arXiv:2304.13340v1 [math.OA] 26 Apr 2023

非交换度量空间中的自相似态与投影

SEAN HARRIS

Abstract. 我们将迭代函数系统及其相关分形理论推广到非交换几何的框架中。在此过程中，我们讨论了围绕局部紧非交换度量空间的一些思想。

1. Classical IFS theory

在深入探讨非交换世界之前，我们先简要说明经典迭代函数系统（IFS）和分形理论的基础（有关精确表述和证明，请参见 [19] ）。

设 (X,d) 是一个完备度量空间。在 X 上的迭代函数系统（IFS）是函数 $\mathbb{G}=(g_i:X\to X)_{i=1}^{k}$ 的集合。若 Lipschitz 常数的最大值

$$\Lambda_d(g_i)=\sup_{x\neq y}\frac{d(g(x),g(y))}{d(x,y)}$$

组成 $\mathbb{G}$ 的映射的.....小于 1。

给定一个严格压缩迭代函数系统 $\mathbb{G}$，存在唯一的非空紧子集 $K_{\mathbb{G}}\subset X$，满足以下方程

$$K_{\mathbb{G}}=\bigcup_{i=1}^{k}g_i\left(K_{\mathbb{G}}\right),$$

它被称为 $\mathbb{G}$ 的吸引子。上述方程体现了 $K_{\mathbb{G}}$ 的自相似性。这个集合通常——但并非总是——具有“分形”性质（如分数维、正测度边界等）。

或者，给定权重 $\pi=(\pi_i)_{i=1}^{k}$（即由非负数构成且总和为 1 的 k 元组），存在唯一一个支撑紧的正则博雷尔概率测度 μ，定义在 X 上，使得

Date：2023年4月27日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：46L89，28A80；次要分类：58B34，46L85。*Key words and phrases.* 迭代函数系统、分形、非交换几何、非交换度量空间、非交换拓扑、自相似性。作者谨此感谢统计科学研究捐赠基金、澳大利亚国立大学的 MSI 以及 ARC Discovery 项目 DP160100941 提供的经费支持。

that

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} \pi_i g_i^* \mu,$$

其中 $g_i^*\mu$ 是 μ 经由 g_i 的推前。若 π 中没有任何权重为 0，则 μ 的支撑恰好是 $K_{\mathbb{G}}$。

事实上，即使构成 $\mathbb{G}$ 的映射仅“在平均意义下”是压缩的，也可以得到如上所述的一个（通常并非紧支撑的）自相似测度（见 [15] 及其中的参考文献）。

对于严格压缩迭代函数系统产生的吸引子和自相似测度，都有许多表示公式，以及相关的遍历定理。例如，严格压缩迭代函数系统 $\mathbb{G}$ 的吸引子是 $\mathbb{G}$ 中映射的所有有限复合的不动点的闭包，而相应的自相似测度则是上述不动点的某些狄拉克质量的凸组合的弱-$*$ 极限。

自相似铺砌对于调和分析尤其重要。自相似铺砌的存在性依赖于迭代函数系统和分形理论。例如，$\mathbb{R}^n$ 上函数空间的著名 Haar分解（也称为二进分解）将一个函数分解为若干部分，其支撑位于二进方盒内。另一种方法是，Littlewood-Paley 分解将 $\mathbb{R}^n$ 上的函数分解为若干部分，使得它们的傅里叶变换支撑在 $\mathbb{R}^n$ 的 Pontryagin对偶（不包括原点）上的一个由二进环构成的铺砌中。

Haar分解和Littlewood-Paley分解都是欧氏调和分析不可或缺的工具，其许多用途都与它们的自相似性质有关。

假设我们转而关注局部紧（非阿贝尔）群 G上的调和分析。此类情形下 Haar分解的类似物已得到研究（见 [18] 第3章及其中的参考文献）。然而，此时不再存在Pontryagin对偶，因而无法支持Littlewood-Paley分解的类似物。取而代之的是与 $C^*(G)$相关联的非交换拓扑空间，即 G的群 C^*-代数。因此，我们应当寻找 $C^*(G)$的自相似“铺砌”。

本文将迭代函数系统（IFS）、分形理论及其结果推广到非交换几何的框架中。希望这一理论能成为将上述启发式设想变为现实的第一步。

2. Spectral metric spaces

为了将迭代函数系统的经典理论扩展到非交换几何，我们需要度量信息。为此，我们采用 Rieffel、Latr´emoli`ere 等人提出的 C^*代数方法（见[27], [24]），而不是 Kuperberg 和 Weaver 提出的 von Neumann代数方法（见 [21]）。

设 A 是一个 C^*-代数，并设 $L\colon A^{\mathrm{sa}} \to [0,\infty]$ 是定义在 A 的自伴部分上的扩展半范数，使得

(1) 集合 $\mathcal{B}^A := \{c \in A^{\mathrm{sa}}; L(c) < \infty\}$ 在 A^{sa} 中关于范数稠密。(2) 存在一个近似单位 $(I_n)_{n\in N} \subset A$，满足 $L(I_n) \to 0$。(3) L 是 $||\cdot||$-下半连续的，即对于任意 $c \geq 0$, $\{b \in A^{\mathrm{sa}};\ L(b) \leq c\}$ 是 $||\cdot||$-闭包 $\{b \in A^{\mathrm{sa}}; L(b) < c\}$。

我们称这样的一对 (A, L) 为扩展完备谱度量空间。

经典图景中应当想到的是，L 是定义在局部紧（扩展）度量空间上的实值函数集上的Lipschitz半范数，这些函数在无穷远处消失（这里指拓扑意义，而非度量意义）。

我们用 $M(A)$ 表示 A 的乘子代数（关于 $M(A)$ 的细节，参见 [14]），并将按通常方式把 A 和 $M(A)$ 视为 A 的万有包络冯诺依曼代数 A'' 的子代数（我们将其认作 A 的二重对偶）。用 $\mathcal{S}(A)$ 和 $\mathcal{S}(M(A))$ 分别表示 A 和 $M(A)$ 的态集。我们将 $\mathcal{S}(A)$ 与 $\mathcal{S}(M(A))$ 中由严格连续的态构成的子集等同。对于 $R > 0$，我们用 A_R、$M(A)_R$ 分别表示 A、$M(A)$ 的闭单位球，并令

$$\mathcal{B}_R^A := \{c \in A^{\mathrm{sa}}; L(c) \leq R\}.$$

我们通过以下公式定义扩展距离函数 d_L： $\mathcal{S}(A) \times \mathcal{S}(A) \to [0, \infty]$

$$d_L(\phi, \psi) = \sup_{b \in \mathcal{B}_1^A} |\phi(b) - \psi(b)|. \tag{1}$$

等价地,

$$d_L(\phi, \psi) = \inf\{C > 0;\ |\phi(b) - \psi(b)| \leq CL(b) \text{ for all } b \in A^{\mathrm{sa}}\}.$$

扩展距离函数 d_L 将被称为谱距离。当对于某个局部紧扩展度量空间 (X, d)，$A = C_0(X)$，且 L 取为由 d诱导的通常 Lipschitz半范数时，将 X 嵌入 $\mathcal{S}(A)$的映射，即将$x \in X$发送到求值泛函 ev_x，是一个等距映射，也就是说，$d(x, y) = d_L(\mathrm{ev}_x, \mathrm{ev}_y)$。

请注意，d_L 可能取值为 ∞。非交换度量空间领域已经开展了大量工作，旨在避免这些无穷距离，尽管一些自然例子确实包含彼此相距无穷远的态。因此，我们将在此处不再作进一步限制，但代价是，我们的许多定理陈述都将包含与无穷距离相关的条件。我们将在第6.1小节重新审视这一主题。

我们将假设

$$L(b) = \inf\{C > 0;\ |\phi(b) - \psi(b)| \leq C d_L(\phi, \psi),\ \phi, \psi \in \mathcal{S}(A)\}. \tag{2}$$

