arXiv:2304.13335v1 [math.CV] 26 Apr 2023

所有阶的指数混合性与紧K¨ahler流形自同构的中心极限定理

Fabrizio Bianchi 和 Tien-Cuong Dinh

Abstract. 我们研究具有上同调上的简单作用的紧K¨ahler流形上的一个自同构的唯一最大熵测度。我们证明，关于H¨older可观测函数，该测度具有所有阶的指数混合性。因此，这些可观测函数满足中心极限定理（CLT）。特别地，我们的结果适用于所有具有正熵的紧K¨ahler曲面的自同构。

记号。配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 用于表示函数关于测度的积分，或更一般地，表示流在测试形式上的取值。我们所说的（p,p）-流，是指双次数为（p,p）的流。记号．和 $\gtrsim$ 表示相差一个乘法常数的大小关系。若 R 和 S 是具有相同双次数的两个实流，当 $S \pm R \geq 0$时，我们记为 $|R| \leq S$。注意，这会迫使 S 为正。

给定一个维数为 k 的紧 K¨ahler 流形 X，对于每个 $0 \leq q \leq k$，我们将由 $\mathscr{D}_q(X)$（分别为 $\mathscr{D}_q^0(X)$）表示 X 上正闭（分别为 dd^c-恰当）的 (q,q)-流所生成的实空间。对于 $S \in \mathscr{D}_q(X)$，我们将 S 在 $H^{q,\,q}(X, \mathbf{R})$ 中的上同调类记为 $\{S\}$。

1. 引言

设 (X, ω) 是一个维数为 k 的紧 K¨ahler 流形，f 是 X 的一个全纯自同构。关于此类映射的有趣例子，可参见 [1, 20, 25, 26, 27, 29]；关于其一般性质，可参见 [7, 8, 13, 14]，另见 [4, 5, 6, 19, 23, 28]。我们将 f 的 n 阶迭代记为 f^n。对于 $0 \leq q \leq k$，动力次数 d_q 定义为拉回算子作用于上同调群 $H^{q,\,q}(X, \mathbf{R})$ 时的谱半径。我们有 $d_0 = d_k = 1$，并且对于所有 $n \in \mathbf{N}$，有 $d_q(f^n) = d_q(f)^n$。

根据 Khovanskii [24], Teissier [31], 和 Gromov [21], 的一个基本结果，序列$q \mapsto \log d_q$ 是凹的，另见 [10]。这意味着存在整数 $0 \leq p \leq p' \leq k$ 使得

$$1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_p = \ldots = d_{p'} > \ldots > d_k = 1.$$

如果满足 $p = p'$，并且此外 f^* 在$H^{p,p}(X, \mathbf{R})$ 上的作用具有唯一的模最大特征值，我们就称 f 在上同调上具有简单作用。这样的特征值必然等于 d_p。在这种情况下，我们用 $\delta = \delta(f)$ 表示 $\max_{q \neq p} d_q$ 与 f^* 在 $H^{p,p}(X, \mathbf{R})$ 上作用的其他特征值的模之中的最大值。我们称 d_p 为主动力学度，并称 δ 为 f的辅助动力次数。

从现在起，我们假设 f 在上同调上具有简单作用。它具有唯一的最大熵概率测度 μ，该测度是一个正闭 (p,p)-流 T_+ 与一个正闭 $(k-p, k-p)$-流 T_- 的交（ f的主格林流），见 [13, 14]。该测度也称为 f的平衡测度，并且具有混合性和双曲性。[15] 证明了，对于 H¨older 可观测函数，该测度具有指数混合性，另见[9, 33, 35]。我们将在此处考察以下更强的性质。

定义 1.1. 设 ν 为不变测度，$(E, \|\cdot\|_E)$ 为 X 上实函数的赋范空间，并且对于所有 $1 \leq r < \infty$ 都有 $\|\cdot\|_{L^r(\nu)} \lesssim \|\cdot\|_E$。若 ν 对于

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37F80（主要），32U05、32H50、37A25、60F05（次要）。

Key words and phrases. 自同构，各阶指数混合，中心极限定理。

E 中的可观测函数具有任意阶的指数混合性，即对于所有 $\kappa \in \mathbb{N}^*$，存在常数 $C_\kappa > 0$ 和 $0 < \theta_\kappa < 1$，使得对于所有可观测函数 g_0、.....、$g_\kappa \in E$ 以及整数 $0 =: n_0 \le n_1 \le \cdots \le n_\kappa$，都有

$$\left|\langle \nu, g_0(g_1 \circ f^{n_1}) \dots (g_\kappa \circ f^{n_\kappa})\rangle - \prod_{j=0}^{\kappa} \langle \nu, g_j\rangle\right| \le C_\kappa \cdot \Big(\prod_{j=0}^{\kappa} \|g_j\|_E\Big) \cdot \theta_\kappa^{\min_{0\le j\le \kappa-1}(n_{j+1}-n_j)}.$$

各阶指数混合是动力系统最强的遍历性质之一。它蕴含许多若没有这种定量控制似乎无法达到的统计性质，参见例如 [3, 16]。一个主要的开放问题是，这一性质是否由 1 阶指数混合推出，参见例如 [17, 问题 1。5]我们在 [2] 中证明了每个复 H´enon 映射都具有各阶指数混合。以下是本文的主要结果。

定理 1.2。设 f 是紧 K¨ahler 流形 (X, ω) 上具有上同调上的简单作用的全纯自同构。设 d_p 为其主动力学度，δ 为其辅助动力次数。那么，对于任意 $\delta < \delta' < d_p$ 和 $0 < \gamma \le 2$，f的平衡概率测度 μ 对于所有 $\mathcal{C}^\gamma$ 可观测函数均具有各阶指数混合性 $\kappa \in \mathbb{N}^*$，其中 $\theta_\kappa = (d_p/\delta')^{-(\gamma/2)^{\kappa+1}/2}$，参见定义 1.1。

为了证明定理 1.2，我们依赖于多复势理论和正闭流理论所带来的精细估计。我们部分遵循 [2]，中的策略，但紧致 K¨ahler 流形上不存在多重次调和函数，因此无法采用其中发展出的一个关键步骤。相反，我们依赖于正闭流的超势理论，以及关于足够正则的正闭流收敛到 Green 流的定量估计。下面我们将概述我们的策略。

如 [2]，中所述，以下结论是定理 1.2 和 [3] 的推论。回顾一下，如果 u 满足中心极限定理（CLT），其关于 μ 的方差为 $\sigma^2 \ge 0$，意味着 $n^{-1/2}$（S_n（u）$-n\langle \mu,\ u\rangle$）$\to \mathcal{N}$（0，σ^2）依分布收敛，其中 $\mathcal{N}$（0，σ^2）表示均值为 0、方差为 σ^2 的（对于 $\sigma = 0$ 而言可能是退化的）高斯分布；也就是说，对于任意区间 $I \subset \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \nu\Big\{\frac{S_n(u) - n\langle \mu, u\rangle}{\sqrt{n}} \in I\Big\} = \begin{cases} 1 \text{ when } I \text{ is of the form } I = (-\delta, \delta) & \text{if } \sigma^2 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \displaystyle\int_I e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt & \text{if } \sigma^2 > 0. \end{cases}$$

推论 1.3. 设 f 是一个紧致 K¨ahler 流形 (X, ω) 的全纯自同构，且在上同调上具有简单作用。那么，对于所有 H¨older 可观测函数 $u\colon X \to \mathbb{R}$，关于 f 的最大熵测度 μ 均满足中心极限定理

$$\sigma^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \mu, \tilde{u}(\tilde{u} \circ f^n)\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X (\tilde{u} + \tilde{u} \circ f + \ldots + \tilde{u} \circ f^{n-1})^2 d\mu,$$

其中 $\tilde{u} := u - \langle \mu, u\rangle$。

现在设 X 是一个紧致 K¨ahler 曲面，f 是一个具有正熵的自同构。根据 [22, 36], ，拓扑熵等于 $\log d_1$，另见 [12]。特别地，d_1 严格大于 1。Cantat [4] 的一项结果表明，作用 f^* 在 $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 的所有特征值的模均为 1，除了两个特征值 d_1 和 $1/d_1$ 之外；这两个特征值的重数均为 1。特别地，K¨ahler 曲面的每个正熵自同构在上同调上都具有简单作用。

推论 1.4. 设 f 是紧致 K¨ahler 曲面 X上的正熵全纯自同构。那么，对于每个 $1 < d' < d_1$ 和 $0 < \gamma \le 2$，f 的平衡概率测度 μ 对所有 $\mathcal{C}^\gamma$ 可观测函数均具有 $\kappa \in \mathbb{N}^*$ 阶指数混合性质，其中 $\theta_\kappa = (d')^{-(\gamma/2)^{\kappa+1}/2}$，见定义 1.1。此外，所有 Hölder 可观测函数都满足相对于 f的最大熵测度的中心极限定理。

