arXiv:2304.13260v1 [math.AG] 26 Apr 2023

余切丛与伴随轨道上的双有理等价朗道–金兹堡模型

BRUNO SUZUKI

Abstract. 我们证明， $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ 的最小半单伴随轨道 $\mathcal{O}_n$上的李势函数与 $T^*\mathbb{P}^n$上的环面势相一致。随后，我们研究相应的朗道–金兹堡模型在变形族中的情形，并举例说明变形如何影响镜像。

Contents

1. 策略2. 变形 3. 托里克对偶性 1
4. 李理论中的 LG 模型 5. 环面势 2
与李势 6. 变形及其镜像 参考文献 3
6
10
11
15

1. Strategy

我们证明，最小半单伴随轨道上的李理论势函数 $\mathcal{O}_n$ 属于$\mathfrak{sl}(n+1,\ \mathbb{C})$ 如 [GGS1] 所定义，与 $T^*\mathbb{P}^n$ 关联于一维代数环面的哈密顿作用的标准势函数 $\mathbb{C}^*$相一致。更确切地说，我们证明($T^*\mathbb{P}^n$, w) 与($\mathcal{O}_n$, w) 双有理等价。在阐明这一一致性之后，我们便能够在同时包含 $T^*\mathbb{P}^n$与 $\mathcal{O}_n$的变形族上写出一个势函数，从而将其提升为朗道–金兹堡模型的变形。接着，我们探讨具体的朗道–金兹堡模型，并举例说明其变形如何影响镜像。本文提出的策略是同时考察簇的变形与势函数的变形，将二者结合起来描述 LG 模型的变形，并得到各个族

$$\mathrm{LG} \rightsquigarrow \mathrm{LG}'$$

其中，LG 和 LG′ 在对偶性方面表现得截然不同。事实上，我们将得到这样的例子：$\mathrm{LG}_0 = (T^*\mathbb{P}^1, w)$ 是定义在非仿射托里克簇上的自对偶 LG 模型，而 $\mathrm{LG}_2 = (\mathcal{O}_1, w)$ 则是由其变形得到的、定义在非托里克仿射簇上的非自对偶朗道–金兹堡模型。

半单李代数的伴随轨道上的朗道–金兹堡模型 $f_H\colon \mathcal{O}(H_0) \to \mathbb{C}$ 由 Gasparim–Grama–San Martin 在 [GGS1、GGS2]中构造。本文考虑其中的最小情形（如定义 2.6 所述），记为 LG_n。这些朗道–金兹堡模型被证明满足 Katzarkov、Kontsevich 和 Pantev 关于三种新的霍奇理论不变量的猜想，这些不变量将

势函数，参见 [BGRS2、GR]，另见 [BCG]，其中介绍了关于紧化的霍奇菱形的更多性质。

研究所有涉及 $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ 的半单伴随轨道的变形族将是值得的。不过，本文只详细讨论极小轨道的情形，并对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的情形作更深入的介绍，正如我们将看到的，这一情形本身已颇为复杂。事实上，[BBGGS] 证明，LG_2 没有射影镜像；此外，他们还证明，LG_2 的 Fukaya–Seidel范畴等价于第二Hirzebruch曲面上相干层范畴的一个真子范畴，但该子范畴并非由任何复子簇实现。因此，根据 [BBGGS]，我们知道不存在任何射影簇，使其相干层范畴等价于 LG_2 的 Fukaya–Seidel范畴。然而，在 [G], 中，Elizabeth Gasparim 运用 Gross 和 Siebert 的内在镜像对称方案 [GS],，为 LG_2 构造了一个朗道–金兹堡镜像 [G]，其几何性质与 LG_2 极为不同。LG_2 这种非平凡的对偶性行为，将与 LG_0 的自对偶性形成对比。

2. Deformations

定义 2.1. 朗道–金兹堡模型（LG）是由一个簇X 和一个全纯函数 $w\colon X \to \mathbb{C}$ （或 $\mathbb{P}^1$）组成的有序对 (X, w)，其中该函数称为超势。

为了扩展我们的示例系列，我们将考虑如下有序对 (X, R) 其中 $R\colon X \to \mathbb{C}$ 是一个有理函数，定义为 $R = f/g$，那么只需令 $\mathbb{P}^1$，即可将该有理函数视为到 $R = [f : g]$的映射，见 [BGGS]。随后，通过爆破不定点集 $\mathcal{I}$，即可将这样的映射提升为一个 LG 模型，其中 R是~满足 $f = g = 0$的点的集合，然后 R 可扩展为定义在 X上的全纯映射，其中该空间是 X 在 $\mathcal{I}$处的爆破。因此，在接下来的例子中，我们希望考虑有理势。

定义 2.2. 有理朗道–金兹堡模型是由一个簇 X 和一个有理函数 $R\colon X \to \mathbb{P}^1$ 组成的有序对 (X, R)，其中该函数称为超势。

从现在起，LG模型均指有理朗道–金兹堡模型（注意，这一概念包含所有具有全纯势函数的LG模型）。

定义 2.3。朗道–金兹堡模型（X， w）的一个（交换）变形族是朗道–金兹堡模型（X_t, w_t）的光滑族，其中 $t \in D \subset \mathbb{C}^n$ 是一个包含 0 的开球，并且（ X_0， w_0） =（X, w）。我们称 X_t 是 X_0 的一个变形，记作（ X_0， w_0） $\rightsquigarrow$（X_t， w_t）。

对于本文所考虑的朗道–金兹堡模型，其簇 X 将是一个非紧Calabi–Yau簇。这恰好是Katzarkov、Kontsevich和Pantev证明变形空间 [KKP]具有光滑性的情形。

例 2.4。考虑 $T^*\mathbb{P}^1$，其坐标为（$[1, x]$， y），以及由函数 $w_0 = x + y + \frac{y^2}{x}$ 和 $w_1 = 2x$ 给出的朗道–金兹堡模型 LG_0 = （$T^*\mathbb{P}^1$， w_0）和 LG_1 = （$T^*\mathbb{P}^1$， w_1）。

在 $X_t = T^*\mathbb{P}^1$ 上使用势函数 $w_t = 2x + t(x + y + \frac{y^2}{x})$，我们得到变形 $LG_0 \rightsquigarrow LG_1$。

定义 2.5. 设 G 为一个李群， $\mathfrak{g}$ 为其李代数。元素 $H_0 \in \mathfrak{g}$ 的伴随轨道为

$$\mathcal{O}(H_0) = \mathrm{Ad}(G) \cdot H_0 = \{gH_0g^{-1} : g \in G\}.$$

在这里讨论的所有例子中， H_0 都是一个对角矩阵。由于我们研究的是复半单李群 G，紧子群 $K < G$ 的轨道 $\mathrm{Ad}(K) \cdot H_0$ 是一个旗流形，同构于齐性流形 G/P，其中 P 是 G 的一个抛物子群。

