫维赛德函数：

$$\mathcal{L}(f(\cdot)H(\cdot))(z) \equiv \int_0^\infty f(t)H(t)e^{-zt}dt \underbrace{=}_{\substack{z=i\omega \\ -iz=\omega}} \int_0^\infty f(t)H(t)e^{-i\omega t}dt = \mathcal{F}(f(\cdot)H(\cdot))(\omega) \equiv \mathcal{F}(f(\cdot)H(\cdot))(-iz). \tag{4.1.22}$$

假设 $w \in \mathbb{C}$，我们考虑指数衰减函数的拉普拉斯变换

$$f(t) = e^{-wt}H(t), t \geq 0, \mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}\left(e^{-wt}H(t)\right)(z) = \frac{1}{z+w}. \tag{4.1.23}$$

平移函数 $f(t) = e^{-w(t+a)}$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}\left(e^{-w(t+a)}H(t)\right)(z) = e^{-wa}\mathcal{L}\left(e^{-wt}H(t)\right)(z) = \frac{e^{-wa}}{z+w}. \tag{4.1.24}$$

对于离散数据，可以使用其他基函数得到不同的拉普拉斯变换近似。例如，使用傅里叶三角基时，加窗三角函数的拉普拉斯变换可按如下方式求得

$$\mathcal{L}(\sin(wt)H(t))(z) = \frac{w}{z^2+w^2}, \quad \mathcal{L}(\cos(wt)H(t))(z) = \frac{z}{z^2+w^2}. \tag{4.1.25}$$

表4.1列举了一些求解微分方程时常用的基函数及其对应的拉普拉斯变换。

基函数	变换公式	正交条件
正弦基	$\mathcal{L}(\sin(wt)H(t))(z) = \frac{w}{z^2+w^2}$	$\int_0^{2\pi} \text{正弦}(nt)\ \text{正弦}(mt)dt = \pi\delta_{m,n}$
余弦基	$\mathcal{L}(\cos(wt)H(t))(z) = \frac{z}{z^2+w^2}$	$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt = \pi\delta_{m,n}$
贝塞尔基	$\mathcal{L}(J_n(at)H(t))(s) = \frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{a^2+s^2}}$	$\int_0^1 tJ_n(at)J_n(bt)dt = \frac{1}{2}J_n'(a)^2\delta_{a,\ b}$
拉盖尔基[57]	$\mathcal{L}(L_n^{(\alpha)}(t)H(t))(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\alpha)n!s}{\ }M(-n,1+\alpha;\frac{1}{s})$	$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)\ L_m^{(\alpha)}(t)\ dt = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)\delta_{m,\ n}}{n!}$
勒让德基[58]	$\mathcal{L}(P_n(t)H(t))(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\frac{2}{s}}I_{-n-1/2}(s) + (-1/2s)^{\lfloor\frac{\lvert n\rvert+2}{2}\rfloor-\lceil\frac{\lvert n\rvert}{2}\rceil}\ {}_1F_2(1;\frac{1}{2}n+2-\frac{1}{2}\lceil\frac{\lvert n\rvert}{2}\rceil, 1+\frac{1}{2}(\lceil\frac{\lvert n+1\rvert}{2}\rceil-\lfloor\frac{\lvert n+1\rvert+2}{2}\rfloor)-\frac{1}{2}n;\frac{1}{4}s^2)\right)$	$\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,\ n}$
*Hermite*基	$\mathcal{L}(H_n(t)H(t))(z) = 2^n\Gamma(1+n)_{s^{1+n}}\ {}_2F_2(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{-n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{s^2}{4})$	$\int_{-\infty}^\infty H_m(x)H_n(x)e^{-x}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta m,\quad n$
*Chebyshev*基[59]	$\mathcal{L}(H_n(t)x^\alpha T_n(1-2x))(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{z^{1+\alpha}}{}_3F_1(-n,n,1+\alpha;1/2;1/z)$	$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x\ T_m\ x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}^{\delta n)}\ 0,\ ^0\pi\delta_{n,m}$

表4.1

一些常见基函数的解析拉普拉斯变换示例。函数 $M(\cdot)$ 是合流超几何函数，而 $I_n(\cdot)$ 是第一类贝塞尔函数，即阶数为 n。我们在附录中提供了使用 *Meijer-G* 函数进行的若干示例计算 *8.4.1*

由于LT是一个线性算子，任何能够用三角函数基，或更一般的任意正交归一基表示的函数或信号，都具有闭式解析的拉普拉斯变换表示。例如，本研究 [60] 基于Laguerre多项式，使用Tricomi方法阐释拉普拉斯变换。

4.2. 整函数的（解析）逆拉普拉斯变换

为了验证逆拉普拉斯变换近似，我们使用一个 [61] 由Valsa和Brancik提出的逆拉普拉斯变换（ILT）近似公式。他们的方法具有令人满意且可调节的精度，同时展现出出色的计算效率。该方法尝试恢复（时间）信号 $f = ILT(F)$，从Bromwich 积分开始

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\,. \tag{4.2.1}$$

函数 $F(z)$ 的基本假设（该函数隐式表示某个原函数或信号的拉普拉斯变换）包括：(1) $F(z)$ 是定义在 $\mathrm{Re}\{z\} > 0$ 上的单变量解析（正则）函数；(2) $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$；以及 (3)$F^*(z) = F(z^*)$，其中星号表示复共轭。

Valsa 和 Brancik 的逆拉普拉斯变换估计基于对 e^{zt} 的近似：

$$\mathrm{e}^{zt} \sim E_\mathrm{c}(zt,a) := \frac{\mathrm{e}^a}{2\cosh(a-zt)} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{-zt}+\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{zt}} = \frac{\mathrm{e}^{zt}}{1+\mathrm{e}^{-2a}\mathrm{e}^{2zt}}, \tag{4.2.2}$$

其中，下标“c”表示双曲余弦，而 $a > \gamma t$ 是稍后选取的一个参数，以确保 $\left|\mathrm{e}^{-2a}\mathrm{e}^{2st}\right| \ll 1$。然后，我们可以将逆拉普拉斯变换的重建表示为

$$\begin{aligned} f_\mathrm{c}(t,a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)E_\mathrm{c}(zt,a)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-2na}\mathrm{e}^{(2n+1)zt}\,\mathrm{d}z \\ &= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-2na}f[(2n+1)t] = f(t)+\epsilon_\mathrm{c}(t,a). \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

注意，函数 $E_\mathrm{c}(zt,\ a)$ 可以利用[1] 双曲余弦 z 的级数展开，表示为关于 zt 的有理函数的无穷和；它是一个亚纯函数（见图8.1），具有简单极点 $i\frac{\pi}{2}+\pi i\mathbb{Z}$（推导和求值过程见补充材料）

$$\frac{1}{\cosh z} = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1/2)}{(n+1/2)^2\pi^2+z^2} \Longrightarrow E_\mathrm{c}(zt,a) = \pi\mathrm{e}^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1/2)}{(n+1/2)^2\pi^2+(a-zt)^2}. \tag{4.2.4}$$

因此，

$$\begin{aligned} f_\mathrm{c}(t,a) &= \frac{\mathrm{e}^a}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1/2)}{(n+1/2)^2\pi^2+(a-zt)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\mathrm{e}^a}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1/2)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(z)}{(n+1/2)^2\pi^2+(a-zt)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^a}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1/2)I_n. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

路径积分 I_n 可视为右半平面上一个大半圆的一部分，并可通过其在两个简单极点 $z_{1,2} = {}^{a\pm i}_{(n+1/2)_t}\quad{}^{\pi}$ 处的留数求得。由于 $a\in\mathbb{R}$，因此 $z_1 = \cancel{z_2^*}$。我们假设函数 F 会使路径积分消失，即：

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{-1,z_1}g &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{F(z)}{(n+1/2)^2\pi^2+(a-zt)^2} \underbrace{=}_{\text{l'Hôspital}} -\frac{F(z_1)}{2\pi it(n+1/2)}, \\ I_n &= 2\pi i(\mathrm{res}_{-1,z_1}g + \mathrm{res}_{-1,z_2}g) = -2\pi i\left[\frac{F(z_1)}{2\pi it(n+1/2)} - \frac{F(z_2)}{2\pi it(n+1/2)}\right] \\ &= \frac{F(z_1{}^*)-F(z_1)}{t(n+1/2)} = \frac{F^*(z_1)-F(z_1)}{t(n+1/2)} = \frac{-2i\,\mathrm{Im}\{F([a+i(n+1/2)\pi]/t)\}}{t(n+1/2)}. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

因此，我们得到

$$f_{\mathrm{c}}(t,a) = -\frac{\mathrm{e}^a}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{Im}\left\{F\left[\frac{a}{t}+i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{t}\right]\right\}, \tag{4.2.7}$$

它是我们试图恢复的原函数 f 的良好近似。

Valsa 和 Brancik [61] 使用所谓的欧拉变换来加速上述交错和的收敛。原始无穷级数及欧拉变换如下所示： [62]

$$\begin{aligned} S &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}y_i = \sum_{t=1}^{\infty} e^{i\pi t}y_t \\ S_{\text{Euler}} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^{n-1} y_1, \quad \text{where } \Delta y_n \equiv y_{n+1} - y_n. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

如 附录中所示， $S_{\text{Euler}} = S$ 因为 $\sum_{n=i}^{\infty}\binom{n}{i}_{2^n} \underline{=} 2$被替换为一个截断于 N的有限和

$$\begin{aligned} S_{\text{Euler}}^{(N)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^{n-1} y_1 = \sum_{j=1}^{N}\overbrace{\sum_{m=j+1}^{N+1}\frac{1}{2^{N+1}}\binom{N+1}{m}}^{w_j^{(N)}}(-1)^{j-1}a_j \\ &= 2^{-N}\left(E_1 y_1 - E_2 y_2 + \cdots + (-1)^{N-1}E_N y_N\right), \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

其中截断参数 N 是一个由我们自行选择的参数，并且

$$E_{n_{\text{dif}}} = 1, E_k = E_{k+1} + \binom{N+1}{k}, N, N-1, \cdots, 1. \tag{4.2.10}$$

因此，欧拉变换仅意味着以逐渐减小的权重添加 N 额外项。除此之外，对这些项的计算方式与基本和中的各项相同。

4.3.（离散）逆拉普拉斯变换

对于良好的解析函数，有一些高效的算法可以计算逆拉普拉斯变换。然而，这些方法高度依赖于输入函数的复解析性质，而这些性质通常可能微妙且复杂。在实践中，我们经常遇到这样的情况：数据表示未知复函数数量有限的采样点。因此，定义在复时间域上的复值函数 kime 曲面，只能在 $\mathbb{C}$的有限区域内以有限精度观测到。这就需要开发新的算法，用于估计表示一般离散晶格采样的kime曲面的逆拉普拉斯变换的相应时域函数。

4.3.1. 离散逆拉普拉斯变换量化

我们将函数空间设为 $L^2([0,2\pi))$，除非另有说明，否则始终使用2-范数。给定复平面 $\mathbb{C}$上的一组（采样）数据点 $S = \{(z_i, b_i = F(z_i))\}_{i=1}^{N}$，我们希望恢复一个时间信号

$$f = \mathcal{L}^{-1}F \tag{4.3.1}$$

来自观测到的 kime 曲面。假设样本数据确实由某个未知的 f产生，且其时间正则性较好，例如， f可微且具有有界导数。如果 f是一个受划分 $\mathbf{p} = \{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$约束的分段常数函数，其中 $0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_n = 2\pi$，那么 f可视为一个向量

$$\mathbf{u}^p = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \tag{4.3.2}$$

其中 $\mathbf{u}^p$ 表示一个向量，该向量表示 f在划分 p上的取值，且 $f^p(x) = u_i, \forall x \in (p_{i-1}, p_i)$。

备注：目标是求得 f，而非 $\mathbf{u}^p$。事实上，划分 p 并非问题本身真正给定的内容。我们也可以酌情选择其他类型的有限表示。具体采用哪种划分并非问题的一部分。这种通用量化方法有一些微妙之处。通常，我们可以使用有限差分或有限元方法来建立一个最小化问题。然而，这样一来，我们就无法控制（可能存在问题的）优化器。当求解中涉及的矩阵不可逆（或接近不可逆）时，可能会导致不稳定解。不过，这种量化方案旨在量化并分析近似误差。

4.3.2. 伪算法

给定定义域上采样得到的 kime 曲面（数据） $S = \{(z_i,\ b_i = F(z_i))\}_{i=1}^{N}$，其中 z_i 的实部有界且非负，我们可以使用**算法 1** 框中所示的伪算法恢复函数 f。我们沿着 kime 曲面采用随机化和重采样（而非确定性选择），以增强数值和计算稳定性。

算法 4.1随机化逆拉普拉斯变换

1: $N_1, N_2 \leftarrow prior\_estimate$ 是划分大小 2: $itn \leftarrow g(N_1, N_2, prior_estimate)$是尝试次数（迭代次数） 3: for $1 \le k \le itn$ do 4: p$^k \leftarrow$ 按照分布 P，在区间$(0, 2\pi)$上随机进行 N_1 大小的划分。
5 $= b_i \leftarrow N_2 z_i b_i$ S : b ( ) 从数据集中随机选取点(,) : A ($a_{ij} = \frac{1}{-z_i}$
6 $\leftarrow$
(exp$(-z_i p_j)$ exp$(-z_i p_{j-1})$)，注意，A是用于计算量化分段常函数的拉普拉斯变换的矩阵 7: u^{pk} = A†b 8: $f^{pk} \leftarrow$ u^{pk} 作为分段常函数 9: end for 10: $f \leftarrow \frac{1}{itn} \sum_k f^{pk}$

备注：参数 N_1、N_2 和 itn 可以通过一些先验估计确定，尽管算法本身也可以在 N_1、N_2 被设为某个简单的默认值（如 $\sqrt{N}$）时充当先验估计，而 itn 可能取相近的数量级。我们将在验证部分阐明这一超参数估计流程。采用随机化方法的直觉在于利用随机性来（至少尝试）评估最小奇异值问题，以及这样一个事实：在曲线上或邻域内密集采样足以重构复解析函数。

5. 实验与验证

接下来，我们使用实验数据验证所提出的 LT 和 ILT 近似的性能。具体实验旨在展示实践证据，为所提出的离散逆拉普拉斯变换量化方法提供直观理解，并识别一些潜在的算法局限性。所有报告的结果均通过 LT/ILT 算法的 R 实现获得，该实现可在 TCIU R 包、项目 GitHub 仓库（https://github.com/SOCR/TCIU）以及 CRAN（https://cran.r-project.org/web/packages/TCIU/）上获取。

5.1. 拉普拉斯变换的验证

我们将把所提出的离散拉普拉斯变换算法应用于多个离散信号，这些信号表示为有界区间上的数据点集合 $[0, 2\pi]$（时间或空间）。为了准确评估性能并量化误差率，观测到的数据样本取自具有已知解析拉普拉斯变换的函数，从而可以将离散估计结果与其解析对应结果进行比较。我们还将使用连续的逆拉普拉斯变换对函数进行反演 [61]，并与原始数据点进行比较。

在图 5.1 中，我们将拉普拉斯变换应用于支集为 $(0, 2\pi)$ 的正弦函数，绘图范围为 $(0, 20) + (0, 20) * 1i$，其中变换后信号的绝对值表示曲面高度，颜色表示复数值的相位参数。在图 5.2 中，我们将解析结果与数值实现进行比较，此时正弦函数在间隔为 $2\pi/200$ 的规则网格点上进行采样。注意 $\mathcal{L}(\sin \cdot \chi_{[0,2\pi]})(z) = \int_0^{2\pi} \sin(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{2\pi(i-z)}}{i-z} - \frac{e^{2\pi(-i-z)}}{i+z} + \frac{2i}{z^2+1}\right) = \frac{1-e^{-2\pi z}}{z^2+1}$，并在直线$z = 0.1 + (0, 20) * 1i$上绘制该函数（红色）。图中的蓝色点表示所提出的数值拉普拉斯变换方法的结果。实数拉普拉斯变换与估计拉普拉斯变换的绝对值以对数刻度绘制，以便于比较。结果表明，蓝色点（估计值）与红线（真实值）之间在视觉上高度吻合。在我们的实验中，精度约为 10^{-10}；通过使用更密集的点采样，还可以获得更高的精度，这很自然，因为正向拉普拉斯变换是一种线性积分变换。

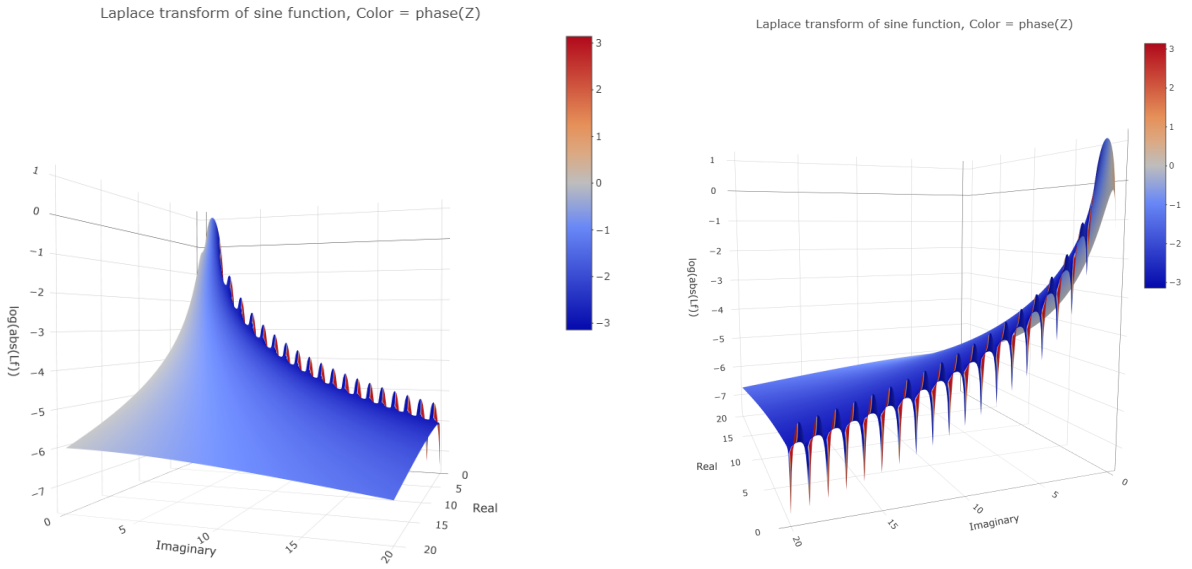


图 5.1。 拉普拉斯变换 正弦函数的拉普拉斯变换，纵轴（函数值的幅值）采用对数刻度 .