我们可以不失一般性地这样做，理由如下：给定任意满足我们的三个必要性质（甚至只满足前两个）的 L，只需将 $L(b)$定义为方程（2）右侧出现的量，便可以构造出一个满足全部三个性质的 L，使得 $d_L = d_{\tilde{L}}$，且 L 也满足上述等式。L 的范数下半连续性源于其作为范数连续函数 $b \mapsto |\phi(b) - \psi(b)|/d_L(\phi,\psi)$的逐点上确界，其中$\phi \neq \psi \in \mathcal{S}(A)$。注意，对于任意 $b \in A^{\mathrm{sa}}$，$L(b) \leq L(b)$。

我们还需要考虑将 L 自然延拓到 $M(A)^{\mathrm{sa}}$，即 A 的乘子代数的自伴部分，我们仍将其记为 L。其定义与方程 2 中的公式完全相同，只是定义域改为 $b \in M(A)^{\mathrm{sa}}$。注意，L 在 $M(A)^{\mathrm{sa}}$ 上的严格拓扑下是下半连续的，因为函数 $b \mapsto |\phi(b) - \psi(b)|/d_L(\phi,\psi)$ 是严格连续的（因为 $M(A)$ 上的严格连续线性泛函恰好是 A 上范数连续线性泛函的唯一延拓）。我们用 $\mathcal{B}^{M(A)}$ 表示满足 $L(a) < \infty$ 的 $b \in M(A)^{\mathrm{sa}}$ 的集合，并用 $\mathcal{B}_R^{M(A)}$ 表示满足 $L(b) \leq R$ 的元素 $b \in M(A)^{\mathrm{sa}}$ 构成的（严格闭）集合。

将 L 延拓到 $M(A)^{\mathrm{sa}}$ 后，我们类似地将 d_L 延拓为定义在整个 $\mathcal{S}(M(A))$ 上的扩展距离函数，其公式如下：

$$d_L(\phi,\psi) = \sup_{b \in \mathcal{B}_1^{M(A)}} |\phi(b) - \psi(b)| = \inf\{C > 0;\ |\phi(b) - \psi(b)| \leq CL(b) \text{ for all } b \in M(A)^{\mathrm{sa}}\}$$

注意到，由于 A 在 $M(A)$ 中严格稠密性、$\mathcal{S}(A)$ 中态的（延拓的）严格连续性，以及 L 到 $M(A)^{\mathrm{sa}}$的延拓的严格下半连续性，上述关于 d_L的公式在限制于 $\phi,\psi \in \mathcal{S}(A)$ 时与前一个公式一致。

以下是性质 1 的直接推论。

引理 2.1。如果 $\phi_n \xrightarrow{d_L} \phi$，则 $\phi_n \xrightarrow{w*} \phi$

接下来的两个结果是性质 2 的推论（类似于 Mesland 和 Rennie在 [25] 中的工作）。

引理 2.2。对于任意态 $\phi \in \mathcal{S}(A)$ 和 $\psi \in \mathcal{S}(M(A))\backslash\mathcal{S}(A)$，$d_L(\phi,\psi) = \infty$。

证明。我们假设存在一个近似单位 $(I_n)_{n\in N} \subset A$，满足 $L(I_n) \to 0$。于是 $\phi(I_n) \to 1$，而 $\limsup \psi(I_n) < 1$，因为 ψ限制在 A上时不是一个态。因此 $\liminf |\phi(I_n) - \psi(I_n)| > 0$，而 $L(I_n) \to 0$。整理可得，$d_L(\phi,\psi) = \infty$。□

用英语表述，前一个引理断言，拓扑无穷远与任何点的距离都是无穷大，这正如人们所期望的那样。

引理 2.3. 设 (A, L) 是一个扩展完备谱度量空间。则 $(\mathcal{S}(A)\ d_L)$ 是完备的。

证明. 假设 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(A)$ 是 d_L-柯西列。由 $\mathcal{S}(M(A))$ 的弱-$*$ 紧性（一个含幺 C^*-代数的态空间），我们可以取一个子列，并假设 $\phi_n \xrightarrow{w*} \phi \in \mathcal{S}(M(A))$。对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以选取 M，使得对所有 m、$n > M$ 和 $b \in \mathcal{B}_1^{M(A)}$，都有

$$|\phi_n(b) - \phi_m(b)| < \epsilon.$$

取 g $m \to \infty$ 并利用 $\phi_m \xrightarrow{w*} \phi$这一事实，可知对于所有 $b \in \mathcal{B}_1^{M(A)}$ 、 $n > M$,

$$|\phi_n(b) - \phi(b)| < \epsilon.$$

因此 $\phi_n \xrightarrow{d_L} \phi \in \mathcal{S}(M(A))$。应用前一个引理可推出 $\phi \in \mathcal{S}(A)$，所以（$\mathcal{S}(A)$ d_L）是完备的。□

3. Dual IFS, existence and uniqueness of self-similar states

将经典迭代函数系推广到非交换情形时，自然会想到采用一个由有限个从 C^*-代数 A 到自身的适当 $*$-端同态组成的集合（即将近似单位映为近似单位的 $*$-同态）。然而，这种设定过于严格，甚至无法涵盖交换情形。事实上，若 $A = C_0(X)$，其中 X 是局部紧豪斯多夫空间，那么 A 的适当 $*$-端同态恰好对应于与从 X 到其自身的适当连续函数作前复合（适当是指每个紧集的原像仍为紧集）。例如，这会排除任何映射具有紧像的迭代函数系统（前提是 X 本身非紧）。

因此，我们希望允许“非适当”映射。对于非交换情形，有如下定义：

定义 3.1. 若 $*$-同态 $f: A \to M(B)$ 满足：存在一个递增近似单位 $(I_n)_{n\in N}$，使得 $f(I_n) \to I \in B$ 严格地成立（即对任意$b \in B \subset M(B)$, $||f(I_n)b - b||, ||bf(I_n) - b|| \to 0$），则称其为相对适当的。

注意，从 A 到 $M(B)$ 的相对适当 $*$-同态，恰好就是 Lance 从 A 到 B 的“态射”，它们最初是在 Hilbert C^*-模的研究中引入的（参见 [22]）。Lance 给出了关于它们结构的以下结论（针对我们的情形作了简化；在此情形中，Lance 的 E 取为 $\mathcal{K}(B) \cong B$，且 $\mathcal{L}(E) \cong M(B)$）。

定理 3.2（ [22], 命题 2.1, 2.5）。设 $f: A \to M(B)$ 是一个 $*$-同态。以下条件等价：

- f 是相对适当的。
- f 是一个（唯一的）含幺 $*$-同态 $M(A) \to M(B)$ 的限制，该同态在单位球上严格连续。

我们仍将使用 f 表示上述第二点所保证的唯一延拓。注意，第二点还意味着，对于相对适当的 $*$-同态 $f\colon A \to M(B)$ 和 $g\colon B \to M(C)$，可以复合 f 和 g 的唯一延拓，从而得到 $g\circ f\colon M(A) \to M(C)$，该延拓在单位球上仍然严格连续，因此限制为一个相对适当的

$*$-同态从 A 到 $M(C)$。今后我们将以这种方式复合此类态射。

相对正则性确保对偶映射 $f^*\colon M(B)^* \to A^*$ 将 B 上的态（严格连续延拓）发送为 A上的态，具体验证如下。

引理 3.3。设 $f\colon A \to M(B)$ 是一个相对正则的 $*$-同态，且 $\phi \in \mathcal{S}(B)$。则 $f^*(\phi) \in \mathcal{S}(A)$。