根据 [BGRS2，定义 1。1], 我们有：

定义 2.6。设 $\mathcal{O}_n$ $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ 中 $H_0 = \mathrm{Diag}(n, -1, \ldots, -1)$ 的伴随轨道，我们称其为极小轨道。

极小伴随轨道 $\mathcal{O}_n$ 与射影空间 $\mathbb{P}^n$ [GGS2 的余切丛微分同胚（定理 2）。1]。 $\mathcal{O}_n$ 是一个非托里克卡拉比–丘流形。

例 2.7。设 $\mathrm{LG}_2 = (\mathcal{O}_1, f_H)$，其中 $\mathcal{O}_1$ 是李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的半单伴随轨道，通过选取 $H_0 = \mathrm{Diag}(1,-1)$ 得到。

引理 6.3 描述了 $\mathcal{O}_1$ 作为 $T^*\mathbb{P}^1$的一个变形，并明确给出了变形族。我们在 $\mathcal{O}_1$ 上赋予由 $f\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = 2x.$ 给出的势函数。注意，此势函数与例 w 中定义在 $T^*\mathbb{P}^1$ 上的势函数相同 2.4，从而构成 LG_1。在该族的每个元素上定义相同的势函数 $2x$，我们便得到一个朗道–金兹堡模型的变形族

$$\mathrm{LG}_1 \rightsquigarrow \mathrm{LG}_2 .$$

我们将在例 6.5中对这一变形族作更为详细的介绍，其中包括部分紧化。

注 2.8。在 $\mathcal{O}_1$ 上势函数的选择来自以下构造。我们选择 $H = H_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$，于是伴随轨道

$$\mathcal{O}_1 = \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}(2))H_0 = \left\{ gH_0g^{-1} : g \in \mathrm{SL}(2) \right\}$$

是 $\mathbb{C}^3$ 中由方程 $x^2 + yz - 1 = 0.$ 定义的（光滑）仿射超曲面。由 $A \mapsto H, A$ 定义的势函数 $f_H : \mathcal{O}_1 \to \mathbb{C}$ 简单地给出 $f_H(A) = 2x$。

作为实流形 $\mathcal{O}_1$ 与 $T^*\mathbb{P}^1$ 微分同胚。现在我们回顾 [BBGGS] 中的一个引理，该引理证明了存在 $\mathfrak{sl}(2)$ 的伴随轨道中的拉格朗日子流形，并且该子流形与 $\mathbb{P}^1$ 微分同胚（注意，这一点并非先验成立，因为 $\mathcal{O}(H_0)$ 的辛结构并非 $T^*\mathbb{P}^1$）。这一点已在 [BBGGS，引理 2 中得到证明。1]然而， $\mathcal{O}_1$ 是仿射的，因此不包含与 $\mathbb{P}^1$ 同构的代数子簇。

例 2.9. 请注意，在例 2.4 中，我们在保持底层流形不变的同时改变了势函数；而在例 2.7中，我们在保持势函数不变的同时改变了流形。将两者结合起来，我们得到一种同时改变二者的变形，即

$$\mathrm{LG}_0 \rightsquigarrow \mathrm{LG}_2 .$$

接下来，我们希望比较 LG_0 和 LG_2，的镜像，并将看到它们的表现大不相同。由于 $T^*\mathbb{P}^1$ 是一个环面簇，我们可以对 LG_0使用托里克对偶性。

3. 托里克对偶性

定义 3.1. 若一个 n维簇 X 满足以下两个性质，则称其为托里克簇：

- 存在环面的作用（ $\mathbb{C}^*)^n \times X \to X$，且

- the Zariski closure of X is the torus: $\overline{(\mathbb{C}^*)^n} = X$.

关于环面簇的基本概念，参见[CLS]。表示环面簇的多面体，是通过绘制环面的补集得到的凸图形，即 $X - (\mathbb{C}^*)^n$。更确切地说，它是X 在动量映射下的像；根据 Atiyah 和 Guillemin–Sternberg 的定理，该像是环面作用不动点像的凸包。

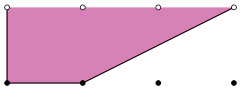
例 3.2. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 由一个正方形表示



例 3.3. $\mathbb{P}^2$ 由一个三角形表示



例 3.4. $T^*\mathbb{P}^1$ 由



对于 X 为环面簇的情形，Clarke [Cl] 证明，可以将 Kontsevich [Ko] 的同调镜像对称猜想表述为 LG 模型之间的对偶性。他还证明，这一构造推广了 Batyrev–Borisov [BB], Berglung–H¨ubsch [BH], Givental [G], 以及 Hori–Vafa [HV]所提出的对偶性。给定托里克LG模型 (X, f)，[Cl] 中的构造会生成一个对偶LG模型 $(X^\vee, f^\vee)$。

我们回顾[Cl]中的一些定义。与托里克朗道–金兹堡模型相关联的是其线性数据：

(1) 线性数据 Div，以及 (2)
线性数据 Mon。

[Cl] 使用了这一数据更精细的版本，其中包括紧化的 K¨ahler 类；对于对偶性，还要求满足 kopasectic条件，但这里不需要这些细节。对偶的托里克朗道–金兹堡模型通过交换 Div 和 Mon 获得，即

$$\mathrm{Div}(X) = \mathrm{Mon}(f^\vee), \qquad \mathrm{Div}(X^\vee) = \mathrm{Mon}(f).$$

矩阵 Mon 描述了对单项式的无穷小作用，详情请参见 [Cl]。矩阵 Div 编码了特征到除子映射中的除子。特别地，X 的肖群是 Div 的余核(X)。在我们的例子中，Div 的各行表示 X 的除子，而 Mon 的各行表示势函数 f中出现的单项式。

定义 3.5. 如果存在一个同构 $(X^\vee, f^\vee) \simeq (X, f)$，则称该 LG 模型为自对偶。

现在给出一些托里克对偶性的基本例子。利用 Clarke 在[Cl], Callander、Gasparim、Jenkins 和 Silva [CGJS] 中的工作，他们研究了定义在射影空间上的向量丛上的朗道–金兹堡模型的镜像对称，证明余切丛 $\mathbb{P}^1$ 和解析化合芥子结都具有势函数，从而构成自镜像LG模型。

例 3.6 ($\mathrm{LG}_0 \iff \mathrm{LG}_0$)。对于 $T^*\mathbb{P}^1$ 使用势函数 $x + y + \frac{y^2}{x}$ 的情形，可得到一个与自身对偶的朗道–金兹堡模型 [CGJS，命题 6。2] 如图 1所示。该朗道–金兹堡模型的自对偶性可通过简单指出在此情形下的托里克数据来验证

is

$$\mathbf{Mon} = \mathbf{Div} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

