arXiv:2304.13209v2 [math.GT] 1 Aug 2024

子集刚性推出标记长度谱刚性

Stephen Cantrell 和 Eduardo Reyes

Abstract. 我们提出了一种研究长度谱刚性问题的新方法，该方法结合了动力系统与几何群论中的思想。借助这一方法，我们能够比较源自各种几何背景的度量及类距离函数的标记长度谱。运用这一新视角，我们为一些著名的长度谱刚性结果给出了简洁的证明，并将经典结果推广到了多种新的情形。我们的方法依赖于对曼哈顿曲线的研究，以及对配备了对称化 Thurston 度量的粗几何类 Teichm¨uller 空间的研究。

1. Introduction

设 S 是亏格至少为 2 的闭曲面，$\mathfrak{g}$ 是 S上具有负截面曲率的黎曼度量。($S,\mathfrak{g}$)上的闭定向测地线与 S的基本群 $\Gamma = \pi_1(S)$中的共轭类（记作 conj）一一对应。令 $\ell_{\mathfrak{g}}$:conj $\to \mathbb{R}_{>0}$ 为一个函数，它将共轭类映射到 $(S,\mathfrak{g})$上相应闭测地线的长度。Otal [33] 和 Croke [20] 分别证明了一个著名结果：若 $\mathfrak{g}_*$ 是S上的另一个负曲率黎曼度量，且对所有 $[x] \in$conj 都有 $\ell_{\mathfrak{g}}[x] = \ell_{\mathfrak{g}_*}[x]$，则 $(S,\mathfrak{g})$与 $(S,\mathfrak{g}_*)$ 等距。这个结果称为标记长度谱刚性。

这一现象已扩展到曲面上更一般的度量类型，例如平移曲面 [24]，平坦度量 [2]，以及具有有限个奇点的非正曲率黎曼度量 [16]。此外，Wu 最近证明，一大类曲面合并具有长度谱刚性 [40]。在高维中，当其中一个度量是局部对称时，闭的负曲率黎曼度量满足标记长度谱刚性 [27]。Guillarmou 和 Lefeuvre [26] 的一项突破性结果断言：对于具有 Anosov 测地流且具有非正曲率的黎曼流形，标记长度谱可以局部确定度量。

在已知或猜测标记长度谱刚性成立的情形下，还存在许多其他相关的刚性问题。例如：为了推断两个度量相同，我们是否需要假设它们在所有共轭类上具有相同的标记长度谱，还是只需假设它们在共轭类的某个子集上一致即可？如果可以，那么哪些共轭类的子集能够确定完整的标记长度谱？

许多作者都研究过这一问题。现在，我们概述负曲率曲面（即上文中的 $\Gamma = \pi_1(S)$）情形下的一些已知结果。

首先值得注意的是，尽管 Bonahon [3], 的工作中没有明确陈述，但可以由其中推得：如果 $N \trianglelefteq \Gamma$ 是 Γ 的无限正规子群，并且 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}_*$ 的标记长度谱在由 N中的元素表示的共轭类上相同，那么二者等距。最近，Hao [28] 推广了这一结果（在更一般的情形下），证明了：如果 $H < \Gamma$ 是一个子群，使得 H 的$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$极限集是 ∂S 的全部，其中 S 是 S 的万能覆盖，并且 $\ell_{\mathfrak{g}}$、$\ell_{\mathfrak{g}_*}$ 在 H上一致，那么 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_*$ 等距。Gogolev 和 Rodriguez Hertz 最近还证明，限制在固定同调类中的闭测地线上的长度谱，可以确定度量 [25]的完整长度谱。集合E ⊂共轭类不必由 Γ的子群诱导。众所周知（借助 Fenchel–Nielsen坐标），双曲曲面的等距类由有限条闭测地线的长度决定。对于闭曲面上的负曲率黎曼度量，Sawyer [36]证明，如果 E ⊂共轭类的补集 E^c 按如下意义呈次指数地增长：

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{[x] \in E^c : \ell_{\mathfrak{g}}[x] \le T\}) = 0 \tag{1.1}$$

并且 $\ell_{\mathfrak{g}}$，$\ell_{\mathfrak{g}_*}$在 E上达成一致，那么 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_*$是等距的。具有如（1.1）所示的次指数增长这一性质与度量 $\mathfrak{g}$无关。Sawyer 的结果还可由关于相对于两个度量 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_*$长度近似相同的共轭类数量的渐近公式推出；该公式在常负曲率情形下归因于 Schwartz 和 Sharp [37, 定理 1] ，在变负曲率情形下归因于 Dal'bo [23]。在这两种情形中，渐近公式都是利用测地流的热力学形式主义证明的。

人们也在其他背景下研究了类似的标记长度谱刚性问题。例如，Smillie 和 Vogtmann [39] 证明，与 Teichm¨uller 空间不同，不存在一个有限的共轭类集合可用于区分 Outer Space 中的点。此外，对于 Kleinian 曲面群，Bridgeman 和 Canary [8] 证明，曲面上的简单闭测地线集合足以确定一个度量的等距类。双曲度量是否可由其在简单闭测地线上的长度确定，这一关于闭曲面的问题仍未解决。

本文提出了一种研究上述长度谱刚性问题的新方法。我们的方法结合了几何群论和动力系统中的思想。该方法主要有两方面的优势。首先，我们能够为众所周知的刚性结果给出简洁明了的证明；其次，我们可以将这些结果推广到许多新的度量和几何结构。

我们考虑的问题包括：

- 子群刚性与子集刚性（即哪些共轭类的子集可以用来确定上述度量的完整长度谱）；
- 黎曼流形的体积刚性（即长度谱在多大程度上能够确定流形的体积）；
- 理解（拟凸）子群和子集中指数增长率的下降；以及，

● 获得决定长度谱的共轭类子集的增长率的统一估计（即，从增长率的角度来看，在这对度量上具有相同/接近长度谱的共轭类集合有多大）。

还有许多其他研究探讨了与长度谱和体积刚性相关的类似问题，例如参见 [5], [17], [21],[25], [28]。

如上所述，我们的思路使我们能够将刚性结果推广到各种新的情形。为此，我们考虑一般的粗负曲率度量空间。这使我们能够比较不一定是黎曼度量、且基于不同几何假设定义的度量。上文提及的大多数结果都依赖于与测地流相关的遍历理论工具，或者至少依赖于通过连续的 Busemann 余循环或测地流来编码标记长度谱。由于这些工具通常不适用于黎曼情形之外或低维情形，因此我们需要新的思路来解决这些问题。我们的证明主要基于作者关于曼哈顿曲线和粗几何版 Techm¨uller 空间的研究，($\mathscr{D}_\Gamma$, Δ)（见第2.1节）。这一视角使我们能够简洁地证明那些最初借助复杂工具证明的结果。

在以一般性陈述我们的结果（即粗几何情形）之前，我们先介绍一般结果的一些应用。

1.1. 主要定理的应用。我们的第一个例子是以下定理，它是 Guillarmou 和 Lefeuvre [26]最近刚性结果的同调版本。

定理 1.1. 设 $\mathfrak{g}_*$ 是闭流形 M上的光滑负曲率黎曼度量。对于任意足够大的 $N > 0$，存在 $\epsilon > 0$，使得对于 M 上的任意满足 $\|\mathfrak{g} - \mathfrak{g}_*\|_{C^N} < \epsilon$ 的光滑度量 $\mathfrak{g}$，以下结论成立：若对于每个由 $\pi_1(M)$ 的某个固定同调类中的元素所代表的共轭类 $[x]$，都有 $\ell_{\mathfrak{g}_*}[x] \le \ell_{\mathfrak{g}}[x]$，那么

$$\mathrm{Vol}(M, \mathfrak{g}_*) \le \mathrm{Vol}(M, \mathfrak{g}).$$

这一结果表明，当我们只考察位于指定同调类中的闭测地线时，Guillarmou 和 Lefeuvre 的结果仍然成立。我们的方法并未提供 Guillarmou 和 Lefeuvre 结果的新证明，而是使我们能够将其推广。同样，我们的结果也推广了 Gogolev 和 Rodriguez Hertz [25, 定理 6.1] 最近的一个结果；而该结果又推广了 Croke 和 Dairbekov [21, 定理 1.1] 的一个著名结果。

我们对这一结果的证明围绕着对曼哈顿曲线的研究展开：这类曲线编码了一对度量／几何结构的信息。关于曼哈顿曲线的定义及讨论，请见第2 节。为说明我们如何运用曼哈顿曲线，下面简要介绍证明定理1.1的方法。

(1) 首先，我们考察 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_*$ 在 $\Gamma = \pi_1(M)$上的提升所对应的曼哈顿曲线，并利用 [12] 和 [14], 的结果证明该曲线严格凸（命题 2.3）。(2) 接着，我们利用大偏差估计，推导出关于 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_*$的刚性结果，这些结果以子集的增长率为依据（引理 5.1）。

(3) 最后，我们利用 [12] 的结果，这些结果表明，曼哈顿曲线可视为一条路径，在 $\mathscr{D}_\Gamma$ 中对度量进行插值（其中包括大量度量，如 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_*$）。沿这条路径应用第 (2) 步的结果，我们根据同调类的界推导出长度谱的全局界（参见定理 1.7的证明）。

这种方法似乎是解决长度谱刚性问题的一种独特方法，而这类问题通常依赖于测地流或测地流的性质。

利用我们的方法，我们还为以下结果提供了一个新的证明。

定理 1.2. 设 Γ 是一个非初等双曲群，配备有限对称生成集 S，相应的字度量为 d_S，指数增长率为 v_S。那么，对于任意无限指数的拟凸子群 $H < \Gamma$，有

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\left(\#\{x \in H : d_S(o,x) < T\}\right) < v_S.$$

此前对该结果的证明要么涉及 Patterson-Sullivan理论 [30,推论 2。8]，要么涉及正规语言的计数 [22, 定理 1。1]。我们的证明完全是几何性的，不使用任何边界理论或正规语言，并且依赖于 $(\mathscr{D}_\Gamma, \Delta)$ 的度量性质。事实上，我们证明了一个更一般的结果，即定理 6.5，由此还可以推出关于增长率指数下降的其他有趣结果。例如，下面的结果就是我们工作的一个直接推论。

定理 1.3。设 Γ 是自由群或曲面群。设 Γ 在 $\mathbb{R}$-树 T 上有一个小作用。令 d_T 表示 T 上度量在 Γ 上的提升，即 $d_T(x,y)$ 是 T 中 $x\cdot p$ 与 $y\cdot p$ 之间的距离，其中 $p \in$ T 是一个固定的基点。那么，对于 d_S 上的任意字度量 Γ 以及任意 $L > 0$，我们有

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log\left(\#\{[x] \in \mathbf{conj} : \ell_T[x] < L \text{ and } \ell_S[x] < T\}\right) < v_S.$$

也就是说，对于 Γ 上的任意字度量，T 的平移长度有界的共轭类具有较小的指数增长率。

现在我们继续陈述一般性结果，前述定理均可由这些结果推出，随后给出我们工作中的进一步推论。

1.2. 粗几何框架。现在我们讨论抽象的一般性结果。在全文中，我们固定一个非初等双曲群 Γ，并令 conj 表示其共轭类集合。我们将使用度量的集合 D_Γ，这些度量是 Γ 上的伪度量，具有 Gromov双曲性、Γ-不变性，并且与某个有限生成集对应的字度量拟等距。在此背景下，度量之间等距/齐次的对应概念是粗相似等价关系：我们称 d、$d_* \in \mathsf{D}_\Gamma$ 粗略相似，如果存在 C、$\tau > 0$，使得对于所有 x、$y \in \Gamma$，都有 $|d(x,y) - \tau d_*(x,y)| \le C$。当 d、d_* 与 $\tau = 1$ 粗略相似时，我们称 d、d_* 粗等距。