证明。唯一可能的问题是 $f^*(\phi)$ 的范数小于 1。按照相对正则性的定义，取 A 的一个递增近似单位 $(I_n)_{n\in N}$。注意到 $\mathcal{S}(B) \subset \mathcal{S}(M(B))$ 恰好是严格连续态，我们有

$$\lim_{n\in N} f^*(\phi)(I_n) = \lim_{n\in N} \phi(f(I_n)) = \phi(\lim_{n\in N} f(I_n)) = \phi(I) = 1.$$

因此 $||f^*(\phi)|| = 1$。 □

定义 3.4。在 C^*-代数 A 上的对偶迭代函数系统（对偶 IFS）是一个有限列表$\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$，其中的元素为相对适当的 $*$-同态 $f_i\colon A \to M(A)$。

我们将标准的 $(k-1)$-单纯形记为

$$\Delta^k = \{(\pi_1, \ldots, \pi_k) \in \mathbb{R}^k; \pi_1, \ldots, \pi_k \in [0,1], \pi_1 + \ldots + \pi_k = 1\}$$

将严格的 $(k-1)$-单纯形记为

$$\mathring{\Delta}^k = \{(\pi_1, \ldots, \pi_k) \in \mathbb{R}^k; \pi_1, \ldots, \pi_k \in (0,1), \pi_1 + \ldots + \pi_k = 1\}.$$

定义 3.5。给定对偶 IFS $\mathbb{F} = (f_1, .., f_k)$ 和 $\pi = (\pi_1, .., \pi_k) \in \Delta^k$，定义 $\pi \cdot \mathbb{F}^*\colon M(A)^* \to A^*$ 为

$$(\pi \cdot \mathbb{F}^*)\phi = \sum_{i=1}^k \pi_i f_i^* \phi = \sum_{i=1}^k \pi_i \phi \circ f_i.$$

由于对偶 IFS 由相对适当的 $*$-同态组成，$\pi\cdot\mathbb{F}^*$ 限制为一个映射 $\mathcal{S}(A) \to \mathcal{S}(A)$。

我们将 $\Sigma_k(M) = \{1, \ldots, k\}^M$定义为由 k 个符号组成的长度为 M 的码空间。给定 $\pi \in \Delta^k$、一个对偶迭代函数系统 $\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$，以及 $(\omega_1, \ldots, \omega_M) = \omega \in \Sigma_k(M)$，我们定义

$$\pi_\omega = \prod_{m=1}^M \pi_{\omega_m},$$

and

$$f_\omega = f_{\omega_1} \circ \ldots \circ f_{\omega_M}.$$

注意，$\sum_{\omega\in\Sigma_k\,(M)} \pi_\omega = 1$。简单计算可验证

$$(\pi \cdot \mathbb{F}^*)^M \phi = \sum_{\omega\in\Sigma_k(M)} \pi_\omega f_\omega^* \phi$$

对每个 M 均如此。本文将始终利用这一事实。

定义 3.6. 满足以下条件的态 $\phi \in \mathcal{S}(A)$

$$\phi = (\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\phi)$$

称为 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似；当 π 和 $\mathbb{F}$ 可由上下文明确时，也简称为自相似。

定义 3.7. 给定一个扩展完备谱度量空间（A, L）以及 A 上的一个端同态 f，上膨胀因子 Λ_L（f）$\in [0,\infty]$ 定义为

$$\Lambda_L(f) = \sup\{L(f(b)); L(b) \le 1\}.$$

给定一个 $\pi \in \Delta^k$ 以及 A 上的一个对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$ =（f_1, ..., f_k），我们类似地定义 $\Pi \cdot \mathbb{F}^*$ 的 1-和 ∞-膨胀因子为

$$\Lambda_L^1(\pi \cdot \mathbb{F}^*) = \sum_{i=1}^k \pi_i \Lambda_L(f_i) \in [0,\infty],$$

and

$$\Lambda_L^\infty(\mathbb{F}) = \max_{i=1,\ldots,n} \Lambda_L(f_i) \in [0,\infty].$$

如果一个对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$ 满足 Λ_L^∞（$\mathbb{F}$）< 1，则称其为严格压缩的。

注意，给定某个 $C \in [0,\infty]$ 和对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$，使得 Λ_L^1（$\pi \cdot \mathbb{F}^*$）$< C$ 的 $\pi \in \Delta^k$ 的集合是一个（可能为空的）单纯形，因此是（路径）连通的。

引理 3.8。设 (A, L) 为扩展完备谱度量空间，$\mathbb{F} = (f_1, .., f_k)$ 为 A and $\pi \in \Delta^k$ 上的对偶迭代函数系统。则对于任意 $\phi, \psi \in \mathcal{S}(A)$,

$$d_L\left((\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\phi), (\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\psi)\right) \le \Lambda_L^1(\pi \cdot \mathbb{F}^*) d_L(\psi, \psi).$$

证明。给定 $\phi, \psi \in \mathcal{S}(A)$ 和 $b \in \mathcal{B}_1^A$，我们有

$$\begin{aligned}
|(\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\phi)(b) - (\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\psi)(b)| &= \left| \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left(\phi(f_i(b)) - \psi(f_i(b)) \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left| \phi(f_i(b)) - \psi(f_i(b)) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \pi_i L(f_i(b)) d_L(\phi, \psi) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \pi_i \Lambda_L(f_i) d_L(\phi, \psi) \\
&= \Lambda_L^1(\pi \cdot \mathbb{F}^*) d_L(\phi, \psi),
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由第2节中提到的 d_L 的等价表述，以及以下事实得出： $\mathcal{S}(A)$ 中态之间的距离可以通过与 $M(A)$ 中的元素进行配对来计算^{sa}，而不必仅使用 A^{sa}。对 $b \in \mathcal{B}_1^A$ 取上确界即可得到结果。□

前述定理和引理直接给出以下推论：

定理 3.9. 设 (A, L) 是一个扩展完备谱度量空间， $\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ 是 A 和 $\pi \in \Delta^k$ 上的一个对偶迭代函数系统。假设 $\Lambda_L^1(\pi \cdot \mathbb{F}^*) < 1$，并且存在一个 $\phi_0 \in \mathcal{S}(A)$，使得

$$d_L\left(\phi_0, (\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\phi_0)\right) < \infty.$$

则至少存在一个 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似态。特别地，序列

$$\left((\pi \cdot \mathbb{F}^*)^M(\phi_0)\right)_{M=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}(A)$$

是 d_L-收敛的，其极限为 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似态。所有 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似态的集合是凸的，并且如果 ϕ 和 ϕ' 是自相似的，且 $d_L(\phi, \phi') < \infty$，则 $\phi = \phi'$。

证明。应用 Banach不动点定理，但需要注意我们是在扩展完备度量空间（$\mathcal{S}(A)$ d_L）中进行讨论。不动点态集合的凸性由

$\pi \cdot \mathbb{F}^*$ □ 的线性性得出

4. The fractal: support projections

回顾一下，与经典（严格压缩的）迭代函数系统相关的自相似测度，其支撑恰好就是该迭代函数系统的吸引子。本节将研究与对偶迭代函数系统相关的自相似态的支撑投影（以及闭支撑投影），并说明这些对象是自相似且内在的。

给定任意相对适当的 $*$-同态 $f\colon A \to M(B)$，注意到包络冯·诺伊曼代数的泛性质为我们提供了一个 σ-弱连续扩张 $f\colon A'' \to B''$（我们仍用同一符号表示），它是通过将 $M(B)$ 视为作用在 B 的泛表示上而得到的；在该表示中，$M(B)$ 的双交换子为 B''。

σ-弱连续延拓 $f\colon A'' \to B''$ 也延拓了定理 3.2 所保证的延拓 $f\colon M(A) \to M(B)$。这是由 $A \subset M(A)$ A'' 在相关拓扑中的稠密性得出的，同时还利用了这样一个事实：若网 $(a_n)_{n\in N} \subset M(A)$ 严格收敛，则它也 σ-弱收敛到相同的极限（因为 $M(A)$ 的严格连续态恰好是 A'' 的正规态）。