定理 1.2 的证明策略。利用经典插值理论 [32], , 只需在 $\gamma = 2$的情形下证明该定理。考虑紧致 K¨ahler 流形 X := $X \times X$。X 的自同构 F:=(f, f^{-1}) 及其逆映射在上同调上具有简单作用，最大的动力次数为 k 阶，等于 d_p^2。对于 F，我们可以定义主格林流 T+ 和 T− ，分别为 T+ : $= T_+ \otimes T_-$ 和 T− := $T_- \otimes T_+$。它们满足 $(F^n)^*$(T+) $= d_p^2$T+ 以及 $(F^n)_*$(T−) $= d_p^2$T−。证明 $\kappa + 1$ 可观测函数 $g_0, \dots, g_\kappa$ 的 κ 阶指数混合性质，可归结为证明如下估计

$$|\langle d_p^{-n_1}(F^{n_1/2})_*[\Delta] - \mathbb{T}_-, \Theta_{\{g_j\},\{n_j\}}\rangle| \lesssim \prod_{j=0}^{\kappa} \|g_j\|_{\mathcal{C}^2} d^{-\min_{0\le j\le \kappa-1}(n_{j+1}-n_j)/2}, \tag{1.1}$$

其中， $[\Delta]$ 表示对角线 $\Delta \subset X \times X$上的积分流，$(z, w)$是 $X \times X$上的坐标，我们令

$$\Theta_{\{g_j\},\{n_j\}} := g_0(w)g_1(z)(g_2 \circ f^{n_2-n_1}(z)) \dots (g_\kappa \circ f^{n_\kappa-n_1}(z))\mathbb{T}_+,$$

为简便起见，我们假设 n_1 为偶数。

在 H´enon 映射的情形下，我们在 [2] 中通过证明$\Theta_{\{g_j\},\ \{n_j\}}$ 可以由满足 $dd^c\Theta^\pm \ge 0$ 的适当流 $\Theta^\pm$ 替代，建立了上述收敛性；由于紧 K¨ahler 流形上不存在非平凡的多重次调和函数，这种方法在此处无法奏效。相反，我们对所涉及流的正则性使用了更精细的估计。我们证明，如果 $\Theta_{\{g_j\},\ \{n_j\}}$ 在精确意义下是 H ¨older 连续的（即，将其视为赋予适当度量的正恰当 (k, k)-流空间上的函数时），那么收敛性 (1.1) 成立。为此，我们利用了正闭流的超势理论，该理论由 Sibony 和第二作者发展而来。

主要任务是证明流 $\Theta_{\{g_j\},\{n_j\}}$ 的 H¨older 连续性。注意到，为使（1.1）中的隐含常数不依赖于这些参数，该估计需要对 n_j 和 g_j 一致成立（假设 $\|g_j\|_{\mathcal{C}^2} \le 1$对所有$j$）。还要注意，当只需证明 $\kappa = 1$ 阶混合性时，这个问题并不存在，参见 [15]。这是本文的主要技术要点。

借助正闭流的超势的一般比较原理[11], , 我们证明，只需找到一个正闭流 Ξ ，其超势具有 H¨older 连续性，并且满足

$$|dd^c\Theta_{\{g_j\},\{n_j\}}| \le \Xi \quad \text{for all } n_j \text{ and all } g_j \text{ with } \|g_j\|_{\mathcal{C}^2} \le 1.$$

找到这样的 Ξ 并建立这样的估计，依赖于 d_p 与 f 的辅助动力次数之间的差距，以及我们在本文中同样建立的、关于作用于（$p + 1$, $p + 1$）-流上的 f^* 的 H¨older 估计。

致谢。我们谨向新加坡国立大学、朱西厄-巴黎左岸数学研究所、波兰科学院数学研究所、马晓楠和 Feliks Przytycki 致以谢意，感谢他们的热情接待和优良的工作条件。

本项目获得了法国政府通过未来投资计划（CEMPI卓越实验室 /ANR-11-LABX-0007-01、ANR QuaSiDy /ANR-21- CE40-0016、ANR PADAWAN /ANR-21-CE40-0012-01）以及新加坡国立大学和教育部通过拨款A-0004285-00-00和MOE-T2EP20120-0010提供的资助。本工作还部分获得了西蒙斯基金会奖项663281的支持，该奖项授予波兰科学院数学研究所，用于2021—2023年的工作。

2. Super-potentials of currents on compact Kähler manifolds

本节中，我们固定一个 k 维紧致 K¨ahler 流形 X 及其上的 K¨ahler 形式 ω 。对于 $0 \le q \le k$，我们将由 X 上正闭 (q, q)-流生成的实向量空间记为 $\mathscr{D}_q(X)$，并将 $\mathscr{D}_q(X)$ 中由上同调

$^-$类在 $H^{q,q}(X,\mathbb{R})$ 中为零的流构成的子空间记为 $\mathscr{D}^0_q(\ h_q)$。根据 $\partial\partial$-引理，这就是 $\mathscr{D}_q(X)$ 中恰当的 $_\partial\partial$-流的集合。由于 X 固定，为简便起见，本节中我们省略这些空间对 X 的依赖，并将它们记为 $\mathscr{D}_q$ 和 $\mathscr{D}^0_q$。令 $h_q := \dim H^{q,q}(X,\mathbb{R})$，并固定一组实光滑 (q,q)-形式 $\alpha_q = (\alpha_{q,1},\dots,\alpha_{q,h_q})$，使得上同调类族 $\{\alpha_{q,j}\}$ 构成 $H^{q,q}(X,\mathbb{R})$ 的一组基。我们还选取一组光滑实闭 $(k-q,k-q)$-形式 $\check{}\alpha_q = (\check{}\alpha_{q,1},\dots,\check{}\alpha_{q,h_q})$，它们在 $H^{k-q,k-q}(X,\mathbb{R})$ 中表示 α_q 的一组对偶基，对应庞加莱对偶。

回顾一下，正闭流 $S\in H^{q,q}(X,\mathbb{R})$ 的质量定义为 $\|S\| := \langle S,\omega^{k-q}\rangle$且它仅取决于 S在 $H^{q,q}(X,\mathbb{R})$ 中的上同调类 $\{S\}$。范数 $\|\cdot\|_*$对 $S\in\mathscr{D}_q$ 定义如下：

$$\|S\|_* := \min\{\|S'\|\colon |S|\le S'\}.$$

当 S 是 dd^c-恰当时，范数 $\|S\|_*$ 与由 $\min\|S^+\|$给出的范数等价，其中最小值取遍所有满足 $S^\pm$ 为正闭流的分解 $S=S^+-S^-$。注意，对于每个这样的分解，由等式$\{S^+\}=\{S^-\}$可得 $\|S^+\|=\|S^-\|$。若 $\mathscr{D}_q$ 的一个子集关于 $\|\cdot\|_*$有界，则称其为 $*$-有界。

定义 2.1. 若序列 $S_n\in\mathscr{D}_q$ $*$在流的意义下收敛到 $S\in\mathscr{D}_q$，即 $S_n\to S$，且 $\|S_n\|_*$ 被一个与 n 无关的常数所界定，则称该序列 $S_n\in\mathscr{D}_q$ $*$-收敛到 $S\in\mathscr{D}_q$。

注 2.2. 定义 2.1 中的收敛在 $\mathscr{D}_q$上定义了一种拓扑，这与 $\|\cdot\|_*$给出的拓扑不同。我们也可以用相同的定义在 $\mathscr{D}^0_q$ 上定义一种拓扑。根据定义 2.1 的拓扑， $\mathscr{D}_q$ 和 $\mathscr{D}^0_q$ 中的光滑形式都是稠密的。

对于任意 $0<l<\infty$，记 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^l}$ 为微分形式空间上的标准 $\mathcal{C}^l$ 范数。我们在 $\mathscr{D}_q$ 上定义范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{-l}}$ 和距离 dist_l，如下：

$$\|S\|_{\mathcal{C}^{-l}} := \sup_{\|\Phi\|_{\mathcal{C}^l}\le 1}|\langle S,\Phi\rangle| \quad\text{and}\quad \mathrm{dist}_l(S,S') := \|S-S'\|_{\mathcal{C}^{-l}},$$

其中，第一个定义中的上确界取遍 X 上的光滑（$k-q,k-q$）形式 Φ。注意，由插值 [32], , 对于每个 $0<l<l'<\infty$ 和 $m>0$，我们有

$$\|S\|_{\mathcal{C}^{-l'}}\le\|S\|_{\mathcal{C}^{-l}}\le c_{l,l',m}\|S\|^{l/l'}_{\mathcal{C}^{-l'}} \quad\text{for all } S \text{ such that } \|S\|_*\le m, \tag{2.1}$$

其中某个正常数为 $c_{l,\ l',\ m}$。特别地，上述不等式意味着

$$\mathrm{dist}_{l'}\le\mathrm{dist}_l\le c_{l,l',m}(\mathrm{dist}_{l'})^{l/l'} \quad\text{on}\quad \{S\in\mathscr{D}_p\colon\|S\|_*\le m/2\}.$$

现在我们回顾 $\mathscr{D}_q$ 中流的超势概念，见 [14]。这一概念推广了 X 上 (1,1)-正闭流的势的概念；这类势即 X 上的拟多重次调和函数。这里所用的流 $S\in\mathscr{D}_q$ 的超势是函数，它们关于 S 线性，并定义在 $\mathscr{D}^0_{k-q+1}$ [1] 的一个子集上。