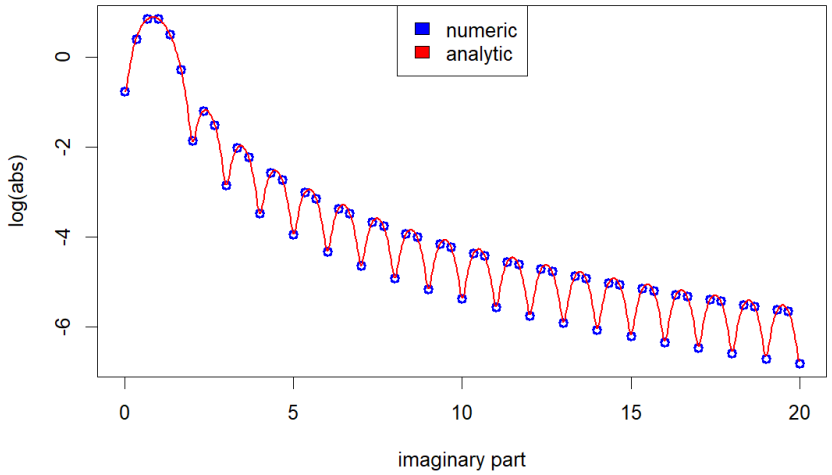


图 5.2。 比较 数值拉普拉斯变换近似（蓝色）与相应解析表达式（红色）的幅值 .

在图 5.3 和 5.4中，我们首先将数值拉普拉斯变换应用于函数

$$f(x) = 2\sin(x) + \cos(4x) + \sin(7x + 0.5) + 0.3(x - 3)(x - 5) + \epsilon(x). \tag{5.1.1}$$

函数 ϵ 表示区间 $[0, 2\pi)$上的随机噪声。函数 f 以红色曲线绘制于图5.4中，其 kime 曲面如图5.3所示。解析逆拉普拉斯变换在时域中恢复了原始函数（蓝色点）。显然，在 $[0, 2\pi)$ 区间内，蓝色点与红色曲线非常吻合，并且在该范围之外自然回归为零，符合预期。在实践中，计算解析逆拉普拉斯变换需要以很高的精度计算拉普拉斯变换函数；此图证实，解析和数值逆拉普拉斯变换方法都表现良好。

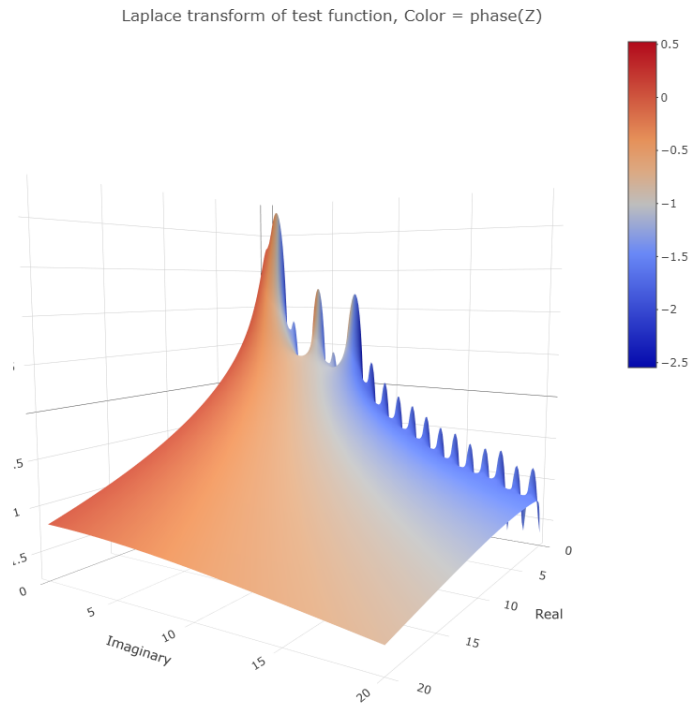


图5.3。 测试函数的拉普拉斯变换 f，对数刻度

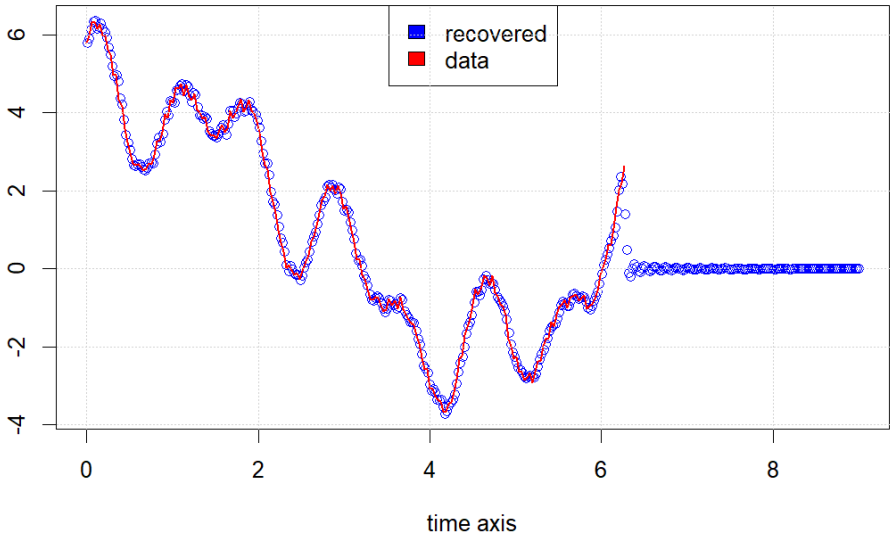


图5.4。 使用解析逆拉普拉斯变换方法重建时域函数的图示，$\hat{f} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(f)$（蓝色数据点），基于所提出的拉普拉斯变换算法生成的数据点，并与原函数 f进行比较（红色曲线）。

从视觉上看，当信号采样足够密集时，数值拉普拉斯变换的表现非常好。这是预期之中的，因为在这种情况下，积分通常很容易实现，而且还能增加一个平滑度层次。由于我们会计算每个子区间内的解析积分结果，因此定义域点采样策略和函数基的选择

这至关重要。这些选择可能需要考虑信号频谱，并选择适当的域划分方案、函数基和自由度。

就计算复杂度而言，当使用多项式基时，我们观察到，运算次数会随着自由度的增加而快速增长， $n!$ 这是因为 $t^n e^{-zt}$的（解析）积分需要分解为低阶项。另一方面，当使用三角函数基时，每个域划分子区间中的自由度对计算运算次数的影响较小，因为在这种情况下，对 $\sin(nt)e^{-zt}$ 进行积分是直接的。

5.2. 离散逆拉普拉斯变换的验证

本节将把逆拉普拉斯变换的估计值与其精确值进行比较。我们将把所提出的离散逆拉普拉斯变换方法应用于以下数据：这些数据通过对具有已知解析逆拉普拉斯变换的复函数进行采样获得，以及通过对特定纵向函数进行拉普拉斯变换而从上文获得的复函数。

我们首先对 $f(x) = \sin(3x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上的拉普拉斯变换应用离散逆拉普拉斯变换。在图 5.5中，所有 f^p （随机域划分方案 p）在每个网格点上恢复并重新插值的值以箱线图形式显示。可以看到，逆拉普拉斯变换的估计值往往变化剧烈。请注意每个纵向箱体的宽度，尤其是在末端附近。这种右侧的不稳定性源于拉普拉斯变换中负指数项的影响。然而，随机化算法的估计值在左侧要集中得多。恢复的估计值（绿色曲线）表示所有恢复函数单次尝试的加权平均值，而蓝色曲线的估计值对应于每个网格点处多次恢复结果的中位数。

两个逆拉普拉斯变换估计值（绿色和蓝色曲线）都紧密跟随真实的解析逆拉普拉斯变换函数（红色曲线）。特别是，图 5.5 展示了一个示例，说明集成的（基于均值或中位数的）随机化算法能够从大量不完善的单次尝试中恢复原始数据。

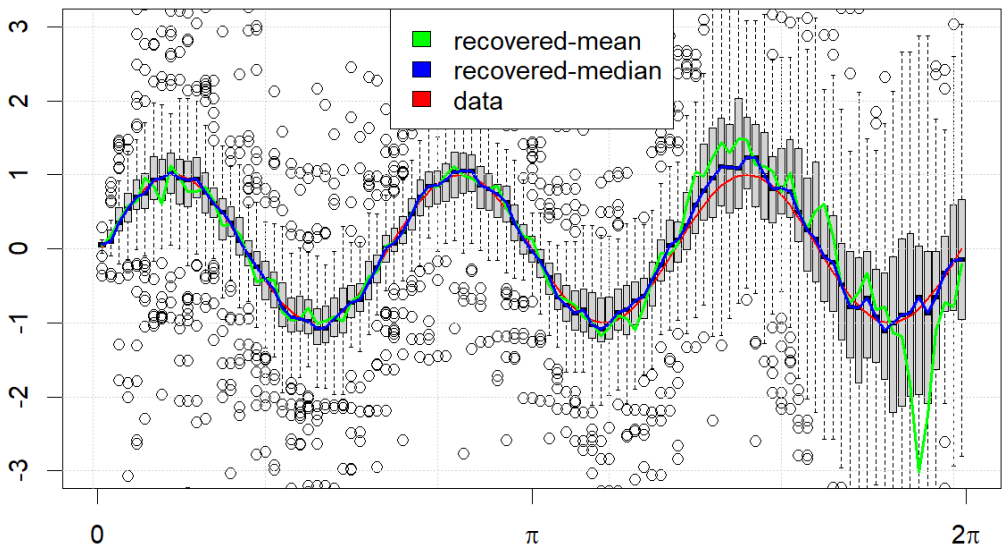


图 5.5。 恢复的（插值的）箱线图 f^p 与原始的 f （红色）相比。

图 5.6和 5.7 使用函数 $f(x) = 2\sin(x) + \cos(4x) + \sin(7x + 0.5) + 0.3(x - 3)(x - 5) + \epsilon(x)$ 展示了相同的实验（见图 5.4）。同样，结果表明离散逆拉普拉斯变换近似能够恢复原函数；请观察重建结果（绿色和蓝色曲线）与真实信号（红色曲线）之间的相似性。

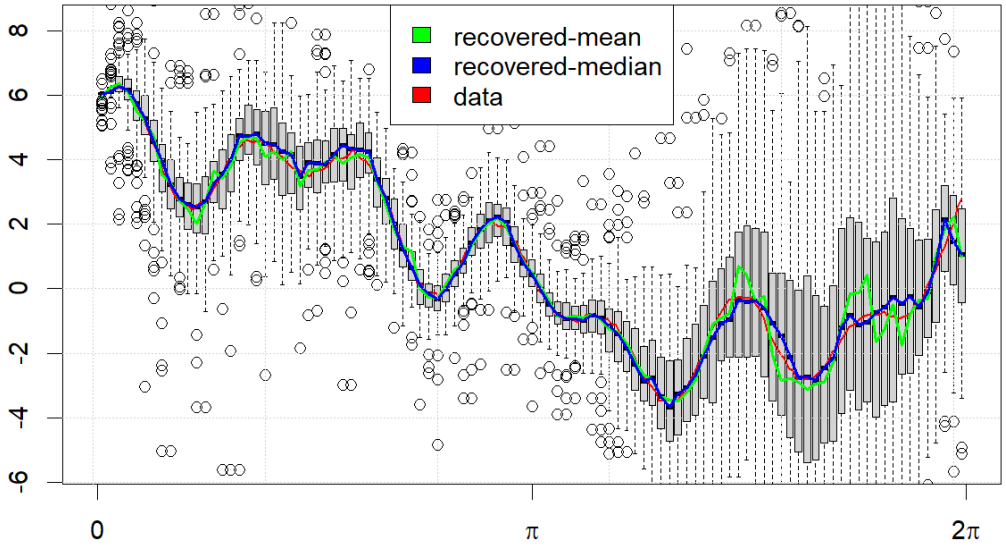


图 5.6。 恢复的（插值的） f^p 与原始的 f （红色）箱线图。水平轴和垂直轴分别表示时间和信号强度。

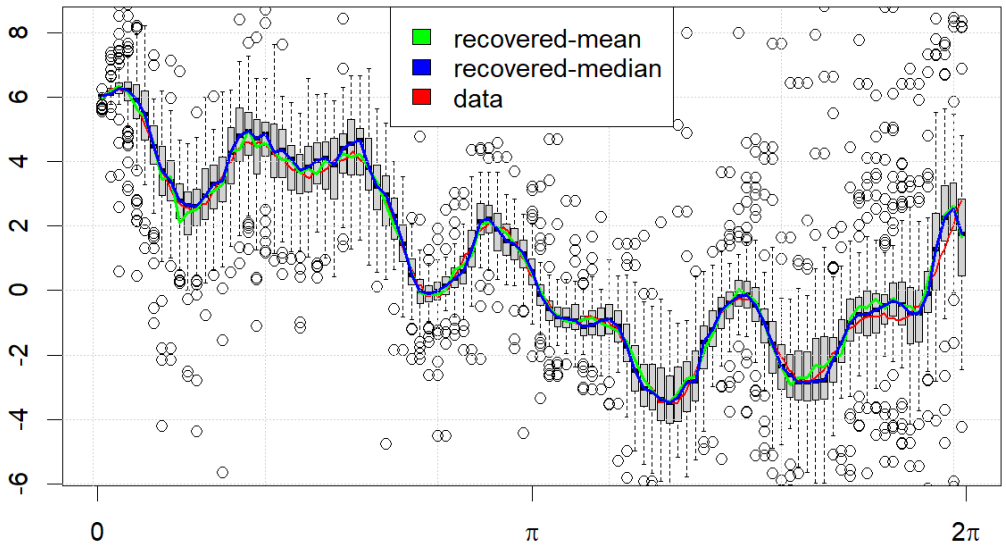


图 5.7。 另一幅恢复的（插值的）箱线图 f^p 与原始的 f （红色）箱线图。

考虑图 5.3所示的原始的 kime 曲面。该曲面是将拉普拉斯变换应用于离散逆拉普拉斯变换的结果而生成的。在图 5.8 中，我们取重构的 kime 曲面对应于 $Re(z) = 0.5$ 的一个切片，并将其与原始信号的相应切片进行比较。由于两个信号都是复值的，我们绘制它们的幅值。即使该切片并不完全对应于采样点的位置，恢复的 kime 曲面仍保留了原始信号中存储的大部分底层信息。请注意，差异（误差）率主要反映了通过 kime 曲面的切片点位置之间的差异。