若 $d \in \mathsf{D}_\Gamma$，且 $[x] \in$conj 是 $x \in \Gamma$ 的共轭类，我们考虑以下量

$$\ell_d[x] := \lim_{n\to\infty} \frac{d(o,x^n)}{n},$$

其中 $o \in \Gamma$ 是单位元。这个数对每个 $[x] \in \mathrm{conj}$ 都有定义，而函数 $\ell_d : \mathrm{conj} \to \mathbb{R}$ 是 d 的（稳定）平移长度。例如，若 $\mathfrak{g}$ 是闭流形 M 上的负曲率度量，且 $\Gamma = \pi_1(M)$，并且 p 是 M 的万能覆盖 $\widetilde{M}$ 中的一点，那么 $d(x,y) = d^p_{\tilde{\mathfrak{g}}}(x,y) := d_{\tilde{\mathfrak{g}}}(xp, yp)$ 在 $\mathbf{D}_\Gamma$ 上定义了一个度量，其中 $d_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ 是 M 上由 Γ 不变的提升度量 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 所诱导的长度$\widetilde{\ }$距离。在这种情况下，我们有 $\ell_d = \ell_{\mathfrak{g}}$。

给定 $d \in \mathbf{D}_\Gamma$，关于 d 的 $E \subset$共轭类的指数增长率是非负数

$$v_d(E) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{[x] \in E : \ell_d[x] \le T\}).$$

d 的指数增长率为 $v_d := v_d$（共轭类）。注意，对于每个 $d \in \mathbf{D}_\Gamma$，v_d 都是正的，并且还可以通过以下极限恢复

$$v_d = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{x \in \Gamma : d(o,x) \le T\}),$$

见命题 6.1。属于 $\mathcal{D}_\Gamma$ 的伪度量满足标记长度谱刚性，具体而言：如果 d，$d_* \in \mathcal{D}_\Gamma$，那么当且仅当 $\ell_d[x] = \ell_{d_*}[x]$ 对每个 $[x] \in$ 共轭类 都成立时，它们粗等距，参见例如 [14, 定理 1。2]。

1.3. 子集上的刚性。现在我们陈述关于由子集刚性推出标记长度谱刚性的一般结果。第一个结果如下。

定理 1.4. 设 Γ 是一个非初等双曲群。存在一个函数 $\beta : \mathbf{D}_\Gamma \times \mathbf{D}_\Gamma \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得以下结论成立。对于任意一对 d、$d_* \in \mathbf{D}_\Gamma$ 伪度量，其指数增长率为 v_d、$v_{d_*} > 0$，以下条件等价：

(1) 存在 $x \in \Gamma$ 使得 $v_d \ell_d[x] \ne v_{d_*} \ell_{d_*}[x]$；并且，(2) $\beta(d, d_*) > 0$。

此外，当这些条件中的任一个（因而也就是两个条件）得到满足时，我们有

$$v_d(E) \le v_d - \beta(d, d_*) \tag{1.2}$$

对于任意函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 使得 $f(t) = o(t)$ 当 $t \to \infty$ 时，以及任意子集$E \subset$共轭类，使得对所有 $[x] \in E$都有 $|v_d \ell_d[x] - v_{d_*} \ell_{d_*}[x]| \le f(\ell_d[x])$。

由此结果，我们立即推出：如果 d、$d_* \in \mathbf{D}_\Gamma$ 满足存在 $E \subset$共轭类，使得：

(1) $v_d(E) = v_d$；并且，(2) 存在一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 使得当 $t \to \infty$ 时 $f(t) = o(t)$，且对所有 $[x] \in E$都有$|v_d \ell_d[x] - v_{d_*} \ell_{d_*}[x]| \le f(\ell_d[x])$，

那么，d 和 d_* 粗略相似。

备注。1）该结果适用于具有 Busemann（拟）余循环的度量，这些余循环不一定连续（上述提及的其他结果则并非如此）。

2）我们根据曼哈顿曲线，给出了 β（d，d_*）的显式表达式，适用于 d，d_*详见第2.2小节和定义3.1。

3）我们还有这一结果的一个版本，要求伪度量（而非其平移长度函数）在群元素的某个子集上彼此接近，详见定理3.6。

4）当 d、d_* 由闭曲面上的负曲率黎曼度量诱导时，该结果为 [36,Conj. 5.4] 提供了肯定的回答。

自然会问，$v_d - \beta(d, d_*)$ 是否是 (1.2) 中的最优上界，即是否存在一个集合 E（满足必要条件），使得 $v_d(E) = v_d - \beta(d, d_*)$。对于来自 Teichm¨uller 空间的度量（或更一般地，来自负曲率曲面的度量），情况确实如此；在常负曲率情形下，这是 Schwartz 和 Sharp[37] 的结果，在变负曲率情形下则是 Dal'bo [23] 的结果。在第 4 节中，我们证明 $v_d - \beta(d, d_*)$ 可由通过自同构相关的字度量对取得，见定理 4.1 和推论 4.4。

为证明定理 1.4 ，我们使用 d 的曼哈顿曲线，d_* 以显式估计增长率 $v_d(E)$。曼哈顿曲线的连续性使我们能够很好地控制数量 $\beta(d, d_*)$ ，当 d 和 d_* 变化时。为精确说明这一点，我们回顾一下，度量结构空间 在 Γ 上是$\mathscr{D}_\Gamma$ 中粗相似等价类的集合，其中 $\mathcal{D}_\Gamma$；而 对称 Thurston 距离 在 $\mathscr{D}_\Gamma$ 上定义为

$$\Delta([d],[d_*]) = \log\left(\mathrm{Dil}(d,d_*)\mathrm{Dil}(d_*,d)\right), \quad \text{where} \quad \mathrm{Dil}(d,d_*) = \sup_{[x]\in \mathbf{conj'}} \frac{\ell_d[x]}{\ell_{d_*}[x]}.$$

这里，conj′ ⊂conj 是非扭共轭类的集合，$[d]$ 表示 $d \in \mathsf{D}_\Gamma$ 的粗相似类。度量空间（$\mathscr{D}_\Gamma$，Δ）曾由第二作者在 [32] 中研究，并由两位作者在 [12]中共同研究。β 的连续性体现在下面的定理中。

定理 1.5。定义 $\overline{\beta} : \mathscr{D}_\Gamma \times \mathscr{D}_\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如下：

$$\overline{\beta}([d],[d_*]) = \frac{\beta(d,d_*)}{v_d}$$

其中 $\beta(d, d_*)$ 是定理 *1.4*中的函数。则 $\overline{\beta}$ 定义良好，且 *is*

(1) 关于其变量对称；(2) 关于度量 Δ，在每个变量上连续；并且，

(3) 对任意 $d, d_* \in \mathsf{D}_\Gamma$ ，有

$$\overline{\beta}([d],[d_*]) \leq \frac{e^{\frac{1}{2}\Delta([d],[d_*])} - 1}{e^{\frac{1}{2}\Delta([d],[d_*])} + 1} = \tanh\left(\frac{1}{4}\Delta([d],[d_*])\right).$$

此外，当且仅当 $[d] \neq [d_*]$ 时，该不等式为严格不等式。

请注意，在定理 1.4中，伪度量 $v_d d$ 和 $v_{d_*} d_*$ 的增长率为 1，且呈指数增长。为在不作此假设的情况下获得伪度量的标记长度谱刚性，我们略微加强了对子集 E的要求。利用大偏差结果 [14, 定理 423]的一种变体，我们可以证明如下结论。

定理 1.6. 设 Γ 是一个非初等双曲群，并取 $d, d_* \in \mathsf{D}_\Gamma$。假设存在一个共轭类集合 $E \subset$，使得

(1) $v_d(E) = v_d$；(2) $v_{d_*}(E) = v_{d_*}$；并且，(3) 存在一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得当 $t \to \infty$ 趋于 $|\ell_d[x] - \ell_{d_*}[x]| \leq f$ 时，$f(t)$ 趋于 $= o(t)$，且对所有 $[x] \in E$ 都有 $|\ell_d[x] - \ell_{d_*}[x]| \leq f(\ell_d[x])$。

那么，d 与 d_* 粗等距，并且对所有 $[x] \in$ 共轭类，$\ell_d[x] = \ell_{d_*}[x]$。

同一个大偏差结果使我们能够推出子集上的标记长度谱支配，具体表述如下一个定理。

定理 1.7. 设 Γ 是一个非初等双曲群，并考虑 d、$d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$。假设 $E \subset$共轭类满足：

(1) 对每个 $\widehat{d} \in \mathrm{D}_\Gamma$，$v_{\widehat{d}}(E) = v_{\widehat{d}}$；以及，(2) 存在一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得当 $t \to \infty$ 时，$f(t) = o(t)$，并且对所有 $[x] \in E$，$\ell_{d_*}[x] \leq \ell_d[x] + f(\ell_d[x])$。

那么，对所有 $[x] \in$ 共轭类，$\ell_{d_*}[x] \leq \ell_d[x]$。

备注。1）如果集合 $E \subset$共轭类的补集如上文（1.1）所示以次指数地增长，那么它满足定理 1.6 中的（1）和（2），以及定理 1.7 中的（1）。更一般地，如果共轭类中的补集 E^c of$E$ 满足 $v_{\widehat{d}}(E^c) < v_{\widehat{d}}$，对每个 $\widehat{d} \in \mathrm{D}_\Gamma$ 均成立，那么定理 1.7 中的条件（1）成立。结合 Croke 和 Dairbekov 关于负曲率度量的标记长度谱在支配关系下的面积单调性 [21]，，这解决了 [36, 猜想 5.4]。
2）除了（1）和（2）之外，对于定理 1.6，我们不要求对 v_d 和 v_{d_*} 作出任何进一步的假设，因此先验地我们不施加 $v_d = v_{d_*}$。
3）我们可以将定理 1.7 中的（1）替换为以下假设：对于每个 $\widehat{d}$，其表示 $[d]$ 和 $[d_*]$ 在曼哈顿测地线上某一点，均有 $v_{\widehat{d}}(E) = v_{\widehat{d}}$（见 [12]）。我们注意到，不能削弱这些假设，仅假设 E 满足（2）以及 $v_d(E) = v_d$, $v_{d_*}(E) = v_{d_*}$（类似于定理 1.6）。这一事实源于我们在定理 1.7 的证明中所使用的大偏差原理。

现在我们讨论这些结果对引言中先前提到的问题所产生的影响。

1.4. 子集刚性。利用上述结果，我们可以从共轭类的子集上的刚性推出标记长度谱刚性；这些子集所具有的性质不依赖于 d、d_*，而取决于其他几何或群论假设。例如，应用 Coulon、Dougall、Shapira 和 Tapie 的一个结果 [19]，我们得到以下推论。回顾一下，子群 $H < \Gamma$（不一定是正规子群）称为余可 amenable 的，如果 Γ 在左陪集空间 $H\backslash\Gamma$ 上的作用存在一个 Γ-不变均值。

推论 1.8. 设 Γ 是一个非初等双曲群，并取两个伪度量 d、$d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$。如果存在一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 $f(t) = o(t)$，当 $t \to \infty$ 时，并且

$$d_*(o, x) \leq d(o, x) + f(d(o, x))$$

对于所有 x 属于余可和子群（或固定同调类）$H \subset \Gamma$的情形，则 $\ell_{d_*}[x] \leq \ell_d[x]$对所有 $[x] \in$共轭类成立。特别地，如果 $|d(o, x) - d_*(o, x)| \leq f(d(o, x))$对所有 $x \in H$成立，那么 d和 d_*是粗等距的。