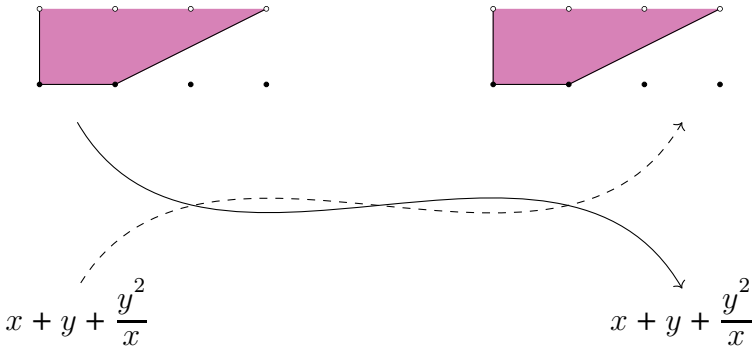


FIGURE 1. 自对偶 $\mathbf{LG}_0$ 模型

例3.7。（一个非平凡的对偶性）现在我们看到一个非平凡的对偶性 $(Y, g) = (X, f)^\vee$。考虑图2中所示的朗道–金兹堡模型 $(X, f) = (\mathbb{P}^2, x + y + x^{-1} + y^{-1})$ 和 $(Y, g) = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, x + y + x^{-1}y^{-1})$。

由于 Div 矩阵由矩多面体的内法向量给出，因此我们有：

$$\mathrm{Div}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Div}_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

要看出 (Y, g) 与 (X, f) 互为对偶，只需注意 $\mathbf{Mon}_g = \mathbf{Div}_X$，以及 $\mathbf{Div}_Y = \mathbf{Mon}_f$。

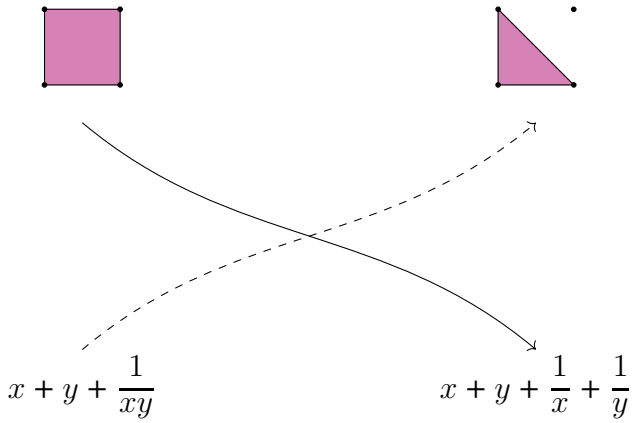


FIGURE 2. 非平凡的托里克对偶性

例3.8.（超凯勒族）这里考虑的双有理同构可以放在更广泛的背景下考察。事实上，如果我们考虑的不是射影空间的余切丛，而是广义旗流形的余切丛，那么就可以考虑超凯勒结构族；下面回顾其定义。

黎曼流形 (M, g) 上的超凯勒结构可用三个近复结构 I, J, K 表示，它们满足

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1,$$

使得任意线性组合 $aI + bJ + cK$ 与 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 都是 M 上的 K¨ahler 结构，其对应的复结构可视为 M 的变形。所有超K¨ahler 流形都是里奇平坦的，因此也是卡拉比–丘流形。

Kronheimer [Kr], Biquard [Bq], 和 Kovalev [Kv],研究了包含旗流形的余切丛和伴随轨道的超K¨ahler 结构族；我们简要回顾其中的一些结果。设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的复半单李群，并令 H 表示 $\mathfrak{g}$中某个元素的稳定子。Kovalev定理[Kv，定理 1.1] 描述了 G/H上的一族超K¨ahler 结构。特别地，该结构族包含一种复结构，使得商空间 G/H 同构于 G的一个半单伴随轨道。更明确地说，伴随轨道 Ad(G) $\cdot H_0$ 是旗流形 Ad(K) $\cdot H_0$的余切丛的一种变形，其中 K 是 G的一个紧子群。

利用嘉当子代数 $H_0 \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 中元素的伴随轨道 $\mathcal{O}(H_0)$，可以得到许多有趣的例子。设我们取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$，于是我们得到一个 SU($\mathcal{O}$) 的旗流形

$$\mathbb{F} = \mathrm{Ad}(\mathrm{SU}(n)) \cdot H_0$$

以及一个微分同胚

$$\mathcal{O}(H_0) = \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}(n)) \cdot H_0 \simeq T^*\mathbb{F}$$

到 $\mathbb{F}$ 的余切丛，其中旗流形同构于如下形式的齐性流形

$$\mathbb{F} = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(d_1) \times \mathrm{U}(d_2) \times \cdots \times \mathrm{U}(d_k))$$

其中 $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n$，参见 [Ar]。

4. 李理论势函数

本节将用局部坐标描述伴随轨道上的李理论势函数，以便将其与环面势进行比较。我们首先回顾 [GGS1] 和 [GGS2]中的一些结果。设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单李代数，其嘉当子代数为 $\mathfrak{h}$，并设 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 为由 $\mathfrak{h}$的根生成的实子空间。设 Π为 $\mathfrak{g}$的所有根所组成的集合。元素 $H \in \mathfrak{h}$ 称为正则元，如果对于所有 $\alpha \in \Pi$都有 $\alpha(H)$。

选择 $H_0 \in \mathfrak{h}$和一个正则元素 $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$，相对于 H定义的高度函数 $f_H \colon \mathcal{O}(H_0) \to \mathbb{C}$为

$$f_H(x) = \langle H, x \rangle, \qquad x \in \mathcal{O}(H_0),$$

具有有限个孤立奇点，并在 $\mathcal{O}(H_0)$ 上定义了一个[GGS1，定理 3。1]正是这个高度函数产生了我们称为李势的表达式。

现在我们详细描述伴随轨道上的势函数，并用多项式映射来表示其在每个坐标图中的形式。这一中间步骤的构造也阐明了势函数为何会产生 Lefschetz纤维化，而根据定义，这种纤维化在局部是一个二次多项式映射。

给定 $H_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$，令

$$\mathfrak{n}^+_{H_0} = \sum_{\alpha(H_0)>0} \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{n}^-_{H_0} = \sum_{\alpha(H_0)<0} \mathfrak{g}_\alpha$$

分别是 ad (H_0) 的正、负特征值所对应的特征子空间之和。子空间 $\mathfrak{n}^\pm_{H_0}$ 是幂零子代数。若 G 是李群，且其李代数为 $\mathfrak{g}$，则子群 $N^\pm_{H_0} = \exp \mathfrak{n}^\pm_{H_0}$ 是闭的，并且集合

$$N^-_{H_0} Z_{H_0} N^+_{H_0} = N^-_{H_0} N^+_{H_0} Z_{H_0}$$

在 G 中是开且稠密的，其中 Z_{H_0} 是 G 中 H_0 的中心化子，并且乘积

$$(y, x, h) \in N^-_{H_0} \times N^+_{H_0} \times Z_{H_0} \mapsto yxh \in N^-_{H_0} N^+_{H_0} Z_{H_0}$$