取 $R\in\mathscr{D}^0_{k-q+1}$。由于 $\{R\}=0$，我们有 $R=dd^cU_R$，其中 U_R 是某个 $(k-q,k-q)$-流，我们称其为 R 的势。通过向 U_R 加上 $\check{}\alpha_{q,j}$'s 的适当线性组合，可以假设 U_R 是 α_q-归一化的，即对于所有 $1\le j\le h_q$，有 $\langle U_R,\alpha_{q,j}\rangle=0$。 S 的 α_q-归一化超势 $\mathcal{U}_S$ 定义为

$$\mathcal{U}_S(R) := \langle S,U_R\rangle \tag{2.2}$$

只要上述表达式右侧有定义即可。例如，当 S 光滑，或者当 R 光滑且我们选择 U_R 光滑时，情况就是如此。

引理 2.3。设 S、R、U_R 如上，并且 R 或 S 光滑。

(i) α_q归一化超势 $\mathcal{U}_S$ of S 不取决于α_q归一化势 U_R的选择；特别地，它不取决于$\check{}\alpha_{q,\ j}$'s的选择；

[1]超势可以定义在 $\mathscr{D}_{k-q+1}$ 的一个子集上，但使用 $\mathscr{D}^0_{k-q+1}$ 更为简单；本文中我们只需要这一种定义。

(ii) 如果 $\{S\}=0$，那么 $\mathcal{U}_S$ 不取决于α_q的选择。(iii) 如果 S 是$\alpha_{q,\ j}$'s的线性组合，那么α_q归一化超势 $\mathcal{U}_S$ of$S$ 在 $\mathscr{D}^0_{k-q+1}$上恒等于零。

证明。（i）设 U_R 和 U'_R 是 α_q-规范化的 R 的两个势。由于 $dd^c(U_R-U'_R)=R-R=0$，根据庞加莱对偶性和 $\partial\bar{\partial}$-引理，类 $\{U_R-U'_R\}\in H^{k-q,\ k-q}(X,\mathrm{R})$ 是良定义的，并且 $\langle S、U_R-U_{R'}\rangle$ 只取决于 S 的上同调类。由于 U_R 和 U'_R 都是 α_q-规范化的，此类与所有 $\{\alpha_{q,j}\}$ 的杯积都等于 0。由于 $\{\alpha_{q,j}\}$ 形成 $H^{q,\ q}(X,\mathrm{R})$ 的一个基，故可得 $\langle S、U_R-U'_R\rangle=0$，如所要求。

（ii）由于 $\{S\}=0$，我们对某个（$q-1$，$q-1$）-流 U_S 有 $S=dd^cU_S$。对于 R 的任意势 V_R（不一定是 α_q-规范化的），我们有

$$\langle S,V_R\rangle=\langle dd^cU_S,V_R\rangle=\langle U_S,dd^cV_R\rangle=\langle U_S,R\rangle. \tag{2.3}$$

特别地，上述表达式的第一项与 V_R 的选择无关，最后一项也是如此。断言得证。

(iii) 根据定义，对于所有 j，我们有 $\langle U_R,\alpha_{q,\ j}\rangle=0$。由于 S 是 $\alpha_{q,\ j}$'s 的线性组合，我们有 $\mathcal{U}_S(R)=\langle S,U_R\rangle=0$。断言得证。□

注 2.4. 另一方面，注意到，当 S 不是恰当的时，值 $\langle S,U_R\rangle$，以及因此而来的 α_q-归一化超势 $\mathcal{U}_S$ of S，取决于 α_q。

定义 2.5. 若 $S\in\mathscr{D}_q$ 的超势 $\mathcal{U}_S$ 能够关于定义 2.1 所给出的拓扑连续延拓至 $\mathscr{D}^0_{k-q+1}$，则称 $S\in\mathscr{D}_q$ 具有连续超势。在此情形下，我们也用记号 $\mathcal{U}_S$ 表示延拓后的超势。

命题 2.6。取 q、q'，其中有 $q+q'\leq k$、$S\in\mathscr{D}_q$、$S'\in\mathscr{D}_{q'}$，以及 $R\in\mathscr{D}^0_{k-q+1}$。

(i) 如果 S 光滑，则对于 α_q 的每一种选择，它都有一个连续的 α_q-归一化超势；(ii) 如果 S 具有连续的 α_q-归一化超势，则对于其他每一种归一化 $\alpha'_q=(\alpha'_{q,\ 1},\ \ldots,\ \alpha'_{q,\ h_q})$，它也具有连续的 α'_q-归一化超势。(iii) 如果 S 属于 $\mathscr{D}^0_q$ 且具有连续超势，并且 R 光滑，则有

$$\mathcal{U}_S(R)=\mathcal{U}_R(S),$$

其中 $\mathcal{U}_R$ 是 R 的超势（它也与归一化的选择无关）；(iv) 如果 S' 具有连续超势，则流 $S\wedge S'$ 有良好定义，并且关于 S 连续依赖。

特别地，根据第三项，对于每个 $R\in\mathscr{D}^0_{k-q+1}$，我们都可以定义

$$\mathcal{U}_R(S):=\mathcal{U}_S(R).$$

当 $S\in\mathscr{D}^0_q$ 具有连续超势时。

证明。（i）这直接由超势 $\mathcal{U}_S$的定义可知。

（ii）根据（i），我们可以在 S 中加上一个光滑闭形式。这不会改变问题。因此，可以假设 $\{S\}=0$。根据引理 2.3（ii），$\mathcal{U}_S$ 与归一化无关。断言得证。

（iii）由于 R是光滑的，（2.2）中的右端对每个 $S\in\mathscr{D}^0_p$都有定义。由于 $\{S\}=0$，根据引理 2.3（ii），$\mathcal{U}_S$ 不依赖于归一化，并且（2.3）成立。由于该表达式的最后一项等于 $\mathcal{U}_R(S)$，断言得证。

（iv）这是 [14, 定理 3.3。2]的推论。□

定义 2.7. 取 $S\in\mathscr{D}_q$。对于 $l>0$、$0<\lambda\leq 1$ 和 $M\geq 0$，如果超势$\mathcal{U}_S$关于 S是 (l,λ,M)-H¨older 连续的，即它是连续的并且满足

$$|\mathcal{U}_S(R)|\leq M\|R\|^{\lambda}_{\mathcal{C}^{-l}}\ \text{for every}\ R\in\mathscr{D}^0_{k-q+1}\ \text{with}\ \|R\|_*\leq 1.$$

引理 2.8. 取 $S \in \mathscr{D}_q$和 R、 $R' \in \mathscr{D}^0_{k-q+1}$，其中 $\|R\|_* \le 1$且 $\|R'\|_* \le 1$。

(i) 如果 S 光滑，则 S 的 α_q 归一化超势 $\mathcal{U}_S$ 是 (2, 1, M)-H ¨ Hölder 连续的，其中 $M \le c\|S\|_{\mathcal{C}^2}$ 对某个与 S 无关（但可能依赖于 α_q）的常数 $c > 0$ 成立。(ii) 如果 S 具有一个 (l, λ, M)-H ¨ Hölder 连续的 α_q 归一化超势 $\mathcal{U}_S$，则

$$|\mathcal{U}_S(R) - \mathcal{U}_S(R')| \le 2^{1-\lambda} M \|R - R'\|^{\lambda}_{\mathcal{C}^{-l}}.$$

特别地， $\mathcal{U}_S$ 可视为 $\{R \in \mathscr{D}^0_{k-q+1}$ 上的 Hölder 连续函数： $\|R\|_* \le 1\}$。(iii) 如果 S 具有一个 (l, λ, M)-H ¨ Hölder 连续的 α_q 归一化超势 $\mathcal{U}_S$，那么对于 α'_q 的每一种取值以及某个与 S 无关的 M' ，它也具有 (l, λ, M')-H ¨ Hölder 连续的 α'_q 归一化超势。

证明。(i) 根据引理 2.3(iii)，我们可以在 S 中加上 $\alpha_{q,j}$ 的一个线性组合，并假设 $\{S\} = 0$。根据引理 2.3(ii)，我们有 $\mathcal{U}_S(R) = \langle U_S, R\rangle$，其中 U_S 是 S 的光滑势。断言显然成立。

(ii) 由于 $R - R' \in \mathscr{D}^0_{k-q+1}$和 $\|R - R'\|_* \le 2$，根据定义 2.7，将 $(R - R')/2$ 代替 R即可得出该断言。

(iii) 与命题 2.6(ii) 中一样，由 (i) 可假设 $\{S\} = 0$。该断言现在由引理 2.3(ii) 得出。□

命题 2.9. 取 q, q'，使得 $q + q' \le k$。令 $\alpha_q, \alpha_{q'}, \alpha_{q+q'}$ 如上，并取 $S, T \in \mathscr{D}_q$和 $S' \in \mathscr{D}_{q'}$ ，使得 $\|S\|_* \le 1$, $\|T\|_* \le 1$，且 $\|S'\|_* \le 1$。假设 S 的 α_q- 归一化超势 $\mathcal{U}_S$ 是 (l, λ, M)-H ¨older 连续的，并且 S'的 $\alpha_{q'}$-归一化超势 $\mathcal{U}_{S'}$是 (l', λ', M')-H ¨older 连续的。