当 f 为常值函数时，在所考虑的度量具有连续 Busemann 余循环的情形下，Hao [28] 的工作在某些情况下蕴含了这一结果。上述推论还表明，闭曲面上的两个负曲率黎曼度量 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_*$，如果它们在某个固定同调类上的标记长度谱一致，则二者等距。这一结果近期由 Gogolev 和 Rodriguez Hertz [25] 利用传递 Anosov 流上的阿贝尔上同调的 Livshits 理论证明。我们的方法对这一结果进行了改进，使得 $\ell_{\mathfrak{g}}$ 与$\ell_{\mathfrak{g}_*}$ 之间的差可以是无界的。此外，我们的结果适用于任意双曲群 Γ 以及 D_Γ中的伪度量。

1.5. 体积刚性。 推论 1.8 可用于改进由标记长度谱支配所诱导的体积估计。与定理1.1类似，我们能够细化 Croke 和 Dairbekov 的一个结果 [21, 定理 1。1]。

推论 1.9。设 S 是一个亏格至少为 2 的闭曲面，且令 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_*$为 S上的两个负曲率黎曼度量。若对于由固定的余可和子群（分别为同调类）中的元素表示的每个共轭类 $[x]$，都有 $\ell_{\mathfrak{g}_*}[x] \le \ell_{\mathfrak{g}}[x]$，则

$$\mathrm{Area}(S, \mathfrak{g}_*) \le \mathrm{Area}(S, \mathfrak{g}).$$

我们还可以将体积刚性推广到 Hitchin 表示，其中所涉及的记号在小节 6.2中引入。

推论 1.10。设 Γ为一个亏格至少为 2 的闭定向曲面的基本群，且令 ρ, $\rho_* : \mathbb{R} \to \mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$ 为两个 Hitchin表示。若对于余可和子群（分别为同调类）中的所有 x，这些表示满足 $\lambda_1(\rho_*(x)) \le \lambda_1(\rho(x))$，则

$$\mathrm{vol}_L(\rho_*) \le \mathrm{vol}_L(\rho).$$

1.6. 增长率的一致估计。 我们还可以利用定理1.5 来表述定理1.4 的局部版本，并使增长率常数 $\beta(d, d_*)$具有一致性。给定 $\delta \ge 0$，令 $\mathcal{D}_\Gamma^\delta \subset \mathcal{D}_\Gamma$ 表示 $\mathcal{D}_\Gamma$ 中满足 δ-双曲性且指数增长率为 1 的伪度量的集合。

推论 1.11. 设 Γ 是一个非初等双曲群，并固定 $d \in \mathrm{D}_\Gamma^\delta$。那么对于任意 $0 < D_1 < D_2$，存在 $\tau = \tau([d], D_1, D_2, \delta) > 0$，使得当$E \subset$ 共轭类和 $d_* \in \mathrm{D}_\Gamma^\delta$ 满足

(1) $D_1 \le \Delta([d], [d_*]) \le D_2$；并且
(2) $\sup_{[x] \in E} |\ell_d[x] - \ell_{d_*}[x]|$ 为有限值，

于是我们得到

$$v_d(E) \le 1 - \tau.$$

作为推论，我们得到以下结果。设 Γ 是一个双曲曲面群，并将 QF_Γ 记作从 Γ 到 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 的拟福克斯表示的集合。对于每个表示 $\rho \in \mathrm{QF}_\Gamma$ 和 $p \in \mathbb{H}^3$，我们得到一个度量 $d_\rho = d_\rho^p \in \mathrm{D}_\Gamma$，并假设其已归一化为指数增长率 1：该度量通过 $\rho(\Gamma)$ 在 $\rho(\Gamma)$-轨道 p 上的作用，将 $\mathbb{H}^3$ 上的度量提升到 Γ 上得到。归一化常数是极限集的 Hausdorff维数，它属于 $[1, 2]$ [6]。这样，通过固定 $p \in \mathbb{H}^3$，我们识别出

$\mathcal{QF}$与 $\mathcal{D}_\Gamma^\delta$的某个子集 $\delta = 2\log 2$，而推论 1.11 推出如下结果。

推论 1.12。设 Γ 和拟 Fuchsian$_\Gamma$ 如上，并固定 $p \in \mathbb{H}^3$。那么对于任意 $d = d_\rho \in$拟 Fuchsian$_\Gamma \subset \mathsf{D}_\Gamma$和 $D_1, D_2 > 0$，存在 $\tau > 0$，使得对于所有$d_* \in$拟 Fuchsian$_\Gamma$满足 $D_1 \le \Delta([d],[d_*]) \le D_2$，我们有

$$v_d(E) \le 1 - \tau$$

对于 $\sup_{[x]\in E} |\ell_d[x] - \ell_{d_*}[x]|$ 有界的任意集合 E。

这立即由推论 1.11得到。

结构安排。 本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们介绍双曲空间和曼哈顿曲线的预备知识。在第 3 节中，我们证明定理 1.4 和 1.5。我们在第 1.4 节中讨论定理 4的最优性，并在该节中证明某些字度量对达到最大的增长率。在第 5 节中，我们证明定理 1.6 和 1.7；在第 6 节中，我们给出关于标记长度谱刚性的主要定理的一些应用，从而推导出定理 1.1、 1.2 和 1.3，以及推论1.9、1.10 和1.11。

致谢。我们感谢 Karen Butt 提供宝贵的评论和建议。

2. Preliminaries

2.1. 双曲群、度量与类距离函数。设 Γ 是一个群。回忆一下， Γ 上的伪度量 d 称为 δ-双曲的（$\delta \ge 0$），如果

$$(x|y)_z^d \ge \min\{(x|w)_z^d, (y|w)_z^d\} - \delta \text{ for all } x, y, z, w \in \Gamma$$

其中

$$(x|y)_z^d = \frac{1}{2}(d(x,z) + d(z,y) - d(x,y)) \text{ for } x, y, z \in \Gamma$$

是 Gromov 积。若伪度量 d 是 δ-双曲的（对某个 δ），则称其为双曲的。在本文中， Γ 将是一个非初等双曲群：一个非虚拟循环的有限生成群 Γ，满足在 Γ 上由有限对称生成集 S 所确定的任意字度量d_S 都是双曲的。我们用 D_Γ 表示 Γ 上满足以下条件的伪度量集合：它们是双曲的、拟等距于某个有限生成集对应的字度量，并且具有 Γ-不变性。

如果存在τ、 $C > 0$ 使得下式成立，我们就称 Γ 上的两个伪度量 d、 d_* 粗略相似：

$$|d(x,y) - \tau d_*(x,y)| \le C \quad \text{for all } x, y \in \Gamma.$$

如果 d 和 d_* 在 $\tau = 1$ 下粗略相似，我们称它们粗等距。 $d \in \mathsf{D}_\Gamma$ 的稳定平移长度定义为

$$\ell_d[x] := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(o, x^n) \text{ for } [x] \in \mathbf{conj}, \tag{2.1}$$

根据次可加性，该定义是良定义的。我们将 d、$d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$ 的膨胀定义为

$$\mathrm{Dil}(d, d_*) = \sup_{[x]\in \mathbf{conj}'} \frac{\ell_d[x]}{\ell_{d_*}[x]}.$$

那么，Γ 上的度量结构空间就是 D_Γ中粗相似等价类的集合 $\mathscr{D}_\Gamma$，而 $\mathscr{D}_\Gamma$ 上的对称 Thurston 距离定义为

$$\Delta([d],[d_*]) = \log\left(\mathrm{Dil}(d, d_*)\mathrm{Dil}(d_*, d)\right).$$

定义 2.1. 令 D_Γ 为 Γ 上所有左不变伪度量的集合，这些伪度量具有非常值的平移长度函数，并且存在 $\lambda > 0$和 $d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，使得对于所有 x、$y \in \Gamma$，均满足 $(x|y)_o^d \le \lambda(x|y)_o^{d_*} + \lambda$。我们记 $\overline{\mathscr{D}}_\Gamma$ 为 D_Γ 关于粗相似等价关系的商集。

文献 [12, 引理 6.3] 证明了 $\mathcal{D}_\Gamma$ 中的元素是双曲伪度量。D_Γ 中伪度量的稳定平移长度定义同式（2.1）。在 [12, 定理 1.6] 中证明了以下作用在 $\overline{\mathscr{D}}_\Gamma$中诱导出点。

(1) 对有限对称生成集在锥化 Cayley 图上的作用，其中我们将有限个无限指数拟凸子群锥化。(2) 具有无限指数拟凸顶点稳定子的非平凡 Bass-Serre 树作用。(3) 在 $\mathbb{R}$-树上的非平凡小作用，其中 Γ 是曲面群或自由群。

与这些作用对应的伪度量不一定是 proper 的，即给定 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$，可能存在 $T > 0$，使得集合 $\{x \in \Gamma : d(o, x) \le T\}$ 是无限的。

2.2. 曼哈顿曲线。其中一项我们使用的关键工具是曼哈顿曲线。给定一对伪度量 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，其曼哈顿曲线定义为凸集的边界

$$\mathcal{C}^M_{d_*/d} = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{x\in\Gamma} e^{-ad_*(o,x)-bd(o,x)} < \infty\right\}. \tag{2.2}$$

我们通过函数 $\theta_{d_*/d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对该曲线进行参数化：对于固定的 $a \in \mathbb{R}$, $\theta_{d_*/d}(a)$ 是式（2.2）中级数在 b 变化时的收敛横坐标。在 [14] 以下 $\theta_{d_*/d}$ 的性质已得到证明。

定理 2.2。对于 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，我们有以下结论：

(1) $\theta_{d_*/d}$ 是凸的，且 C^1（即连续可微）；(2) $\theta_{d_*/d}$经过点 $(0, v_d)$ 和 $(v_{d_*}, 0)$，并且当且仅当 d, d_* 粗略相似时，它在这两点之间是一条直线；(3) 我们有

$$-\theta'_{d_*/d}(v_{d_*}) \le \frac{v_d}{v_{d_*}} \le -\theta'_{d_*/d}(0)$$

且当且仅当 d 和 d_* 粗略相似时，两个等式同时成立；并且，

(4) d、d_* 粗略相似，当且仅当它们具有成比例的标记长度谱。

在第（3）点中，我们可以表示为

$$-\theta'_{d_*/d}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\#\{x\in\Gamma : d(o,x)\le T\}} \cdot \sum_{x:d(o,x)\le T} \frac{d_*(o,x)}{T} =: \tau(d_*/d)$$

并将 $\tau(d_*/d)$ 称为 d_*、d 的交数。根据曼哈顿曲线的定义可知，$\theta^{-1}_{d_*/d} = \theta_{d/d_*}$，因此我们有 $-\theta'_{d_*/d}(v_d) = (-\theta'_{d/d_*}(0))^{-1} = \tau(d/d_*)^{-1}$.