是一个微分同胚。现在考虑伴随轨道 $\mathcal{O}(H_0) = \text{Ad}(G)\, H_0 = G/Z_{H_0}$。集合 Ad ($N^-_{H_0} N^+_{H_0} Z_{H_0}$) H_0，简记为 $N^-_{H_0} N^+_{H_0} Z_{H_0} \cdot H_0$，满足

$$N^-_{H_0} N^+_{H_0} Z_{H_0} \cdot H_0 = N^-_{H_0} N^+_{H_0} \cdot H_0$$

因为 $Z_{H_0} \cdot H_0 = H_0$。由于 $N^-_{H_0} N^+_{H_0} Z_{H_0}$ 在 G 中是开且稠密的，因此 $N^-_{H_0} N^+_{H_0} \cdot H_0$ 在 $\mathcal{O}(H_0)$ 中也是开且稠密的。此外，映射

$$(y, x) \in N^-_{H_0} \times N^+_{H_0} \mapsto yx \cdot H_0 \in N^-_{H_0} N^+_{H_0} \cdot H_0$$

是一个微分同胚。

另一方面，$\exp: \mathfrak{n}^\pm_{H_0} \to N^\pm_{H_0}$ 是一个微分同胚。因此，

$$(Y, X) \in \mathfrak{n}^-_{H_0} \times \mathfrak{n}^+_{H_0} \mapsto e^{\text{ad}(Y)} e^{\text{ad}(X)} \cdot H_0 \in N^-_{H_0} N^+_{H_0} \cdot H_0$$

定义了 $\mathcal{O}(H_0)$在 H_0 附近的一个坐标图（其像开且稠密）).

这里的目标是描述 $\mathcal{O}(H_0)$ 上由 $f_H(x) = \langle H, x\rangle$在此坐标图中定义的Lefschetz纤维化。奇点 $wH_0, w \in \mathcal{W}$附近的坐标图也存在类似的描述。正如 San Martin 的讲义[SM], 所述， f_H 在这些坐标图中的表达式是多项式函数，事实上，是二次齐次多项式。

定理4.1. [SM] 映射 f_H 是多项式。

证明. 若 $X \in \mathfrak{n}^+_{H_0}$，则 $[X, H_0] = -\text{ad}(H_0)\, X \in \mathfrak{n}^+_{H_0}$，且由于 $\mathfrak{n}^+_{H_0}$是幂零的，存在 $n \geq 1$ 使得

$$e^{\text{ad}(X)} H_0 = H_0 + g^+(X)$$

其中， $g^+ : \mathfrak{n}^+_{H_0} \to \mathfrak{n}^+_{H_0}$ 是多项式映射

$$g^+(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ad}(X)^k (H_0).$$

现在，若 $Y \in \mathfrak{n}^-_{H_0}$，则同理 $[Y, H_0] = -\text{ad}(H_0)\, Y \in \mathfrak{n}^-_{H_0}$。此外，$\mathfrak{n}^-_{H_0}$是幂零的，且 ad (Y) 是幂零的。因此，存在 $m \geq 1$ 使得

$$e^{\text{ad}(Y)} e^{\text{ad}(X)} H_0 = H_0 + g^-(Y) + \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{j!} \frac{1}{k!} \text{ad}(Y)^j \, \text{ad}(X)^k (H_0) \tag{1}$$

其中 $g^-:\mathfrak{n}^-_{H_0}\to\mathfrak{n}^-_{H_0}$ 是多项式映射

$$g^-(Y)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j!}\mathrm{ad}(Y)^j(H_0).$$

这些表达式表明，给定 f_H 是线性映射 $x\mapsto H,x$ 的限制时， $f_H(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0)$ 是关于 X 和 Y 的多项式。

现在，注意到 $f_H(g^-(Y))=0$，因此

$$f_H\left(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0\right)=\langle H,H_0\rangle+\langle H,*\rangle,$$

其中 $*$ 是方程（1）中属于 $\mathfrak{h}$ 的双重求和部分。 □

例4.2. 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$，并选取 H_0，使得旗 $\mathbb{F}_{H_0}$ 是射影空间 $\mathbb{P}^n$。我们取

$$H_0=\mathrm{Diag}(n,-1,\ldots,-1).$$

在这种情况下，若 $X\in\mathfrak{n}^+_{H_0}$，则

$$X=\begin{pmatrix}0_{1\times1}&v\\0&0_{n\times n}\end{pmatrix},$$

其中 $v\in\mathbb{R}^n$，而 $Y\in\mathfrak{n}^-_{H_0}$ 当且仅当 $Y^T\in\mathfrak{n}^+_{H_0}$。如果 $X\in\mathfrak{n}^+_{H_0}$，则

$$e^{\mathrm{ad}(X)}H_0=H_0+[X,H_0]=H_0-X.$$

因此，如果 $Y\in\mathfrak{n}^-_{H_0}$，则

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0&=H_0-X+Y-[Y,X]+\frac{1}{2}[Y,Y-[Y,X]]\\&=-X+(H_0-[Y,X])+\left(Y-\frac{1}{2}[Y,[Y,X]]\right)\end{aligned}$$

因为 $[Y,H_0]=Y$，鉴于最后一项已被并入总和$\mathfrak{n}^+_{H_0}\oplus\mathfrak{z}_{H_0}\oplus\mathfrak{n}^-_{H_0}$，其中 $\mathfrak{z}_{H_0}$ 是 H_0的中心化子。

现在，如果 H =对角矩阵($\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$)，那么 H与 $\mathfrak{n}^+_{H_0}$和 $\mathfrak{n}^-_{H_0}$均正交（嘉当–基林）；于是

$$\begin{aligned}f_H\left(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0\right)&=\langle H,H_0\rangle-\langle H,[Y,X]\rangle\\&=\langle H,H_0\rangle+\langle H,[X,Y]\rangle.\end{aligned}$$

我们写作

$$X=\begin{pmatrix}0_{1\times1}&\mathbf{x}\\0&0_{n\times n}\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}0_{1\times1}&0\\\mathbf{y}^T&0_{n\times n}\end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$，$\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$。由于对于 $\mathfrak{sl}(n+1)$ 中的矩阵，嘉当–基林乘积为A, $B=2(n+1)\mathrm{tr}(AB)$，因此可得

$$\begin{aligned}&f_H\left(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0\right)=\\&=2(n+1)\left[\mathrm{tr}(HH_0)+(\lambda_1-\lambda_2)x_1y_1+\cdots+(\lambda_1-\lambda_{n+1})x_ny_n\right]\end{aligned}$$