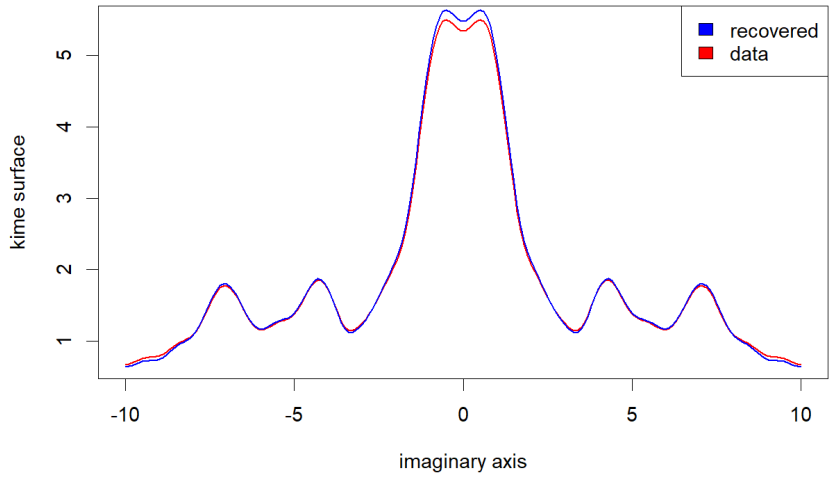
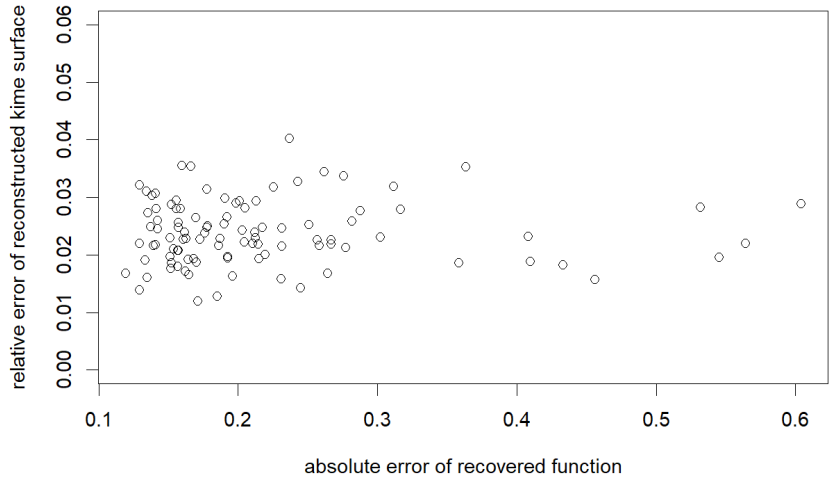


图 5.8。 重构的 *kime* 曲面幅值（在 $Re\,(z) = 0.5$）与原始信号的比较。

在图 5.9中，我们使用不同的采样点集合，将图 5.6 所示的实验重复了 100 次。图中显示了重构的 kime 曲面（由恢复函数在采样点处得到）和恢复函数的绝对误差与相对误差。这两个误差率并无显著关联，这证实了我们的直觉：较大的逆拉普拉斯变换误差源于线性系统（离散拉普拉斯变换）的奇异性，而非求解拉普拉斯变换时的数值精度问题。具体而言，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有奇异值分解 $A = \sum_k \sigma_k u_k v_k^\dagger$ 时，伪逆为 $A^\dagger = \sum_k \frac{1}{\sigma_k} v_k u_k^\dagger$，而最小的 $\sigma_n(A)$ 成为主导奇异值 $\sigma_1(A^\dagger) = \frac{1}{\sigma_n}(A)$。



Fig图 5.9。 恢复函数的误差，以及使用该恢复函数重构的 *kime* 曲面的误差 n.

5.3. 离散逆拉普拉斯变换的分析

本节将从直观和经验的角度阐述随机化域划分策略的有效性。该策略在实践中表现良好，同时我们还将补充一些理论上表现良好的“近似”情形。具体而言，我们将展示，由预设模型推导出的拉普拉斯变换矩阵可能难以求逆；然而，随机化域划分能够显著改善这一过程。我们借鉴了随机矩阵理论中的思想和估计策略。预设模型表示一个具有固定区间的分割函数，其划分值有待确定。事实上，还可以采用其他类似的策略。

所提出的离散逆拉普拉斯变换技术基于对划分 p_i 和数据点 z_j 进行随机化。理想情况下，我们希望推导出一个模型，或明确描述划分过程与点过程的联合概率分布。然而，其他策略的理论误差界仍然未知。因此，我们提出了其约束较为宽松的弱化版本。

5.3.1. 理论近似与结果：假设与分析

我们的总体目标是界定具有非独立同分布条目的矩形复随机矩阵的最小奇异值 $A = \left(\frac{1}{-z_i}(\exp(-z_i p_j) - \exp(-z_i p_{j-1}))\right)_{1\le i\le n', 1\le j\le n}$ 通过所介绍的随机化策略（算法 4.1），该策略在数据实验中表现良好。具体而言，两个主要挑战是：（1）处理复矩阵（许多实矩阵结果可以从实数情形推广到复数情形 [63]）；以及（2）研究新提出的数值方法与当前最先进的随机矩阵理论技术之间的协同作用，其中分割点 p_j 不一定相互独立。这种独立性可能导致非平凡的协方差矩阵，或违反各向同性条件 [63]。

定义 5.1。 如果随机向量 X *in* $\mathbb{R}^n$ 满足各向同性，则 $\Sigma(X) = \mathbb{E}[XX^T] = I_{n\times n}$. 同样地，$\mathbb{C}^n$中的随机向量满足各向同性，当且仅当 $\Sigma(X) = \mathbb{E}[XX^*] = I_{n\times n}$。

随机划分

我们的替代随机区间划分策略是首先从相同的分布X中采样随机变量 X_i $X_i \sim X$，然后进行归一化，以便在 $(0, 2\pi)$ 区间上拟合模型。第 i 个区间的长度为$2\pi\frac{X_i}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$，区间的端点为 $\left[2\pi\frac{\sum_{j=1}^{i-1} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j},\ 2\pi\frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}\right]$ 和 $p_J = 2\pi\frac{\sum_{j=1}^{J} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ ($1 \le J \le n$)。

请注意，分母求和涵盖 $n+1$ 项，因为我们需要舍弃最后一个确定地产生 2π 的数据点。然而，这样的划分会引入相关性，可能会影响后续使用随机矩阵结果的分析。

引理 5.2。 如果 $X_i > 0$ 和 $X_i \overset{i.i.d}{\sim} X$，则 $U = \frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ 和 $V = \frac{\sum_{j=1}^{k} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ 不可能独立 $\forall i < k$.

证明。 我们论证 $f_{V|U}(v \mid U = u) = f_V(v)$ $\forall u$ 会导致矛盾。令 u 的值固定，则$f_{V|U}(v \mid U = u) = 0$, $\forall 0 < v < u$，但 $f_V(v) > 0$, $\forall 0 < v < u$。因此，独立性条件 $f(V \mid U) = f(V)$ 不成立。

推论 5.3。 $U = \frac{X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$和 $V = \frac{X_k}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ ~~$\forall j \neq k$~~ 并不独立。

证明。 如果它们相互独立，那么 $f(U) = U$, $g(V) = 1 - V$应该相互独立，但适当地重新排列索引后，我们可以看出这不可能成立，因为这要求 $Y = \frac{X_1}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ 和 $Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ 相互独立，~~而这正是 引理 5.2中~~的一个特例。 ■

理想化情形

为确保独立性并增加随机性，从而获得奇异值的理论下界，一种可能的情形是将区间 $(0, 2\pi)$ 划分为 n 个部分，即域区间 $p_j \in [\frac{2\pi}{n+1}j - \frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}j + \frac{\pi}{n+1}]$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，并在这些域区间~~中~~独立选取分割点。~~在~~这种情况下，随机区间分割中 p_i在 p_{i+1} 上的取值所带来的先验信息将被有效消除，因为一旦固定 p_i， p_{i+1}的分布就会发生偏移。另一种能够保证区间 $(0, 2\pi)$对称性的候选划分策略是 $p_j \in (\frac{2\pi j}{n} - \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi j}{n})$。可视化、随机分割分布的推导，~~以及该假设与~~随机划分的对比，请参见补充材料（8.6），以及随机划分（8.6.3）。

让我们将 LT 矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 视为一个大小为 $n' \times n$ 的矩阵，其中 n' 是数据点的数量， n 是分割区间的数量。自然地，$n' \ge n$，并且对于某个特定函数 $g(n)$，有 $n' = g(n)$。在实践中，这可以是固定纵横比，例如 $n' = 2n$，也可以是二次关系，例如 $n' = n^2$。我们希望确定该 LT 矩阵的最小奇异值。

定理 5.4。 *(具有独立行和重尾的非渐近随机矩阵 [63] 第 26 页)* 设 A 是一个 $N \times n$矩阵，其行 A_i 是独立的各向同性向量。设 m 为满足以下条件的数 $\|A_i\|_2 \le \sqrt{m}$ 几乎处处 $\forall i$。那么，对于 $t \ge 0$，其概率至少为 $1 - 2n\exp(-ct^2)$,

$$\sqrt{N} - t\sqrt{m} \le s_{min}(A), \tag{5.3.1}$$

其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。

Rudelson 和 Vershynin 的以下定理 [64] 表明，对于上三角部分由独立同分布元素组成、且分布密度满足单位方差高斯界的厄米特随机矩阵，其最小奇异值的量级为 $\sqrt{n'}-\sqrt{n}$；与定理5.4中的版本相比，这是一个更严格的条件。

定理 5.5（Rude lson, Vershynin 2009 [64]）。设 A 是一个 $n' \times n$ 随机矩阵， $n' \geq n$，其元素 a re 是以下变量的独立副本为零、具有单位方差的次高斯随机变量。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们有 ve

$$\mathbb{P}\left(s_{min}(A) \equiv \sigma_n(A) \leq \varepsilon(\sqrt{n'}-\sqrt{n-1})\right) \leq (C\varepsilon)^{n'-n+1} + e^{-cn'}, \tag{5.3.2}$$

其中 σ_n 是 最小奇异值； C、 $c > 0$ 仅依赖于次高斯矩 B（呈多项式关系） .

一种用于原始矩阵以保证各向同性的理想化采样策略

$$A_{ij} = -\frac{1}{z_i}\Big(\exp(-z_i p_{i,j}) - \exp(-z_i p_{i,j-1})\Big)$$

不可用 ，然而，在附录 8.5.1 中，我们证明了对于该情 se

$$B_{ij} = \Big(\exp(-z_i p_{i,j}) - \exp(-z_i p_{i,j-1})\Big).$$

以下两个引理给出了确保矩阵元素各向同性的**相位采样** 约束。其示意图如下

$$\mathbb{E}[c_{ij}] = \mathbb{E}_D\left[\mathbb{E}_R\left[\mathbb{E}_P[-\frac{1}{r\exp(i\phi)}\exp(-rp_{i,j}\exp(i\phi)) \mid D,R] \mid D\right]\right] = \mathbb{E}_D[\underbrace{g(p_{i,j})}_{\text{non-constant}}] \underbrace{=}_{\text{hard}} \text{const}, \forall j$$

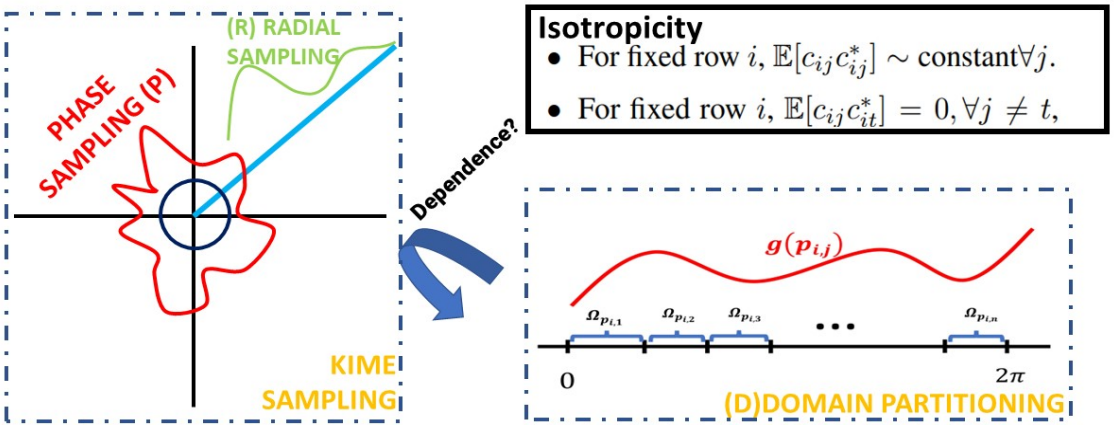


图 5.10。 通过积分变换（期望）获得各向同性的示意图）。

引理 5.6。 *(B_{ij} 采样）给定 ϕ 和 a （径向采样与域划分整体由 a 表示）相互独立，即采样方案、kime 相位和 kime 幅度（径向）采样过程相互独立，则唯一的 f_Φ（ϕ） $\in L^2([0,2\pi])$ 满足*

$$\int_0^{2\pi} \exp(-a\exp(i\phi)) f_\Phi(\phi) d\phi = const, \tag{5.3.3}$$

is $f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$.

引理 5.7。 *(A_{ij} 采样）如果 a 和 ϕ 相互独立（意味着相位采样独立于径向方向和域划分），则不存在平方可积函数 f_Φ（ϕ），使得*

$$\int_0^{2\pi} \exp(a\exp(i\phi))\exp(-i\phi) f_\Phi(\phi) d\phi = const \tag{5.3.4}$$

其中的常数与 a无关。

这两个引理实际上意味着，独立的相空间采样将使各向同性条件难以得到保证。也就是说，积分结果是 a的一个（非常数）函数；例如在 B_{ij} 情况下，对 $[0, 2\pi]$ 划分取期望后，该函数的期望值几乎不可能相等，

$$\mathbb{E}[c_{ij}] = \mathbb{E}_D\left[\mathbb{E}_R\left[\mathbb{E}_P\left[-\frac{1}{r\exp(i\phi)}\exp(-rp_{i,j}\exp(i\phi)) \mid D, R\right] \mid D\right]\right] = \mathbb{E}_D[\underbrace{g(p_{i,j})}_{\text{non-constant}}] \underbrace{=}_{\text{hard}} \text{const}, \forall j \tag{5.3.5}$$

其中， D， R， P分别表示域划分、径向期望和相位变量期望。最后一个等式意味着求解定义在 D 上的 n 个 $j's$ 方程的域划分策略，而且这通常是不可能的（例如，当 g 单调时）。证明和进一步讨论见附录 8.5.2

此外，拉普拉斯变换矩阵 $\mathbf{A}$ 的各个元素远非相互独立。因此，直接应用随机矩阵理论并不能保证对拉普拉斯变换矩阵最小奇异值的合理近似。不过，我们有几种特设策略（例如随机噪声平滑 [65] 和正则化），可以牺牲重建精度来换取算法稳定性。下面，我们提出一个关于拉普拉斯变换矩阵最小奇异值的猜想。

5.3.2. 实验、假设与实证评估

命题 5.8。 拉普拉斯变换矩阵的最小奇异值 σ_n $\mathbf{A}$ 满足

$$\mathbb{E}(\sigma_n(\mathbf{A})) = h(n) \tag{5.3.6}$$

并且存在 $\gamma \in$ （0，2） 使得

$$h(n) \sim \frac{1}{n^\gamma}. \tag{5.3.7}$$

定理 5.5 适用于具有单位方差的随机变量，而在我们的情况下，方差为 O（$1/n^2$）。因此，可以合理地预期，奇异值的大小应按比例减小。当我们具有固定纵横比时，例如 $n' = 2n$，则 $\sqrt{n'} - \sqrt{n} - 1 \sim$ （$\sqrt{2} - 1$）$\sqrt{n}$。除以 n，可得 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{n}}$，这对应于 $\gamma = 0.5$。而如果我们有一个方阵 $n' = n$且 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \sim 1/\sqrt{n}$，同样的逻辑可得$\gamma = 1.5$。

显然， γ区间（0，2）看起来相当宽泛，而这一假设似乎为分析性能误差提供了合理依据。事实上，下面的误差分析并不真正要求最小奇异值呈多项式衰减，不过，它提供了一种明确且实用的估计策略。