在某些情况下，例如对于成对的字度量，我们可以进一步说明 $\theta_{d_*/d}$ 的正则性（见 [13]）。为了证明我们的定理，我们需要改进上述第（1）点和第（2）点。更确切地说，我们需要知道：当且仅当 d、d_* 不粗略相似时，$\theta_{d_*/d}$ 才是全局严格凸的。我们利用 [12] 中的思想证明这一点。

命题 2.3. 设伪度量为 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$。当且仅当 d, d_* 不粗略相似时，曼哈顿曲线 $\theta_{d_*/d}$ 处处严格凸。特别地，$\theta_{d_*,d}$ 要么是直线，要么处处严格凸。

证明。我们通过逆否命题进行论证。设曼哈顿曲线 $\theta_{d_*/d}$ 并非在其整个定义域上严格凸。由于这条曲线 C^1 且为凸曲线，它必定包含一条线段；设该线段位于区间 $[a,b]$ 上，其中$a < b \in \mathbb{R}$。根据 [12, 命题 4.1]，对于每个 $t \in [a,b]$，都存在一个伪度量 $d_t \in \mathrm{D}_\Gamma$，与 $td_* + \theta_{d_*/d}(t)d$之间的距离有界。于是，关于这一对 d_a, d_b 的曼哈顿曲线 $\theta_{a,b}$在区间 $[0,1]$ 上是一条直线，因此根据 [14, 定理 1.1]，d_a 与 d_b粗略相似。这意味着 d 与 d_* 粗略相似，因此$\theta_{d_*/d}$ 是一条直线。□

3. Marked length spectra on subsets

本节将证明定理 1.4 和 1.5。我们首先定义 $\beta(d, d_*)$，它将是这些结果中出现的相关常数。

定义3.1. 对于 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，我们定义

$$\beta(d,d_*) = v_d \sup_{t\in[0,1]} (1 - t - \theta_{v_{d_*}d_*/v_d d}(t)) = \sup_{t\in[0,v_{d_*}]} \left(v_d - \frac{v_d}{v_{d_*}} t - \theta_{d_*/d}(t) \right).$$

上面的第二个等式直接由曼哈顿曲线的定义得到。我们可以将 $\beta(d, d_*)$ 理解为量化 $\theta_{d_*/d}$ 在区间 $(0, v_{d_*})$ 上的凸性程度。

引理 3.2. 给定 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，有 $\beta(d, d_*) = 0$ 当且仅当 d 和 d_* 粗略相似。

证明。由于 $\theta_{v_{d_*}d_*/v_d d}$ 是凸的，并且经过 (0,1) 和 (1,0)，我们看到，对于所有 $t \in [0,1]$，$\beta(d, d_*) = 0$ 当且仅当 $\theta_{v_{d_*}d_*/v_d d}(t) = 1 - t$。根据定理 2.2，当且仅当 d 和 d_* 粗略相似时，这一条件成立。□

由定理 2.2 和命题 2.3 可知，对于一对不粗略相似的伪度量 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，其指数增长率为 1，存在唯一的解 $\xi \in (0,1)$，满足 $\theta'_{d_*/d}(\xi) = -1$。

定义 3.3。给定一对不粗略相似的伪度量 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$，其指数增长率为 1，我们将 $\xi(d_*/d) \in (0,1)$ 定义为满足 $\theta'_{d_*/d}(\xi(d_*/d)) = -1$ 的唯一数。我们还定义

$$\alpha(d_*/d) = \xi(d_*/d) + \theta_{d_*/d}(\xi(d_*/d)).$$

事实证明，$\alpha(d_*/d)$ 关于 d 和 d_*是对称的。α和 β 之间的关系由下一个引理给出。

引理 3.4. 假设 d、$d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$ 的指数增长率均为 1，且不粗略相似。则以下恒等式成立：

(1) $\alpha(d_*/d) = \xi(d_*/d) + \xi(d/d_*) = \alpha(d/d_*)$；以及，
(2) $\beta(d, d_*) = 1 - \alpha(d_*/d)$。

证明。（1）回忆一下，$\xi(d_*/d)$ 满足 $\theta'_{d_*/d}(\xi(d_*/d)) = -1$。此外，根据曼哈顿曲线的定义，注意到 θ_{d/d_*} 是 $\theta_{d_*/d}$的反函数。特别地，如果我们将点 $(\xi(d_*/d)\theta_{d_*/d}(\xi(d_*/d)))$ 关于直线 $y = x$进行反射，就得到 $(\xi(d/d_*)\,\theta_{d/d_*}(\xi(d/d_*)))$。这意味着 $\theta_{d/d_*}(\xi(d/d_*)) = \xi(d_*/d)$，并且 $\alpha(d/d_*) = \xi(d/d_*) + \xi(d_*/d)$，正如所要求的。

(2) 由于 $\theta_{d_*/d}$ 是凸的，且 C^1，我们看到 $f(t) = 1 - t - \theta_{d_*/d}(t)$ 在 $f'(t) = 0$时达到最大值，这恰好是在 $t = \xi(d_*/d)$ 时。此时我们得到 $f(\xi(d_*/d)) = 1 - \alpha(d_*/d)$。□

注记 3.5. 上述引理表明，若 d, d_* 的指数增长率为 1，则 $\beta(d, d_*) = \beta(d_*, d)$。

‾定理 *1.4*的证明。取两个伪度量 $d, d_* \in \mathcal{D}_\Gamma$。由于 $v_{\widehat{d}}d$ 对于每个 ‾D $d \in$，其指数增长率均为 1，因此不失一般性，我们可以假设 $_\Gamma$。在这些假设下，根据引理 3.2，条件 (1) 和 (2) 等价。

对于定理的第二个断言，假设 d 和 d_* 不粗略相似。应用命题 2.3 可知，这意味着曼哈顿曲线 $\theta_{d_*/d}$ 处处严格凸。对于上述的 $\alpha = \alpha(d_*/d)$ 和 $\xi = \xi(d_*/d)$，我们在 Γ 上定义如下伪度量

$$d_\xi(x,y) = \xi d_*(x,y) + \theta_{d_*/d}(\xi)d(x,y) = \alpha d(x,y) + \xi(d_*(x,y) - d(x,y))$$

对于 x、$y \in \Gamma$。根据 [32, 引理 4.1]，我们有 $d_\xi \in \mathrm{D}_\Gamma$。此外，根据命题 2.3，我们必然有 $\alpha(d_*/d) < 1$。事实上，曼哈顿曲线 $\theta_{d_*/d}$ 严格凸，并且经过 (0, 1) 和 (1, 0)，因此在 (0,1) 上严格低于直线 $s(t) = 1-t$。根据曼哈顿曲线的定义，我们看到 d_ξ 的指数增长率为 1。现在假设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 非递减，并且满足 $f(t) = o(t)$，其中 $t \to \infty$。如果 $x \in \Gamma$ 和 $T > 0$ 满足 $d(o,x) \leq T$ 且 $|d(o,x) - d_*(o,x)| \leq f(d(o,x))$，那么 $d_\xi(o,x) \leq \alpha T + \xi f(T)$，于是我们得到

$$\#\{x \in \Gamma : d(o,x) \leq T, |d(o,x) - d_*(o,x)| \leq f(d(o,x))\} \leq \#\{x \in \Gamma : d_\xi(o,x) \leq \alpha T + \xi f(T)\} = O(e^{\alpha T + \xi f(T)})$$

如 $T \to \infty$。由 Gromov双曲性，存在一个常数 $C' > 0$，它只取决于 d 和 d_*，使得对于任意 $[x]$ ∈共轭类，都存在 $y \in [x]$，使以下两式均成立

$|\ell_d[x]-d(o,y)|\le C'$ 以及 $|\ell_{d_*}[x]-d_*(o,y)|\le C'$ 成立（例如参见 [14, 引理 3.2]）。由此可得

$$\#\{[x]\in \mathbf{conj}:\ell_d[x]\le T,\ |\ell_d[x]-\ell_{d_*}[x]|\le f(\ell_d[x])\}=O(e^{\alpha T+\xi f(T)}).$$

由此，经过重新排列并应用引理 3.4，我们看到，如果在集合 $E\subset$共轭类 上，ℓ_d 与 ℓ_{d_*} 之间的距离受一个在 ℓ_d上次线性增长的函数控制，那么 E 相对于 d 的指数增长率至多为 $1-\beta(d_*,d)$，即

$$v_d(E)\le 1-\beta(d,d_*).$$

这证明了第二个断言，因而定理得证。 □

注意，在定理1.4 的证明中，我们还确立了以下结果。

定理 3.6。设 Γ 是一个非初等双曲群，β 是上文定义的函数。假设 $d,d_*\in \mathrm{D}_\Gamma$ 是两个指数增长率分别为 $v_d,v_{d_*}>0$ 的伪度量。那么以下条件等价：

(1) d 与 d_* 粗略不相似；且 (2) $\beta(d,d_*)>0$。

此外，当这两个条件之一（因而也就是两者）成立时，我们有：

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\left(\#\{x\in U:d(o,x)\le T\}\right)\le v_d-\beta(d,d_*)$$

对于任意满足 $f(t)=o(t)$（当 $t\to\infty$ 时）的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$，以及任意满足对所有 $x\in U$，$|v_d d(o,x)-v_{d_*}d_*(o,x)|\le f(d(o,x))$ 的子集$U\subset\Gamma$。

现在我们将注意力转向定理 1.5。回顾引言中的 $\overline{\beta}$ 定义。

定义 3.7。我们通过如下设定，将 $\beta:\mathrm{D}_\Gamma\times\mathrm{D}_\Gamma\to\mathbb{R}$ 扩展到 $\overline{\beta}:\mathscr{D}_\Gamma\times\mathscr{D}_\Gamma\to\mathbb{R}$：

$$\overline{\beta}([d],[d_*])=\frac{\beta(d,d_*)}{v_d}=\beta(v_d d,v_{d_*}d_*).$$

注意，$\overline{\beta}$ 定义良好：若 d 和 d' 粗略相似，则 $v_d d$ 和 $v_{d'}d'$ 粗等距，因此对于任意 $d_*\in\mathrm{D}_\Gamma$，$\beta(v_d d,v_{d_*}d_*)=\beta(v_{d'}d',v_{d_*}d_*)$ 且 $\beta(v_{d_*}d_*,v_d d)=\beta(v_{d_*}d_*,v_{d'}d')$。

引理 3.8. 假设当 $n\to\infty$ 时，$[d_n]\to[d]$ in $(\mathscr{D}_\Gamma,\Delta)$，并且对于每个 $n\ge 1$，d_n、d、$d_*\in\mathrm{D}_\Gamma$ 的指数增长率均为 1。那么，θ_{d_*/d_n} 和 θ_{d_n/d_*} 在紧集上一致收敛于 $\theta_{d_*/d}$ 和 θ_{d/d_*}，分别成立。

证明。根据 [12, 定理 1.1]，存在序列 $C_{0,n}$、$C_{1,n}$、$D_n>0$，使得当 $n\to\infty$ 时，$C_{0,n}$、$C_{1,n}\to 1$，且

$$C_{0,n}d(o,x)-D_n\le d_n(o,x)\le C_{1,n}d(o,x)+D_n\quad\text{for all } x\in\Gamma,n\ge 1.$$

现在注意，对于 a、$b\in\mathbb{R}$，量 $\exp(-ad_*(o,x)-bd_n(o,x))$ 要么上界为 $\exp(-ad_*(o,x)-bC_{0,n}d(o,x)+bD_n)$、下界为 $\exp(-ad_*(o,x)-bC_{1,n}d(o,x)-bD_n)$，要么反之，具体取决于 b 的符号。在这两种情况下，根据曼哈顿曲线的定义可得

$$|\theta_{d_*/d_n}(a)-\theta_{d_*/d}(a)|\le\max(|C_{0,n}^{-1}-1|,|C_{1,n}^{-1}-1|)|\theta_{d_*/d}(a)|$$

并且我们看到，θ_{d_*/d_n} 在紧集上一致收敛于 $\theta_{d_*/d}$。同样的方法还表明，θ_{d_n/d_*} 在紧集上一致收敛于 θ_{d/d_*}，证明完毕。□