这是一个二次多项式。

如果我们将 H_0 替换为 $w\cdot H_0$，则类似的计算同样成立：如果 $w=(1j)$，那么 $\mathfrak{n}^+_{w\cdot H_0}$ 由仅在第 j 行上具有非零元素的矩阵组成（对角线上为 0），而

$\mathfrak{n}^-_{w\cdot H_0}$ 仅由第 j 列上的非零元素组成。因此，如果 $(x_1,\ldots,x_n)$ 和 $(y_1,\ldots,y_n)$ 分别是第 j 行和第 j 列上的元素，那么

$$f_H\left(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}(w\cdot H_0)\right) =$$
$$= 2(n+1)\left[\mathrm{tr}\left(H(w\cdot H_0)\right) + \left(\lambda_j-\lambda_1\right)x_1y_1 + \cdots + \left(\lambda_j-\lambda_{n+1}\right)x_ny_n\right].$$

例 4.3。设 $H = \mathrm{Diag}(1,0,-1)$ $H_0 = \mathrm{Diag}(2,-1,-1) \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$，并选取$w = (123) \in \mathcal{W}$。那么 $w\cdot H_0 = \mathrm{Diag}(-1,2,-1)$ 且 $w^2\cdot H_0 = \mathrm{Diag}(-1,-1,2)$，因此

$$\langle H, H_0\rangle = 2(n+1)\mathrm{tr}\left(HH_0\right) = 18,$$
$$\langle H, w\cdot H_0\rangle = 2(n+1)\mathrm{tr}\left(H(w\cdot H_0)\right) = 0,$$
$$\langle H, w^2\cdot H_0\rangle = 2(n+1)\mathrm{tr}\left(H(w^2\cdot H_0)\right) = -18.$$

注意，表达式的常数项会随临界点的选择而变化。

定义 4.4。我们将 f_H 在 H_0 附近的图表上写出的表达式称为 $\mathcal{O}_n \subset \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ 上的李势。它由下式给出

$$\boxed{\mathbf{f}_H(H_0) = \mathrm{tr}(HH_0) + (\lambda_1-\lambda_2)x_1y_1 + \cdots + (\lambda_1-\lambda_{n+1})x_ny_n.} \tag{2}$$

例 4.5。考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$，并选取 H_0，使得旗 $\mathbb{F}_{H_0}$ 为格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}_k(n+1)$。计算与射影空间的情形类似。主要区别在于，该分解由大小为 k 和 $n-k+1$ 的分块给出，因此 $\mathfrak{n}^+_{H_0}$ 的元素是如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0_{k\times k} & v \\ 0 & 0_{(n-k+1)\times(n-k+1)} \end{pmatrix}.$$

类似地，

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0 &= H_0 - X + Y - [Y,X] + \frac{1}{2}[Y,Y-[Y,X]] \\ &= -X + (H_0-[Y,X]) + \left(Y - \frac{1}{2}[Y,[Y,X]]\right) \end{aligned}$$

并且 $f_H(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0) = H, H_0-[Y,X]$ 是一个二次多项式。

这两个例子可以很容易地推广到所有满足 $\mathrm{ad}(H_0)$ 的特征值为 0 和 ±1 的情形。类似的计算表明

$$e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0 = -X + (H_0-[Y,X]) + \left(Y - \frac{1}{2}[Y,[Y,X]]\right)$$

因此，$f_H(e^{\mathrm{ad}(Y)}e^{\mathrm{ad}(X)}H_0) = H, H_0-[Y,X]$ 是关于变量X 和 Y的二次多项式。

注 4.6. 更一般地，给定一个复李代数，我们可以选择一组正根 Π^+ 和单根 $\Sigma \subset \Pi^+$，其对应的韦伊室为 $\mathfrak{a}^+$。子集 $\Theta \subset \Sigma$ 定义了一个抛物子代数 $\mathfrak{p}_\Theta$，其对应的抛物子群为 P_Θ，旗流形为 $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$。若$\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_\Theta) = 0\}$，则元素 $H_\Theta \in \mathrm{cl}\,\mathfrak{a}^+$ 是 $\Theta \subset \Sigma$ 的特征元。令 $Z_\Theta = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)H_\Theta = H_\Theta\}$为$G$ 中该特征元 H_Θ的中心化子。伴随轨道 $\mathcal{O}(H_\Theta) = \mathrm{Ad}(G)\cdot H_\Theta \approx G/Z_\Theta$

该特征元 H_Θ 与余切丛 $T^*\mathbb{F}_\Theta$ [GGS2，定理 2。1]。

备注 4.7. 在极小轨道这一特定情形下，可以非常方便地将其紧化为射影空间的乘积，具体如下。$\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{P}^n \times \mathrm{Gr}(n, n+1) \simeq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ 上的对角作用有两个轨道，一个是开轨道，另一个是闭轨道。开轨道同构于伴随轨道 $\mathcal{O}_n = \mathrm{Ad}(G) \cdot H_\Theta$，其中 $H_\Theta = \mathrm{Diag}(n, -1, \ldots, -1)$；它由$\mathbb{P}^n \times \mathrm{Gr}(n, n+1)$中的横截元素对构成。闭轨道同构于旗 $F_{\Theta\cap\Theta^*}$。由于 $\Theta \cap \Theta^*$ 是 $\{\alpha_{12}, \alpha_{n,n+1}\}$ 的补集，因此可得 $F_{\Theta\cap\Theta^*} = F(1, n)$。

5. Toric potential vs Lie potential

在[BGRS1] 中，从其与局部曲面领域上的丛之间的对偶性这一角度研究了射影空间的余切丛及其拉格朗日骨架。从 $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ 在 $T^*\mathbb{P}^n$ 以开图表$V_0 = \{x_0 \neq 0\}$ 表示的哈密顿作用出发

$$\mathbb{T} \cdot V_0 = \left\{[1, t^{-1}x_1, \ldots, t^{-n}x_n], (ty_1, \ldots, t^n y_n)\right\}$$

我们得到哈密顿向量场 $T^*\mathbb{P}^n$

$$X(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (-x_1, \ldots, -nx_n, y_1, \ldots, ny_n),$$

如[BGRS1命题 3 所述。1]。取 $T^*\mathbb{P}^n$ 及典范辛形式 ω，相应的势函数 h 因此满足

$$dh(Z) = \omega(X, Z),$$

对所有向量场 $Z \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{P}^n)$ 均成立。在 V_0 坐标中，记

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n),$$

我们得到一个微分方程

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial h}{\partial \mathbf{y}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\left((-x_1, \ldots, -nx_n, y_1, \ldots, ny_n), (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)\right)\\ &= -2\sum ix_i b_i + iy_i a_i,\end{aligned}$$

其解为：

$$\mathbf{h}_c = c - 2x_1y_1 - \ldots - 2nx_ny_n = c + \sum_{i=1}^{n} -2ix_iy_i, \tag{3}$$