回顾一下，我们从函数 f 开始，并且

$$b_i = \mathcal{L}f(z_i) + \epsilon_i \ , \tag{5.3.8}$$

其中， b_i 是 z_i上的数据， ϵ_i 是某种采样和舍入误差，其中也包括 z_i的舍入误差。接下来，我们像之前一样选择 n 和 n'，令 p 为区间(0，2π)的一个划分，其大小为 n，并令$\mathbf{u}$ 和 f^p 为 p上 f 的分段常数插值，其中$\mathbf{u}$ 是一个向量，而 f^p 是一个函数。然后，我们可以推导出误差的一个上界

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(z_i) - \mathbf{A}\mathbf{u}(i)| &= \left|\int_0^{2\pi} \exp(-z_i t)(f(t) - f^p(t))dt\right| \\ &\leq \sum_i (p_i - p_{i-1}) \sup_{t\in(p_{i-1},p_i)} |f(t) - f^p(t)| \\ &\sim \frac{2\pi}{n}\sup_t |f'(t)| = \frac{C_2}{n} \ , \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

其中， C_2 是一个取决于 $\sup_t |f'(t)|$的正数常量，且该值有限。令 $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}$， n

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}| &= |\mathbf{A}^\dagger(\mathcal{L}f(\mathbf{z}) + \epsilon - \mathbf{A}\mathbf{u})| \\ &= |\mathbf{A}^\dagger(\mathcal{L}f(\mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{u}) + \mathbf{A^{-1}}\epsilon| \\ &\leq |\mathbf{A}^\dagger(\mathcal{L}f(\mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{u})| + |\mathbf{A}^\dagger\epsilon| \\ &\leq \frac{|\mathcal{L}f(\mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{u}| + |\epsilon|}{\sigma_n(\mathbf{A})} \ . \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

对该量进行简单计算可得

$$\mathbb{E}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = 0\,. \tag{5.3.11}$$

让我们选择 $n' = 2n$ 并再次假设

$$\sigma_n(A) \sim \frac{1}{n^\gamma}. \tag{5.3.12}$$

由于向量的2-范数将乘以 $\sqrt{n'}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}|) &\lesssim \frac{\sqrt{n'}C_2/n}{\sigma_n} + \frac{\sqrt{n'\mathrm{Var}(\epsilon_i)}}{\sigma_n} \\ &\sim C_2 n^{-1/2+\gamma} + C_3 n^{1/2+\gamma}\,,\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

其中， C_3 是一个取决于采样精度 Var(ϵ) 的常数。
由于我们还要对向量 $\mathbf{u}$ 取2-范数，因此在转换为 L^2范数时，我们会另外提出一个 $n^{1/2}$ 以进行补偿。（非正式地说，向量范数通过组合 n 个分量过度修正了函数范数的期望值，因此采用 $\sqrt{n}$ 修正因子是合适的。）

函数 f^p的误差（对应于$\mathbf{u}^p$ ）变为

$$\mathbb{E}(||f - \bar{f}^p||) \sim C_2 n^{-1+\gamma} + C_3 n^\gamma\,. \tag{5.3.14}$$

一般而言，上述估计表明，最小误差将取决于两个常数 C_2 和 C_3，它们分别控制函数 f 的振荡程度，以及观测到的代理数据实际上在多大程度上代表原生过程。

由于 $\gamma > 0$ 意味着矩阵越大，就越接近奇异，增大规模 n 最终会增加近似误差。

另一方面，我们看到，当 $\gamma \in (0,1)$ 时，前一个表达式（5.3.14）可以在 $n = {}_{(1-\gamma)}{}_{\gamma C_3}{}^{C_2}$ 处取到最小值。这表明，求解线性系统预计能够得到良好的结果。在实际实验中，我们可以设置一个迭代计数器，即 $\#itn$，并跟踪恢复函数 f

$$\bar{f} = \frac{1}{\#itn}\sum \bar{f}^p\,. \tag{5.3.15}$$

假设各个 f^p 之间具有足够的独立性，大数定律保证在 $\#itn \longrightarrow \infty$ 时收敛。对于超参数 n 的最优值，预期有

$$\mathrm{Var}(\bar{f} - f) \sim \frac{C_4}{\sqrt{\#itn}}\,, \tag{5.3.16}$$

其中， C_4 是取决于 C_2 和 C_3 的常数。
由于目前尚无关于命题 5.8 的直接解析证明，以下实验为理解并支持这一猜想提供了一些直观依据和实验证据。图 5.11 展示了此类矩阵的奇异值在超参数 n范围内对数尺度上的图像。

当 n 较大且最小奇异值非常接近 0 时，预期的机器数值误差可能会很显著。除此之外，所提出的 $\frac{1}{n^\gamma}$ 衰减看起来是合理的。请注意,纵轴采用对数刻度。只要最小奇异值发生衰减（$\gamma > 0$，或者事实上任何形式的衰减），实验就表明，随着矩阵大小增加，误差率最终会增长。

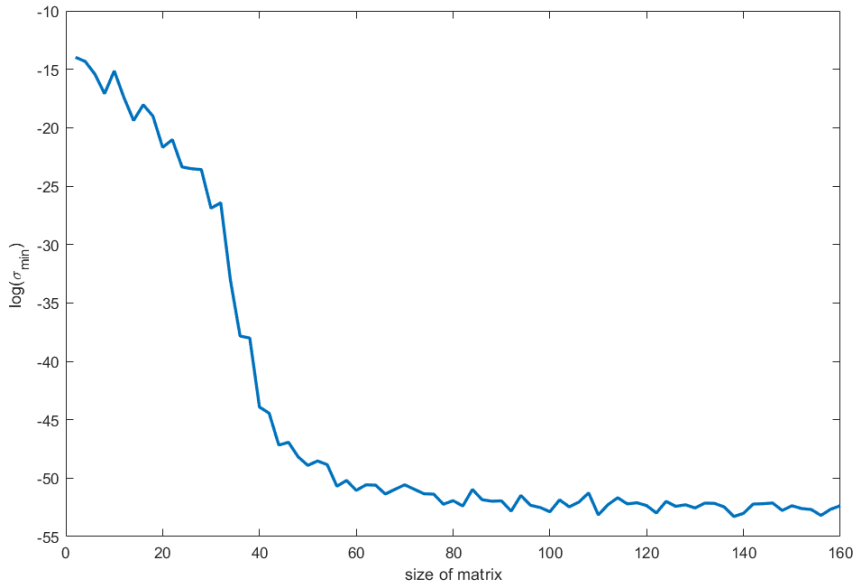


图 5.11。 LT 矩阵的 $n \times 1.2n$ 最小奇异值。

6. 结论与讨论

本文在拉普拉斯变换数值反演领域的一些既有研究成果基础上进行了改进。具体而言，我们提出了新的计算策略，可通过拉普拉斯变换高效、准确地重建以复时间曲面表示的纵向数据（观测时间序列）。本研究确定了以下有待进一步探讨的开放性问题。

- **量化 LT 矩阵的最小奇异值**。所提出的数值算法的收敛性取决于对最小奇异值的约束，具体而言，取决于其在分布上是否足够集中。在实践中，这一点可能难以通过实验验证。参数 n、n' 的选择也会影响算法性能，然而，其影响取决于域划分方案的最优性。

- **独立性与收敛速率**。在实践中，使用大数定律要求每个 $\bar{}\, f^p$ 的误差彼此独立。归根结底，我们无法真正期待所有误差都是 IID，因为可供选择的数量是有限的。然而，仅有采样数据点及其对应的误差，并不能为未知的真实过程，即原函数 f，提供足够的信息。因此，多次重复应用随机化算法，可以计算并汇总集成估计；这些估计可以合并，以获得原始信号 $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$更稳健的估计。然而，可以证明，在一定程度上，使用比独立性更弱的条件也能够降低误差。

- **复杂度**。使用广义最小残差迭代法（GMRES）求解每个矩阵的计算复杂度为 $O(n')$ [66]。如果能找到更好的策略来确定最优算法超参数的选择（包括达到特定精度所需的迭代次数），将会非常有用。

在本文中，我们分析了使用随机化域划分和常函数基估计离散逆拉普拉斯变换时的渐近行为和误差率。类似地，也可以采用相似方法，使用不同的函数基（例如多项式基或三角函数基）来估计逆拉普拉斯变换。更一般地，对于需要求解矩阵方程的其他应用，如果存在一种能够整合多次尝试结果的方法，那么这类随机化方法也可能提供高效且有价值的近似策略。我们还介绍了群上的拉普拉斯变换，并讨论了拉普拉斯变换的克利福德代数扩展。

作为开放科学的坚定支持者，我们在 TCIU GitHub 页面（https://github.com/SOCR/TCIU/）、CRAN 上的 TCIU R 软件包（https://cran.r-project.org/web/packages/TCIU/）以及 SOCR TCIU 文档网站（https://TCIU.predictive.space）上分享了所有代码、数据和结果。

7. 致谢

本研究部分得到了美国国家科学基金会（NSF）资助（项目编号：1916425、1734853、1636840、1416953、0716055 和 1023115），以及美国国立卫生研究院（NIH）资助（项目编号：P20 NR015331、U54 EB020406、P50NS091856、P30 DK089503、UL1TR002240、R01 CA233487、R01 MH121079、R01 MH126137 和 T32 GM141746）。资助机构未参与研究设计、数据收集与分析、发表决定或论文撰写。密歇根大学统计在线计算资源（SOCR）和密歇根数据科学研究所（MIDAS）的许多同事为本项目贡献了想法、基础设施和支持。

参考文献

[1] S. Saitoh，《积分变换、再生核及其应用》，第369卷。CRC出版社，1997。[2] S. Saitoh 和 Y. Sawano，《再生核理论及其应用》。Springer，2016。[3] R. K. Goodrich，“里斯表示定理”，《美国数学学会会刊》，第24卷，第3期，第629–636页，1970。[4] N. Aronszajn，“再生核理论”，《美国数学学会汇刊》，第68卷，404，1950 3，337第。[5] A. Gretton，“RKHS简介及一些简单的核算法”，《机器学习主题进展》讲座，伦敦大学学院，第16卷，第5–3页，2013。[6] A. Jacot、F. Gabriel 和 C. Hongler，“神经切线核：神经网络中的收敛性与泛化”，《神经信息处理系统进展》，第31卷，2018。[7] B. Ghojogh、A. Ghodsi、F. Karray 和 M. Crowley，“再生核希尔伯特空间、Mercer 定理、特征函数、Nystr\" om 方法以及核在机器学习中的应用：教程与综述”，arXiv预印本 arXiv:2106.08443，2021。[8] A. Berlinet 和 C. Thomas-Agnan，《概率与统计中的再生核希尔伯特空间》。Springer Science & Business Media，2011。[9] I. Dinov，“数据科学、时间复杂度与spacekime分析”，《美国物理学会通报》，2021。[10] I. D. Dinov 和 M. V. Velev，《数据科学：时间复杂度、推断不确定性与Spacekime分析》。De Gruyter，2021。[11] M. Thongmoon 和 S. Pusjuso，“微分方程组的微分变换法与拉普拉斯变换法的数值解”，《非线性分析：混合系统》，第4卷，第3期，第425–431页，2010。[12] Y. Wang、Y. Shen、D. Deng 和 I. D. Dinov，“spacekime中超双曲波动方程的确定性、适定性及其应用”，《应用数学中的偏微分方程》，第5卷，文章100280，2022。[13] D. Belomestny 和 J. Schoenmakers，“通过梅林变换方法对时间变换的Lévy过程进行统计推断”，《随机过程及其应用》，第126卷，第7期，第2092–2122页，2016。[14] R. Bellman 和 R. S. Roth，《拉普拉斯变换》，第3卷。World Scientific，1984。[15] M. A. Deakin，“拉普拉斯变换的发展，1737–1937”，《精密科学史档案》，第25卷，第4期，第343–390页，1981。[16] C. Chatfield，《时间序列分析：导论》。Chapman and Hall/CRC，2003。[17] R. Zhang、Y. Zhang、Y. Liu、Y. Guo、Y. Shen、D. Deng、Y. J. Qiu 和 I. D. Dinov，“纵向数据的Kimesurface表示与张量线性建模”，《神经计算与应用》，第34卷，第8期，第6377–6396页，2022。[18] H. Rosenberg，“平面叶层”，《拓扑学》，第7卷，第2期，第131–138页，1968。[19] C. F. B. Palmeira，“由平面分叶的开流形”，《数学年刊》，第109–131页，1978。[20] B. Davies 和 B. Martin，“拉普拉斯变换的数值反演：方法综述与比较”，《计算物理学杂志》，第33卷，第1期，第1–32页，1979。[21] M. K. Miller 和 W. Guy, Jr，“利用雅可比多项式进行拉普拉斯变换的数值反演”，《SIAM数值分析杂志》，第3卷，第4期，第624–635页，1966。[22] G. Honig 和 U. Hirdes，“一种拉普拉斯变换数值反演方法”，《计算与应用数学杂志》，第10卷，第1期，第113–132页，1984。[23] P. P. Valkó 和 J. Abate，“用于Gaver方法数值拉普拉斯变换反演的序列加速器比较”，《计算机与数学及其应用》，第48卷，第3-4期，第629–636页，2004。[24] M. López-Fernández 和 C. Palencia，“关于某些全纯映射的拉普拉斯变换的数值反演”，《应用数值数学》，第51卷，第2-3期，第289–303页，2004。[25] J. Abate 和 W. Whitt，“概率分布拉普拉斯变换的数值反演”，《ORSA计算杂志》，第7卷，第1期，第36–43页，1995。[26] D. W. Brzezi´nski，“数值方法综述：用于分数阶微积分的numilpt及其计算精度评估”，《应用数学与非线性科学》，第3卷，第2期，第487–502页，2018。[27] D. Rani、V. Mishra 和 C. Cattani，“基于伯恩斯坦运算矩阵的拉普拉斯变换数值反演”，《应用科学中的数学方法》，第41卷，第18期，第9231–9243页，2018。[28] V. Mishra 和 D. Rani，“利用伯恩斯坦积分运算矩阵进行拉普拉斯变换反演及其在微分方程和积分方程中的应用”，《数学科学论文集》，第130卷，第1期，第1–29页，2020。[29] D. Rani 和 V. Mishra，“利用基于切比雪夫多项式的数值逆拉普拉斯变换求解线性分数阶微分方程”，《工程、科学与航空航天数学》（MESA），第10卷，第4期，2019。[30] H. Mohammadi-Firouzjaei、H. Adibi 和 M. Dehghan，“分布阶时间分数阶扩散波动方程的局部不连续Galerkin方法：拉普拉斯变换的应用”，《应用科学中的数学方法》，第44卷，第6期，第4923–4937页，2021。[31] R. M. May