定理的证明*1.5*。根据定义

$$\overline{\beta}([d],[d_*]) = \sup_{t\in[0,1]} (1 - t - \theta_{v_* d_*/v_d d}(t)).$$

根据上述说明，我们知道 $\overline{\beta}$ 是良定义的，并由备注3.5可知，它关于各变量对称，这就证明了 (1)。

为证明 (2)，设 $[d_n] \to [d]$ in $(\mathscr{D}_\Gamma, \Delta)$ as $n \to \infty$。不失一般性，可以假设每个 d, d_*, d_n 的指数增长率均为 1。由引理 3.8 可知，θ_{d_*,d_n} 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $\theta_{d_*/d}$，因此

$$\overline{\beta}([d_n],[d_*]) = \sup_{t\in[0,1]} (1 - t - \theta_{d_*/d_n}(t)) \to \sup_{t\in[0,1]} (1 - t - \theta_{d_*/d}(t)) = \overline{\beta}([d],[d_*])$$

当 $n \to \infty$ 时。

最后，为证明 (3)，我们固定两个指数增长率为 1 的伪度量 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$。由曼哈顿曲线 $\theta_{d_*/d}$的严格凸性可知，直线$s_1(t) = 1 - \mathrm{Dil}(d_*, d)t$和 $s_2(t) = \mathrm{Dil}(d, d_*)^{-1} - \mathrm{Dil}(d, d_*)^{-1}t$在 (0, 1) 上位于 $\theta_{d_*/d}$下方。特别地，我们有 $\beta(d, d_*) \le \sup^{t\in[0,1]}(1 - t - F(t))$，其中

$$F(t) = \max(1 - \mathrm{Dil}(d_*, d)t, \mathrm{Dil}(d, d_*)^{-1} - \mathrm{Dil}(d, d_*)^{-1}t).$$

由此可知，因为 s_1 和 s_2 的图像相交于

$$\left(\frac{\mathrm{Dil}(d, d_*) - 1}{\mathrm{Dil}(d, d_*)\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1}, \frac{\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1}{\mathrm{Dil}(d, d_*)\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1}\right),$$

that

$$\beta(d, d_*) \le \frac{(\mathrm{Dil}(d, d_*) - 1)(\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1)}{\mathrm{Dil}(d, d_*)\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1} = \frac{(\mathrm{Dil}(d, d_*) - 1)(\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1)}{e^{\Delta([d],[d_*])} - 1}.$$

为了完成证明，我们注意到

$$\begin{aligned}(\mathrm{Dil}(d, d_*) - 1)(\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1) &\le \mathrm{Dil}(d, d_*)\mathrm{Dil}(d_*, d) - 2\sqrt{\mathrm{Dil}(d, d_*)\mathrm{Dil}(d_*, d)} + 1 \\ &= \left(e^{\frac{1}{2}\Delta([d],[d_*])} - 1\right)^2\end{aligned}$$

根据算术-几何平均不等式。严格凸性保证，当且仅当 d 和 d_* 不粗略相似时，该不等式才是严格的。□

第（3）部分随后表明，如果 d、$d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$ 不粗略相似，且具有指数增长率 1，那么对于所有 $t \in (0, 1)$，我们都有

$$\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\Delta([d],[d_*])} + 1} < t + \theta_{d_*/d}(t) < 1 \quad \text{and} \quad \alpha(d_*/d) \ge \frac{2}{e^{\frac{1}{2}\Delta([d],[d_*])} + 1}.$$

这为 Schwartz 和 Sharp[37], Dal'bo [23] 以及 Cantrell [11] 的相关渐近性的指数增长率提供了关于对称化 Thurston 度量的估计。

4. Achieving the growth rate for word metrics and automorphisms

本节证明，对于由 β 定理 1.4 中的自同构相关联的度量对，增长率常数 Γ是最优的；更一般地，对于满足其增长率约束的字度量，这一结论同样成立。若 $S \subset \Gamma$ 是一个有限的对称生成集，其字度量为 d_S，则记 $\ell_S = \ell_{d_S}$ 以及 $v_S = v_{d_S}$。我们得到如下结果。

定理 4.1. 设 Γ 是一个非初等双曲群。考虑 Γ 的两个有限对称生成集 S、S_*，且 v_S/v_{S_*} 是有理数。那么我们有

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{[x] \in \mathbf{conj} : \ell_S[x] \le T, v_S\ell_S[x] = v_{S_*}\ell_{S_*}[x]\}) = v_S - \beta(d_S, d_{S_*}).$$

定理 4.1 的证明需要热力学形式主义中的技巧，并使用双曲群的 Cannon 自动结构。为了避免在此处定义所有这些对象，我们请读者参阅 [11]。在整个证明过程中，我们将沿用 [11]中的术语和记号。我们需要以下引理，它在第 6.1 小节中也会用到。

引理 4.2. 给定一个具有指数增长率 v_d 的 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$，存在 $C \ge 0$ 使得以下结论成立。对于任意 $[x] \in$ 共轭类和 $T > 0$，我们有

$$\log(\#\{y \in [x] : d(o,y) \le T\}) \le \log(\ell_d[x] + C) + \frac{v_d(T - \ell_d[x])}{2} + C.$$

证明。假设 d 是 α-粗测地的。我们将用到以下事实：当 d 由双曲测地空间上的几何作用诱导时，这些事实是众所周知的，其证明也可推广到粗测地情形。存在常数 $C_0, C_1, C_2, \alpha_0 \ge 0$，使得对于任意 $[x] \in$共轭类：

(1) 存在 $x_0 \in [x]$，使得 $|d(o,x_0) - \ell_d[x]| \le C_0$ [14, 引理 3.2]；(2) 若 $x_0 \in [x]$ 如第 (1) 项所述，且 $\gamma \subset \Gamma$ 是连接o 与 x_0的一条 α-粗测地线，则 $\widehat{\gamma} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} x_0^k\gamma$ 是一条 α_0-粗测地线，并且在 x_0下不变（注意 $\#\gamma \le \ell_d[x] + \alpha + C_0$）；(3) 若 $x_0 \in [x]$, γ 和 $\widehat{\gamma}$ 如第 (1) 和第 (2) 项所述，则对于任意 $a \in \Gamma$，有 $|d(x_0a, a) - 2d(a,\widehat{\gamma}) - \ell_d[x]| \le C_1$（参见引理 5.10]）；并且 (4) 对所有 $R > 0$ 和 $u \in \Gamma$，有 $\log(\#y \in \Gamma : d(u,y) \le R) \le v_dR + C_2$[18, 推论 6.8]。

现在我们开始证明该引理，因此固定 $[x] \in$共轭类并设置$\ell = \ell_d[x]$。令 $x_0 \in [x]$、γ 和 $\widehat{\gamma}$ 满足上述条目 (1)-(3)。如果 $y = a^{-1}x_0a \in [x]$满足 $d(o,y) = d(x_0a, a) \le T$，那么 $d(a,\widehat{\gamma}) \le \frac{C_1}{2} + (T-\ell)_2$。将 a替换为某个 k对应的 $x_0^k\widehat{a}$后，我们可以假设，对于某个 $u \in \gamma$，$d(a,u) \le \frac{C_1}{2} + (T-\ell)_2$。由

条目 (4) 我们得出

$$\begin{aligned}\log(\#\{y\in[x]:d(o,y)\le T\}) &\le \log\left(\#\left\{a\in\Gamma:d(a,\gamma)\le\frac{C_1}{2}+\frac{(T-\ell)}{2}\right\}\right)\\ &\le \log\left(\sum_{u\in\gamma}\#\left\{a\in\Gamma:d(a,u)\le\frac{C_1}{2}+\frac{(T-\ell)}{2}\right\}\right)\\ &\le \log(\#\gamma)+v_d\left(\frac{C_1}{2}+\frac{(T-\ell)}{2}\right)+C_2\\ &\le \log(\ell+\alpha+C_0)+v_d\left(\frac{C_1}{2}+\frac{(T-\ell)}{2}\right)+C_2.\end{aligned}$$

□

定理 4.1 的证明。 不妨假设 d_S,d_{S_*} 粗略相似。 根据 [10] 中的引理 3.8 和例 3.9，我们可以为 (Γ,S) 找到一种 Cannon 编码，其对应的移位空间为 (Σ,σ)，并有一个 Hölder 连续函数 $r_*:\Sigma\to\mathbb{R}$ 满足以下条件：若 $z=(z_1,z_2,\dots,z_n,z_1,\dots)\in\Sigma$ 是一个周期为 n 的周期轨道，那么 r_* 在 z 上的第 n 个伯克霍夫和的值为 $\ell_{S_*}[x]$，其中 $x\in\Gamma$ 是将有限路径 $z_1,z_2,\dots,z_n$ 中的标记相乘得到的群元素。根据构造， r_* 在 2-柱集上为常数，且取值于 $\mathbb{Z}$。注意，根据 v_{S_*}/v_S 为有理数这一假设，函数 $v_{S_*}r_*/v_S-1$ 的取值属于 $(1/p)\mathbb{Z}$，其中 $p\in\mathbb{Z}$。定义 $\overline{r}=p(v_{S_*}r_*/v_S-1)$，使得 $\overline{r}$ 的取值属于 $\mathbb{Z}$。

现在我们固定编码中的一个字词极大分支 C。我们的目标是将 Pollicott 和 Sharp 的结果 [34, 定理 1] 应用于二元组（$\Sigma_{\mathcal{C}}$，$\overline{r}$）。为此，我们需要验证以下两个条件：

（1）函数 $\overline{r}$ 不与常值函数上同调；以及（2）存在一个定义在$\Sigma_{\mathcal{C}}$ 上的全支撑移位不变概率测度 μ，使得

$$\int\overline{r}\,d\mu=0.$$

注意，（1）与[34]中写出的条件略有不同。不过，通过检查证明可知，这已经足够。对于第一点：如果 $\overline{r}$ 与常值函数上同调，那么存在 $\tau\in\mathbb{R}$，使得对于所有$[x]\in$，$\ell_{S_*}[x]=\tau\ell_S[x]$ 共轭类由 [11, 推论 3.6] ；而 d_S与d_{S_*} 粗略相似，这正是我们假设不成立的情形。第二点需要多做一些工作。根据 [11, 引理 3.3], ，对于二元组 d_S、d_{S_*}，曼哈顿曲线 $\theta_{S_*}/_S(t)$ 由压力函数 $t\mapsto\mathrm{P}_{\mathcal{C}}(-tr_*)$ 给出。我们注意到，[11, 引理 3.3] 是针对强双曲度量 d 和字度量 d_S写出的，但同样的论证也适用于我们的字度量二元组 d_S、d_{S_*}。此外，由于 $\theta'_{S_*}/_S(0)\le-v_S/v_{S_*}$且$\theta'_{S_*}/_S(v_S)\ge-v_S/v_{S_*}$，我们看到必然存在一点 $\xi\in(0,v_S)$，使得 $\theta'_{S_*}/_S(\xi)=-v_S/v_{S_*}$。由热力学形式主义中的标准事实可知

$$\int_{\Sigma_{\mathcal{C}}}-r_*\,d\mu_{-\xi r_*}=\frac{d\mathrm{P}_{\mathcal{C}}(-tr_*)}{dt}\Big|_{t=\xi}=\theta'_{S_*/S}(\xi)=-v_S/v_{S_*}$$

其中 $\mu_{-\xi r_*}$ 是 $-\xi r_*$的平衡态。经过代数变形后，这就推出了结论 (2)。

现在我们可以应用 [34, 定理 1]，推得存在 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$C > 0$和 $\beta' > 0$，使得

$$\#\{z \in \Sigma : \sigma^{mn}(z) = z, \overline{r}^{mn}(z) = 0\} \geq Ce^{\beta' mn}(mn)^{-3/2} \quad \text{for each } n \geq 1.$$