（i）对于每个 $l_1 > 0$， $\mathcal{U}_S$ 都是（l_1， λ_1， M_1）-H ¨older 连续的，其中某个 λ_1 和 M_1 取决于 l、 l_1、 λ、 M 和 α_q，但与 S 无关。（ii）如果 S、T 为正且 $T \le S$，那么 T 的任意 α_q-归一化超势 $\mathcal{U}_T$ 都是（2， λ_1， M_1）-H ¨older 连续的，其中某个 λ_1 和 M_1 取决于 l 、 λ 、 M 和 α_q，但与 S 和 T 无关。（ iii ） $S \wedge S'$ 具有一个（ 2， λ_1, M_1）-H ¨older 连续的 $\alpha_{q+q'}$-归一化超势，其中某个 λ_1 和 M_1 取决于 l、 l'、 λ、 λ'、 M、 M'、 α_q、 $\alpha_{q'}$ 和 $\alpha_{q+q'}$，但与 S 和 S' 无关。

证明。第一个断言是 (2.1) 的推论。第二个断言由 [11,定理 1.1] 和第一个断言推出。第三个断言由 [14, 命题 3.4.2] 和第一个断言推出。□

3. Dynamical Green currents

本节沿用第 2 节中的记号。

3.1. 收敛到 Green 流。这里固定一个在上同调上有简单作用的自同构 f of X 。令 p 满足 d_p 是 f 的最大动力次数，并令 δ 为其辅助度。我们还固定 δ' 使得 $\delta < \delta' < d_p$。根据假设， f^* 在 $H^{p,p}(X, \mathrm{R})$ 上的作用中，与特征值 d_p 对应的特征子空间是一个实直线 H^+。 f 的一个 Green (p,p)-流 T_+ 是一个非零的正闭 (p,p)-流，在 $d_p^{-1} f^*$ 下不变，即满足 $f^*(T_+) = d_p T_+$。上同调类 $\{T_+\}$ 生成 H^+。

引理 3.1. 设 f、 d_p、 T_+、 α_p 如上所述。

(i) T_+ 是 $\{T_+\}$ 中唯一的正闭 (p,p)-流，并且它具有一个 $(2, \lambda, M)$-H ¨older 连续的 α_p-归一化超势，其中 λ 和 M 满足某些条件。(ii) 对每个 $S \in \mathscr{D}_p$ ，都有 $d_p^{-n}(f^n)^* S \to s T_+$。这里，常数 s 随 $\{S\}$ 线性变化。更准确地说， s 是满足 $d_p^{-n}(f^n)^*\{S\} \to s\{T_+\}$ 的常数。

证明。(i) 第一个断言是 [14, 定理 4.2.1] 和命题 2.9(i).

（ii）由于 f 在上同调上的作用简单，存在一个常数 s，使得 $d_p^{-n}(f^n)^*\{S\} \to s\{T_+\}$。显然，常数 s 关于 S线性依赖。当 $S \geq 0$ 时，结论由（i）得出。一般情形由线性性得出。□

由于任意在上同调上的作用简单的自同构 f^{-1} 的逆满足相同性质，上述结论对自同构 f^{-1}也成立。由于 $(f^{-1})^* = f_*$，由庞加莱对偶性可得，对于所有 $0 \leq q \leq k$，有 $d_q(f) = d_{k-q}(f^{-1})$。因此，f^{-1}的主动力学度等于 f的主动力学度，并且等于 f^{-1}的 $k-p$ 阶动力次数。对于 f_* 在 H^{k-p} 上的作用，与该特征值对应的特征子空间 $^{k-p}(X, \mathrm{R})$ 是一条实直线 H^-。f的 Green（$k-p$, $k-p$）-流 T_- 是一个非零正闭（$k-p$, $k-p$）-流，在 $d_p^{-1}f_*$作用下保持不变，即满足 $f_*(T_-) = d_pT_-$。上同调类 $\{T_-\}$ 生成 H^-，T_- 是 $\{T_-\}$中唯一的正闭（$k-p$, $k-p$）-流，并且对于每个 $S \in \mathscr{D}_{k-p}$，都有 $d_p^{-n}(f^n)_*S \to sT_-$，其中常数 s 关于 $\{S\}$线性依赖。

注意到，流 T_+ 和 T_- 在乘法常数意义下是唯一的。我们选择 T_+和 T_-，使正测度 $T_+ \wedge T_-$ 的质量为 1。于是，这是 f的唯一最大熵测度；详见 [14] 。

下面的结果对上述收敛给出了定量描述，见 [15,命题 3.1]。注意，常数 c 与 S 无关，这一点见 [15, 命题 2.1]。

命题 3.2. 设 f、d_p、δ' 如上，且 S 是 $\mathscr{D}_p$ 中的一个流，满足 $\|S\|_* \leq 1$。设 s为常数，使得 $d_p^{-n}(f^n)^*(S)$收敛于 sT_+。设 R是 $\mathscr{D}^0_{k-p+1}$中的一个流，满足$\|R\|_* \leq 1$，且其 α_{k-p+1}-归一化超势 $\mathcal{U}_R$对于某个 $\lambda > 0$是 (2, λ, 1)-H ¨older 连续的。设 $\mathcal{U}_{T_+}$ 和 $\mathcal{U}_n$ 分别为 T_+ 和 $d_p^{-n}(f^n)^*(S)$的 α_p-归一化超势。则

$$|\mathcal{U}_n(R) - s\mathcal{U}_{T_+}(R)| \leq c(d_p/\delta')^{-n},$$

其中，$c > 0$ 是与 R、S、s 和 n 无关的常数。

特别地，我们将需要上述结果的以下推论；另请参见 Taflin [30,定理 3.7。1] ，在 $p = 1$ 的情形下也有类似结果。

推论 3.3。设 f、d_p、δ' 如上，并设 S 是 $\mathscr{D}_p$ 中满足 $\|S\|_* \leq 1$ 且使得$d_p^{-n}(f^n)^*(S) \to 0$ 的流。设 ξ 是一个 ($k-p, k-p$)-流，满足 $\|dd^c\xi\|_* \leq 1$，并且 $dd^c\xi$ 的超势 $\mathcal{U}_{dd^c\xi}$（与归一化无关）对于某个 $\lambda > 0$ 是 (2, λ, 1)-H ¨lder 连续的。假设 S 或 ξ 是光滑的。则

$$|\langle d_p^{-n}(f^n)^*(S), \xi\rangle| \leq c(d_p/\delta')^{-n},$$

其中，$c > 0$ 是与 R、S 和 n 无关的常数。

注意到，由于 S 或 ξ 是光滑的，陈述中的配对是良定义的。

证明。我们首先考虑 S 是恰当的情形。回顾一下，在此情形下，S 的超势与归一化无关。由于有 $\{(f^n)^*(S)\} = (f^n)^*\{S\} = 0$，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$(f^n)^*(S)$的超势也具有同样的性质。令 $S_n := d_p^{-n}(f^n)^*(S)$，于是有

$$|\langle S_n, \xi\rangle| = |\mathcal{U}_{S_n}(dd^c\xi)|.$$

根据关于 ξ的假设，我们可以应用命题 3.2，以 $dd^c\xi$ 代替 R 和 $s = 0$。此时断言得证。

现在考虑一般情形。注意到 $d_p^{-n}(f^n)^*\{S\} \to 0$。因此，具有此性质的流 $S \in \mathscr{D}_p$ 的类 $\{S\}$ 构成一个超平面 $H \subset H^{p,\,p}(X, \mathrm{R})$，它是由 $\{T_+\}$ 生成的直线的补空间，并且在 f^* 的作用下保持不变。为简便起见，记 $H^{p,\,p}(X, \mathrm{R})$ 的维数为 h，令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}$ 为实光滑 (p,p)-形式，使得 $\{\alpha_1\}, \ldots, \{\alpha_{h-1}\}$ 构成 H 的一组基，并令 α_h 为属于类

T_+ 的一个光滑形式。我们将考虑 $\mathscr{D}_p$ 中流的 α-归一化超势，其中 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_h)$。此外，固定 $\check{}\alpha=(\check{}\alpha_1,\dots,\check{}\alpha_h)$ 为 α 的一组对偶基。由于 $\{S\}\in H$，我们有

$$S=a_1\alpha_1+\cdots+a_{h-1}\alpha_{h-1}+S''$$

对于某些 $S''\in\mathscr{D}_p^0$ 和 $a_j\in\mathbb{R}$。将证明的第一部分应用于 S''后，只需证明关于 S' 的陈述：$=\sum_{j=1}^{h-1}a_j\alpha_j$ 而不是 S。特别地，注意到 S' 是光滑的，并且 α-归一化超势 $\mathcal{U}_{S'}$ 满足 $\mathcal{U}_{S'}=0$，这是引理 2.3(iii)的结论。