, “大型复杂系统会稳定吗? ,” 《自然》第238卷, 第413页 –414, 1972年。

[32] R. Ablamowicz、J. Parra 和 P. Lounesto，《数值与符号计算中的克利福德代数》。Springer Science & Business Media，1996年。[33] D. Hestenes、H. Li 和 A. Rockwood，《经典几何的新代数工具》，载于《使用克利福德代数进行几何计算》，第3–26页，Springer，2001年。[34] C. Doran、S. R. Gullans、A. Lasenby、J. Lasenby 和 W. Fitzgerald，《物理学家的几何代数》。剑桥大学出版社，2003年。[35] J. Brandstetter、R. v. d. Berg、M. Welling 和 J. K. Gupta，《用于偏微分方程建模的克利福德神经层》，arXiv预印本 arXiv:2209.04934，2022年。[36] D. Hestenes，《2002年奥斯特奖章演讲：重塑物理学的数学语言》，2003年。[37] T. A. Ell、N. Le Bihan 和 S. J. Sangwine，《用于信号与图像处理的四元数傅里叶变换》。John Wiley & Sons，2014年。[38] E. Hitzer，《四元数域上的四元数傅里叶变换及其推广》，《应用克利福德代数进展》，第17卷，第3期，第497–517页，2007年。[39] E. Hitzer 和 S. J. Sangwine，《四元数与克利福德傅里叶变换及小波》。Springer，2013年。[40] Y. El Haoui、E. Hitzer 和 S. Fahlaoui，《狭义相对论时空傅里叶变换中的海森堡与哈代不确定性原理》，《应用克利福德代数进展》，第30卷，第5期，第69页，2020年。[41] D. Schertzer 和 I. Tchiguirinskaia，《多重分形向量场与随机克利福德代数》，《混沌：非线性科学跨学科期刊》，第25卷，第12期，第123127页，2015年。[42] S. V. Ludkovsky 等，《四元数、八元数和凯莱-迪克松代数上的多维拉普拉斯变换及其在偏微分方程中的应用》，《纯数学进展》，第2卷，第02期，第63页，2012年。[43] F. Peter 和 H. Weyl，《闭连续群的不可约表示的完备性》，《数学年刊》，第97卷，第1期，第737–755页，1927年。[44] K. I. Gross，《非交换调和分析的演变》，《美国数学月刊》，第85卷，第7期，第525–548页，1978年。[45] G. B. Folland，《抽象调和分析教程》，第29卷。CRC出版社，2016年。[46] H. Z. Munthe-Kaas，《群傅里叶分析与保持对称性的偏微分方程离散化》，《物理学杂志 A：数学与一般》，第39卷，第19期，第5563页，2006年。[47] R. Kondor、Z. Lin 和 S. Trivedi，《克莱布什-戈尔丹网络：全傅里叶空间球面卷积神经网络》，《神经信息处理系统进展》，第31卷，2018年。[48] D. K. Maslen，《紧群上傅里叶变换的高效计算》，《傅里叶分析与应用杂志》，第4卷，第1期，第19–52页，1998年。[49] R. Kondor 和 S. Trivedi，《关于将神经网络中的等变性与卷积推广至紧群作用用》，载于《国际机器学习会议》，第2747–2755页，PMLR，2018年。[50] T. Lee，《特殊正交群上的实调和分析》，arXiv预印本 arXiv:1809.10533，2018年。[51] G. W. Mackey，《局部紧阿贝尔群上的拉普拉斯变换》，《美国国家科学院院刊》，第34卷，第4期，第156–162页，1948年。[52] J. Peng 和 S.-K. Chung，《算子半群的拉普拉斯变换与生成元》，《美国数学学会会刊》，第126卷，第8期，第2407–2416页，1998年。[53] R. Beals 和 J. Szmigielski，《梅杰尔 G 函数：简明介绍》，《美国数学学会通讯》，第60卷，第7期，第866–872页，2013年。[54] A. M. Alaa 和 M. van der Schaar，《用符号元模型揭开黑箱模型的神秘面纱》，《神经信息处理系统进展》，第32卷，2019年。[55] A. M. Mathai 和 R. K. Saxena，《广义超几何函数及其在统计学和物理科学中的应用》，第348卷。Springer，2006年。[56] R. Dingle，《渐近展开：推导与阐释》。Academic Press，1971年。[57] J. Prajapati，《“若干著名特殊函数的拉普拉斯变换”》，2013年1月。[58] E. W. Weisstein，《勒让德多项式。摘自 MathWorld——Wolfram 网络资源》。最后访问日期：2022年8月21日。[59] R. Piessens，《使用切比雪夫多项式逼近计算积分变换并求解积分方程》，《计算与应用数学杂志》，第121卷，第1–2期，第113–124页，2000年。[60] P. E. Ricci、D. Caratelli 和 F. Mainardi，《拉普拉斯变换与正交多项式的 Tricomi 方法》，《对称性》，第13卷，第4期，第589页，2021年。[61] J. Valsa 和 L. Brancik，《拉普拉斯变换数值反演的近似公式》，《国际数值建模杂志：电子网络、器件与场》，第11卷，第3期，第153–166页，1998年。[62] T. Ooura，《连续欧拉变换及其在缓慢衰减函数傅里叶变换中的应用》，《计算与应用数学杂志》，第130卷，第1–2期，第259–270页，2001年。[63] R. Vershynin，《随机矩阵非渐近分析导论》，arXiv预印本 arXiv:1011.3027，2010年。[64] M. Rudelson 和 R. Vershynin，《随机矩形矩阵的最小奇异值》，《纯粹与应用数学通讯：库朗数学科学研究所发行的期刊》，第62卷，1739，2009年12，1707号，第–页。

[65] T. Tao 和 V. Vu，《条件数与最小奇异值的光滑分析》，《计算数学》，第 79 卷，第 272 期，第 2333–2352 页，2010 年。[66] Y. Saad 和 M. H. Schultz，《GMRES：求解非对称线性系统的广义最小残量算法》，《*SIAM*科学与统计计算杂志》，第 7 卷，第 3 期，第 856–869 页，1986 年。[67] S. Elliott 和 M. T. Jury，《半平面 Hardy 空间上的复合算子》，《伦敦数学会通报》，第 44 卷，第 3 期，第 489–495 页，2012 年。[68] N. Shephard，《一阶差分矩阵的奇异值分解》，《计量经济学理论》，第 6 期，120，1990 年，第 119 页。

8. 附录

8.1. 附录 A

的级数展开 $f(z) = {}^{1}$双曲余弦z：我们应用 Wick旋转 $z \to iz$，随后该公式便呈现出更易处理的形式。具体而言，$f(z) = {}^{1}$余弦z，它具有简单极点 ~~z_0~~，即 $(z - z_0)f(z)$ 在 z_0 的邻域内是全纯的，其中 $z_0 \in S = \{1/2\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$。因此，完整展开可以写成

$$\overline{f}(z) = \sum_{z_0 \in S} \text{res}_{-1,z_0}(z - z_0)^{-1} + G(z) \tag{8.1.1}$$

其中 $G(z)$ 是一个全纯函数。根据定义，留数并应用洛必达法则

$$\text{res}_{-1,z_0} = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)\overline{f}(z) = \frac{1}{\sin(z_0)} = (-1)^k. \tag{8.1.2}$$

我们可以汇总 z_0 和 $-z_0$。因此，

$$res_{-1,z_0}(z - z_0)^{-1} + res_{-1,-z_0}(z + z_0)^{-1} = (-1)^k \frac{1}{z - z_0} + (-1)^{-k-1} \frac{1}{z + z_0} = \frac{(-1)^k(-2z_0)}{z^2 - z_0^2}. \tag{8.1.3}$$

因此，级数展开为

$$\overline{f}(z) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n + 1/2)}{(n + 1/2)^2\pi^2 - z^2}. \tag{8.1.4}$$

由此，通过撤销Wick旋转，我们得到了所需结果4.2.4。下文展示了前 2、5、7、11 项截断余项的表现。

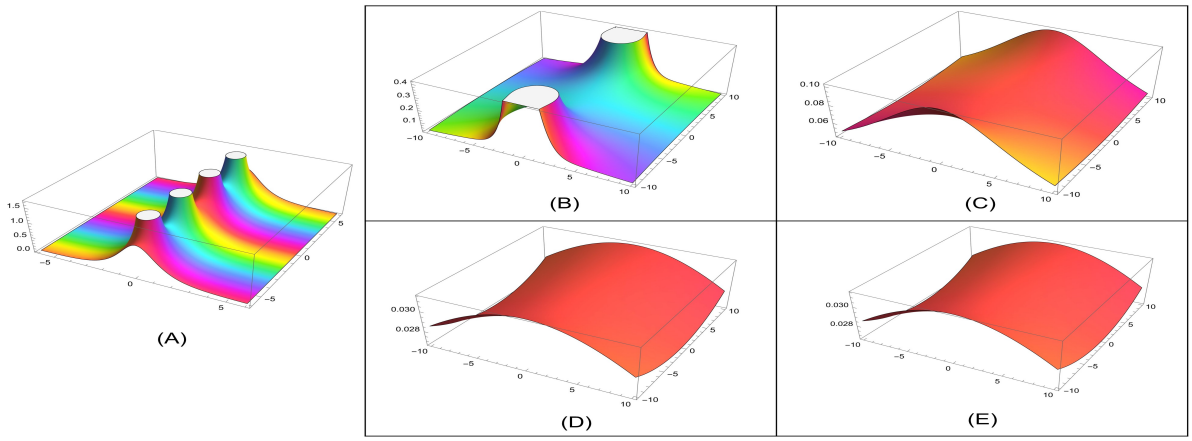


图 8.1。面板 (A) 表示 ^{1}双曲余弦z函数。面板 (B)、(C)、(D)和(E) 分别对应于在 $n = 1$、4、6、10处截断的级数展开，其中 y 轴表示误差幅度。随着纳入的项数增加，误差会减小；例如，纳入10 项时，近似误差约为0.03 。

欧拉变换

级数求和：设 $S = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} 2^n$，则 $S = 2$：将方程两边同时乘以 2。然后，$2S = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} 2^{n-1} = \sum_{n=i-1}^{\infty} \binom{n+1}{i} 2^n$。与原始的式子相减，得到 $S = \sum_{n=i-1}^{\infty} \binom{n}{i-1} 2^n$。重复此操作 i 次，便得到熟悉的结果，即 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$。

8.2. 附录 B 拉普拉斯变换的有界性

经典拉普拉斯变换是一个有界线性算子。拉普拉斯变换的线性可通过 $aF(z) + bF(z) = \hat{\mathcal{L}}(af(t) + bf(t))$ 看出。为获得足够的衰减和可积性条件，f 的定义域通常取为右

半平面 $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) > 0\}$，这是 Hardy 空间 H^2 通常定义的一种情形。我们要求对于某个常数 C，$\|\mathcal{L}f\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \le C \cdot \|f\|_{L^2([0,\infty)}$。

$$F(z \equiv x+iy) = \mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}e^{-2\pi iyt}dt = \mathcal{F}\Big(f(t)e^{-tx}H(t)\Big)(y).$$

我们建立了 $f \in L^2([0,\infty))$ 则 $\mathcal{L}f \in H^2(\mathbb{C}_+)$。我们需要证明 $\mathcal{L}f$ 是全纯的，并且范数 [67] 有界 $\|F\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} = \sup_{x>0}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dy} < \infty$。对于定义在 $\mathbb{C}_+$ 中的任意闭曲线 γ，可通过以下方式论证全纯性：$\oint_\gamma F(Z)dz = \oint_\gamma \int_0^\infty \underbrace{e^{-tz}f(t)}_{\text{holomorphic in } s} dtdz = 0$。有界性由下式得到

$$\sup_{x>0}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dy} = \sup_{x>0}\sqrt{\int_0^\infty |f(t)|^2e^{-2xt}dt} = \sqrt{\int_0^\infty |f(t)|^2dt} < \infty \quad \forall f \in L^2([0,\infty)),$$

其中我们使用了普朗歇尔定理，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)e^{-tx}H(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dy$$

因此 $\|\mathcal{L}f\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} = \|f\|_{L^2([0,\infty))}$。

8.3. 附录 C. 根据两条变换规则得到拉普拉斯变换

引理 8.1。 如果函数 f 是解析的，并且我们要求满足两个性质

- 线性：$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{L}[f] + \beta\mathcal{L}[g]$
- 代数导数：$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$
  那么拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ 就是满足这些性质的唯一变换。如果我们考虑具有有限支撑的信号，并且不失一般性地考虑 $[0, 2\pi]$ 定义域。如果我们将代数导数条件改为

- *Algebraic Derivatives (finite):* $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) + e^{-2\pi s}f(2\pi)$.
  那么，线性和有限代数导数就是变换 $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{2\pi} e^{-st}f(t)\,dt$的特征。

证明。 我们先证明有限情形，无限情形可通过扩展得出。考虑 $f = 0$。线性条件意味着 $\mathcal{L}[0] = 0$，接下来考虑 $f = 1$，然后代数导数条件意味着 $s\mathcal{L}[1](s) - 1 + e^{-2\pi s} = \mathcal{L}[0](s) = 0$。接着 $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1-e^{-2\pi s}}{s}$。然后考虑函数 $f(t) = \frac{t^n}{n!}$，该结果可利用代数导数条件递归计算

$$s\mathcal{L}\Big[\frac{t^n}{n!}\Big](s) + e^{-2\pi s}\frac{(2\pi)^n}{n!} = \mathcal{L}\Big[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Big](s), \tag{8.3.1a}$$

$$\vdots \tag{8.3.1b}$$

$$s\mathcal{L}[t](s) + e^{-2\pi s}(2\pi) = \mathcal{L}[1](s) = \frac{1-e^{-2\pi s}}{s}. \tag{8.3.1c}$$

因此，

$$s^{n+1}\mathcal{L}\Big[\frac{t^n}{n!}\Big](s) = (1-e^{-2\pi s}) - e^{-2\pi s}\sum_{n=1}^{n}\frac{(2\pi s)^n}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{n}\frac{(2\pi s)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\gamma(n+1, 2\pi s), \tag{8.3.2}$$

其中 γ是下不完全伽马函数，且 $\gamma(n+1,\ 2\pi s) = \int_0^{2\pi s} t^n e^{-t} dt$。根据解析性，我们可以将 f展开为无穷级数，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)t^n}{n!}\Big](s) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\mathcal{L}\Big[\frac{t^n}{n!}\Big](s) \quad \text{(Linearity)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \int_0^{2\pi s} \frac{1}{n! s^{n+1}} t^n e^{-t} dt = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \int_0^{2\pi s} \frac{1}{n!}(\frac{t}{s})^n e^{-t} dt \quad \text{(Equation 8.3.2)} \\
&= \frac{1}{s}\int_0^{2\pi s} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{(t/s)^n}{n!} e^{-t} dt = \frac{1}{s}\int_0^{2\pi} f(t/s) e^{-t} dt = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt.
\end{aligned} \tag{8.3.3}
$$

■

8.4. 附录 D. Meijer-G 特殊函数与拉普拉斯变换证明

定理8.2。 （*Saxena [55]* 第*80*页）拉普拉斯变换的最一般形式为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} G_{p,q}^{m,n}\left(wx \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right) G_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}\left(\eta x^{k/\rho} \middle| \begin{matrix} c_\gamma \\ d_\delta \end{matrix}\right) dx \\
&= C_1 \cdot G_{\rho\gamma+kq,\rho\delta+k\rho}^{\rho\alpha+kn,\overbrace{\beta\rho+km}^{\beta\rho+km}}\left(\frac{\eta^\rho \rho^{\rho(\gamma-\delta)}}{w^k k^{k(p-q)}} \middle| \begin{matrix} \underbrace{\Delta(\rho,c_1),...,\Delta(\rho,c_\beta),\Delta(k,1-b_1-\sigma),...\Delta(k,1-b_m-\sigma)}_{\rho\alpha+kn}; \\ \underbrace{\Delta(\rho,d_1),...,\Delta(\rho,d_\alpha),\Delta(k,1-a_1-\sigma),...\Delta(k,1-a_n-\sigma)}_{\rho\alpha+kn}; \end{matrix}\right. \\
&\left. \begin{matrix} \underbrace{\Delta(k,1-b_{m+1}-\sigma),...,\Delta(k,1-b_q-\sigma),\Delta(\rho,c_{\beta+1}),...,\Delta(\rho,c_\gamma)}^{\rho(\gamma-\beta)+k(q-m)} \\ \underbrace{\Delta(k,1-a_{n+1}-\sigma),...,\Delta(k,1-a_p-\sigma),\Delta(\rho,c_{\alpha+1}),...,\Delta(\rho,c_\delta)}_{\rho(\delta-\alpha)+k(p-n)} \end{matrix}\right),
\end{aligned} \tag{8.4.1}
$$

其中， C_1 是某个标量因子， $\Delta(\cdot,\ \cdot)$ 是 *Meijer-G*函数中一组指标参数的简写。例如， $\Delta(\rho,\ c_j) = \{\frac{c_j+1}{\rho}, \frac{c_j+2}{\rho}, ..., \frac{c_j+\rho-1}{\rho}\}$，并且默认情况下这些指标为非负整数。

高斯乘法引理在变换 Meijer-G 函数极点信息的缩放时非常有用，将拉普拉斯变换与该公式联系起来也并不牵强，因为 Meijer-G函数的定义由伽马函数乘积构成。

引理 8.3。 高斯乘法公式为

$$
\Gamma(kz) = (2\pi)^{1/2-k/2} k^{kz-1/2} \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma\left(z+\frac{j}{k}\right), \quad \forall k = 1,2,3,4,\cdots. \tag{8.4.2}
$$

在 $k=2$情况下，这退化为勒让德倍增公式。

证明。 一种证明方法是利用递推关系展开伽马函数项，并应用伽马函数的欧拉形式和斯特林公式。即

$$
\Gamma\Big(z+\frac{k}{n}\Big) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}(\frac{mn}{e})^m m^{z+k/n-1/2}}{(nz+k)(nz+k+n)\cdots(nz+k-n+mn)} \tag{8.4.3}
$$

■

然后汇总各项。由于极限存在，乘积的极限也存在。通过反向执行从伽马函数推导极限形式的过程，即可汇总得到所需结果。

另一种证明方法是使用欧拉反射公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \xrightarrow{\forall z \notin \mathbb{Z}}$，并利用乘积形式中的周期性，通过 $z^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1}(z - e^{2\pi i k/n})$ 的根建立正弦恒等式，从而建立一个正弦恒等式$\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n) = n2^{1-n}$，再将其与反射公式结合，得到所需结果。

In 以类似的方式，较简单的计算有助于对变量 z 进行分数阶缩放（即 $z^{\frac{1}{k}}$ ⁻).