我们注意到，Pollicott 和 Sharps 的结果是针对混合有限型子移位表述的，而我们的子移位 $\Sigma_{\mathcal{C}}$ 可能仅仅是传递的。对我们而言这并不是问题，因为我们可以将该结果应用于 $(\Sigma_{\mathcal{C}}, \sigma^p)$，其中 p 是该分支的周期。通过检查[34] 中的证明，并使用 [11, 引理 3.3]，我们看到β'恰好就是第 3 节中引入的值 $\alpha(d_S, d_{S_*})$（更多细节见 [38]）。现在注意到，$\Sigma_{\mathcal{C}}$ 中的每个周期轨道都对应于 Γ中的一个共轭类。此外，根据引理 4.2，存在一个 $C > 0$ （与 T无关），使得 ℓ_S 中长度为 T 的每个共轭类至多有 $CT+C$ 个相应的$\frown$周期轨道位于 $\Sigma_{\mathcal{C}}$中。由此我们推出，存在 $C > 0$ 和 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得

$$\#\{[x] \in \mathbf{conj} : \ell_S[x] = mn, v_S \ell_S[x] = v_{S_*} \ell_{S_*}[x]\} \geq \widehat{C} e^{mn\alpha(d_S, d_{S_*})}(mn)^{-5/2}$$

对所有 $n \geq 0$。由引理 3.4，这给出了所需的下界，并完成了证明。□

备注 4.3. 我们认为，可以合理地猜想：如果将条件 $v_S \ell_S[x] = v_{S_*} \ell_{S_*}[x]$ 放宽为对某个固定的 $\epsilon > 0$，则这一结果对所有双曲群以及有限生成集对 S, S_* 都成立。这个问题与收缩区间上的大偏差有关。我们指出，对于满足独立性假设的强双曲度量对，仿照 [11, 定理 1.10]的证明，可以证明这一点。

我们立即得到以下推论。给定有限对称生成集 $S \subset \Gamma$ 以及自同构 $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，记 $\beta_S(\phi, \varphi) := \beta(d_S^{\phi}, d_S^{\varphi})$，其中 $d_S^{\phi}(x, y) = |\phi(x)^{-1}\phi(y)|_S$，且 $d_S^{\varphi}(x, y) = |\varphi(x)^{-1}\varphi(y)|_S$。注意，对所有 S 和 ϕ，$d_S^{\phi} = d_{\phi^{-1}(S)}$ 以及 $v_{\phi^{-1}(S)} = v_S$。

推论 4.4. 设 Γ 是一个配备有限对称生成集 S 的非初等双曲群。对于任意两个自同构 ϕ、$\varphi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，我们有

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log(\#\{[x] \in \mathbf{conj} : \ell_S[\phi(x)] \leq T, \ell_S[\phi(x)] = \ell_S[\varphi(x)]\}) = v_S - \beta_S(\phi, \varphi).$$

备注 4.5. 该推论补充了 [15] 和 [29] 中关于自由群的结果，展示了对于自同构对而言最大的非谱刚性子集。

5. 标记长度谱支配

在本节中，我们证明定理 1.6 和 1.7。对于这两个结果，关键要素是下面的引理，该引理将通过调整 [14, 定理 423]的证明而得到。

引理 5.1. 设 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$ 和 $E \subset$ 共轭类，使得 $v_d(E) = v_d$。假设 $d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$ 满足：存在 $\eta_2 \geq \eta_1 > 0$ 和一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得当 $t \to \infty$ 时，$f(t) = o(t)$，并且

$$\eta_1 \ell_d[x] - f(\ell_d[x]) \leq \ell_{d_*}[x] \leq \eta_2 \ell_d[x] + f(\ell_d[x])$$

对所有 $[x] \in E$ 均成立。于是我们有

$$\eta_1 \le \tau(d_*/d) \le \eta_2.$$

证明。设 d、$d_* \in \mathsf{D}_\Gamma$、$E \subset$ 共轭类，且 η_1、η_2 满足引理中的假设。给定 $R > 0$，记 $\mathsf{C}(d, n, R) = \{[x] \in$ 共轭类 $: |\ell_d[x] - n| \le R\}$。于是，对于任意固定的、充分大的 $R > 0$，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\#(E \cap \mathcal{C}(d, n, R))\right) = v_d. \tag{5.1}$$

此外，考虑函数

$$I(s) = \theta_{d_*/d}(0) + \sup_{t\in\mathbb{R}}\{ts - \theta_{d_*/d}(-t)\},$$

它在区间 $(\mathrm{Dil}(d, d_*)^{-1}, \mathrm{Dil}(d_*, d))$上有限且下半连续。由命题 2.3 可知 $I(s) \ge 0$，且仅当 $s = \tau(d_*/d)$时取等号。通过用于证明 [14, 定理 4.23] 的相同证明，我们可以证明以下结果。对于任意固定的 R 充分大的

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\#\left\{[x] \in \mathcal{C}(d, n, R) : \frac{\ell_{d_*}[x]}{\ell_d[x]} \in V\right\}\right) \le v_d - \inf_{s\in V} I(s) \tag{5.2}$$

对于任意闭集 $V \subset \mathbb{R}$。该结果 [14, 定理 4.23] 与 (5.2) 类似，只是计数针对群元素和位移函数进行，而不是针对共轭类和对应的平移长度函数进行。为证明上述结果，只需结合命题 3.1、推论 2.8 以及 [14]中的定理 4.23 的证明即可。细节留给读者。

现在假设 $\tau(d_*/d) \notin [\eta_1, \eta_2]$，并选择一个闭区间 $V = [\eta_1 - \epsilon, \eta_2 + \epsilon]$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小，使得 $\tau(d_*/d) \notin V$。根据对 E 所作的假设，我们有

$$\frac{\ell_{d_*}[x]}{\ell_d[x]} \in V \text{ for all by finitely many } [x] \in E.$$

由（5.2）可知，E 相对于 d 的增长率严格小于 v_d。这与（5.1）直接矛盾，因此我们得出 $\tau(d_*/d) \in [\eta_1, \eta_2]$。□

现在我们继续证明定理 1.6 和 1.7。

定理 *1.6*的证明。令 d、$d_* \in \mathcal{D}_\Gamma$ 以及 $E \subset$ 共轭类 如定理陈述中所述。由引理 5.1 我们推出 $\tau(d_*/d) = 1$。同一引理还意味着$\tau(d/d_*) = 1$。事实上，注意到由于 d、d_* 是拟等距的，当交换 d和 d_* 时，定理中的条件（3）仍然成立。因此

$$\theta'_{d_*/d}(0) = -\tau(d_*/d) = -1 = -\tau(d/d_*)^{-1} = \theta'_{d_*/d}(v_d)$$

因此根据凸性，$\theta_{d_*/d}$ 在 $(0, v_d)$ 上是一条直线。因此根据定理 (3) 中的2.2，我们看到 d，d_* 是粗等距的，证明完毕。□

定理 *1.7*的证明。取 d、d_*、E和 f，如定理陈述中所述。我们希望推导出 $\mathrm{Dil}(d_*, d) \le 1$。

给定 $a<0$，存在一个伪度量 $d_a \in \mathrm{D}_\Gamma$，其与 $ad_* + \theta_{d_*/d}(a)d$ [12, 相差有界。命题 4.1]。根据假设 (2)，我们有

$$\ell_{d_*}[x] \le \ell_d[x] + f(\ell_d[x]) \quad \text{on } E. \tag{5.3}$$

现在需要考虑两种情形：
情形 1：$\theta_{d_*/d}(a) + a \le 0$ 对某个 $a<0$。根据 [12, 注记 4.14]，我们还有

$$0 < a\mathrm{Dil}(d_*, d) + \theta_{d_*/d}(a)$$

结合这两个不等式可得

$$0 < a\mathrm{Dil}(d_*, d) + \theta_{d_*/d}(a) \le a\mathrm{Dil}(d_*, d) - a = a(\mathrm{Dil}(d_*, d) - 1)$$

这意味着 $\mathrm{Dil}(d_*, d) < 1$，如所需。
情形 2：$\theta_{d_*/d}(x) + a > 0$ 对所有 $a<0$。在这种情况下，表达式 (5.3) 意味着

$$\ell_{d_*}[x] \le \frac{\ell_{d_a}[x]}{a + \theta_{d_*/d}(a)} + f_a(\ell_{d_a}[x])$$

对于所有 $[x] \in E$，其中 $f_a(t) = o(t)$ 为 $t \to \infty$，因此 $\tau(d_*/d_a) \le (a + \theta_{d_*/d}(a))^{-1}$由引理 5.1 和假设 (2) 得出。现在注意到，根据曼哈顿曲线的定义，量 $\theta_{d_*/d}(s)$ 和 $\theta_{d_*/d_a}(s)$ 满足以下方程

$$\theta_{d_*/d}(s + \theta_{d_*/d_a}(s)) = \theta_{d_*/d_a}(s)\theta_{d_*/d}(a) \quad \text{for each } s \in \mathbb{R}.$$

在 $s=0$ 处对该方程求导，得到以下表达式

$$\theta'_{d_*/d_a}(0) = -\left(a - \frac{\theta_{d_*/d}(a)}{\theta'_{d_*/d}(a)}\right)^{-1},$$

因此

$$\left(a - \frac{\theta_{d_*/d}(a)}{\theta'_{d_*/d}(a)}\right)^{-1} = -\theta'_{d_*/d_a}(0) = \tau(d_*/d_a) \le (a + \theta_{d_*/d}(a))^{-1}.$$

整理可得 $\theta'_{d_*/d}(a) \ge -1$。由于这对所有 $a<0$ 都成立，根据 [14,推论 3.3] 我们可以推出

$$\mathrm{Dil}(d_*, d) = -\lim_{a \to -\infty} \theta'_{d_*/d}(a) \le 1,$$

这就完成了第二种情况的证明，也完成了定理的证明。 □

6. Applications

本节将证明引言中提到的结果。

6.1. 由子群/子集得到的长度谱刚性。本小节中，我们证明推论1.8。正如我们在引言中提到的，子群$H < \Gamma$ 是余可 amenable的，当 Γ 在左陪集空间 $H\backslash\Gamma$ 上存在一个Γ-不变均值。例如，正规子群 $H \trianglelefteq \Gamma$ 是余可 amenable 的，当且仅当商群 Γ/H 是 amenable 的。特别地，换位子子群 $[\Gamma,\Gamma]$ 是余可 amenable 的。

在 [19, 定理 1.1], 中，Coulon、Dougall、Shapira 和 Tapie 给出了用指数增长率刻画余可 amenable 性质的方法。对于 Γ双曲的情形，可以表述如下：给定任意有限对称生成集 $S \subset \Gamma$ 及其字度量 $d = d_S$，子群 $H < \Gamma$ 是余可 amenable 的，当且仅当

$$v_d(H) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{x \in H : d(o,x) \le T\}) = v_d. \tag{6.1}$$

为了证明我们的推论，我们需要将 Γ 的子集的位移的指数增长率，与相应共轭类子集的平移长度的指数增长率联系起来。这一关系由下面的命题给出。

命题 6.1。设 $d \in \mathcal{D}_\Gamma$，且 $A \subset \Gamma$ 是一个在取共轭运算下封闭的集合。若 $[A] \subset$ 共轭类表示 A中元素的共轭类集合，则