记 $S'_n:=d_p^{-n}(f^n)^*(S')$。我们有

$$S'_n=\sum_{j=1}^{h}c_{n,j}\alpha_j+dd^cV_n,$$

其中，$c_{n,\,j}$由 $\{S'_n\}=\sum_{j=1}^{h}c_{n,\,j}\{\alpha_j\}$ 定义，并且选取 $(p-1,p-1)$-流 V_n 使得 $\langle V_n,\ \check{}\alpha_j\rangle=0$ 对所有 $1\le j\le h$均成立。注意，由于 H的不变性，对于所有 n 都有 $c_{n,\,h}=0$。因此，对于陈述中所述的任意 ξ，我们有

$$\langle S'_n,\xi\rangle=\sum_{j=1}^{h-1}c_{n,j}\langle\alpha_j,\xi\rangle+\langle dd^cV_n,\xi\rangle=\sum_{j=1}^{h-1}c_{n,j}\langle\alpha_j,\xi\rangle+\mathcal{U}_{S'_n}(dd^c\xi),$$

其中，$\mathcal{U}_{S'_n}$ 是 S'_n的 α-归一化超势。根据关于 ξ 的假设，并将 $dd^c\xi$ 代替 R 且取 $s=0$应用命题 3.2，可得 $|\mathcal{U}_{S'_n}(dd^c\xi)|\lesssim(d_p/\delta')^{-n}$。因此，只需证明对于所有 $1\le j\le h-1$，都有$|c_{n,\,j}|\lesssim(d_p/\delta')^{-n}$。

令 A为表示 $f^*_{|H}$相对于基 $\{\alpha_j\}_{1\le j\le h-1}$的$(h-1)\times(h-1)$矩阵，即其第 j列由 $f^*\{\alpha_j\}$ 相对于给定基的坐标给出。记$\underline{c_n}:=(c_{n,\,1},\dots,c_{n,\,h-1})^t$ 以及$\underline{a}:=(a_1,\dots,a_{h-1})^t$，我们看到

$$\underline{c_n}=d_p^{-n}A^n\underline{a}.$$

由于 f^* 在 H 上的作用的谱半径小于 δ'，我们得出 $\|A^n\|=o(\delta'^n)$。因此，$|c_{n,\,j}|\lesssim(\delta'/d_p)^{-n}$，如所需。断言得证。□

在我们的研究中，还需要考虑 $q=p+1$的情形。根据d_{p+1} 的定义以及 $d_{p+1}<d_p$ 这一事实可知，$d_p^{-n}(f^n)^*(S)\to0$，当 $n\to\infty$ 时，对每个 $S\in\mathscr{D}_{p+1}$均成立。之后我们还需要这一收敛的一个更定量的版本，适用于具有 H¨older 连续超势的 S。这由下一个命题给出。回想一下，我们是相对于给定的 $\alpha_{p+1}=(\alpha_{p+1,\,1},\ .....,\ \alpha_{p+1,\,h_{p+1}})$来规范化势的，其中 h_{p+1}是 $H^{p+1,\,p+1}(X,\mathbb{R})$的维数。

命题 3.4. 设 f 如上。取满足 $\|S\|_*\le1$的 $S\in\mathscr{D}_{p+1}$。

(i) $\|d_p^{-n}(f^n)^*S\|_*\to0$如 $n\to\infty$；特别地，$d_p^{-n}(f^n)^*S\to0$如 $n\to\infty$。(ii) 假设 S具有一个 (l,λ,M)-H¨older 连续的 α_{p+1}-归一化超势。那么存在与 S无关的 λ'和 M'，使得对每个 $n\ge0,\ \ d_p^{-n}(f^n)^*S$都具有一个 $(2,\lambda',M')$-H¨older 连续的 α_{p+1}-归一化超势。

证明. 第一个断言由不等式 $d_{p+1}<d_p$ 以及如下事实推出：对每个 $\epsilon>0$，我们有 $\|(f^n)^*(S)\|_*\le C(d_{p+1}+\epsilon)^n\|S\|_*$，其中常数 C与 S 无关，因为正闭流的质量仅取决于其上同调类。下面证明第二个断言。根据命题 2.9(i)，不妨设 $l=4$。

特殊情形。我们先假设 S 恰当，证明第三个断言。回想一下，在这种情况下，超势 $\mathcal{U}_S$ 与归一化无关，见引理 2.3(ii)。

取定 $R\in\mathscr{D}^0_{k-p}$及 $\|R\|_*\le1$，并令 $S_n:=d_p^{-n}(f^n)^*S$。我们需要证明

$$|\mathcal{U}_{S_n}(R)|\le M'\|R\|^{\lambda'}_{\mathcal{C}^{-4}}$$

对于某些与 S 和 R 无关的 λ' 和 M'。于是，该断言由命题 2.9(i) 得出。

取 $L \geq \max(2, \|\Phi\|_{\mathcal{C}^4 \leq 1} \|f^*\Phi\|_{\mathcal{C}^4}$ 的上确界)，其中上确界取遍 X 上的光滑 $(q-1, q-1)$-形式Φ。由于 S 和 R 都是恰当的，根据引理 2.3(ii) 及超势的定义，我们有

$$|\mathcal{U}_{S_n}(R)| = d_p^{-n} \big|\mathcal{U}_S\big((f^n)_*(R)\big)\big| \leq M \|d_p^{-n}(f^n)_*(R)\|_{\mathcal{C}^{-4}}^{\lambda}. \tag{3.1}$$

由庞加莱对偶性，$\|d_p^{-n}(f^n)_*(R)\|_*$ 有界，且其界与 n无关。我们还有

$$\begin{aligned} \|d_p^{-n}(f^n)_*(R)\|_{\mathcal{C}^{-4}} &= \sup_{\|\Phi\|_{\mathcal{C}^4 \leq 1}} \big|\big\langle d_p^{-n}(f^n)_*(R), \Phi \big\rangle\big| \\ &= \sup_{\|\Phi\|_{\mathcal{C}^4 \leq 1}} \big|\mathcal{U}_{d_p^{-n}(f^n)_*(R)}(dd^c\Phi)\big| \\ &\lesssim \theta^n \end{aligned}$$

对于某个 $0 < \theta < 1$，最后一步是将推论 3.3 中的 f、 S和 ξ分别替换为 f^{-1}、 R和 Φ后应用所得。注意，根据引理 2.8(i)，该推论中关于 $dd^c\xi$ 的假设对$dd^c\Phi$ 成立。

首先假设 $n \geq -(2\log L)^{-1}\log \|R\|_{\mathcal{C}^{-4}}$。在这种情况下，我们有

$$\|d_p^{-n}(f^n)_*(R)\|_{\mathcal{C}^{-4}} \lesssim \theta^n \leq \|R\|_{\mathcal{C}^{-4}}^{\frac{1}{2}\frac{|\log\theta|}{\log L}}.$$

结合 (3.1)，这就推出了所需假设。

反之，假设 $n \leq -(2\log L)^{-1}\log \|R\|_{\mathcal{C}^{-4}}$。注意，这意味着 $L^n\|R\|_{\mathcal{C}^{-4}} \trianglelefteq \|R\|_{\mathcal{C}^{-4}}^{1/2}$。因此，对所有这样的 n，我们有

$$\|d_p^{-n}(f^n)_*R\|_{\mathcal{C}^{-4}} \leq \sup_{\|\Phi\|_{\mathcal{C}^4 \leq 1}} d_p^{-n}|\langle R, (f^n)^*\Phi\rangle| \leq d_p^{-n}L^n\|R\|_{\mathcal{C}^{-4}} \leq d_p^{-n}\|R\|_{\mathcal{C}^{-4}}^{1/2},$$

这也说明在这种情况下结论成立。特殊情形的证明至此完成。

一般情形。现在我们考虑一般情形。根据证明的前一部分，并且由于$H^{p+1,\ p+1}(X,\mathrm{R})$是有限维的，只需证明任意有限族光滑形式的类生成 $H^{p+1,\ p+1}(X, \mathrm{R})$时该断言成立。因此，只需对一个固定的光滑形式 S证明该结论。

令 $1 \leq m < \dim\ H^{p+1,\ p+1}(X, \mathrm{R})$为满足以下条件的最小整数：$\{S\}$、$\{f^*(S)\}$、……、$\{(f^m)^*(S)\}$在R上是线性相关的，并通过关系式定义 a_0、……、a_{m-1}

$$\{(f^m)^*(S)\} = a_0\{S\} + \cdots + a_{m-1}\{(f^{m-1})^*(S)\}. \tag{3.2}$$

令 E为 $H^{p+1,\ p+1}(X, \mathrm{R})$中由 $\{S\}$、……、$\{(f^{m-1})^*(S)\}$张成的子空间。那么这些 m类构成 $\mathcal{B}$ 的一个基 E。相对于基 $\mathcal{B}$， $f^*_{|E}$ 的作用由以下$m \times m$ 矩阵表示

$$A_E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

我们将 A_E 的转置记为 B_E。固定 $0 < \epsilon < d_p - d_{p+1}$。根据 d_{p+1} 的定义，我们有 $\|A_E^n\| = \|B_E^n\| \lesssim (d_{p+1} + \epsilon)^n = o(d_p^n)$。