我们用 $\mathcal{P}(A'')$ 表示 A'' 中投影的集合。我们感兴趣的是 $\mathcal{P}(A'')$ 中开投影集和闭投影集的类似物。开投影和闭投影由 Akemann 引入（单位情形见 [1] ）。

定义 4.1（ [1]，定义 II.1）。若投影 $p \in \mathcal{P}(A'')$ 满足：存在一个网 $(a_n)_{n\in N} \subset A$，使得 $0 \le a_n \nearrow p$ 在 A'' 中按 σ-弱拓扑收敛，则称其为开投影。若投影 p 满足 $1-p$ 为开投影，则称其为闭投影。所有开投影的集合记作 $\mathring{\mathcal{P}}(A)$，所有闭投影的集合记作 $\overline{\mathcal{P}}(A)$。

Akemann 证明（ [1], 命题 II.5，例 II.6），任意一组开投影的上确界（在 $\mathcal{P}(A'')$ 中）仍是开投影，但有限组开投影的下确界未必是开投影（对偶地，$\overline{\mathcal{P}}(A) \subset \mathcal{P}(A'')$ 对任意交封闭，但不一定对有限并封闭）。因此，给定任意 $p \in \mathcal{P}(A'')$，我们可以定义其内部

$$\mathring{p} = \bigvee \{q \in \mathring{\mathcal{P}}(A)\,;\, q \le p\}$$

它是小于 p 的最大开投影，其闭包为

$$\overline{p} = \bigwedge \{q \in \overline{\mathcal{P}}(A)\,;\, q \ge p\},$$

它是大于 p 的最小闭投影。注意，投影是开（分别是闭）的，当且仅当它等于其内部（分别是闭包）。

以下是 Alfsen 和 Shultz 给出的闭投影的一个有用刻画。

引理 4.2（ [5]定义 3.56 之前）。 $p \in \mathcal{P}(A'')$ 是闭（分别是开）的，当且仅当配对

$$\mathcal{S}(A) \ni \psi \mapsto \psi(p) \in [0,1]$$

是弱-$*$上半（分别为下半）连续的。

严格来说，Alfsen 和 Shultz 在单位情形下给出了上述结果，但他们的推理也适用于非单位元情形（通过在拟态的弱-$*$ 紧集上进行，而非在非紧的态空间上进行）。

显然，在适当的 $*$-同态下，开投影或闭投影的像仍然是开投影或闭投影（这对应于连续映射下开集或闭集的原像仍为开集或闭集这一事实的非交换类比）。我们将验证这一结论对相对适当的 $*$-同态也成立。

引理 4.3. 假设 $f\colon A \to M(B)$是相对适当的。那么

$$f\left(\mathring{\mathcal{P}}(A)\right) \subset \mathring{\mathcal{P}}(B) \text{ and } f\left(\overline{\mathcal{P}}(A)\right) \subset \overline{\mathcal{P}}(B).$$

证明. 我们只需验证两个包含关系中的一个；另一个可通过取正交补，并利用 f 的延拓是含幺的这一事实得出（无论将其视为 $M(A) \to M(B)$还是 $A'' \to B''$）。

°假设 $p \in \mathcal{P}(A)$。取$(a_n)_{n\in N} \in A$，使得 $0 \leq a_n \nearrow p$ (σ-弱地)。那么，由（相应延拓的）f的 σ-弱连续性可知，$0 \leq f(a_n) \nearrow f(p)$。

对于每个 $n \in N$，我们有 $f(a_n) \in M(A)^{\mathrm{sa}}$。因此，由 [14], 定理 3.12.9 和命题 3.11.8 可知，配对

$$\mathcal{S}(B) \ni \phi \to \phi(f(a_n))$$

是弱-$*$ 连续的。但与 $f(p)$ 的配对是上述各项的逐点上确界°，因此是弱-$*$ 下半连续的。故 $f(p) \in \mathcal{P}(B)$。 □

回顾一下，对于给定的态 $\phi \in \mathcal{S}(A)$，ϕ 的支撑投影 supp(ϕ) 是满足 $\phi(p) = 1$ 的投影 $p \in \mathcal{P}(A'')$ 的下确界。即

$$\operatorname{supp}(\phi) = \bigwedge \{p \in \mathcal{P}(A'');\ \phi(p) = 1\}.$$

我们也会关注闭支撑投影 supp(ϕ)，它就是 supp(ϕ) 的闭包。根据前面的讨论，我们还可以得到

$$\overline{\operatorname{supp}}(\phi) = \bigwedge \{p \in \overline{\mathcal{P}}(A);\ \phi(p) = 1\}.$$

值得注意的是，$\phi(\operatorname{supp}(\phi)) = \phi(\overline{\operatorname{supp}}(\phi)) = 1$，尽管对于 Borel 概率测度，类似的陈述并不总是成立（我们的（正规）态对应于正则 Borel 测度的非交换类比，而经典支撑的测度始终为全测度）。

定理 4.4. 假设 (A, L) 是一个扩展完备谱度量空间，且 $\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ 是 A 上的一个对偶迭代函数系统。假设 $\pi, \pi' \in \mathring{\Delta}^k$ 满足 $\Lambda_L^1(\pi \cdot \mathbb{F}^*)\ \Lambda_L^1(\pi' \cdot \mathbb{F}^*) < 1$。

那么，对于任意两个态 ϕ, ϕ'，若它们分别是 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似和 $(\pi' \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似的，且还满足 $d_L(\phi, \phi') < \infty$，则有

$$\overline{\operatorname{supp}}(\phi) = \overline{\operatorname{supp}}(\phi').$$

注意，我们限制 π 和 π' 属于上述严格标准$(k-1)$-单纯形。这样一来，构成 $\mathbb{F}$ 的所有相对适当的 $*$-同态都会实际出现在 $\pi \cdot \mathbb{F}^*$ 和 $\pi' \cdot \mathbb{F}^*$中。另一种做法是要求 π 和 π' 恰好在相同的指标处非零。

证明。设$p = \overline{\operatorname{supp}}(\phi)$且 $q = \overline{\operatorname{supp}}(\phi')$。

首先注意，由于 ϕ 是 $\pi \cdot \mathbb{F}^*$的不动点，对于任意 M，我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \phi(p) \\ &= (\pi \cdot \mathbb{F}^*)^M(\phi)(p) \\ &= \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega f_\omega^* \phi(p). \end{aligned}$$

由于 $\sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega = 1$ 且一切均为非负数，因此只有当对每个 $\omega \in \Sigma_k(M)$ 都有 $f_\omega^* \phi(p) = 1$ 时，这才可能成立。

利用 ϕ' 在 $\pi' \cdot \mathbb{F}^*$ 作用下保持不变这一事实，并结合引理 3.8，对于 $M \in \mathbb{N}$，我们有

$$d_L\left(\phi', (\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M(\phi)\right) \leq \Lambda_L^1 (\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M d_L(\phi', \phi).$$

由于 $d_L(\phi', \phi) < \infty$，因此我们可以得出结论 $(\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M \phi \xrightarrow{d_L} \phi'$。由于 d_L-收敛蕴含弱-$*$ 收敛，我们还得到 $(\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M \phi \xrightarrow{w*} \phi'$。

我们断言，对于每个 $M \in \mathbb{N}$，都有 $(\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M \phi(p) = 1$。为证明这一点，我们有

$$\begin{aligned} (\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M \phi(p) &= \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi'_\omega f_\omega^* \phi(p) \\ &= \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi'_\omega \\ &= 1. \end{aligned}$$

由于 p 是一个闭投影，与 p 配对在 $\mathcal{S}(A)$ 上是弱-$*$ 上半连续的（引理 4.2）。因此

$$1 = \limsup_{M \to \infty} (\pi' \cdot \mathbb{F}^*)^M(\phi)(p) \leq \phi'(p) \leq 1,$$