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{y \in A : d(o,y) \le T\}) = v_d([A]). \tag{6.2}$$

证明。令 $v_d(A)$ 为（6.2）左端的极限。由于 A 在共轭运算下不变，根据引理 4.2 的证明中的第（1）项，我们得到 $v_d([A]) \le v_d(A)$。

对于反向不等式，我们考虑 $\epsilon > 0$，存在某个 $C_\epsilon > 1$ 使得

$$\#\{[x] \in [A] : \ell_d[x] < \ell + 1\} \le C_\epsilon e^{\ell(v_d([A])+\epsilon)}$$

对所有 $\ell \ge 0$。此外，根据引理 4.2，存在常数 $C \ge 0$，使得对于任意整数 $T > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\#\{y \in A : d(o,y) < T\} &= \sum_{\ell=0}^{T} \left(\sum_{[x]\in[A]:\ell\le\ell_d[x]<\ell+1} \#\{y \in [x] : d(o,y) < T\} \right) \\ &\le e^C \cdot (T + C) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{T} \#\{[x] \in [A] : \ell_d[x] < \ell + 1\} \cdot e^{v_d\left(\frac{T-\ell}{2}\right)} \right).\end{aligned}$$

此外，对于任意整数 $T > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{T} \#\{[x] \in [A] : \ell_d[x] < \ell + 1\} \cdot e^{v_d\left(\frac{T-\ell}{2}\right)} &\le C_\epsilon \cdot e^{v_d T/2} \cdot \sum_{\ell=0}^{T} e^{\ell(v_d([A])+\epsilon-v_d/2)} \\ &\le \kappa_\epsilon e^{T(v_d([A])+\epsilon)}\end{aligned}$$

对于某个 $\kappa_\epsilon > 1$，它仅取决于 ϵ、v_d 和 $v_d([A])$。结合这两个不等式，我们得到对于所有 $\epsilon > 0$，$v_d(A) \le v_d([A]) + \epsilon$，这就推出了所需的不等式。□

现在证明推论 1.8。

推论 1.8 的证明。设 $H < \Gamma$ 是一个余可和子群，并设 $E = \{[x] \in$共轭类 $: x \in H\}$。如果 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$ 是一个有限生成集的字度量，其指数增长率为 v_d，则由 (6.1) 可得 $v_d(H) = v_d$。此外，根据 [31,引理 5.1]，我们知道由字度量诱导的度量结构在 $(\mathscr{D}_\Gamma, \Delta)$ 中稠密。由于函数 $[d] \to v_d(H)/v_d$ 在 $(\mathscr{D}_\Gamma, \Delta)$ 上定义良好且连续，我们推得方程 (6.1) 对所有 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$ 都成立。结合命题 6.1，这一观察告诉我们，对于任意 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$，都有 $v_d(E) = v_d(H) = v_d$。最后，如果 $d, d_* \in \mathrm{D}_\Gamma$ 满足

$$d_*(o,x) \le d(o,x) + f(d(o,x))$$

对于所有满足 $x \in H$ 和 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 且 $f(t) = o(t)$ 作为 $t \to \infty$ 的情形，我们有

$$\ell_{d_*}[x] \le \ell_d[x]$$

对于所有 $[x] \in E$。结论随后由定理 1.6 和 1.7 得出。 □

注 6.2。 顺便指出，根据推论 1.8 的证明，我们可以推出：如果 Γ 是非初等双曲的，并且 α 是 Γ 中的一个同调类，其共轭类集合为 $[\alpha]$，那么对于任意具有指数增长率 $d \in \mathcal{D}_\Gamma$ 的 v_d，我们有

$$v_d([\alpha]) = v_d.$$

这部分拓展了 Adachi 和 Sunada 的一个结果 [1, 定理 1]，，他们证明了当 Γ 是紧流形的基本群，且 d 由具有 Anosov 测地流的黎曼度量诱导时，该结论成立。

迄今获得的结果可用于比较由 Γ 的自同构诱导的伪度量。给定 Γ and$d \in \mathrm{D}_\Gamma$ 的两个自同构 $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$，自然会问： ϕ and ψ 何时以相似的方式使 Γ 中的元素发生位移。一种理解方式是考察伪度量 $d^\psi(x,y) = d(\psi(x)\ \psi(y))$ 与 $d^\phi(x,y) = d\phi(x)\ \phi(y))$ 是否粗等距（即它们具有相同的标记长度谱）。在 Culler-Vogtmann 外空间的背景下，人们对这类问题已有广泛研究，见 [15], [29], [35]。我们的结果适用于这一背景，并给出各种长度谱刚性结果。例如，我们可以推出如下结论。设 ϕ, ψ 是自由群在 n 个生成元上的两个自同构 F_n。为 F_n 配备有限生成集 S，并令 $H = [F_n, F_n]$ 为换位子子群。对于 $T \ge 1$，令 H_T 表示 H 中 S 平移长度至多为 T 的元素的集合，即 $H_T = \{x \in H : \ell_S[x] \le T\}$。如果 $d_{\phi^{-1}}(S)$ 与 $d_{\psi^{-1}}(S)$ 不粗等距，那么上确界 $\sup_{x \in H_T} |\ell_S[\phi(x)] - \ell_S[\psi(x)]|$ 必须随 $T \to \infty$ 至少线性增长。

6.2. 体积刚性。 现在我们证明关于体积刚性的结果。我们从推论 1.9 的证明开始。

推论 1.9的证明。 根据 [21, 定理 1。1], 如果 $\ell_{\mathfrak{g}_*}[x] \le \ell_{\mathfrak{g}}[x]$ 对所有共轭类 $[x]$ 在 $\pi_1(S)$中成立，那么面积$(S,\ \mathfrak{g}_*) \le$ 面积$(S,\ \mathfrak{g})$。根据推论 1.8，如果不等式 $\ell_{\mathfrak{g}_*}[x] \le \ell_{\mathfrak{g}}[x]$ 在余可和子群（分别为同调类）上成立，那么它处处成立，我们就完成了证明。 □

在高维中也可以推导出类似的结果。例如，将上述相同的论证与 Guillarmou 和 Lefeuvre 的体积不等式 [26, 定理 2] 结合起来，可以得到定理 1.1。

在流形情形之外，我们可以在 Fuchsian 建筑的背景下恢复面积不等式 [5]。这类多边形二维复形支持局部 CAT(−1) 度量。当 X 是某个 Fuchsian 建筑关于组合自同构群的一个子群的商空间时，我们令 $\mathrm{M}^{neg}(X)$ 由 X 上所有（局部）负曲率的分片黎曼度量组成。对于这些商空间，我们可以推广 Constantine 和 Lafont [17, 定理 1.3] 的结果，并推导出以下结论。

推论 6.3。设 X 是某个 Fuchsian 建筑关于组合自同构群的一个子群的商空间，并假设该子群自由且余紧地作用。设 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_* \in \mathrm{M}^{neg}(X)$，并假设对于 $\pi_1(X)$ 的某个固定余可和子群（分别为同调类）中由元素代表的每个共轭类 $[x]$，都有 $\ell_{\mathfrak{g}_*}[x] \leq \ell_{\mathfrak{g}}[x]$。那么

$$\mathrm{Area}(X, \mathfrak{g}_*) \leq \mathrm{Area}(X, \mathfrak{g}).$$

最后，我们将结果应用于 Hitchin 表示的体积。设 S 是一个具有双曲基本群 Γ 的闭定向曲面，并固定 $m \geq 2$。如果将 Γ 表示到 $\mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$ 的表示定义为 m-Fuchsian，则它是从 Γ 到 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的 Fuchsian 表示与从 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 到 $\mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$ 的不可约表示的复合。一个 $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$ 表示称为 Hitchin 表示，如果它可以连续变形为一个 m-Fuchsian 表示。如果 ρ 是 Γ 的 Hitching 表示，那么我们可以在 Γ 上关联一个（非对称的）测地流 ω_ρ，称为 ρ 的 Liouville 流。除其他性质外，该流满足

$$i([x], \omega_\rho) = \log\left(\frac{\lambda_1(\rho(x))}{\lambda_m(\rho(x))}\right),$$

其中，$\lambda_1(A)$（分别地，$\lambda_m(A)$）表示 A 的某个特征值的最大（分别地，最小）模，$[x] \in$ 共轭类被视为 Γ 上相应的有理测地流，而 i 表示流 [4] 的 Bonahon 的交数。在 [9]，中，Hitchin 表示 ρ 的 Liouville 体积定义为

$$\mathrm{vol}_L(\rho) = i(\omega_\rho, \omega_\rho).$$

我们可以使用推论 1.8 来细化 Bridgeman、Canary、Labourie 和 Sambarino 关于 Liouville 流的体积刚性结果 [9, 定理 1。4]。

推论 *1.10* 的证明。设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$上的欧几里得范数。对于一个 Hitchin 表示 $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$，考虑非负函数$\backsim\psi^\rho$，$\psi^\rho$ 定义在 $\Gamma \times \Gamma$ 上，其定义为

$$\psi^\rho(x, y) = \log\|\rho(x^{-1}y)\|, \quad \widehat{\psi}^\rho(x, y) = \log\|\rho(y^{-1}x)\|.$$

由于 Hitching 表示是射影Anosov（即 1-支配的），其逆伴随表示也是射影Anosov。由 [12,引理 3.14] 可知，$d_\rho := \psi^\rho + \widehat{\psi}^\rho$ 实际上是一个度量 $d_\rho \in \mathrm{D}_\Gamma$。因此，若 ρ、ρ_* 是 Γ 的 Hitching 表示，且对于所有属于 x 的 λ_1，均有 $\rho_*(x) \leq \lambda_1(\rho(x))$

属于余可和子群 $H < \Gamma$，并且由于 H 在取逆运算下封闭，我们可推出

$$\ell_{d_{\rho_*}}[x] \le \ell_{d_\rho}[x]$$

对于每个 x 属于 H，因此对于每个 $[x] \in$ 共轭类 根据推论 1.8。结论随后由 [9,定理 1。4] 并注意到

$$\ell_{d_\rho}[x] = \log\left(\frac{\lambda_1(\rho(x))}{\lambda_m(\rho(x))}\right)$$

对于每个 $[x] \in$ 共轭类以及每个 Hitching 表示 ρ。

如果我们转而假设谱半径不等式对固定同调类中的所有 x 都成立，那么结论仍然成立。事实上，第 1.3 小节中的所有定理及其推论也都有针对成对投影 Anosov 表示的版本。也就是说，我们可以将 d、d_* 替换为 Anosov 表示 $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}_m(\mathbb{R})$ $\rho_* : \Gamma \to \mathrm{PSL}_{m_*}(\mathbb{R})$的对数范数函数。在这种情况下，谱半径的对数 log $\lambda_1(\rho(x))$、log $\lambda_1(\rho_*(x))$发挥稳定平移长度函数的作用。证明与 D_Γ 中的伪度量情形相同，因为对于这些双曲距离型函数，我们有关于曼哈顿曲线的良好理论 [13, 第 7 节3]。详细内容留给读者。□

6.3. 拟凸子群的增长率及其他内容。 在本小节中，我们应用上述结果研究拟凸子群的增长率。我们的主要结果是定理 6.5，由此我们可以从引言中推出定理 1.2 和 1.3 。首先回顾边界伪度量的概念 [12]。

定义 6.4。 Γ 上的（曼哈顿）边界伪度量空间是$\partial\mathrm{D}_\Gamma := \mathrm{D}_\Gamma/\mathrm{D}_\Gamma$。等价地，这是 D_Γ 中所有不与 D_Γ 中的伪度量拟等距的伪度量所构成的集合。