对于 $c \in \mathbb{C}$。关于[BGRS1] 在其他图表上的表达式，参见 h_c。在第6 节中，我们将考虑 $n = 1$，此时有两个图表。

定义 5.1。我们称 $\mathbf{h}_c$ 为 $T^*\mathbb{P}^n$上的环面势。

定理 5.2。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在矩阵 H、$H_0 \in \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ 以及常数$c \in \mathbb{C}$，使得最小伴随轨道 $\mathcal{O}_n$ 上的李势与余切丛 $T^*\mathbb{P}^n$ 上的环面势在稠密开图表上重合，即 $\mathbf{f}_H = \mathbf{h}_c$。

证明。取 $H_0 = $对角矩阵$(n, -1, \ldots, -1) \in \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$，

$$H = \begin{cases}\mathrm{Diag}(-n, \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, n) & \text{if } n \text{ is even},\\ \mathrm{Diag}(-n, \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, n) & \text{if } n \text{ is odd}\end{cases}$$

以及 $c = -n^2 - n$。

在李代数一侧，我们有：

$$\mathbf{f}_H(H_0) = \operatorname{tr}(HH_0) + (\lambda_1 - \lambda_2)x_1y_1 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_{n+1})x_ny_n,$$

其中，$H = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ 的特征值满足 $\lambda_1 - \lambda_j = -2(j-1)$，因此

$$\mathbf{f}_H(H_0) = -n^2 - n - 2x_1y_1 - \cdots - 2nx_ny_n.$$

在托里克一侧，

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_c &= c - 2x_1y_1 - \ldots - 2nx_ny_n \\ &= -n^2 - n - 2x_1y_1 - \cdots - 2nx_ny_n.\end{aligned}$$

□

根据定理5.2，值 $c = -n^2 - n$ 更适用于此处的讨论。因此，使用余切丛 $([1, x_1], y_1)$ 的坐标 $T^*\mathbb{P}^1$，我们将势函数写为

$$\mathbf{h}_{-2}\colon T^*\mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$$

as

$$\mathbf{h}_{-2} = -2x_1y_1 - 2.$$

定义 5.3。若两个朗道–金兹堡模型的定义域是双有理等价簇，且它们的势函数在扎里斯基开集上相同，则称这两个朗道–金兹堡模型双有理等价。

我们的定理的严格表述如下：

定理 5.4. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，存在矩阵 H、$H_0 \in \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ 以及常数$c \in \mathbb{C}$，使得 LG模型 $(\mathcal{O}_n, f_H)$ 与 $(T^*\mathbb{P}^n, h_c)$ 双有理等价。

证明。 根据定理 5.2，势函数 $\mathbf{f}_H$ 和 $\mathbf{h}_c$ 的表达式分别对应势函数 f_H 和 h_c，并在扎里斯基开集上重合。□

6. Deformations and their mirrors

例 6.1（$\mathrm{LG}_0 \rightsquigarrow \mathrm{LG}_1$）。我们考虑带有坐标 $[1, x]$、y 的 $T^*\mathbb{P}^1$ 以及势函数族

$$\mathrm{LG}_t = t\left(x + \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x}\right) + (1-t)(2x).$$

于是，初始 LG模型 LG_0 如例 3.6所示是自对偶的，而最终的 LG模型由 $\mathrm{LG}_1 = (T^*\mathbb{P}^1, 2x)$ 定义，其托里克数据为

$$\mathrm{Div} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mon} = (1\,0).$$

现在，利用托里克对偶性对矩阵求逆，可得到 LG模型

$$\mathrm{Div} = (1\,0) \quad \mathrm{Mon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定义在带有环面 $(\mathbb{C}^*)^2$ 和单个除子的簇上，在此情况下为一个 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$。我们得出结论：该变形族将一个自对偶 LG 模型变为另一个与自对偶性相距甚远的模型。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LG}_0 & \rightsquigarrow & \mathrm{LG}_1 \\ \| & & \not\downarrow \\ \mathrm{LG}_0^\vee & \rightsquigarrow & \mathrm{LG}_1^\vee . \end{array}$$

我们的下一个目标是描述对偶性如何作用于该变形族

$$\mathrm{LG}_1 = (T^*\mathbb{P}^1, h_c) \rightsquigarrow \mathrm{LG}_2 = (\mathcal{O}_2, f_H).$$

我们将使用赫尔布鲁赫曲面的变形 $\mathbb{F}_2$ 将其推广到 $\mathbb{F}_0$ 引理6.2，并在例6.5中将其推广为部分紧化的朗道–金兹堡模型的变形

$$(\mathbb{F}_2, \mathbf{h}) \rightsquigarrow (\mathbb{F}_\mathbf{0}, \mathbf{f}).$$

赫尔布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_2$ 嵌入于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ 中，作为满足下列方程的点集

$$([x_0, x_1], [y_0, y_1, y_2, y_3]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$$

满足方程

$$x_0(y_1, y_2) = x_1(y_2, y_3),$$

见 [Ma]。我们可以用四个坐标图覆盖 $\mathbb{F}_2$，即 $U = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2\}$、$V = \{(\xi, v) \in \mathbb{C}^2\}$、$U' = \{(z, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$、$V = \{(z, \eta) \in \mathbb{C}^2\}$，其坐标变换如下：

$$\xi = z^{-1}, \quad v = z^2 u, \quad \mu = u^{-1}, \quad \eta = v^{-1}.$$

我们将使用以下结果：

引理 6.2。 $\mathbb{F}_2$ 变形为 $\mathbb{F}_0$。



FIGURE 3. $\mathbb{F}_2$ 变形为 $\mathbb{F}_0$

证明。变形族 $\mathcal{M}$ 将 $\mathbb{F}_2$ 变为 $\mathbb{F}_0$，其形式为

$$\{x_0(y_1, y_2) = x_1(y_2 + ty_0, y_3)\} = M_t \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3.$$

在坐标中：

$$\begin{aligned} (z, u, t) &\mapsto ([1, z], [1, z^2u + tz, zu, u], t) \\ (z, \mu, t) &\mapsto ([1, z], [\mu, z^2 + tz\mu, z, 1], t) \\ (\xi, v, t) &\mapsto ([\xi, 1], [1, v, \xi v - t, \xi^2 v - t\xi], t). \\ (\xi, \eta, t) &\mapsto ([\xi, 1], [\eta, 1, \xi - t\eta, \xi^2 - t\xi\eta], t). \end{aligned}$$