由（3.2）可知

$$U := (f^m)^*(S) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j (f^j)^*(S)$$

是一个恰当形式，即它属于 $\mathscr{D}^0_{p+1}$。由于 $(f^j)^*(S)$、 $0 \leq j \leq m-1$ 和 U 光滑，它们具有 (l, λ, N)-H¨older 连续的 α_{p+1}-归一化超势，其中某个常数为 N。

对于每个 $n \geq 1$，令

$$\mathbb{W}_n := \begin{pmatrix} (f^n)^*(S) \\ (f^{n+1})^*(S) \\ \vdots \\ (f^{n+m-1})^*(S) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{U}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (f^n)^*(U) \end{pmatrix},$$

其中 W_n 和 U_n 都具有 m 个分量。由于 $\mathsf{W}_1 = B_E\mathsf{W}_0 + \mathsf{U}_0$，根据归纳法可得

$$d_p^{-n}\mathbb{W}_n = d_p^{-n}B_E^n\mathbb{W}_0 + d_p^{-n}\sum_{j=0}^{n-1} B_E^{n-j}\mathbb{U}_j.$$

由于 W_n 的第一分量等于 $(f^n)^*(S)$，我们需要考察上述表达式右端第一分量的 α_{p+1}-归一化超势。

根据上述结果，流 $(f^j)^*(S)$、$0 \leq j \leq m-1$ 具有 (l, λ, N)-Hölder 连续的 α_{p+1}-归一化超势。由于 $\|B_E^n\| = o(d_{p+1}^n)$，可知 $\mathsf{W} d_p^{-n} B_E^n \mathsf{W}_0$ 的每个分量的 α_{p+1}-归一化超势都是 $(l, \lambda, M'/2)$-Hölder 连续的，其中 M' 足够大。

为了证明该断言，再次利用 $\|B_E^{n-j}\| = o(d_p^{n-j})$，只需证明存在 l'、λ'、M'，使得对于任意 $n \geq 0$、$U_n := d_p^{-n}(f^n)^*(U)$ 具有 $(l', \lambda', M'/2)$-Hölder 连续的 α_{p+1}-归一化超势。由于 U 是恰当的，这由上面考察的特殊情形立即得到。证明完毕。□

3.2. 格林流的进一步性质。我们将在此证明两个引理，以便在下一节中应用命题 3.2 和推论 3.3。与上一节一样，设 f 是一个自同构，X 在上同调上的作用是简单的，且 d_p 是其最大的动力次数。特别地，格林流 T_+ 具有双次数 (p, p)。我们还固定一个归一化 $\alpha_{p+1} := (\alpha_{p+1,1}, \ldots, \alpha_{p+1,h_{p+1}})$，其中 h_{p+1} 是 H^{p+1} 的维数 $^{p+1}(X, \mathbb{R})$。

引理 3.5。设 f 如上。设 $\kappa \geq 1$ 为一个整数，且 $g_0, \ldots, g_\kappa : X \to \mathbb{R}$ 满足 $\|g_j\|_{\mathcal{C}^2} \leq 1$。则存在一个与 g_j 无关的正常数 c，使得对所有 $\ell_0, \ldots, \ell_\kappa \geq 0$，都有

$$\|dd^c\big((g_0 \circ f^{\ell_0}) \ldots (g_\kappa \circ f^{\ell_\kappa})\big) \wedge T_+\|_* \leq c.$$

证明。令 $\tilde{g}_j := g_j \circ f^{\ell_j}$，并注意到对于所有 j，$i\partial\tilde{g}_j \wedge \bar{\partial}\tilde{g}_j = (f^{\ell_j})^*(i\partial g_j \wedge \bar{\partial} g_j)$。我们有

$$dd^c\big(\tilde{g}_0 \ldots \tilde{g}_\kappa\big) = \sum_{j=0}^{\kappa} dd^c\tilde{g}_j \prod_{l\neq j} \tilde{g}_l + \sum_{0\leq j\neq l\leq \kappa} i\partial\tilde{g}_j \wedge \bar{\partial}\tilde{g}_l \prod_{m\neq j,l} \tilde{g}_m.$$

由于 $\|g_j\|_{\mathcal{C}^2} \leq 1$，我们有 $|g_j| \leq 1$ 和 $|dd^c g_j| \lesssim \omega$。于是

$$\Big|\sum_{j=0}^{\kappa} dd^c\tilde{g}_j \prod_{l\neq j} \tilde{g}_l\Big| \lesssim \sum_{j=0}^{\kappa} (f^{\ell_j})^*(\omega)$$

应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\Big|\sum_{0\leq j\neq l\leq \kappa} i\partial\tilde{g}_j \wedge \overline{\partial}\tilde{g}_l \prod_{m\neq j,l} \tilde{g}_m\Big| \lesssim \sum_{j=0}^{\kappa} i\partial\tilde{g}_j \wedge \overline{\partial}\tilde{g}_j \lesssim \sum_{j=0}^{\kappa} (f^{\ell_j})^*(\omega).$$

由上述不等式及 T_+ 的不变性，我们推得

$$\begin{aligned}\left|dd^c\big((g_0\circ f^{\ell_0})\dots(g_\kappa\circ f^{\ell_\kappa})\big)\wedge T_+\right| &\lesssim \sum_{j=0}^{\kappa}\big(f^{\ell_j}\big)^*(\omega)\wedge T_+\\ &= \sum_{j=0}^{\kappa}(f^{\ell_j})^*(\omega)\wedge d_p^{-\ell_j}(f^{\ell_j})^*(T_+)\\ &= \sum_{j=0}^{\kappa} d_p^{-\ell_j}(f^{\ell_j})^*\big(\omega\wedge T_+\big).\end{aligned}\tag{3.3}$$

现在利用（$p+1$，$p+1$）-流 $\omega\wedge T_+$ 是正闭的。我们有

$$\|(f^{\ell_j})^*\big(\omega\wedge T_+\big)\| = \big\langle (f^{\ell_j})^*\big(\omega\wedge T_+\big), \omega^{k-p-1}\big\rangle = \big\langle \omega\wedge T_+, (f^{\ell_j})_*(\omega^{k-p-1})\big\rangle,$$

其中最后一个形式是正闭的。最后的配对只取决于ω、 T_+的上同调类以及（f^{ℓ_j}）$_*$（ω^{k-p-1}）。因此，它被一个常数乘以（f^{ℓ_j}）$_*$（ω^{k-p-1}）的质量所界定。由于

$$\|(f^{\ell_j})_*(\omega^{k-p-1})\| = \langle \omega^{p+1}, (f^{\ell_j})_*(\omega^{k-p-1})\rangle = \langle (f^{\ell_j})^*(\omega^{p+1}), \omega^{k-p-1}\rangle,$$

对于所有 $\epsilon>0$，这个数也等于 $\|$（f^{ℓ_j}）*（ω^{p+1}）$\|\lesssim$（$d_{p+1}+\epsilon$）^{n}。根据假设，$d_{p+1}<d_p$，因此最后一个求和式中的每一项都有界，这意味着该和也有界。引理得证。□

引理 3.6. 设 f 如上。设 $\kappa\geq 1$ 为一个整数，且 g_0，...，g_κ： $X\to$R 满足$\|g_j\|_{\mathcal{C}^2}\leq 1$。那么存在常数 $0<\lambda\leq 1$ 和 $M>0$，与 g_j's 无关，使得对于所有 ℓ_0，...，$\ell_\kappa\geq 0$，流

$$dd^c\big((g_0\circ f^{\ell_0})\dots(g_\kappa\circ f^{\ell_\kappa})\big)\wedge T_+$$

具有一个 (2, λ, M)-H ¨older 连续超势。

注意，陈述中的流是恰当的，因此其超势与归一化无关。

证明。我们将陈述中的流记为 R。它是一个实恰当的 $(p+1,p+1)$-流。回忆命题 2.9(i)，只需证明 R 对某些 $l>0$、 $0<\lambda\leq 1$和 $M>0$ 具有一个 (l,λ,M)-H¨older 连续超势，其中 $M>0$ 与 g_0、...、g_κ 以及 ℓ_0、...、ℓ_κ 无关。

根据命题 2.9(ii)，只需证明存在一个正闭流 V，它具有一个 (2, λ', M')-H¨older 连续 α_{p+1}-归一化超势，使得 $|R|\leq V$。事实上，这意味着 $V+R$ 和 $V-R$ 都是正的、闭的，并且由 $2V$ 控制。因此，对于某些常数 $0\leq\lambda''\leq 1$和 $M''>0$，它们具有 (2, λ'', M'')-H¨older 连续 α_{p+1}-归一化超势。由此可知， R 具有一个 (2, λ'', $M'+M''$)-H¨older 连续超势。

我们已经在（3.3）中看到

$$|dd^c\big(g_0\circ f^{\ell_0})\dots(g_\kappa\circ f^{\ell_\kappa})\big)\wedge T_+|\lesssim\sum_{j=0}^{\kappa} d_p^{-\ell_j}(f^{\ell_j})^*\big(\omega\wedge T_+\big).$$