定理 6.5。给定 $\widehat{d} \in \partial\mathrm{D}_\Gamma$ 和 $L \ge 0$，令 $E = \{[x] \in$ 共轭类$: \ell_{\widehat{d}}[x] \le L\}$。那么，对于任意具有指数增长率 v_d 的 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$，我们有

$$v_d(E) < v_d.$$

该结果已经推出定理 1.3 ，因为对于 Γ （自由群或曲面群），在 $\mathbb{R}$-树上的小作用会在 $\partial\mathcal{D}_\Gamma$ [12, 定理 1.6 (3)]中诱导出伪度量。

在证明定理 6.5之前，我们推导出以下推论，该推论立即蕴含定理 1.2。

推论 6.6。设 Γ 是一个非初等双曲群，且 $d \in \mathrm{D}_\Gamma$ 是任意具有指数增长率 v_d 的伪度量。那么对于任意无限指标拟凸子群 $H < \Gamma$，我们有

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log(\#\{x \in H : d(o, x) \le T\}) < v_d.$$

推论 *6.6*的证明。 设 $d \in \mathcal{D}_\Gamma$ 以及 $H < \Gamma$ 是一个无限指数的拟凸子群。根据命题 6.1 和定理 6.5，只需构造一个伪度量 $\widehat{d} \in \partial\mathcal{D}_\Gamma$ ，使得 $H \subset A := \{x \in \Gamma : \ell_{\widehat{d}}[x] = 0\}$。为此，设 $S \subset \Gamma$ 是一个有限的对称生成集，并考虑

去锥化凯莱图 Cay(Γ, S, H)及其对应的图度量。如果$\widehat{d}$是 Γ 上的任意伪度量，由 Γ 在 Cay(Γ, S, H)上的作用诱导，那么$\widehat{d} \in \partial \mathsf{D}_\Gamma$，因为 H 是无限的且具有无限指数 [12, 命题 6.14]。此外，H在 Cay(Γ, S, H)上的作用由椭圆等距变换给出，因此 $H \subset A$。□

$\widehat{\ }$定理 6.5 的证明。令 $d \in \mathsf{D}_\Gamma$、$d \in \partial \mathsf{D}_\Gamma$ 和 E ⊂共轭类如陈述中所述，并令 v_d 为 d的指数增长率。为导出矛盾，假设 $v_d(E) = v_d$，并考虑伪度量 $d_* := d + \widehat{d}$。根据 [12, 引理 5.3]，此伪度量属于 D_Γ。注意到 $\ell_{d_*} = \ell_d + \ell_{\widehat{d}}$，因此$|\ell_{d_*}[x] - \ell_d[x]| \le L$ 对所有 $[x] \in E$均成立。另一方面，假设 $\widehat{d} \in \partial \mathsf{D}_\Gamma$意味着 $\ell_{\widehat{d}}$非零，因此 d 和 d_* 并非粗等距。由于$d \le d_*$ 我们还得到

$$v_{d_*} \le v_d = v_d(E) = v_{d_*}(E) \le v_{d_*}.$$

特别地，我们得到 $v_{d_*}(E) = v_{d_*}$，因此 d、d_*和 E满足定理 1.6 的条件 (1)–(3)。由于 d 和 d_* 并非粗等距，这就产生了所需的矛盾，从而完成命题的证明。□

6.4. 一致局部标记长度谱刚性。 我们通过证明推论 1.11 来结束本文。给定 $\delta \ge 0$，令 $\mathscr{D}_\Gamma^\delta \subset \mathscr{D}_\Gamma$ 表示由一个 δ-双曲伪度量所表示的、指数增长率为 1 的度量结构集合。在 [32, 定理 1.5], 中，第二作者证明了当集合非空时，$\mathscr{D}_\Gamma^\delta$ 是 $\mathscr{D}_\Gamma$ 的真子空间，对每个 $\delta \ge 0$均成立。

推论 1.11 的证明。由定理 1.5 可知，$\overline{\beta}$ 关于每个变量都是连续的。由于 $\mathscr{D}_\Gamma^\delta$ 是适当的，因此对于任意 $d \in \mathsf{D}_\Gamma$ 和 $D_1, D_2 > 0$，集合 $Y([d], D_1, D_2) = \{[d_*] \in \mathscr{D}_\Gamma^\delta : D_1 \le \Delta([d], [d_*]) \le D_2\}$ 是紧的。由这些观察以及引理 3.2 即可得出结论；引理 3.2 保证当 $[d_*] \in Y([d], D_1, D_2)$ 时，$\overline{\beta}([d], [d_*])$ 非零。□

References

[1] T. Adachi, T. Sunada，负曲率流形中闭测地线的同调。 *Differential Geom.* **26** 1987 81 99 *J.* ( )，–。[2] A. Bankovic, C. J. Leininger，平坦度量的标记长度谱刚性。 *Amer. Math. Soc.* **370** 2018 3, 1867 1884 *Trans.* ( )，第 – 期。

[3] F. Bonahon，负曲率群上的测地流。 *Arboreal group theory* (加利福尼亚州伯克利，1988)，143–168，Math. Sci. Res. Inst. Publ., 19，Springer，纽约，1991。[4] F. Bonahon，通过测地流研究 Teichm¨uller 空间的几何。 *Invent. Math.* **92** (1988)，139–162。[5] M. Bourdon，关于 Fuchsian 建筑及其拟等距 ´ *Ergodic Theory Dynam. Systems* **20** 2000 343 364 性质。( )，–。[6] R. Bowen，拟圆的 Hausdorff维数。 *Publ. Math. IHES*，50 (1979)，11–25。[7] E. Breuillard, K. Fujiwara，关于非正曲率空间等距变换的联合谱半径与一致增长。 *Ann. Inst. Fourier* **71** (2021)，第 1 期，317–391。[8] M. Bridgeman, R. Canary，Kleinian曲面群的简单长度刚性及其应用。 *Comment. Math. Helv.* **92** (2017)，715–750。[9] M. Bridgeman, R. Canary, F. Labourie 和 A. Sambarino，Hitchin 表示的简单根流。 *Geom. Dedicata* **192** (2018)，57–86。[10] D. Calegari, K. Fujiwara，可梳理函数、拟态射与中心极限定理。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* **30** (2010)，第 5 期，1343–1369。

[11] S. Cantrell。强双曲度量的 Mineyev 流混合性、轨道计数与 Poincar´e 级数。https://arxiv.org/abs/2210.11558，arXiv 预印本，2022。[12] S. Cantrell, E. Reyes，双曲群上度量结构空间边界的曼哈顿测地线，即将发表于 Commentarii Mathematici Helvetici，arXiv:2210.07136，2022。[13] S. Cantrell, R. Tanaka，拓扑流的不变测度与双曲群无穷远处的测度。 *J. Mod. Dyn.* **20** (2024)，215–274。[14] S. Cantrell, R. Tanaka，曼哈顿曲线、拓扑流的遍历理论与刚性，即将发表于 Geometry & Topology，arXiv:2104.13451，2021。[15] M. Carette, S. Francaviglia, I. Kapovich 和 A. Martino，自由群中自守轨道的谱刚性。 *Algebr. Geom. Topol.* **12** (2012)，1457–1486。[16] D. Constantine，带奇点的非正曲率中的标记长度谱刚性。 *Indiana Univ. Math. J.* **67** (2018)，第 6 期，2337–2361。[17] D. Constantine, J. F. Lafont，Fuchsian 建筑的标记长度刚性。*Ergodic Theory Dynam. Systems* **39** 2019 12, 3262 3291 ( )，第 – 期。

[18] M. Coornaert，Gromov 意义下双曲空间边界上的帕特森-沙利文测度。 *Pacific J. Math.* **159** (1993)，241–270。[19] R. Coulon, R. Dougall, B. Schapira 和 S. Tapie，扭曲的帕特森-沙利文测度及其在可和性与覆盖中的应用，即将发表于美国数学会回忆录，arXiv:1809.10881，2020。[20] C. B. Croke，非正曲率曲面的刚性。 *Comment. Math. Helv.* **65** (1990)，第 1 期，150–169。[21] C. B Croke, N. Dairbekov，黎曼流形中的长度与体积。

Duke Math. ( )，–。[22] F. *J.* **125** 2004 1 14
Dahmani, D. Futer 和 D. T. Wise，拟凸子群的增长。

Math. Proc. ( )，第 – 期。

Cambridge Philos. Soc. **167** 2019 3, 505 530
[23] F. Dal'bo，关于曲面长度谱与计数的评注。

Bol. Soc. ( )，第 – 期。

Brasil. Mat. (N.S.) **30** 1999 2, 199 221
[24] M. Duchin, C. J. Leininger 和 K. Rafi，平坦度量的长度谱与退化。*Invent. Math.* **182** (2010)，第 2 期，231–277。[25] A. Gogolev 和 F. Rodriguez Hertz，阿贝尔 Livshits 定理及其几何应用，即将收入 Anatole Katok 纪念文集（CUP），arXiv:2004.14431，2020。[26] C. Guillarmou, T. Lefeuvre，Anosov 流形的标记长度谱。

Ann. ( ) ( ) ( )，–。

Math. 2 **190** 1 2019 321 344
[27] U. Hamenst¨adt。余循环、辛结构与交。https://arxiv.org/abs/dg-ga/9710009，arXiv 预印本，1997。[28] Y. Hao。算术流形的标记长度模式刚性。https://arxiv.org/abs/2206.01336v1，arXiv 预印本，2022。[29] I. Kapovich，自由群的随机长度谱刚性。

Proc. Amer. Math. Soc. ( ) 第 – 期。

140 2012 5, 1549 1560
[30] K. Matsuzaki, Y. Yabuki 和 J. Jaerisch，Gromov 双曲空间离散群的正规化子、发散型与帕特森测度。 *Groups Geom. Dyn.* **14** (2020)，第 2 期，369–411。[31] E. Oreg´

Groups on-Reyes,

Geom. Dyn. **12** 2018 3, 889 910
Gromov 双曲空间等距变换集的性质。( )，第 – 期。[32] E. Oreg´

J. Lon. Math. on-Reyes，双

Soc. **107** 2023 914 942
曲群上的度量结构空间。( )，–。[33] J.-P. Otal，负´曲率曲面的标记长度谱。`（法语）´(2) 131 (1990)，第 1 期，151–162。*Ann. of Math.* M. Pollicott, R. Sharp，有限型子移位的[34] 与 $\mathbb{Z}^q$ 扩张的回归率。$\mathbb{R}^q$ (1994)，401–416。 *J. Lond. Math. Soc.* **49** B. Ray，自由群中循环自守轨道的非刚性。[35] ( )，第 期。

Internat. J. Algebra N.

Comput. **22** 2023 3
Sawyer，负曲率曲面的部分标记长度谱刚性，卫斯理大学，2020。

[37] R. Schwartz、R. Sharp，两个双曲曲面的长度谱的相关性。*Comm. Math. Phys.* **154**（1993），423–430。[38] R. Sharp，曼哈顿曲线与双曲曲面上长度谱的相关性。*Math. Z.* **228**（1998），745–750。[39] J. Smillie、K. Vogtmann，长度函数与 Outer Space，*Michigan Math. J.* **39**（1992）第 3 期，485–493。[40] Y. Wu。曲面合并的标记长度谱刚性。https://arxiv.org/pdf/2310.09968，arXiv 预印本，2023 年。

数学系，华威大学，考文垂，CV4 7AL，英国。电子邮箱：stephen.cantrell@warwick.ac.uk

耶鲁大学数学系，美国康涅狄格州纽黑文市 06511 电子邮件地址：eduardo.c.reyes@yale.edu