从 $\mathbb{F}_2$ 到 $\mathbb{F}_0$ 的变形为

$$\{x_0(y_1, y_2) = x_1(y_2 + ty_0, y_3)\} = M_t \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3,$$

$$\begin{aligned} x_0y_1 &= x_1y_2 + tx_1y_0 \\ x_0y_2 &= x_1y_3 \end{aligned}$$

□

引理 6.3。 $T^*\mathbb{P}^1$ 变形为 $\mathcal{O}_2$。

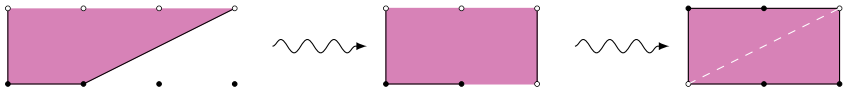


FIGURE 4. $T^*\mathbb{P}^1$ 变形为 $\mathcal{O}_2$

证明。 我们将使用 $\pi\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 引理 6.2 中给出的将 Hirzebruch曲面 $\mathbb{F}_2$ 变形为 $\mathbb{F}_0$的族，并将其写成满足方程的点 $([x_0, x_1], [y_0, y_1, y_2, y_3], t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}$。

$$x_0(y_1, y_2) = x_1(y_2 + ty_0, y_3).$$

这里 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{F}_2$，并且对于 $t \neq 0$，我们有 $\pi^{-1}(t) \simeq \mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。

轨道 $\mathcal{O}_2$ 可在坐标图中写为 $U = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2\}$ 和 $V = \{(\xi, v) \in \mathbb{C}^2\}$，其过渡函数为

$$(\xi, v) \mapsto (z^{-1}, z^2u + tz),$$

其中我们有 $z = \frac{x_1}{x_0}$、$\xi = \frac{x_0}{x_1}$、$u = y_3$ 和 $v = y_1$。将 $T^*\mathbb{P}^1$ 变形为$\mathcal{O}_2$ 的族 $M \to \mathbb{C}$ 具有一个嵌入

$$j\colon M \to \mathcal{M} \tag{4}$$

给出为

$$(z, u, t) \mapsto ([1, z], [1, z^2u + tz, zu, u], t)$$
$$(\xi, v, t) \mapsto ([\xi, 1], [1, v, \xi v - t, \xi^2 v - t\xi], t).$$

注意，在这些坐标中，$t = 0$ 和 $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ 给出了 $T^*\mathbb{P}^1$的零截面。

断言6.4。无穷远截面 σ_∞ 为:

$$\sigma_\infty(z, t) = ([1, z], [0, z^2, z, 1], t) \quad \text{on} \quad U,$$
$$\sigma_\infty(\xi, t) = ([\xi, 1], [0, 1, \xi, \xi^2], t) \quad \text{on} \quad V,$$

该断言的证明。注意

$$[1, z^2u + tz, zu, u] = [1/u, z^2 + tz/u, z, 1]$$
$$[1, v, \xi v - t, \xi^2 v - t\xi] = [1/v, 1, \xi - t/v, \xi^2 - t\xi/v]$$

因此，取 $u \to \infty$ 和 $v \to \infty$时的极限，即取$1/u \to 0$ 和$1/v \to 0$ 的极限，我们得到无穷远截面:

$$\lim_{u\to\infty}(z, u, t) \mapsto ([1, z], [0, z^2, z, 1], t),$$
$$\lim_{v\to\infty}(\xi, v, t) \mapsto ([\xi, 1], [0, 1, \xi, \xi^2], t).$$

□

例6.5。 ($\mathrm{LG}_1 \rightsquigarrow \mathrm{LG}_2$) 我们现在重新考察例$_1 \rightsquigarrow \mathrm{LG}_2$ 2.7中介绍的，并对偶族进行评论。

根据定义5.1，取 $c = -2$、$n = 1$ 以及坐标 $[1, x_1]$，y_1 对于余切丛 $T^*\mathbb{P}^1$，势函数$\mathbf{h}_{-2}\colon T^*\mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ 可写为

$$\mathbf{h}_{-2}([1, x_1], y_1) = -2x_1y_1 - 2, \quad \mathbf{h}_{-2}([0, 1], v_1) = -2.$$

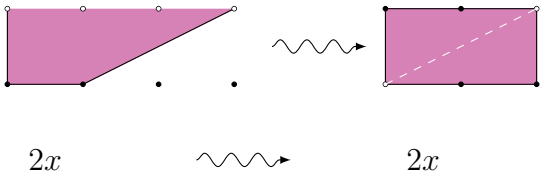


FIGURE 5. LG_1 TO LG_2

如例6.1所示，托里克对偶性给出了对偶 $\mathrm{LG}_1^\vee$ ，其定义在一个具有单个除子且势函数由 3 个单项式构成的簇上，因此与 LG 不同构 1。

现在我们讨论朗道–金兹堡模型 $\mathrm{LG}_2 = (\mathcal{O}_1, f_H)$ 的对偶，其中 $\mathcal{O}_1$是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的半单伴随轨道，并配有由高度函数 $f_H(x,y,z) = 2x$给出的势函数 f_H 。首先，托里克对偶性在此情形下无法应用，因为轨道 $\mathcal{O}_1$ 不是环面簇。因此，需要一套全新的方法。

Gross 和 Siebert 关于内在镜像的方法 [GS] 产生了所需的对偶朗道–金兹堡模型，该模型在 [G]中已有描述。我们总结这一构造。

将备注 4.7 中提到的紧化应用于 $n = 1$ 给出$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathcal{O}_1 \cup \Delta$ 的情形，其中 Δ 是对角线。为了构造内在镜像，我们从对 $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \Delta)$ 开始。由于 Gross 和 Siebert 在对数几何的假设下开展工作，我们需要一个对 (X, D)，其中 D 是一个反典范除子。在这种情况下，反典范除子具有类型 (2, 2)。因此，我们选择一个类型为 (1, 1) 的附加除子 Δ'，使得 $\Delta \cap \Delta' = \{p_1, p_2\}$ 由 2 个点组成。

令 $\widetilde{X}$ 表示在这 2 个点处对 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 吹起所得的结果。随后我们研究这对

$$(\widetilde{X}, D) \qquad \text{with} \qquad D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$$

其中， D_2 和 D_4 分别是 Δ' 和 Δ 的严格变换，而 D_1 和 D_3 是在这 2 个点处吹起得到的例外曲线；因此 $D_1^2 = D_3^2 = -1$.