为证明该断言，只需证明存在 λ' 和 M'，使得对每个 $j\geq 0$，流 $d_p^{-j}(f^j)^*\big(\omega\wedge T_+\big)$ 都具有一个 (2, λ', M')-H¨older 连续的 α_{p+1}-归一化超势。对于 $j=0$，这由引理 3.1(i) 和命题 2.9(iii) 得出。命题 3.4(ii) 蕴含，对于所有 $j\in$N，同样的结论也成立。证明完毕。□

4. Exponential mixing of all orders and Central Limit Theorem

现在证明定理 1.2。根据插值技术 [32] （如 [9, 第 262-263], 页），只需在 $\gamma = 2$ 的情形下证明该结论。对于 $\kappa = 0$, 结论显然成立。根据归纳法，我们可以假设该结论对至多 κ 个函数成立，并证明其对 $\kappa + 1 \geq 2$ 个函数成立。特别地，根据归纳假设，我们可以给 g_j's 加上一个常数，并假设对所有 $0 \leq j \leq \kappa$, $\langle \mu, g_j \rangle = 0$。我们还可以假设对所有 $0 \leq j \leq \kappa$, $\|g_j\|_{\mathcal{C}^2} \leq 1$。于是，我们需要证明

$$\left| \langle \mu, g_0 (g_1 \circ f^{n_1}) \dots (g_\kappa \circ f^{n_\kappa}) \rangle \right| \lesssim d^{-\min_{0 \leq j \leq \kappa - 1} (n_{j+1} - n_j)/2}.$$

我们还可以假设 n_1 为偶数。事实上，由于 μ 的不变性， n_1 为奇数的情形也可类似处理，只需将 n_j 替换为 $n_j - 1$ （对 $1 \leq j \leq \kappa$），并将 g_0 替换为 $g_0 \circ f^{-1}$。

考虑紧致 K¨ahler 流形 X 上的自同构 $F := X \times X$，其定义为 $F(z, w) := (f(z)\ f^{-1}(w))$。我们首先证明 $F^{-1} = (f^{-1}, f)$ 满足命题 3.2 和推论 3.3 的假设。回顾一下， δ 是 f 的辅助度，并且根据假设有 $\delta < d_p$。

引理 4.1. X 上的自同构 F 和 F^{-1} 在上同调上具有简单作用。更具体地说， F 和 F^{-1} 的 k 阶动力学次数均等于 $d_p(f)^2$,, 它们是 F^* 和 F_* 在 $H^{k,k}$(X, C) 上作用时重数为一的特征值；而 F 和 F^{-1} 的其余动力学次数，以及 F^* 和 F_* 在 $H^{k,k}$(X, C) 上作用时的其他特征值，其模均小于或等于 $d_p \cdot \delta$。

证明。根据 K¨unneth 公式 [34, 定理 11.38], , 对每个 $0 \leq q \leq k$，我们都有一个典范同构

$$H^{q,q}(X \times X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{s+r=q} H^{s,r}(X, \mathbb{C}) \otimes H^{r,s}(X, \mathbb{C}).$$

算子 F^* 和 F_* 保持上述分解。由 [8],, f^* 在 $H^{r,\ s}$(X, C) 上的谱半径等于 f_* 在 $H^{k-r,\ k-s}$(X, C) 上的谱半径，且小于或等于 $\sqrt{d_r d_s}$。结论由 f 和 f^{-1} 在上同调上的作用简单这一事实，以及 p 和 δ的定义得出。□

在本节中，我们用 $T_\pm$ 表示 f 的格林流，用 $\mathbf{T}_\pm$ 表示 F的格林流。更准确地说，我们固定 f 的格林流 $T_\pm$ （它们在相差一个乘法常数的意义下唯一），使得 $\mu = T_+ \wedge T_-$，并令

$$\mathbb{T}_+ = T_+ \otimes T_- \quad \text{and} \quad \mathbb{T}_- = T_- \otimes T_+,$$

关于流的张量积（或笛卡尔积），见 [18, 第 4.1 节。由于 $f^*(T_+) = d_p T_+$且 $f_*(T_-) = d_p T_-$, 我们有 $F^*(\mathbf{T}+) = d_p^2 \mathbf{T}+$ 以及 $F_*(\mathbf{T}_-) = d_p^2 \mathbf{T}_-$。

设 $h := g_1(g_2 \circ f^{n_2 - n_1}) \dots (g_\kappa \circ f^{n_\kappa - n_1})$。回想一下， $\langle \mu, g_0 \rangle = 0$，且 $\|g_j\|_{\mathcal{C}^2} \leq 1$，由归纳假设，只需证明

$$\left| \langle \mu, g_0 (h \circ f^{n_1}) \rangle \right| \lesssim d_p^{-n_1/2}.$$

我们用 (z, w) 表示 $\mathbf{X} = X \times X$ 上的坐标，并设

$$\Psi(z, w) := g_0(w) h(z).$$

引理 4.2。以下断言成立：

(i) $\|dd^c \Psi \wedge \mathbf{T}_+\|_* \leq c$; (ii) $dd^c \Psi \wedge \mathbf{T}+$ 具有一个 $(2, \lambda, M)$-H ¨older 连续超势，

其中 c、 λ 和 M 是依赖于 κ、但不依赖于 g_j's 和 n_j's 的正常数 .

证明。两个断言分别是将引理3.5和3.6应用于 F: X $\to$ X 的结果。这里，对于 $j \geq 1$, 我们使用函数 $\tilde{g}_0(z, w) := g_0(w)$ 和 $\tilde{g}_j(z, w) := g_j(z)$, 对于 $j \geq 2$, 使用整数 $\ell_0 := 0$, $\ell_1 := 0$, 以及 $\ell_j := n_{j+1} - n_j$。□

定理 1.2 的证明到此结束。回想一下，我们假设 n_1 是偶数。由 μ 的不变性可知,

$$\langle \mu, g_0(h\circ f^{n_1})\rangle = \langle \mu, (g_0\circ f^{-n_1/2})(h\circ f^{n_1/2})\rangle.$$

首先，我们通过映射 F 将上述在 X 上的积分变换为在 X 上的积分。也就是说，利用 T+ 的不变性，我们有

$$\begin{aligned}\big\langle \mu, (g_0\circ f^{-n_1/2})(h\circ f^{n_1/2})\big\rangle &= \big\langle T_+\wedge T_-, (g_0\circ f^{-n_1/2})(h\circ f^{n_1/2})\big\rangle\\ &= \big\langle (T_+\otimes T_-)\wedge[\Delta], (g_0\circ f^{-n_1/2}(w))(h\circ f^{n_1/2}(z))\big\rangle\\ &= \big\langle d_p^{-n_1}(F^{n_1/2})^*(\mathbb{T}_+)\wedge[\Delta], (F^{n_1/2})^*\Psi\big\rangle\\ &= \big\langle \mathbb{T}_+\wedge(d_p^{-n_1}(F^{n_1/2})_*[\Delta]), \Psi\big\rangle\\ &= \big\langle d_p^{-n_1}(F^{n_1/2})_*[\Delta], \Psi\mathbb{T}_+\big\rangle.\end{aligned} \tag{4.1}$$

特别注意，根据命题 2.6(iv)，楔积 $[\Delta]\wedge$T+ 是良定义的。

引理 4.3. 我们有 d_p^{-2n}(F^n)_*[Δ] → T_− ，其为 $n\to\infty$。

证明. 根据引理 4.1， F^{-1} 在上同调上具有简单作用，其主动力学度为 k 阶，且等于 d_p^2。由于 $[\Delta]$ 的双次数为 (k,k)，存在 $s\in$ R，使得d_p^{-2n}(F^n)_*[Δ] → sT_− ，其为 $n\to\infty$。因此，我们只需证明 $s=1$。我们有

$$\big\langle d_p^{-2n}(F^n)_*[\Delta], \mathbb{T}_+\big\rangle \to \langle s\mathbb{T}_-, \mathbb{T}_+\rangle = s\langle T_-\otimes T_+, T_+\otimes T_-\rangle = s\|\mu\|^2 = s.$$

另一方面，根据 T+ 的不变性，对于每个 $n\in$ N，我们也有

$$\big\langle d_p^{-2n}(F^n)_*[\Delta], \mathbb{T}_+\big\rangle = \big\langle [\Delta], d_p^{-2n}(F^n)^*\mathbb{T}_+\big\rangle = \langle [\Delta], T_+\otimes T_-\rangle = \|\mu\| = 1.$$

断言得证。 □

我们将把第 2 节和第 3 节的结果应用于 X 上的自同构 F^{-1} 。为此，简便起见，令 h 为 $H^{k,\ k}$(X,R) 的维数，并固定一组实光滑 (k,k)- 形式 $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_h)$，使得 $\{\alpha_1\} = \{$T_−$\}$ 以及$\{\alpha_2\},\dots,\{\alpha_h\}$ 构成 F_*-不变超平面在 $H^{k,\ k}$(X, R) 中的一个基；该超平面与由 $\{T_-\}$生成的直线横截。下文中，我们只考虑 $\mathscr{D}_k$(X) 中流的 α-归一化超势。