因此 $\phi'(p) = 1$。根据 q 在具有此性质的闭投影中具有最小性，我们推得$q \leq p$。交换 p 和 q 的角色，同样可以得出 $p \leq q$，因此它们必然相等。□

鉴于定理 4.4，我们可以将对应于对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$ 和 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$ 的闭支撑投影视为 $\mathbb{F}$ 的吸引子的类比，而不依赖于权重 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$ 的具体选择（但扩展度量所带来的复杂情况除外）。

人们可能会希望，自相似态的（闭）支撑投影本身也是自相似的。然而，这里有个问题：我们的态射方向恰好相反。交换 C^* 代数上的对偶迭代函数系统对应于谱上的经典迭代函数系的前复合，因此，投影（对应于谱的子集）上的作用是取原像。然而，经典迭代函数系的吸引子在直接像作用下是自相似的。

人们或许会希望，在非交换情形下，可以在态空间层面取直接像（通过对偶映射 $\mathbb{F}^* = (f_1^*, \ldots, f_k^*)$），然后利用态空间的（某些）子集与 A'' 中的（某些）投影之间的某种等价关系。然而，相关的态空间子集是（弱-$*$ 闭）面，而面的像未必仍是面。

为了解决这一问题，我们给出如下定义。

定义 4.5. 设 $f\colon\ A \to M(B)$ 是 C^*-代数之间的相对适当态射，我们将上原像 $f_{\geq}^{-1}\colon\ \mathcal{P}(B'') \to \mathcal{P}(A'')$ 定义为

$$f_{\geq}^{-1}(p) = \bigwedge \{q \in \mathcal{P}(A);\ f(q) \geq p\}.$$

由于我们只考虑相对适当态射（它们具有含幺 σ-弱连续扩张），所以上述交集从不取自空集。注意，如果（ f 的 σ-弱连续扩张）可逆，则 $f_{\geq}^{-1} = f^{-1}|_{\mathcal{P}(B'')}$。

有了这一定义，我们便可以描述自相似态的支撑投影所具有的自相似性质。注意，即使不存在压缩性，以下定理仍然适用（即与 $\Lambda_L^1(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$ 的取值无关）。

定理 4.6. 设 A 是 C^*-代数，$\mathbb{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ 是 A 上的一个对偶迭代函数系统，并且 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$。假设 $\phi \in \mathcal{S}(A)$ 是 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似的。则

$$\operatorname{supp}(\phi) = \bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\operatorname{supp}(\phi)),$$

and

$$\overline{\operatorname{supp}}(\phi) = \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\overline{\operatorname{supp}}(\phi)) \right)}.$$

证明。我们将通过证明不等式在两个方向上均成立来验证第一个陈述。

在定理 4.4 的证明中已证明，对每个 i，都有 $\phi(f_i(\mathrm{supp}(\phi))) = 1$，这意味着根据极小性，对每个 i，都有 $f_i(\mathrm{supp}(\phi)) \geq \mathrm{supp}(\phi)$。因此，根据上原像的定义，

$$(f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi)) \leq \mathrm{supp}(\phi)$$

对每个 i，因此

$$\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi)) \leq \mathrm{supp}(\phi).$$

对于另一个不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\phi\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi))\right) &= (\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\phi)\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi))\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \pi_j \phi \circ f_j \left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi))\right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{k} \pi_j \phi \circ f_j \left((f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi))\right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{k} \pi_j \phi(\mathrm{supp}(\phi)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \pi_j \\
&= 1,
\end{aligned}$$

这里我们用到了每个 f_i 都是保序的这一事实，并且根据上原像的定义，$f_i\left((f_i)_{\geq}^{-1}(p)\right) \geq p$。因此，由 $\mathrm{supp}(\phi)$的极小性可得另一个不等式

$$\mathrm{supp}(\phi) \leq \bigvee_{i=1}^{k} f_{i\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi)).$$

既然已证明两个方向的不等式，我们便得出

$$\mathrm{supp}(\phi) = \bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi)).$$

现在证明第二个陈述。对上述等式两边取闭包可得

$$\overline{\mathrm{supp}}(\phi) = \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\mathrm{supp}(\phi))\right)}.$$

与之前一样，由于 $\phi(\overline{\text{supp}}(\phi)) = 1$，我们必然有 $\phi(f_i(\overline{\text{supp}}(\phi))) = 1$ 对每个 i 都成立。根据引理 4.3，每个 $f_i(\overline{\text{supp}}(\phi))$ 都是闭集，因此 $\overline{\text{supp}}(\phi)$ 的极小性意味着

$$\overline{\text{supp}}(\phi) \leq f_i(\overline{\text{supp}}(\phi)).$$

因此，依据前文相同的推理，

$$\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\overline{\text{supp}}(\phi)) \leq \overline{\text{supp}}(\phi).$$

由于右侧的投影是闭投影，且闭包保持序关系，我们有

$$\overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\overline{\text{supp}}(\phi))\right)} \leq \overline{\text{supp}}(\phi).$$

结合以下事实：

$$\overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\text{supp}(\phi))\right)} \leq \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\overline{\text{supp}}(\phi))\right)},$$

通过夹逼可得

$$\overline{\text{supp}}(\phi) = \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(\overline{\text{supp}}(\phi))\right)}.$$

□

因此，自相似态的支撑投影和闭支撑投影本身分别在投影格和闭投影格中都是自相似的。

前一个定理可能会带来一些问题。请注意，定理 4.4 仅适用于闭支撑投影，因此，能够捕捉迭代函数系统内在信息的是闭投影。然而，闭支撑投影只有在对一组投影的并取闭包后才具有自相似性，而并的闭包并未得到很好的理解（如前所述，有限个闭投影的并甚至可能不是闭的）。另一方面，支撑投影本身具有自相似性，但问题在于它可能取决于权重的具体选择 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$。

5. Representation formulas related to strictly contractive dual IFS

我们将注意力转向严格压缩对偶迭代函数系统，即满足以下条件的系统

$$\Lambda_L^{\infty}(\mathbb{F}) = \max_{i=1,\ldots,n} \Lambda_L(f_i) \in [0, \infty] < 1.$$

在经典交换情形下，已知严格压缩迭代函数系统具有紧的吸引子，并且其吸引子可通过这些压缩映射的复合的不动点给出显式公式：

即使不再要求交换性，本节也将证明类似的结论仍然成立。

注意到 $\sup_{\pi\in\mathring{\Delta}^k}\Lambda_L^1\pi\mathbb{F}=\Lambda_L^\infty\mathbb{F}$，因此可以应用前几节的结果，得到对于任意 $\pi\in\mathring{\Delta}^k$ 严格压缩对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$，存在且唯一的（$\pi\cdot\mathbb{F}^*$）-自相似态（有限距离问题除外）。

在接下来的几个定理之前，我们先介绍一些记号。

令 Σ_k 为由 $\{0,\dots,k\}$中的元素组成的所有序列的集合，并赋予其乘积拓扑（每个因子都赋予离散拓扑）以及由各因子幂集的张量积 σ-代数给出的 σ-代数（即由在有限多个指标处取值预先规定的序列集合生成）。注意，根据蒂乔诺夫定理，Σ_k 在所给拓扑下是紧的。

给定 $\pi\in\mathring{\Delta}^k$，令 $\mathbb{P}_\pi$ 为 Σ_k 上的积概率测度，使得在每个因子 $\{0,\dots,k\}$ 上的推前具有密度 π。注意，这意味着

$$\pi_\omega=\mathbb{P}_\pi(\{\omega'\in\Sigma_k;\ \omega'|_M=\omega\})$$

对于每个 $\omega\in\Sigma_k(M)$。

我们将每个 $\omega\in\Sigma_k(M)$ 视为 $\overline{\omega}=(\omega,\omega,\dots)\in\Sigma_k$，因此将 $\Sigma_k(M)$ 看作 Σ_k 的子集。同理，对于 $\omega\in\Sigma_k$，我们令 $\omega|_M=(\omega_1,\dots,\omega_M)\in\Sigma_k(M)$。