按照 Gross–Siebert 内在镜像对称方案计算 θ函数，[G] 得到由下式给出的簇

$$\vartheta_2\vartheta_4 = \alpha\vartheta_1 + \beta\vartheta_1^{-1} + \gamma \tag{5}$$

其势函数为 ϑ_2。

改用更标准的代数坐标 $x := \vartheta_1$、$y := \vartheta_2$ ，并将方向 ϑ_4 紧化为 $\mathbb{P}^1$ ，坐标为 $[u : v]$，于是我们要研究的曲面 $S \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 = \{(x, y)\ [u : v]\}$ 由下式给出

$$S := \{uy = v(x + 1 + 1/x)\}$$

其势函数为

$$y = v(x + 1 + 1/x)/u.$$

朗道–金兹堡模型 $\mathrm{LG}_2^\vee = (S, y)$ 是 LG 的对偶2。记 $D_{sg}\,\mathrm{LG}_2^\vee$ 为 LG 的 Orlov奇点范畴$_2^\vee$， [G，第 3 节证明了等价3]

$$D_{sg}\,\mathrm{LG}_2^\vee \equiv \mathrm{Fuk}\,\mathrm{LG}_2\,.$$

注意，此处的朗道–金兹堡模型$_2^\vee$ 与2，例如，势函数 y 具有朗道–金兹堡模型的两个奇点$_2^\vee$ ，它们出现在势函数的同一条纤维上；而势函 $2x$ 数的2 奇点则出现在不同的纤维上，如图6所示。

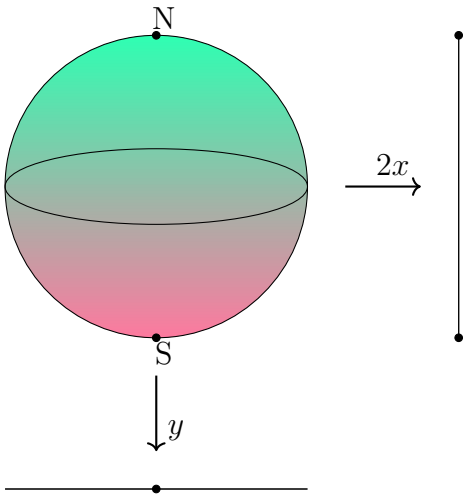


FIGURE 6. 朗道–金兹堡$_2$ 及其镜像

因此，朗道–金兹堡模型的镜像在几何上类似于将原模型旋转90度。

致谢： 我感谢 Elizabeth Gasparim，并应她的请求，作出如下极尽夸张的致谢：没有她的帮助，这项工作本会引发“一场灾难、一场悲剧、一场灾变式的末日浩劫、一场惊天动地的祸患”（Sir Humphrey Appleby，[YM，18：30]）。

作者感谢 Luiz A. B. San Martin 提供了许多有益的建议，并证明了定理 4.1。

作者获得了 MathAmSud ANID 项目 MATH2020011 的部分资助。作者获得了圣保罗研究基金会 FAPESP 的资助项目 2021/11750-7。

REFERENCES

[Ar] A. Arvanitoyeorgos，《旗流形的几何》，Int. J. Geometric Methods in Modern Phys. 3 n.5-6（2006）957–974。[BB] V. V. Batyrev，L. A. Borisov，《广义卡拉比–丘流形的对偶锥与镜像对称》，载于：Mirror symmetry II，AMS/IP Stud. Adv. Math.，71–86，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1997。[BBGGS] E. Ballico，S. Barmeier，E. Gasparim，L. Grama，L. A. B. San Martin，《一种不带射影镜像的朗道–金兹堡模型的李理论构造》，Manuscripta Math. 158 n.1-2（2018）85–101。[BCG] E. Ballico，B. Callander，E. Gasparim，《伴随轨道的紧化及其霍奇图》，J. Algebra Appl. 16（2017）1–17。[BGGS] E. Ballico，E. Gasparim，L. Grama，L. A. B. San Martin，《视为有理映射的若干朗道–金兹堡模型》，Indagationes Math. 28（2017）615–628。[BGRS1] E. Ballico，E. Gasparim，F. Rubilar，B. Suzuki，《拉格朗日骨架、领域与对偶性》，载于《双有理几何、K¨ähler–Einstein 度量与退化》，Springer Proc. Math. Stat. 409（2023）。[BGRS2] E. Ballico，E. Gasparim，F. Rubilar，L. A. B. San Martin，《最小伴随轨道的 KKP 猜想》，即将在 Eur. J. Math. 发表（2023）。[BH] P. Berglund，T. H¨ubsch，《镜像流形的一种广义构造》，载于《镜像流形论文集》，388–407，Int. Press，中国香港，1992。[Bq] O. Biquard，《关于 Nahm 方程以及半单复李代数的泊松结构》，Math. Ann. 304（1996）253–276。

[CGJS] B. Callander，E. Gasparim，R. Jenkins，L. M. Silva，《朗道–金兹堡模型的自对偶性》，J. Geom. Symmetry Phys. 35（2014）1–10。[Cl] P. Clarke，《环面朗道–金兹堡模型的对偶性》，Adv. Theor. Math. Phys 21（2008）。[CLS] D. A. Cox，J. B. Little，H. K. Schenck，《环面簇》，Graduate Studies in Mathematics 124，美国数学学会，2011。[G] E. Gasparim，《伴随轨道的内在镜像》，arXiv:2108.02471。[GGS1] E. Gasparim，L. Grama，L. A. B. San Martin，《伴随轨道上的辛Lefschetz纤维化》，Forum Math. 28 n.5（2016）967–980。[GGS2] E. Gasparim，L. Grama，L. A. B. San Martin，《半单李群的伴随轨道与拉格朗日子流形》，Proc. Edinburgh Math. Soc. 59（2016）1–26。[GKRS] E. Gasparim，T. K¨oppe，F. Rubilar，B.Suzuki，《非紧致卡拉比–丘三流形的变形》，载于第六届拉丁美洲数学家大会论文集，Rev. Colomb. Mat.（2017）。[GR] E. Gasparim，R. Rubilar，《非紧致卡拉比–丘流形、族与菱形的变形》，Contemp. Math. 766（2021）117–132。[GS] M. Gross，B. Siebert，《内在镜像对称与带穿孔的格罗莫夫–威滕不变量》，《代数几何：盐湖城 2015》，199–230，Proc. Sympos. Pure Math. 97 n.2，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯（2018）。[HV] K. Hori，C. Vafa，《镜像对称》，2000，arXiv:hep-th/0002222。[KKP]L. Katzarkov，M. Kontsevich，T. Pantev，《朗道–金兹堡模型的 Bogomolov–Tian–Todorov 定理》，J. Differential Geom. 105 n.1（2017）55–117[Ko] M. Kontsevich，《镜像对称的同调代数》，《国际数学家大会论文集》（苏黎世，1994），Birkh¨auser，巴塞尔（1995）120–139。[Kv] A. G. Kovalev，《Nahm 方程与复伴随轨道》，Q. J. Math. 47（1996）41–58。[Kr] P. B. Kronheimer，《半单复群伴随轨道上的超凯勒结构》，J. London Math. Soc. 42（1990）193–208。¨Ma[M. Manetti，《复流形的变形讲义（微分分次视角下的变形）》，Rend. Mat. Appl. 24 n.7（2004）1–183。] SM[L. A. B. San Martin，《伴随轨道中的高度函数》，私人通信（2016）（未发表）。] YM。《正式访问》，《是，大臣》，A. Jay、J. Lynn 创作，第 1 季第 2 集，BBC2（1980）。