由引理 4.2，流 $R := dd^c\Psi\wedge$T+ 满足 $\|R\|_*\lesssim 1$，并且具有一个 $(2,\lambda,M)$-H¨older 连续势 $\mathcal{U}_R$，其中 $0<\lambda\le 1$ 和 $M>0$ 与 g_j和n_j无关。由线性性，经过将 g_0 乘以一个常数后，我们可以假设 $\|R\|_*\le 1$ ，且 $\mathcal{U}_R$ 是 $(2,\lambda,1)$-H¨older 连续的，其中 $0<\lambda\le 1$。回忆一下，$\delta<\delta'<d_p$。由引理 4.1 和 4.3，我们可以在 f、 ξ和 n分别替换为 F^{-1}、 ΨT+和 $n_1/2$ 的情况下应用推论 3.3，从而得到：对于所有满足 d_p^{-2n}(F^n)*(S) $\to 0$ 的光滑 $S\in\mathscr{D}_k$(X)，我们有

$$\big|\big\langle d_p^{-n_1}(F^{n_1/2})_*(S), \Psi\mathbb{T}_+\big\rangle\big| \lesssim (d_p/\delta')^{-n_1/2}.$$

现在令 S_ϵ 为 $[\Delta]-$ T_−的正则化，其中 $S_\epsilon\to[\Delta]-$T_− 为 $\epsilon\to 0$ 且 $\|S_\epsilon\|_*$ 有界[12]。我们还可以在 S_ϵ 中加上一个小的光滑形式，使得 $\{S_\epsilon\} = \{[\Delta]-$T_−$\}$。我们用 S_ϵ 代替 S ，并应用上述不等式，取 $\epsilon\to 0$。由命题 2.6(iv)和引理 4.2可得

$$\big|\big\langle d_p^{-n_1}(F^{n_1/2})_*([\Delta]-\mathbb{T}_-), \Psi\mathbb{T}_+\big\rangle\big| \lesssim (d_p/\delta')^{-n_1/2}. \tag{4.2}$$

结合 (4.1) 和 (4.2)，并利用 T_− 的不变性，可得

$$\big|\big\langle \mu, (g_0\circ f^{-n_1/2})(h\circ f^{n_1/2})\big\rangle - \langle \mathbb{T}_-, \Psi\mathbb{T}_+\rangle\big| \lesssim (d_p/\delta')^{-n}.$$

最后，只需证明 $\langle$T_−, ΨT_+$\rangle = 0$。由于 $\langle\mu, g_0\rangle = 0$，我们有

$$\langle \mathbb{T}_-, \Psi\mathbb{T}_+\rangle = \langle T_-\otimes T_+, g_0(w)h(z)T_+\otimes T_-\rangle = \langle\mu, g_0\rangle\cdot\langle\mu, h\rangle = 0.$$

证明完毕。 □

注 4.4。通过考虑 $F' := (f^l, f^{-m})$ 而非 F，可以改进定理 1.2 中的混合性速率。对适当的正整数 l 和 m，例如参见 [15, 注 4.1]。

References

[1] Bedford E. 和 Kim K.，《有理曲面自同构：线性分式递推》，

J. ( ),

Geom. Anal. **19** 2009 3, 553 583

第 - 期。[2] Bianchi, F. 和 Dinh, T.-C.，每个复 H´énon 映射都具有各阶指数混合性并满足中心极限定理， *preprint* (2023年)，arXiv:2301.13535。[3] Bj¨orklund, M. 和 Gorodnik, A.，各阶指数混合群作用的中心极限定理 *Journal d'Analyse Mathématique* **141** (2020年)，457-482。[4] Cantat, S.，《曲面自同构的动力学》 $K3$, *Acta Math.* **187** (2001年)，第 1 期，1-57。[5] Cantat, S. 和 Dupont, C.，《曲面自同构：Kummer 刚性与最大熵测度》，*J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **22** (2020年)，第 4 期，1289–1351。[6] Dang, N.-B. 和 Herrig, T.，《阿贝尔簇上自同构的动力学次数》， *Adv. Math.* **395** (2022年)，论文编号 108082，共 43 页。[7] De Th´elin, H. 和 Dinh, T.-C.，《紧致 K¨ahler 流形上自同构的动力学》， *Adv. Math.* **229** (2012年)，第 5 期，2640-2655。[8] Dinh, T.-C.，《多值亚纯映射列与层流》， *J. Geom. Anal.* **15** (2005年)，第 2 期，207-227。[9] Dinh, T.-C.，《H´énon 映射的相关衰减》， *Acta Math.* **195** (2005年)，第 2 期，253-264。[10] Dinh T.-C. 和 Nguyˆen V.-A.，《紧致 K¨ahler 流形的混合 Hodge-Riemann 双线性关系》，*Geom. Funct. Anal.* **16** (2006年)，838-849。[11] Dinh, T.-C, Nguyˆen, V.-A, 和 Vu, D.-V.，《全纯映射的超势、流的密度与周期点数》， *Adv. Math.* **331** (2018年)，874–907。[12] Dinh, T.-C. 和 Sibony, N.，《流的正则化与熵》， *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **37** (2004年)，第 6 期，959-971。[13] Dinh, T.-C. 和 Sibony, N.，《紧致 K¨ahler 流形上全纯自同构的 Green 流》，*J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005年)，291-312。[14] Dinh, T.-C. 和 Sibony, N.，《紧致 K¨ahler 流形上的流之超势与自同构的动力学》， *J. Alg. Geom.* **19** (2010年)，473-529。[15] Dinh, T.-C. 和 Sibony, N.，《紧致 K

¨ *Contemp.*

Math. **532** 2010 107 114

ahler 流形上自同构的指数混合》，( )，-。[16] Dolgopyat, D.、Fayad, B. 和 Liu, S.，《动力系统中的多重 Borel–Cantelli 引理与复发的多重对数律》， *preprint* (2021年)，arXiv:2103.08382。[17] Dolgopyat, D.、Kanigowski, A. 和 Rodriguez-Hertz, F.，《指数混合蕴含伯努利性质》， *preprint* (2021年)，arXiv:2106.03147。[18] Federer, H.，《几何测度论》，数学经典丛书，Springer，2014年。[19] Filip, S. 和 Tosatti, V.，《通过 Ricci 平坦度量研究

$K3$ *Amer. J.* 曲面

Math. **143** 2021 5, 1431 1462

自同构的 Kummer 刚性》，( )，第 – 期。[20] Filip, S. 和 Tosatti, V.，《射影 $K3$ 曲面上典范流支撑中的间隙》，*preprint* (2023年)，arXiv:2302.08633。[21] Gromov, M.，《凸集与 K¨ahler 流形》，《微分几何与拓扑进展》，世界科学出版社，新泽西州蒂内克（1990年），1-38。[22] Gromov M.，《全纯映射的熵》，*Enseign. Math.(2)* **49** (2003年)，第 3-4 期，217-235。[23] Guedj V.，《有理映射的遍历性质》，载于《全景与综述》（）。[24] Khovanskii, A.G.，《凸多面体的几何与代数几何》， *Uspehi Mat. Nauk.* **34** (1979年)，第 4 期，160-161。[25] McMullen, C. T.，《曲面上的动力学：Salem 数与 Siegel 圆盘》， *J. Reine Angew. Math.* **545** (2002年)，201–233。[26] McMullen C. T.，《射影平面爆破上的动力学》，*Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **105** (2007年)，49-89。[27] Oguiso K.，《关于紧致超 Kähler 流形自同构的动力学次数的一点注记》，*Manuscripta Math.* **130** (2009年)，第 1 期，101-111。[28] Oguiso, K.，《受复动力学启发的显式双有理几何若干方面》，

Proceedings of the

International Congress of Mathematicians - Seoul 2014 695 721, 2014 ，第

II 卷，– Kyung Moon Sa，首尔，。[29] Oguiso, K. 和 Truong, T. T.，《具有正熵本原自同构的有理三维簇与 Calabi–Yau 三维簇的显式例子》， *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **22** (2015年)，第 1 期，361–385。[30] Taflin, J.，《射影空间全纯自映射的动力学》，博士论文，巴黎第六大学（2011年）。[31] Teissier, B.，《从 Hodge 指数定理到等周不等式》，( )，第 - 期。

[32] Triebel, H., 《插值理论、函数空间、微分算子》，第 2 版，Johann Ambrosius Barth，海德堡，1995年。[33] Vigny, G., 《$\mathbb{P}^k$ 上一般双有理映射的相关性的指数衰减》， *Mathematische Annalen* **362** (2015年)，1033–1054。[34] Voisin, C., 《Hodge 理论与复代数几何》，《专门课程》，第 10 卷，法国数学会，巴黎，2002年。[35] Wu, H., 《$\mathbb{C}^k$ 上 H´ *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **42** 2022 12, 3818 3830 énon–Sibony 映射的指数混合性质》，( )，第 - 期。[36] Yomdin, Y., 《体积增长与熵》， *Israel J. Math.* **57** (1987年)，第 3 期，285-300。

CNRS, Univ. Lille, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France*Email address*: fabrizio.bianchi@univ-里尔.fr

National University of Singapore, Lower Kent Ridge Road 10, Singapore 119076, Singapore *Email address*: matdtc@新加坡国立大学.edu.sg