本节余下部分中，我们假设 (A,L) 是一个扩展完备谱度量空间，$\mathbb{F}$ 是 (A,L) 上的严格压缩对偶迭代函数系统，且 $\Lambda_L^\infty\mathbb{F}=:\Lambda<1$，并且 $\phi_0\in\mathcal{S}(A)$ 满足

$$C:=\max_{i=1,\dots,k}d_L(\phi_0,f_i(\phi_0))<\infty.$$

Banach不动点定理表明，对于每个 $\omega\in\Sigma_k$，序列 $\left(f^*_{\omega|_M}(\phi_0)\right)_{M=1}^\infty$ 都是 d_L-收敛的，其极限记为 ϕ_ω。同理，对于每个 $\omega\in\Sigma_k(M)$，f^*_ω都有一个与 ϕ_0 有有限距离的唯一不动态，记为 $\phi_{\overline{\omega}}$。我们将简化记法，也将 $\phi_{\overline{\omega}}$记作 ϕ_ω。

通过对 Banach不动点定理所蕴含的界求和，可以很容易地推出，对于每个 $\omega\in\Sigma_k$，$d_L(\phi_0,\phi_\omega)<C/(1-\Lambda)$。

已知映射 $\pi\mapsto\phi_\pi$ 关于 Σ_k 和 d_L 上的乘积拓扑是连续的，参见 [19] 的定理 3.1(3)(vii)。因此 $\{\phi_\omega;\ \omega\in\Sigma_k\}$ 是 d_L-紧的。

应当指出，当将集合 $K_\mathbb{F}:=\{\phi_\omega;\ \omega\in\Sigma_k\}$ 视为经典扩展完备度量空间 $(\mathcal{S}(A)\ d_L)$ 上的经典压缩迭代函数系统时，它恰好是$\mathbb{F}^*$ 的“该” d_L-紧吸引子（在与 ϕ_0的距离有限的 d_L-紧集之中是唯一的）。我们将在稍后的章节中讨论非交换拓扑背景下的紧性。

定理 m 5.1. 对于任意 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$，由下式定义的两列序列 $(\phi^M)_{M=1}^{\infty}$、$(\phi_M)_{M=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(A)$:

$$\phi^M := \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \phi_\omega$$

and

$$\phi_M := (\pi \cdot \mathbb{F}^*)^M(\phi_0)$$

二者均是 d_L收敛的，并具有相同的 d_L极限 ϕ_π。特别地， ϕ_π 是距离 ϕ_0有限的唯一（$\pi \cdot \mathbb{F}^*$）自相似态。

证明。 d_L 的凸性提供了

$$d_L\left(\phi_0, (\pi \cdot \mathbb{F}^*)(\phi_0)\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \pi_i d_L\left(\phi_0, f_i^*(\phi_0)\right) \leq C,$$

因此我们可以应用定理 3.9，推知 ϕ_M d_L收敛于一个（$\pi \cdot \mathbb{F}^*$）自相似态。固定 $b \in M$（A）^{sa}。于是

$$\begin{aligned}
|\phi^M(b) - \phi_M(b)| &= \left| \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \phi_\omega(b) - (\pi \cdot \mathbb{F}^*)^M(\phi_0)(b) \right| \\
&= \left| \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \phi_\omega(b) - \pi_\omega f_\omega^*(\phi_0)(b) \right| \\
&\leq \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \left| \phi_\omega(b) - f_\omega^*(\phi_0)(b) \right| \\
&= \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \left| f_\omega^*(\phi_\omega)(b) - f_\omega^*(\phi_0)(b) \right| \\
&= \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \left| \phi_\omega(f_\omega(b)) - \phi_0(f_\omega(b)) \right| \\
&\leq \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega d_L\left(\phi_\omega, \phi_0\right) L(f_\omega(b)) \\
&\leq \sum_{\omega \in \Sigma_k(M)} \pi_\omega \frac{C}{1-\Lambda} \Lambda^M L(b) \\
&= \frac{CL(b)}{1-\Lambda} \Lambda^M,
\end{aligned}$$

其中第三个等式根据 ϕ_ω 的定义成立，因此 $d^L(\phi_M, \phi^M) \leq C\Lambda^M/(1-\Lambda) \to 0 \,\text{as} M \to \infty$。如前所述， ϕ_M d_L 收敛于 $(\pi \cdot \mathbb{F}^*)$-自相似态 ϕ_π，因此 ϕ^M 也必须 d_L-收敛于 ϕ_π 。

□

上述定理给出了以下两个推论，它们显然是经典情形中相应结论的非交换类比（ [19] 的定理 3.1(3)(v) 和 4.4(4)(i)）。也就是说，经典严格压缩迭代函数系统的吸引子是该迭代函数系统中各映射的复合的不动点集合的闭包，并且相应的自相似测度可通过编码映射的拉回得到明确表示。

推论 5.2。

$$\overline{\operatorname{supp}}\left(\phi_\pi\right)=\overline{\left(\bigvee_{\omega\in\Sigma_k(M),M\in\mathbb{N}}\operatorname{supp}\left(\phi_\omega\right)\right)}.$$

证明。令 p 和 q 分别表示上述等式左侧和右侧的投影。

我们首先证明 $p\leq q$。根据定义，对于所有 M，都有 $\phi^M(q)=1$。结合以下事实：$\phi^M\xrightarrow{d_L}\phi_\pi$（因此相同的极限在弱-$*$意义下也成立），以及与 q 的配对是弱-$*$上半连续的（见引理 4.2），可得

$$1\geq\phi_\pi(q)\geq\limsup_{M\to\infty}\phi^M(q)=1.$$

因此 $\operatorname{supp}(\phi_\pi)\leq q$，再次利用 q 的闭性，我们得到 $p=\operatorname{supp}(\phi_\pi)\leq q$。

最后，我们证明 $p\geq q$。由自相似性可得

$$(\pi\cdot\mathbb{F}^*)^M\phi_\pi(p)=\sum_{\omega\in\Sigma_k(M)}\pi_\omega f_\omega^*\phi_\pi(p)=1$$

对于每个 M。由于每个 π_ω 都具有（严格）正性，这意味着对于每个 $\omega\in\Sigma_k(M)$ 以及每个 M，$f_\omega^*\phi_\pi(p)=1$

固定这样一个 $\omega\in\Sigma_k(M)$，并注意到对于每个 j，$\omega^j=(\omega,\ldots,\omega)\in\Sigma_k(jM)$，于是得到

$$1=f_{\omega^j}^*\phi_\pi(p)=\left(f_\omega^*\right)^j\phi_\pi(p).$$

然而，由于 $d_L(\phi_\omega,\phi_\pi)<\infty$ 我们知道 $\left(f_\omega^*\right)^j\phi_\pi\xrightarrow{d_L}\phi_\omega$，因此相同的收敛也成立于弱-$*$拓扑中（引理 2.1）。所以引理 4.2 蕴含

$$1=\limsup_{j\to\infty}\left(f_\omega^*\right)^j\phi_\pi(p)\leq\phi_\omega(p)\leq 1$$

从而 $\phi_\omega(p)=1$。换言之，对于每个 $\omega\in\Sigma_k(M)$ 以及每个 M，$\operatorname{supp}\left(\phi_\omega\right)\leq p$，由此 $p\geq q$ 由 p 的闭性得出。□