定理 8.4。 变量的缩放公式 z 为

(8.4.4)

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)=\frac{h^{1+\nu+(p-q)/2}}{(2\pi)^{(h-1)\delta}}G_{hp,hq}^{hm,hn}\left(\frac{z^h}{h^{h(q-p)}}\middle|\begin{matrix}\overbrace{a_1/h,\cdots,(a_1+h-1)/h}^{\Delta(h,a_1)},\cdots,\overbrace{a_n/h,\cdots,(a_n+h-1)/h}^{\Delta(h,a_n)};\\ \underbrace{b_1/h,\cdots,(b_1+h-1)/h}_{\Delta(h,b_1)},\cdots,\underbrace{b_m/h,\cdots,(b_m+h-1)/h}_{\Delta(h,b_m)};\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\overbrace{a_{n+1}/h,\cdots,(a_{n+1}+h-1)/h}^{\Delta(h,a_{n+1})},\cdots,\overbrace{a_n/h,\cdots,(a_n+h-1)/h}^{\Delta(h,a_n)}\\ \underbrace{b_{m+1}/h,\cdots,(b_{m+1}+h-1)/h}_{\Delta(h,b_{m+1})},\cdots,\underbrace{b_q/h,\cdots,(b_q+h-1)/h}_{\Delta(h,b_q)}\end{matrix}\right),h=1,2,3,\cdots.$$

证明。为 了便于表达，我们从右端推导。将$z\to\frac{x}{k}$代入前一个引理，得到

(8.4.5)
$$\Gamma\Big(k\frac{x}{k}\Big)=(2\pi)^{1/2-k/2}k^{kz-1/2}\prod_{j=0}^{k-1}\Gamma\Big(\frac{x}{k}+\frac{j}{k}\Big),\quad\forall k=1,2,3,4,\cdots.$$

现 我们通过梅林变换明确写出 Meijer-G 函数的逆变换，即

$$\begin{aligned}RHS&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\prod_{j=1}^{m}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(\frac{b_j+t}{h}+s)\prod_{j=1}^{n}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(1-\frac{a_j+t}{h}-s)}{\prod_{j=n+1}^{p}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(\frac{a_j+t}{h}+s)\prod_{j=m+1}^{q}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(1-\frac{b_j+t}{h}-s)}\left(\frac{z^h}{h^{h(q-p)}}\right)^{-s}ds\\&=\left\{\begin{matrix}hs=s'\\ ds=\frac{1}{h}ds'\end{matrix}\right\}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\overbrace{\prod_{j=1}^{m}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(\frac{b_j+t}{h}+\frac{s'}{h})}^{A}\overbrace{\prod_{j=1}^{n}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(1-\frac{a_j+t}{h}-\frac{s'}{h})}^{B}}{\underbrace{\prod_{j=n+1}^{p}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(\frac{a_j+t}{h}+\frac{s'}{h})}_{C}\underbrace{\prod_{j=m+1}^{q}\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma(1-\frac{b_j+t}{h}-\frac{s'}{h})}_{D}}\left(z^{-s'}h^{s'(q-p)}\right)\frac{1}{h}ds'.\end{aligned}\tag{8.4.6}$$

我们进一步考察 A、B、C、D 这些分量，并应用高斯乘法公式（方程 8.4.5）。通过要求 $k=h$、$b_j+s'=x$，A 分量为

(8.4.7)
$$A=\underbrace{\Big(\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s')\Big)}_{(1)}\underbrace{\Big[(2\pi)^{\frac{h-1}{2}}\Big]^m}_{(2)}\underbrace{\Big[h^{\frac{1}{2}-(b_j+s')}\Big]^m}_{(3)}.$$

同样，B，C，D 分量为（对于 B，D 分量，需要重新排列才能得到原始的 Meijer-G 表述。例如，$\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma\left(1-\frac{a_j+t}{h}-\frac{s'}{h}\right)=\prod_{t=0}^{h-1}\Gamma\left(\frac{1}{h}+\frac{t}{h}=\frac{a_j}{h}-\frac{s'}{h}\right)$，并要求 $x=1=a_j-s'$）

(8.4.8)
$$B=\Big(\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s')\Big)\Big[(2\pi)^{\frac{h-1}{2}}\Big]^n\Big[h^{\frac{1}{2}-(1-a_j-s')}\Big]^n,$$

(8.4.9)
$$C=\Big(\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s')\Big)\Big[(2\pi)^{\frac{h-1}{2}}\Big]^{p-n}\Big[h^{\frac{1}{2}-(a_j+s')}\Big]^{p-n},\text{ and}$$

(8.4.10)
$$D=\Big(\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s')\Big)\Big[(2\pi)^{\frac{h-1}{2}}\Big]^{q-m}\Big[h^{\frac{1}{2}-(1-b_j-s')}\Big]^{q-m}.$$

第一组分量（1）直接给出通常的 Meijer-G 分量，第二个因子项对于 A，B，C，D为（2），合并后为

$$(2)=\left[(2\pi)^{(h-1)/2}\right]^{m+n-(p-n)-(q-m)}=\left[(2\pi)^{(h-1)/2}\right]^{2m+2n-p-q}=\left[(2\pi)^{(h-1)/2}\right]^{2\delta}, 2\delta=2m+2n-p-q.$$

最后一项为

$$\begin{aligned}(3)&=\frac{\prod_{j=1}^{m}h^{1/2-(b_j+s')}\prod_{j=1}^{n}h^{1/2-(1-a_j-s')}}{\prod_{j=n+1}^{p}h^{1/2-(a_j+s')}\prod_{j=m+1}^{q}h^{1/2-(1-b_j-s')}}\\&=h^{\frac{1}{2}(m-n-(p-n)+(q-m))}h^{\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j}h^{s'(-m+n+(p-n)-(q-m))}=h^{\frac{1}{2}(q-p)}h^{\nu}h^{s'(p-q)},\end{aligned}\tag{8.4.11}$$

其中 $\nu=\sum_{j=1}^{p}a_j-\sum_{j=1}^{q}b_j$ 代回（方程 8.4.6）

$$\begin{aligned}RHS&=(\frac{1}{2\pi i})\int_C\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s')\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s')}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s')\prod_{j=n+1}^{q}\Gamma(a_j-s')}(2\pi)^{(h-1)\delta}h^{\nu-1+\frac{1}{2}(q-p)}z^{-s'}ds'\\&=(2\pi)^{(h-1)\delta}h^{\nu-1+\frac{1}{2}(q-p)}G_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\right)\end{aligned}\tag{8.4.12}$$

类似地，我们可以在定理 8.2中证明 Meijer-G 函数的一般形式，这说明了 Meijer 函数在积分变换下的紧密联系。在此之前，我们简要展示类拉普拉斯变换的计算（该变换可以与正向和逆梅林变换对应）

引理8.5。

$$\int_0^\infty x^{s-1}G_{p,q}^{m,n}\left(wx\middle|\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\right)dx=w^{-s}\frac{\Gamma(b_1+s)...\Gamma(b_m+s)\Gamma(1-a_1-s)...\Gamma(1-a_n-s)}{\Gamma(1-b_{m+1}-s)...\Gamma(1-b_q-s)\Gamma(a_{n+1}+s)...\Gamma(a_p+s)}.\tag{8.4.13}$$

证明。 根据 Meijer-G 函数的定义和梅林变换的定义可得。也就是说，

$$\text{Forward transform }:F(s)=(\mathcal{M})(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx\tag{8.4.14a}$$

$$\text{Inverse transform }:f(x)=\left(\mathcal{M}^{-1}F\right)(x)=\int_C G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\middle|x\right)x^{-s}ds\tag{8.4.14b}$$

$$G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\middle|x\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Gamma(b_1+s)...\Gamma(b_m+s)\Gamma(1-a_1-s)...\Gamma(1-a_n-s)}{\Gamma(1-b_{m+1}-s)...\Gamma(1-b_q-s)\Gamma(a_{n+1}+s)...\Gamma(a_p+s)}x^{-s}ds\tag{8.4.14c}$$

其中，围道积分 C从 $c-i\infty$ 积分到 $c+i\infty$，而 w^{-s} 自然地作为积分的缩放因子出现。

证明。我们回到定理。先从左侧开始，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^{\sigma-1}G_{p,q}^{m,n}\left(wx\middle|\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\right)G_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}\left(\eta x^{k/\rho}\middle|\begin{array}{c}c_\gamma\\d_\delta\end{array}\right)dx\\&=\int_0^\infty x^{\sigma-1}G_{p,q}^{m,n}\left(wx\middle|\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\prod_{j=1}^{\alpha}\Gamma(d_j+s)\prod_{j=1}^{\beta}\Gamma(1-c_j-s)}{\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\Gamma(c_j+s)\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\Gamma(1-d_j-s)}(\eta x^{\frac{k}{\rho}})^{-s}dsdx\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\eta^{-s}\frac{\prod_{j=1}^{\alpha}\Gamma(d_j+s)\prod_{j=1}^{\beta}\Gamma(1-c_j-s)}{\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\Gamma(c_j+s)\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\Gamma(1-d_j-s)}\left(\int_0^\infty x^{\sigma-1}G_{p,q}^{m,n}\left(wx\middle|\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\right)x^{-s\frac{k}{\rho}}dx\right)ds.\end{aligned}\tag{8.4.15}$$

应用前述引理于拉普拉斯型变换

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}G_{p,q}^{m,n}\left(wx\middle|\begin{array}{c}a_p\\b_q\end{array}\right)x^{-s\frac{k}{\rho}}dx=w^{-\sigma+s\frac{k}{\rho}}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)}\Bigg|_{s=\sigma-\frac{ks}{\rho}}.\tag{8.4.16}$$

总结而言，左端包含某个不相容的伽马函数，需要进一步变换。即式（8.4.17）

$$LHS=\frac{1}{2\pi i}w^{-\sigma}\int_C \frac{\overbrace{\prod_{j=1}^{\alpha}\Gamma(d_j+s)}^{O}\overbrace{\prod_{j=1}^{\beta}\Gamma(1-c_j-s)}^{P}}{\underbrace{\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\Gamma(c_j+s)}_{Q}\underbrace{\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\Gamma(1-d_j-s)}_{R}}\frac{\overbrace{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\sigma-\frac{ks}{\rho})}^{S}\overbrace{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-(\sigma-\frac{ks}{\rho}))}^{T}}{\underbrace{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-(\sigma-\frac{ks}{\rho}))}_{U}\underbrace{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\sigma-\frac{ks}{\rho})}_{V}}\eta^{-s}w^{\frac{ks}{\rho}}ds$$

在右端，方程为

$$\begin{aligned}RHS&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{A(s)B(s)}{C(s)D(s)}\Big(\frac{\eta^\rho\rho^{\rho(\gamma-\delta)}}{w^k k^{k(p-q)}}\Big)^{-s}ds=\left\{\begin{array}{c}\rho s=s'\\ ds=\frac{1}{\rho}ds'\end{array}\right\}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{A(\frac{s'}{\rho})B(\frac{s'}{\rho})}{C(\frac{s'}{\rho})D(\frac{s'}{\rho})}\eta^{-s'}\rho^{-(\gamma-\delta)s'}w^{\frac{ks'}{\rho}}k^{\frac{ks'(p-q)}{\rho}}\frac{1}{\rho}ds',\end{aligned}\tag{8.4.18}$$

其中，变量交换公式（缩放）调用了高斯乘法公式，这是一种有效处理极点分布的变换。接下来，我们分别分析各个部分（A、 B、 C、 D）。先从 A 部分（b_j+s）开始:

$$A(s)=\prod_{j=1}^{\alpha}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{d_j+t}{\rho}+s)\prod_{j=1}^{n}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{1-a_j-\sigma+t}{k}+s).\tag{8.4.19a}$$

(8.4.19b)

$$\begin{aligned}A\Big(\frac{s'}{\rho}\Big)&=\prod_{j=1}^{\alpha}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{d_j+t}{\rho}+\frac{s'}{\rho})\prod_{j=1}^{n}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{1-a_j-\sigma+t}{k}+\frac{s'}{\rho})\\&=\Big(\prod_{j=1}^{\alpha}\Gamma(d_j+s')\Big)(2\pi)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{2}}\rho^{\alpha(\frac{1}{2}-(d_j+s'))}\Big(\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho})\Big)(2\pi)^{\frac{n(k-1)}{2}}k^{n(\frac{1}{2}-(1-a_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho}))}\\&=O\cdot T\cdot(2\pi)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{2}}\rho^{\alpha(\frac{1}{2}-(d_j+s'))}\cdot(2\pi)^{\frac{n(k-1)}{2}}k^{n(\frac{1}{2}-(1-a_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho}))},\end{aligned}$$

其中，在第二步中我们应用了乘法公式。同样，可以计算出 B、 C、 D 部分。接下来，我们考察 B 部分（$1-a_j-s$）

$$\begin{aligned}B(s)&=\prod_{j=1}^{\beta}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(1-\frac{c_j+t}{\rho}-s)\prod_{j=1}^{m}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(1-\frac{1-b_j-\sigma+t}{k}-s)\\&=\prod_{j=1}^{\beta}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{1-c_j+t}{\rho}-s)\prod_{j=1}^{m}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{b_j+\sigma+t}{k}-s)\end{aligned}\tag{8.4.20a}$$

(8.4.20b)

$$\begin{aligned}B\Big(\frac{s'}{\rho}\Big)&=\prod_{j=1}^{\beta}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{1-c_j+t}{\rho}-\frac{s'}{\rho})\prod_{j=1}^{m}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{b_j+\sigma+t}{k}-\frac{s'}{\rho})\\&=\Big(\prod_{j=1}^{\beta}\Gamma(1-c_j-s')\Big)(2\pi)^{\frac{\beta(\rho-1)}{2}}\rho^{\beta(\frac{1}{2}-(1-c_j-s'))}\Big(\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho})\Big)(2\pi)^{\frac{m(k-1)}{2}}k^{m(\frac{1}{2}-(b_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho}))}\\&=P\cdot S\cdot(2\pi)^{\frac{\beta(\rho-1)}{2}}\rho^{\beta(\frac{1}{2}-(1-c_j-s'))}\cdot(2\pi)^{\frac{m(k-1)}{2}}k^{m(\frac{1}{2}-(b_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho}))}\end{aligned}$$

C 扇区（a_j+s）为

$$C(s)=\prod_{j=m+1}^{q}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{1-b_j-\sigma+t}{k}+s)\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{c_j+t}{\rho}+s)\tag{8.4.21a}$$

$$
\begin{aligned}
C\Big(\frac{s'}{\rho}\Big) &= \prod_{j=m+1}^{q}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{1-b_j-\sigma+t}{k}+\frac{s'}{\rho})\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{c_j+t}{\rho}+\frac{s'}{\rho}) \\
&= \Big(\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho})\Big)(2\pi)^{\frac{(q-m)(k-1)}{2}}k^{(q-m)(\frac{1}{2}-(1-b_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho}))} \\
&\Big(\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\Gamma(c_j+s')\Big)(2\pi)^{\frac{(\gamma-\beta)(\rho-1)}{2}}\rho^{(\gamma-\beta)(\frac{1}{2}-(c_j+s'))} \\
&= U\cdot Q\cdot(2\pi)^{\frac{(q-m)(k-1)}{2}}k^{(q-m)(\frac{1}{2}-(1-b_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho}))}\cdot(2\pi)^{\frac{(\gamma-\beta)(\rho-1)}{2}}\rho^{(\gamma-\beta)(\frac{1}{2}-(c_j+s'))}.
\end{aligned}
\tag{8.4.21b}
$$

D 扇区（$1-b_j-s$）是

$$
D(s)=\prod_{j=n+1}^{p}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(1-\frac{1-a_j-\sigma+t}{k}-s)\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(1-\frac{d_j+t}{\rho}-s),
\tag{8.4.22a}
$$

$$
\begin{aligned}
D\Big(\frac{s'}{\rho}\Big) &= \prod_{j=n+1}^{p}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(1-\frac{1-a_j-\sigma+t}{k}-\frac{s'}{\rho})\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(1-\frac{d_j+t}{\rho}-\frac{s'}{\rho}) \\
&= \prod_{j=n+1}^{p}\prod_{t=0}^{k-1}\Gamma(\frac{a_j+\sigma+t}{k}-\frac{s'}{\rho})\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\prod_{t=0}^{\rho-1}\Gamma(\frac{1-d_j+t}{\rho}-\frac{s'}{\rho}) \\
&= \Big(\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho})\Big)(2\pi)^{\frac{(p-n)(k-1)}{2}}k^{(p-n)(\frac{1}{2}-(a_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho}))} \\
&\Big(\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\Gamma(1-d_j-s')\Big)(2\pi)^{\frac{(\delta-\alpha)(\rho-1)}{2}}\rho^{(\delta-\alpha)(\frac{1}{2}-(1-d_j-s'))} \\
&= V\cdot R\cdot(2\pi)^{\frac{(p-n)(k-1)}{2}}k^{(p-n)(\frac{1}{2}-(a_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho}))}\cdot(2\pi)^{\frac{(\delta-\alpha)(\rho-1)}{2}}\rho^{(\delta-\alpha)(\frac{1}{2}-(1-d_j-s'))}.
\end{aligned}
\tag{8.4.22b}
$$