Co推论 5.3。由 $g(\omega)=\phi_\omega$ 定义的映射 $g:\ \Sigma_k\to\mathcal{S}(A)$ 是弱-$*$ 可测的，并且

$$\phi_\pi=\int_{\Sigma_k}\phi_\omega d\mathbb{P}_\pi(\omega),$$

积分在弱-$*$ 意义下收敛。特别地， ϕ_π 包含于 $K_{\mathbb{F}}$ 的弱-$*$闭凸包中。

证明。考虑如下函数序列 $g_M\colon \Sigma_k \to \mathcal{S}(A)$，其定义为 $g_M(\omega) = \phi_{\omega|_M}$。每个 g_M 都是简单函数（即由可测集的示性函数构成的有限个 A^* 加权和），因此是弱-$*$ 可测的。

固定 $a \in A$。那么 $g_M(\omega)(a) = \phi_{\omega|_M}(a) \to \phi_\omega(a)$，因为 $\phi_{\omega|_M} \xrightarrow{d_L} \phi_\omega$（所以根据引理 2.1，弱-$*$收敛也成立）。因此， $g(\cdot)(a)$ 是可测函数 $g_M(\cdot)(a)$ 的逐点极限，故其自身也是可测的。

注意到 $|g_M(\cdot)(a)|, |g(\cdot)(a)| \leq ||a|| \in L^1(\Sigma, \mathbb{P}_\pi)$，因此我们可以应用控制收敛定理，推得

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_k} \phi_\omega(a) d\mathbb{P}_\pi(\omega) &= \int_{\Sigma_k} g(\omega)(a) d\mathbb{P}_\pi(\omega) \\
&= \lim_{M\to\infty} \int_{\Sigma_k} g_M(\omega)(a) d\mathbb{P}_\pi(\omega) \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{\omega' \in \Sigma_k(M)} \phi_{\omega'}(a) \mathbb{P}_\pi(\{\omega \in \Sigma_k;\ \omega|_M = \omega'\}) \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{\omega' \in \Sigma_k(M)} \pi_{\omega'} \phi_{\omega'}(a) \\
&= \lim_{M\to\infty} \phi^M(a),
\end{aligned}$$

其中等式 $\pi_{\omega'} = \mathbb{P}_\pi(\{\omega \in \Sigma_k;\ \omega|_M = \omega'\})$ 已在本节引言中提及。从这里出发，弱-$*$极限的唯一性蕴含第二个结论。注意到上述逼近是通过 $K_{\mathbb{F}}$ 中各态的凸组合实现的，最后一个结论便立即得到。□

6. Closing Comments and Future Work

关于自相似态和分形投影，还有许多工作有待完成。下面我们将介绍其中的一些主题，以及在理解这些主题方面取得的进展。

6.1. 由 d_L 诱导的拓扑。

在经典（非扩展）情形下，已知任何严格压缩迭代函数系统都具有紧支撑的自相似态 [19]。这一结果在很大程度上依赖于这样一个事实：由 Monge-Kantorovich 距离诱导的拓扑与态空间上的弱-$*$ 拓扑相关（尽管它们在无界域上并不一致）。

在单位情形下， d_L 所诱导的拓扑是否与弱-$*$ 拓扑一致？Rieffel 的 [26] 定理 1.8对此给出了明确答案。该定理指出，若

A 含幺，且（A, L）是扩展完备谱度量空间，则 $\mathcal{S}$（A）有界当且仅当 $\mathcal{B}_1^A/\mathbb{R}I$ 有界；并且，d_L 在 $\mathcal{S}$（A）上诱导弱-$*$ 拓扑，当且仅当$\mathcal{B}_1^A/\mathbb{R}I$ 全有界（相对于商范数有界／全有界）。

非单位元情形要复杂得多。事实上，正如前面提到的，即使在交换情形下，也不能指望 d_L 拓扑与弱-$*$ 拓扑一致。Latr´emoli`ere 给出了一个例子：态 $\phi$ 在 $C_0(\mathbb{R})$ 上，距离 0 处的狄拉克测度无限远（相对于通常的蒙日-康托罗维奇距离）（ [23], 例 1.2）。事实上， $\phi$ 与任何紧支态的距离都无限远（稍微修改 Latr´emoli`ere 的论证即可验证）。在交换的 σ-紧情形下，紧支态显然在弱-$*$ 意义下稠密（一般情形将在后文的引理 6.12 中验证），因此在此情形下，d_L 拓扑与弱-$*$ 拓扑并不一致。

为规避上述问题（主要是因为 d_L 可能取值为∞），人们尝试过局部化以及对 d_L 进行人为界定（例如参见 [23], [24]及其中的参考文献）。

然而，Cagnache、D'Andrea、Martinetti 和 Wallet 关于 Moyal平面度量结构的研究（见 [12]）表明， d_L 取无穷值或许是一种特性，而非缺陷。Cagnache 等人给出了 Moyal平面 C^*-代数中的等价态；相对于由一个非常合理的利普希茨半范数（源自一个非常合理的谱三元组）所诱导的谱距离，这些态彼此相距无穷远。重要的是，所考虑的利普希茨半范数具有这样的性质：对于任何非单位元的倍数的 a ， $L(a)$ 都不为零（否则很容易找到相距无穷远的态）。鉴于所构造的态彼此等价，Kadison 传递性定理意味着它们都属于态空间中同一个弱-$*$ 紧面，因此不应将无穷距离视为由局部化问题所致，例如 Latr´emoli`ere 的例子。

有鉴于此，在做了一些准备工作之后，我们提出一个自己暂定的、偏向拓扑学的定义。

定义 6.1. 设 A 是一个 C^*-代数。若 $a \in A^{\mathrm{sa}}$ 满足 $0 \leq a \leq I$、 $||a|| = 1$，并且存在 $I_a \in A^{\mathrm{sa}}$ 使得 $0 \leq I_a \leq I$，则称其为紧支撑 bump 函数。

$$I_a a = a.$$

紧支撑 bump 函数的集合记为 $A_{\mathrm{c}\infty}$。

引理 6.2. $A_c \subset A$ 具有稠密线性包。

证明。给定任意满足 $c \in A^+$ 且 $||c|| = 1$ 的 $n \in \mathbb{N}$，令 $g_n : [0,1] \to [0,1]$ 为如下函数：在 $[0, 1/n]$ 上取值为 0，在 $[2/n, 1]$ 上与恒等函数一致，并在两者之间线性插值；再令 $I_n : [0,1] \to [0,1]$ 为如下函数：在 $[1/n, 1]$ 上恒等于 1，在 0 处取值为 0，并在两者之间线性插值。于是

由非含幺 C^*-代数的函数演算， $I_n(c) \in A^{\mathrm{sa}}$， $0 \leq I_n(c) \leq I$，且 $I_n(c)g_n(c) = g_n(c)$，因此 $g_n(C) \in A_{\mathrm{c}}$ 且 $||g_n(c) - c|| \leq 2/n$。由于 A^+ 中范数为 1 的元素所张成的空间在 A 中稠密， A_{c} 所张成的空间在 A 中稠密。□

上述内容有如下有用的推论。

引理 6.3。严格拓扑在有界子集 $M(A)$ 上的限制由半范数 $b \mapsto ||ab||, ||ba||$ 对 $a \in A_c$ 所诱导。

证明。上述半范数集是定义严格拓扑的半范数集的一个（严格）子集，因此一个方向是显然的。对于另一个方向，设 $(b_n)_{n\in N} \subset M(A)$ 是一个有界网，并且 $b \in M(A)$ 满足：对于任意 $a \in A_{\mathrm{c}}$， $||a(b_n - b)||$， $||(b_n - b)a|| \to 0$。根据三角不等式，对于 A_{c} 在 A 中的张成空间，同样的结论也成立。