注意，O，P，Q，R，S，T，U，V这些因子与方程（8.4.17）中的对应项相对应。我们考察 $A\left(\frac{s'}{\rho}\right)B\left(\frac{s'}{\rho}\right)C\left(\frac{s'}{\rho}\right)D\left(\frac{s'}{\rho}\right)=C_2\cdot F(s')$ 中的依赖关系，其中 C_2 是一个与 s' 独立的标量。我们特别关注 s' 项

$$
\begin{aligned}
\frac{A(\frac{s'}{\rho})B(\frac{s'}{\rho})}{C(\frac{s'}{\rho})D(\frac{s'}{\rho})} &\sim \frac{\rho^{\alpha(\frac{1}{2}-(d_j+s'))}k^{n(\frac{1}{2}-(1-a_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho}))}\rho^{\beta(\frac{1}{2}-(1-c_j-s'))}k^{m(\frac{1}{2}-(b_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho}))}}{k^{(q-m)(\frac{1}{2}-(1-b_j-\sigma+\frac{ks'}{\rho}))}\rho^{(\gamma-\beta)(\frac{1}{2}-(c_j+s'))}k^{(p-n)(\frac{1}{2}-(a_j+\sigma-\frac{ks'}{\rho}))}\rho^{(\delta-\alpha)(\frac{1}{2}-(1-d_j-s'))}} \\
&\sim \underbrace{\rho^{-\alpha s'+\beta s'-(\gamma-\beta)(-s')-(\delta-\alpha)s'}}_{\rho^{(\gamma-\delta)s'}}\underbrace{k^{-\frac{nks'}{\rho}+\frac{mks'}{\rho}-(q-m)(-\frac{ks'}{\rho})-(p-n)\frac{ks'}{\rho}}}_{k^{(q-p)\frac{ks'}{\rho}}}=F(s'),
\end{aligned}
\tag{8.4.23}
$$

它恰好抵消了 ρ k s' 8.4.18 8.4.17, 8.4.18, , 方程..指数项中的。
$C_1=\frac{LHS}{RHS}$ C_1
8.4.23 比较方程（.....），我们得出结论，，剩余的标量因子由三个部分组成：

- 原始的 $w^{-\sigma}$ 项，以及原始变换中遗漏的一个 ρ 项。
- 这些 2π 项
- 指数项中的其余项 ρ， k

这些 2π 项为

$$
\begin{aligned}
\frac{A(\frac{s'}{\rho})B(\frac{s'}{\rho})}{C(\frac{s'}{\rho})D(\frac{s'}{\rho})} \sim C_{12} &= \frac{(2\pi)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{n(k-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{\beta(\rho-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{m(k-1)}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(q-m)(k-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{(\gamma-\beta)(\rho-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{(p-n)(k-1)}{2}}(2\pi)^{\frac{(\delta-\alpha)(\rho-1)}{2}}} \\
&= (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}(2\alpha+2\beta-\gamma-\delta)}(2\pi)^{\frac{k-1}{2}(2m+2n-p-q)}.
\end{aligned}
\tag{8.4.24}
$$

ρ 指数项中剩余的因子。为简化记号，这里我们隐式地使用了以下事实： $d_j = \sum_{j=1}^{\alpha} d_j$ （c_j同理）
α

$$\frac{\rho^{\alpha(\frac{1}{2}-d_j)}\rho^{\beta(\frac{1}{2}-1+c_j)}}{\rho^{(\gamma-\beta)(\frac{1}{2}-c_j)}\rho^{(\delta-\alpha)(\frac{1}{2}-1+d_j)}} = \underbrace{\rho^{\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta-(\gamma-\beta)+(\delta-\alpha)\right)}}_{\rho^{\frac{1}{2}(\delta-\gamma)}}\underbrace{\rho^{-\sum_{j=1}^{\alpha} d_j+\sum_{j=1}^{\beta} c_j-\sum_{j=\beta+1}^{\gamma}(-c_j)-\sum_{j=\alpha+1}^{\delta} d_j}}_{\rho^{\sum_{j=1}^{\gamma} c_j-\sum_{j=1}^{\delta} d_j}}. \tag{8.4.25}$$

同样地， k 指数项为

$$\begin{aligned}&\frac{k^{n(\frac{1}{2}-(1-a_j-\sigma))}k^{m(\frac{1}{2}-(b_j+\sigma))}}{k^{(q-m)(\frac{1}{2}-(1-b_j-\sigma))}k^{(p-n)(\frac{1}{2}-(a_j+\sigma))}}\\ &= \underbrace{k^{\frac{1}{2}\left(-n+\beta+(q-m)-(p-n)\right)}}_{k^{\frac{1}{2}(q-p)}}\underbrace{k^{\sum_{j=1}^{n} a_j-\sum_{j=1}^{m} b_j-\sum_{j=m+1}^{q} b_j+\sum_{j=n+1}^{p} a_j}}_{k^{\sum_{j=1}^{p} a_j-\sum_{j=1}^{q} b_j}}\underbrace{k^{n\sigma-m\sigma-(q-m)\sigma+(p-n)\sigma}}_{k^{\sigma(p-q)}}.\end{aligned} \tag{8.4.26}$$

因此， C_1 的剩余因子为 8
(.4.27)
$C_1 = w^{-\sigma}\rho^{1+\frac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sum_{j=1}^{\gamma} c_j-\sum_{j=1}^{\delta} d_j}k^{\sigma(p-q)+\frac{1}{2}(q-p)+\sum_{j=1}^{p} a_j-\sum_{j=1}^{q} b_j}(2\pi)^{\frac{p-1}{2}(2\alpha+2\beta-\gamma-\delta)}(2\pi)^{\frac{k-1}{2}(2m+2n-p-q)}$.

8.4.1. 基于 Meijer-G 函数的拉普拉斯变换选定计算

定理 8.6。 由前面的定理可知 *8.2*

$$\int_0^{\infty} e^{-s\cdot x}G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{array}{c} a_p \\ b_q \end{array}\middle| wx^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}s}G_{p+2,q}^{m,n+2}\left(\begin{array}{c} 0,\frac{1}{2},a_p \\ b_q \end{array}\middle| \frac{4w}{s^2}\right). \tag{8.4.28}$$

下面的定理讨论极点与留数几何及其在重构原函数时所提供的信息。

定理 8.7。

$$\cos x = \sqrt{\pi}G_{0,2}^{1,0}\left(\begin{array}{c} ; \\ 0;\frac{1}{2} \end{array}\middle| \frac{x^2}{4}\right). \tag{8.4.29}$$

证明。 根据定义，我们可以将右端写成

$$\begin{aligned}RHS &= \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_C \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{q}\Gamma(a_j-s)}z^s ds\Big|_{z=\frac{x^2}{4}}\\ &= \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_C \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+s)}z^s ds\Big|_{z=\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\underbrace{2\pi i\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{res}_k}_{\text{residue theorem}}.\end{aligned} \tag{8.4.30}$$

伽马函数 $\Gamma(z)$ 在 $0,-1,-2,\cdots$ 处有极点，而 $\Gamma^{1}{}_{z()}$ 是整函数，因为伽马函数没有零点。利用只有分子中的极点会产生对积分有贡献的留数这一事实，以及 $\mathrm{res}_{z=n}\Gamma(-z) = {}_{(-1)n}$ ！（其余均为标量因子），我们得到
n

$$RHS = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)2\pi i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}(\frac{x^2}{4})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = \cos x, \tag{8.4.31}$$

其中我们利用了 $k!\Gamma(\frac{1}{2}+k\ 4^k$ $(2k)!,$ 因为 $k!2^k = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k$和 $\Gamma(\frac{1}{2}+k)$ 2^k $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$
$\sqrt{\pi}$ $\sqrt{\pi}$

推论 8.8。 利用 *Meijer-G*函数的一般形式在拉普拉斯变换下保持闭合（等 *8.4.28*），可得

$$\mathcal{L}(\cos(wx))(s) = \frac{s}{w^2+s^2}. \tag{8.4.32}$$

证明。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(wx))(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}s}\sqrt{\pi}G^{1,2}_{2,2}\left(\begin{array}{c}0,\frac{1}{2}-\\0,\frac{1}{2}\end{array}\middle|\frac{4w'}{s^2}\right)\Bigg|_{w'=\frac{w^2}{4}} \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+x}\right)\Bigg|_{x=\frac{w^2}{s^2}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\frac{w^2}{s^2}} = \frac{s}{w^2+s^2}.\end{aligned} \tag{8.4.33}$$

■

引理 8.9。 利用超几何函数的以下表示，我们得到第一类贝塞尔函数的拉普拉斯变换 J_n（at）作为推论：

$$ {}_2^1F(\frac{1+n}{2},\frac{2+n}{2},1+n,x) = \frac{2^n(1-\sqrt{1-x})^n}{\sqrt{1-x}x^n}, \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{8.4.34}$$

推论 8.10。

$$\mathcal{L}(J_n(at))(s) = \frac{(-s+\sqrt{a^2+s^2})^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}. \tag{8.4.35}$$

证明。 应用方程（8.4.28），我们需要 $G^{2,\ 2}_{1,\ 2}\left(\begin{array}{c}0\\-\end{array},\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\\frac{n}{2}\end{array},\begin{array}{c}-\frac{n}{2}\\-\end{array}\middle|\frac{a^2t^2}{s^2}\right)$ 参考 Mathematica，或者可以参考 Wolfram 网站上列出的 Meijer-G 特殊情形，

$$\begin{aligned}LHS &= \frac{1}{\sqrt{\pi}s}\cdot 2^{-n}\sqrt{\pi}(\frac{a^2}{s^2})^{n/2}\cdot {}_2^1F\Big(\frac{1+n}{2},\frac{2+n}{2},1+n,-\frac{a^2}{s^2}\Big) \\ &= 2^{-n}s^{-1-n}a^n\frac{2^n(1-\sqrt{1-x})^n}{\sqrt{1-x}x^n}\Bigg|_{x=-\frac{a^2}{s^2}} \\ &= s^{n-1}\frac{1}{a^n}\frac{(-1+\sqrt{1+\frac{a^2}{s^2}})^n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{s^2}}} = \frac{(-s+\sqrt{a^2+s^2})^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}.\end{aligned} \tag{8.4.36}$$

■

8.5. 附录 E。ILT 的理论近似与分析

8.5.1. 确保各向同性的具体策略

根据限制定理，为保证各向同性，我们将域划分策略与相位采样策略相结合。记为 $B'_{ij}=\exp(-z_ip_{i,\ j})$。如果放宽相位与采样之间的独立性，就能得到满足 $\mathbb{E}[b'_{ij}]=0$、$\mathbb{E}[b'_{ij}b'^*_{ij}]=1$ 的可行策略。考虑以下冯·米塞斯分布

$$f_\Phi(\phi) = \frac{\exp(-a\cos(\phi))}{2\pi I_0(a)} \tag{8.5.1}$$

以及以下两个积分

$$\mathbb{E}[c_{ij}] = \int_0^{2\pi}\exp(ae^{i\phi})f_\Phi(\phi)d\phi = \frac{2\pi J_0(a)}{2\pi I_0(a)} = \frac{J_0(a)}{I_0(a)} \tag{8.5.2}$$

$$\mathbb{E}[c_{ij}c^*_{ij}] = \int_0^{2\pi}\exp(ae^{i\phi})\exp(ae^{i\phi})^*f_\Phi(\phi)d\phi = \int_0^{2\pi}\exp(2a\cos\phi)\frac{\exp(-a\cos(\phi))}{2\pi I_0(a)}d\phi = 1. \tag{8.5.3}$$

因此，如果我们关注 0th 阶贝塞尔函数的零点，即 $J_0(a)$，就能保证各向同性。数值算法大致如下：

- 使用 r（径向分量）作为缩放参数，以便从 $[0,2\pi]$ 中取得足够多的零点来匹配这些零点，从而对于 $p_{i,\ j}$，$J_0(r\cdot p_{i,\ j})=0$ 能够确定性地成立。
- 然后，在每个条目处，根据分布 $f_\Phi(\phi)=\exp(-z_ip_{i,\ j})$ 则这些向量是各向同性的，因此 $C_{ij}=\exp(-z_ip_{i,\ j})$ $j=1$，2，3，$\ldots n+1$ 的奇异值有界。

引理 8.11。 一阶差分矩阵的最小奇异值 $\sigma_n(D_{ij})$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \tag{8.5.4}$$

有下界 *[68]*。

证明。 奇异值分解 $D_{n\times(n-1)} = U\Sigma V^T$ 为

$$U_{n\times(n-1)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2n}) & \cos(\frac{2\pi}{2n}) & \cdots & \cos(\frac{(n-1)\pi}{2n}) \\ \cos(\frac{3\pi}{2n}) & \cos(\frac{3\cdot 2\pi}{2n}) & \cdots & \cos(\frac{3\cdot(n-1)\pi}{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\frac{(2n-1)\cdot\pi}{2n}) & \cos(\frac{(2n-1)\cdot 2\pi}{2n}) & \cdots & \cos(\frac{(2n-1)\cdot(n-1)\pi}{2n}) \end{bmatrix} \tag{8.5.5a}$$

$$\Sigma_{(n-1)\times(n-1)} = \begin{bmatrix} 2\sin(\frac{\pi}{2n}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\sin(\frac{2\pi}{2n}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\sin(\frac{(n-1)\pi}{2n}) \end{bmatrix} \tag{8.5.5b}$$

$$V^T_{(n-1)\times(n-1)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cdots & \sin(\frac{(n-1)\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\cdot 2\pi}{n}) & \cdots & \sin(\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\frac{(n-1)\pi}{n}) & \sin(\frac{2\cdot 2\pi}{n}) & \cdots & \sin(\frac{(n-1)\cdot(n-1)\pi}{n}) \end{bmatrix} \tag{8.5.5c}$$

单位约束 $UU^T = I_n$ 可由下式验证

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}m\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2n}m\right) + \cdots + \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}m\right) = \sum_{j=1}^{n}\cos^2\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}m\right) = \frac{n}{2}, \text{m is odd} \tag{8.5.6}$$

应用半角公式后，该等式等价于 $\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}m\right) = 0$，可通过考察根 $(x^{1/m})^n + 1 = 0$ 的实部以及根展开中的 $x^{(n-1)/m}$ 项来验证。同样，$VV^T = I_{n-1}$ 也可验证

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{n}t\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}t\right) + \cdots + \sin^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}t\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{j\pi}{2n}t\right) = \frac{n}{2}, \tag{8.5.7}$$

该等式等价于 $\sum_{j=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{n}t\right) = \frac{1}{2}$，可通过考察根 $(x^{1/t})^n - 1 = 0$ 的实部以及根展开中的 $x^{(n-1)/t}$ 项来验证。为**验证** $D = U\Sigma V^T$，注意 8.5.8

( )

$$D_{mt} = \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{t\pi}{n}k\right)\cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}k\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{t\pi}{n}k\right)\left(\sin\left(\frac{mk\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{(1-m)k\pi}{n}\right)\right)$$

其中我们使用 $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\cos\left((2m-1)_{2n}\,{}^{\pi}k\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(\frac{mk\pi}{n}) + \sin(\frac{(1-m)k\pi}{n})\right)$ 进行收缩。我们首先检查 $D_{mm} = 1, \forall m = 1,2,\cdots,n-1$。也就是说，

$$D_{mm} = \frac{2}{n}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{m\pi}{n}k\right)}_{n/2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{mk\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(1-m)k\pi}{n}\right)}_{0}\Big) = 1 \tag{8.5.9}$$

其中第二项可通过将乘法反转为加法得出。接下来我们检查 $D_{(m+1)m} = -1, \forall m = 1,2,\cdots,n-1$。

$$D_{mm} = \frac{2}{n}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\Big(\frac{m\pi}{n}k\Big)\sin\Big(\frac{(m+1)\pi}{n}k\Big)}_{0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\Big(\frac{mk\pi}{n}\Big)\sin\Big(\frac{(-m)k\pi}{n}\Big)}_{-2/n}\Big) = -1 \tag{8.5.10}$$

按照类似的步骤，我们可以验证，如果 $t \neq m$ 和 $t \neq m-1$，则所有其他情形都为零 $D_{mt} = 0$

$$D_{mt} = \frac{2}{n}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{t\pi}{n}k)\sin\Big(\frac{m\pi}{n}k\Big)}_{0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\sin\Big(\frac{tk\pi}{n}\Big)\sin\Big(\frac{(1-m)k\pi}{n}\Big)}_{0}\Big) = 0 \tag{8.5.11}$$

因此，$\sigma_n(D_{ij}) = 2\sin(\frac{2\pi}{n})$。

定理 8.12。 设 $B = CD$，由于 $\sigma_n(D)$ 有界，因此 $B = \Big(\exp(-z_i p_{i,j}) - \exp(-z_i p_{i,j-1})\Big)$ 的最小奇异值有界。

证明。

$$\sigma_n(B) = \sigma_n(CD) = \min_{x\in\mathbb{C}^n}\frac{\|CDx\|}{\|x\|} = \min_{x\in\mathbb{C}^n}\frac{\|CDx\|}{\|Dx\|}\frac{\|Dx\|}{\|x\|} \geq \min_{x\in\mathbb{C}^n}\frac{\|Cx\|}{\|x\|}\min_{x\in\mathbb{C}^n}\frac{\|Dx\|}{\|x\|} = \sigma_n(C)\cdot\sigma_n(D) \tag{8.5.12}$$

8.5.2. 各向同性限制

均匀相位是消除 B_{ij}的域变量独立性的唯一方式

引理 8.13. 若 ϕ 且 a 相互独立，那么唯一的 $f_\Phi(\phi) \in L^2([0,2\pi])$ 满足以下条件：

$$\int_0^{2\pi}\exp(-a\exp(i\phi))f_\Phi(\phi)d\phi = const, \tag{8.5.13}$$

是 $f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$.

证明。 我们使用费曼积分技巧并研究 $I(a) = \int_0^{2\pi}\exp(-a\exp(i\phi))f_\Phi(\phi)d\phi$。由于 $f_\Phi(\phi)$ 是一个概率分布，因此 $I(a) = 1$。根据假设，$\Big(\frac{d^j}{da^j}I(a)\Big)\Big|_{a=0} = 0$，$\forall j = 1, 2, 3, 4, \cdots$。我们在零点附近对 $\exp(-a\exp(i\phi))$ 进行展开。于是，

$$\exp(-a\exp(i\phi)) = 1 - a\exp(i\phi) + \frac{a^2\exp(2i\phi)}{2!} + \cdots. \tag{8.5.14}$$

泰勒展开后，任意阶导数为零可转化为关于$f_\Phi(\phi)$的层次化傅里叶基约束。也就是说，

$$\int_0^{2\pi}\exp(i\cdot 0\cdot\phi)f_\Phi(\phi)d\phi = 1 \tag{8.5.15}$$

$$\int_0^{2\pi}\exp(i\cdot j\cdot\phi)f_\Phi(\phi)d\phi = 0, j = 1,2,3,4,... \tag{8.5.16}$$

由于 $\Big\{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\phi), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\phi)\Big\}$ 构成了 $L^2([0,2\pi])$中的傅里叶-欧拉基，而这些基的基系数分别与方程 8.5.15、方程 8.5.16的实部以及方程 8.5.16的虚部完全对应。因此，$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$.

接下来，我们构造采样策略，使得矩阵 $C_{ij} = \exp(-z_i p_{i,j}) - 1, j = 1,2,3,...n+1$。为了界定奇异值，我们需要 C_{ij} 具有各向同性行。所谓各向同性向量行，是指随机向量 X 属于 $\mathbb{C}^n$ 且满足$\Sigma(X) = \mathbb{E}[XX^*] = I_{n\times n}$。我们需要

- 对于固定行 i， $\mathbb{E}[c_{ij}c_{ij}^*] \sim$ 为常数$\forall j$。
- 对于固定行 i， $\mathbb{E}[c_{ij}c_{it}^*] = 0$， $\forall j \neq t$，事实上，如果我们保证行条目之间相互独立，那么 $\mathbb{E}[c_{ij}c_{it}^*] = \mathbb{E}[c_{ij}]\mathbb{E}[c_{it}^*]$ 并且我们证明了一个更强的条件，即它们的均值为 0，也就是 $\mathbb{E}[c_{ij}] = 0$。

引理 8.14。 利用前一个引理，如果我们具有均匀相位分布，即 $f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$， $0 \leq \phi \leq 2\pi$。那么，在给定域划分 $p_{i,\ j}$ 的情况下， $\mathbb{E}[c_{ij}] = 0$ 与相位采样相互独立。

证明。 利用前一个引理写出期望

(8.5.17)

$$\mathbb{E}[c_{ij}] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_Z[c_{ij} \mid P]] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_Z[\exp(-z_i p_{i,j}) - 1]] = \mathbb{E}_P[\int_0^{2\pi} \exp(-re^{i\phi}p_{i,j}) f_\phi(\phi) d\phi] - 1 = 1 - 1 = 0.$$

尽管对于任何圆对称分布，这一期望均为 0，但为了消除多余的自由度。这里的采样是物理上的，因为相位是均匀的，因此我们是在按半径进行叶状分解的同心圆上采样。每个叶状分解（固定半径的闭曲线）都足以重构解析函数中的信息。然而，我们现在讨论划分策略，使得 $\mathbb{E}[c_{ij}c_{ij}^*] \sim$ 不存在保持 i 不变的$\forall j$ 常数。

(8.5.18)

$$\begin{aligned} c_{ij}c_{ij}^* &= \left(\exp(re^{i\phi}p_{i,j}) - 1\right)\left(\exp(re^{i\phi}p_{i,j}) - 1\right)^* \\ &= [\exp(r\cos\phi p_{i,j})\cos(r\sin\phi p_{i,j}) - 1]^2 + \exp(2r\cos\phi p_{i,j})\sin(r\sin\phi p_{i,j})^2 \\ &= 1 + \exp(2r\cos\phi p_{i,j}) - 2\exp(r\cos\phi p_{i,j})\cos(r\sin\phi p_{i,j}). \end{aligned}$$

第二项 给出冯·米塞斯分布的归一化因子，而第三项积分为 4π .

(8.5.19)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Phi[c_{ij}c_{ij}^*] &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \exp(2\cos\phi p_{i,j}) - 2\exp(\cos\phi p_{i,j})\cos(\sin\phi p_{i,j})\right)\frac{1}{2\pi}d\phi \\ &= I_0(2p_{i,j}\cdot r) - 1 \end{aligned}$$

其中， I_0 是 0th 类修正贝塞尔函数。我们希望

(8.5.20)

$$\int_0^\infty (I_0(2p_{i,j}\cdot r) - 1) f(r) dr = \text{const} \neq 0.$$

如果我们在此研究其渐近行为

(8.5.21)

$$I_0(2p_{i,j}\cdot r) - 1 = p_{i,j}^2 r^2 + O(r^4), \int_0^\infty (I_0(2p_{i,j}\cdot r) - 1) f(r) dr \propto p_{i,j}^2 \neq \text{constant}.$$

此外，由于 $f(r) \geq 0$。积分 $g(p_{i,j}) = \int_0^\infty (I_0(2p_{i,j}\cdot r) - 1) f(r) dr$ 随 $p_{i,j}$增大。因此， $\mathbb{E}[c_{ij}c_{ij}^*] = g(p_{i,j})$不可能是常数。因此，在这种情况下，没有实用的数值策略能够保证各向同性。 ■

引理 8.15。 若 a 和 ϕ 相互独立，则不存在 $f_\Phi(\phi)$ 使得

(8.5.22)

$$\int_0^{2\pi} \exp(a\exp(i\phi))\exp(-i\phi) f_\Phi(\phi) d\phi = const$$

其中常数与 a无关。

证明。 同样，令 $I(a) = \int_0^{2\pi} \exp(a\exp(i\phi) - i\phi) f_\Phi(\phi) d\phi$。我们观察到 $I'(0) = 1$。因此，不可能存在任何与 a 无关且在零点处导数为1的函数。因此， $f_\Phi(\phi)$ 不存在。 ■

- 有趣的是， $I'(a) = \int_0^{2\pi} \exp(a\exp(i\phi)) f_\Phi(\phi) d\phi$，这就是前一种情况；如果令 $f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$，那么， $I'(a) = 1$， $\forall a$。考虑 $I(0)$，它等于 $I(0) = 0$。然后结合一阶条件可得$I(a) = a$。

- 因此，我们顺带得到

(8.5.23)

$$\int_0^{2\pi} \exp(ae^{i\phi})e^{-i\phi} d\phi = 2\pi a, \forall a \neq 0.$$

8.6. 附录 F：随机划分

8.6.1. 均匀分布情形

如果 $X_i \sim \text{Unif}[0,1],$，则 $L_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Irwin - Hall(n)$，对于 $T = \frac{L_k}{L_{n+1}} = \frac{\sum_{j=1}^{k} X_j}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ 的划分结果分布可通过以下方式获得

$$
\begin{aligned}
P(T \le t) &= P\left(L_k \le t(L_k + \sum_{i=k+1}^{n+1} X_i)\right) = \int_0^k P\left(L_k \le t(L_k + \sum_{i=k+1}^{n+1} X_i) \mid L_k = l\right) P(L_k = l) dl \\
&= \int_0^k P\left(\sum_{i=k+1}^{n+1} X_i \ge \frac{l - tl}{t}\right) P(L_k = l) dl.
\end{aligned} \tag{8.6.1}
$$

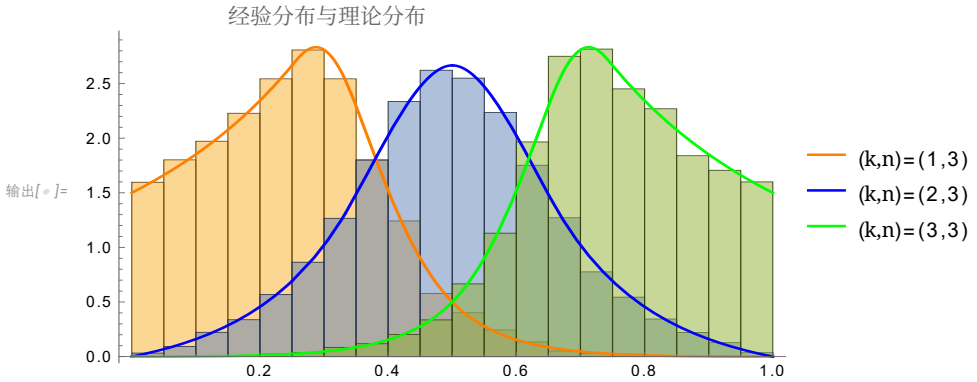


图 8.2。 一个关于 $n = 3$ 均匀和的示例，其中经验分布（直方图）由均匀抽样生成，理论分布（曲线）来自*8.6.1*

8.6.2. 均匀抽样的指数分布与次序统计量

指数情形与均匀抽样的次序统计量之间存在密切联系，具体结果如下

引理 8.16。 设 X_1，X_2，$\cdots$，$X_{n+1} \sim$ 指数项(λ)。 X_1，$(X_1 + X_2)$ $\cdots$，$(X_1 + \cdots + X_{n+1})$ 的联合分布是均匀次序分布。也就是说，它们等价于从均匀分布（均匀分布 $Unif[0,s]$）中进行独立同分布抽样后，再进行排序 $0 < X_{(1)} < \cdots < X_{(n)} < s$。

证明。 设 $S_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i$ 自然地 S_i 是具有 $X_i > 0$的次序统计量。我们可以根据指数分布的

$$
\begin{aligned}
f_{S_1,\cdots,S_{n+1}}(s_1,\cdots,s_{n+1}) &= f_{X_1}(s_1) f_{X_2}(s_2 - s_1) \cdots f_{X_{n+1}}(s_{n+1} - s_n) \\
&= \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} \mathbb{1}\{0 < s_1 < \cdots < s_n < s_{n+1}\}.
\end{aligned} \tag{8.6.2}
$$

边际 分布可以利用以下众所周知的事实得到： S_n $X_i \sim$ 指数项$(\lambda) \Longrightarrow \sum_i X_i \sim \Gamma(n,$ $\lambda)$ ：

$$
f_{S_n}(s) = \frac{s^{n-1} e^{-\lambda s} \lambda^n}{\Gamma(n)} \mathbb{1}\{s > 0\}. \tag{8.6.3}
$$

结合 8.6.2、8.6.3，我们将长度固定为 s,

$$
f_{S_1,\cdots,S_n | S_{n+1}=s}(s_1,\cdots,s_n) = \frac{f_{S_1,\cdots,S_{n+1}}(s_1,\cdots,s_{n+1})}{f_{S_{n+1}}(s)} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^n} \mathbb{1}\{0 < s_1 < \cdots < s_n < s\}. \tag{8.6.4}
$$

采用 IID 均匀抽样（$Unif[0,s]$）时，随机变量排列划分 $0 < X_{(1)} < \cdots < X_{(n)} < s$ 的第 r^{th} 阶顺序统计量为

$$
f_{X_{(r)}}(x) = \left(\frac{1}{s}\right)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n+1-r)} x^{r-1} (s - x)^{n-r}. \tag{8.6.5}
$$

该条件 ional 分布 $y > x$，实际上将问题简化为 $x < X_{(r+1)} < \cdots < X_{(n)} <$ s

$$
\begin{aligned}
f_{X_{(r+1)}|X_{(r)}}(y \mid x) &= \left(\frac{1}{s-x}\right)^{n-r} \frac{\Gamma(n+1-r)}{\Gamma(1)\Gamma(n-r)} y^{1-1}(s-y)^{n-r-1} \\
&= \left(\frac{1}{s-x}\right)^{n-r} (s-y)^{n-r-1}\,(n-r).
\end{aligned} \tag{8.6.6}
$$

我们可以利用马尔可夫性质迭代这一过程，并获得联合分布，如 8.6.4 使用$f_{S_1,\ \cdots,\ S_{n-1}|S_n=s}(s_1,\ \cdots,\ s_{n-1}) = f_{X_{(1)}}(x) f_{X_{(2)}|X_{(2)}}(x_2 \mid x_1) \cdots f_{X_{(n-1)}|X_{(n-2)}}(x_{n-1} \mid x_{n-2}) = \Gamma_{(n+1)}\, s^n \quad \mathbb{1}\{0 < x_1 < \cdots < x_n < s\}$。

8.6.3. 随机划分与均匀、指数项及等距方案的对比

为对比理论划分与经验随机划分之间的偏差，我们通过下图对此进行说明。此处使用 n 表示区间 $(0,\ 2\pi)$ 内的数据点数量，以避免歧义。我们使用 E1 表示划分策略：$p_j \in [\frac{2\pi}{n+1} j - \frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1} j + \frac{\pi}{n+1}]$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使用 E2 表示划分策略：$p_j \sim Unif(\frac{2\pi j}{n} - \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi j}{n})$。

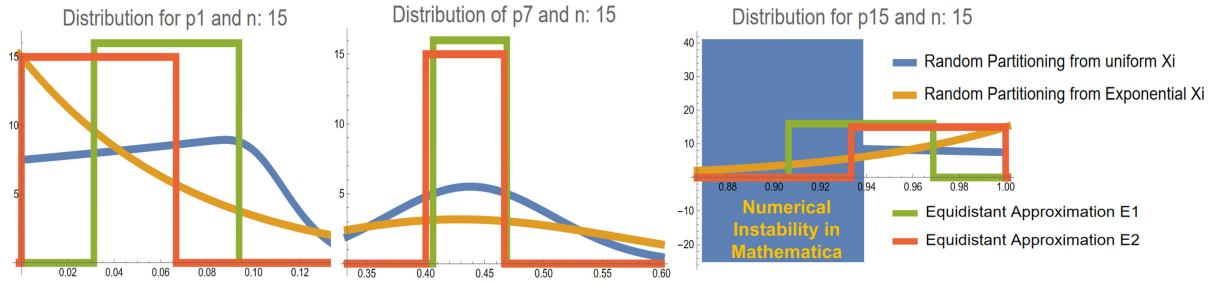


图 8.3。随机区间划分方案与等距近似的并列比较：通过消除依赖关系，获得随机矩阵理论中最小奇异值的理论界。模糊现象（导致最右侧图中出现巨大波动的不稳定性）归因于在计算 *Irwin-Hall* 分布的比值密度时，大规模积分计算所产生的数值不稳定性。