现在设 $a' \in A$，并固定 $\epsilon > 0$。取某个 $a \in \mathrm{span}(A_{\mathrm{c}})$，使得 $||a - a'|| \leq \epsilon/4 \sup_{n\in N} ||b_n||$，并取 $n \in N$，使得对于所有 $m \geq n$， $||a(b_n - b)||$， $||(b_n - b)a|| \leq \epsilon/2$。于是

$$||a'(b_n - b)|| \leq ||a' - a||||b_n - b|| + ||a(b_n - b)|| \leq \epsilon,$$

另一个乘法顺序也有类似的结果，因此证明完毕。 □

定义 6.4. 给定 $a \in A_{\mathrm{c}}$，我们将 a-局部平坦元素定义为

$$\mathcal{B}_0^a := \bigcap_{R>0} a\mathcal{B}_R^{M(A)}a.$$

应当牢记的经典图景是： $\mathcal{B}_0^a$ 是这样一类 Lipschitz 函数的集合，它们限制在 a 的支撑上时，其 Lipschitz 常数为零。

引理 6.5. 对任意 $a \in A_c$， $\mathcal{B}_0^a$ 是 A^{sa} 的一个实向量子空间。它是包含于 $a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$ 中的最大实向量子空间。

证明. 假设 $r \in \mathbb{R}$，且 b、 $b' \in \mathcal{B}_0^a$。那么对于每个 $R > 0$，存在 b_R、 $b'_R \in \mathcal{B}_R^{M(A)}$，使得 $b = ab_Ra$、 $b' = ab'_Ra$。

显然，如果 $r = 0$，则 $rb \in \mathcal{B}_0^a$。如果 $r \neq 0$，则 $rb = a\tilde{b}_Ra$，其中对于每个 R 都有 $\tilde{b}_R = rb_{R/r} \in \mathcal{B}_R^{M(A)}$，因此 $rb \in \mathcal{B}_0^a$。

同理， $b + b' = a\hat{}b_Ra$ 其中，对每个 $R > 0$， $\hat{}b_R = b_{R/2} + b'_{R/2} \in \mathcal{B}_R^{M(A)}$，因此 $b + b' \in \mathcal{B}_0^a$.

关于极大性：给定任意 $b \in a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$，使得由 b 生成的射线也包含于 $a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$中，可以通过重新缩放推得 $b \in \mathcal{B}_0^a$。由于 L 是一个范数， $a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$ 是凸的且关于取负不变，因此我们得出， $a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$ 中所有射线的和恰好是 $\mathcal{B}_0^a$。□

在非扩展经典度量空间中， $\mathcal{B}_0^a$ 是一维的，并由 a^2张成，这对应于 Lipschitz半范数为 0 的唯一函数是常函数这一事实。然而，

我们研究的是（可能为）扩展度量空间的非交换类比。如果局部紧扩展度量空间（X， d）中的两个点 x、y 彼此相距无穷远，那么必然存在一个任意平坦函数序列 f_i，使得 $|f_i(x) - f_i(y)|$ 严格有下界。因此，若通过紧支撑连续函数 a将其局部化到 $\{x, y\}$ 的一个紧邻域上，那么 $\mathcal{B}_0^a$ 将是二维的（由恒等函数的一个截断函数，以及此类任意平坦函数的截断函数的适当极限张成）。

由此引出我们的定义。

定义 6.6. 扩展完备谱度量空间 (A, L) 称为

- 局部有界的，若 $\mathcal{B}_0^a$ 是一维的，且 $a\mathcal{B}^{M}{}_{(A)}{}_{1}$ $a/\mathcal{B}_0^a$ 在商范数下有界，
- 局部半有界，如果 $\mathcal{B}_0^a$ 是有限维的，并且 $a\mathcal{B}^{M}{}_{(A)}{}_{1}$ $a/\mathcal{B}_0^a$ 在商范数下有界，
- 局部一致，如果 $\mathcal{B}_0^a$ 是一维的，并且 $a\mathcal{B}^{M}{}_{(A)}{}_{1}$ $a/\mathcal{B}_0^a$ 在商范数下全有界，
- 局部半一致，如果 $\mathcal{B}_0^a$ 是有限维的，并且 $a\mathcal{B}^{M}{}_{(A)}{}_{1}$ $a/\mathcal{B}_0^a$ 在商范数下全有界，

对所有 $a \in A_{\mathrm{c}} \cap A^{\mathrm{sa}}$。

如果 A 是含幺的（因此 $I \in A_{\mathrm{c}}$），那么局部有界（分别为局部一致）的概念对应于 [27], 的概念，并且等价于 d_L 有界（分别生成弱-
$*$ 拓扑于 $\mathcal{S}(A)$）。通过稍作修改，同样的证明可以得到 Rieffel 的结果在局部有界/局部一致情形下的类似局部版本；而局部半有界和局部半一致的概念则能推出类似结果，前提是只考虑有限距离态。或许最重要的是，当 A 是交换的时，这些概念会得到我们所预期的结果。

定理 6.7. 若对于某个局部紧豪斯多夫空间 X， $A = C_0(X)$，且 (A, L) 是扩展完备谱度量空间，则 (A, L) 是

- 局部有界，当且仅当 (X, d_L) 是非扩展完备度量空间，
- 局部半有界，当且仅当 (X, d_L) 是扩展完备度量空间，
- 局部一致，当且仅当 (X, d_L) 是非扩展完备度量空间，且 d_L诱导 X 的拓扑，
- 局部半一致，当且仅当（X， d_L）是扩展完备度量空间，并且d_L 诱导 X的拓扑。

上述前两点的证明可由定义直接计算得出。后两点则是将 Arzela-Ascoli 定理应用于 X的紧子集的一个相当简单的结果。

注意，如果 (A, L) 是局部半有界的，那么对于任意 $a \in A_{\mathrm{c}}$ 以及满足 $\phi(a) = \psi(a) = 1$ 的态 ϕ, ψ，$d_L(\phi, \psi) = \infty$ 当且仅当 ϕ 和 ψ 在 $\mathcal{B}_0^a$ 上不一致，否则 $d_L(\phi, \psi) \leq 2\mathrm{diam}\left(a\mathcal{B}_1^{M(A)}a/\mathcal{B}_0^a\right)$。因此，虽然定义 6.6 的最弱情形允许联合局部化的态之间具有无限距离，但这只会发生在有限维态集合中。一般而言，我们有以下定理。

T定理 6.8. 设 (A, L) 是一个扩展完备谱度量空间。那么 (A, L) 是

- 局部有界，当且仅当 d_L 在 F 上有界，
- 局部半有界，当且仅当 d_L 限制在 F 上的取值属于形如 $[0, C(F)] \cup \{\infty\}$ 的集合，其中某个 C 满足 $F \in (0, \infty)$；并且对于每个 $\phi \in F$，F 中与 ϕ 距离无限的那些态都包含于一个有限维凸集中，
- 局部一致，当且仅当 d_L 到 F 的限制诱导了弱-$*$ 拓扑在 F上的限制，
- 局部半一致，当且仅当对每个 $\phi \in F$，d_L 到 $F_\phi := \{\psi \in F;\ d_L(\phi, \psi) < \infty\}$ 的限制诱导了弱-$*$ 拓扑在 F_ϕ上的限制，并且 F 中与 ϕ 相距无穷远的那些态包含在某个有限维凸集中，

对 $\mathcal{S}(A)$ 的每个非空弱-$*$ 紧面 F。

我们省略证明，因为它并无特别启发性，且相关内容散见于文献各处。这是对 [26], 中命题 1.6 和定理 1.8 的证明，或 [23], 中引理2.4 的证明所作的相当繁琐的推广，并结合了以下事实：对于 $\mathcal{S}(A)$ 的任意弱-$*$紧面 F，存在某个 $a \in A_{\mathrm{c}}$，使得对所有 $\phi \in F$，$\phi(a) = 1$（这可由 [5] 中关于 A 的单位化的命题 3.54 得出，再结合一些与引理 6.2 的证明中类似的简单函数演算论证）。

除了定义 6.6 重现了交换情形这一点外，它也足够一般，允许存在一些距离无限远的态，同时又足够严格，希望仍然具有实用价值（见下一小节）。

特别地，我们声称，[12] 中 Cagnache 等人给出的例子是局部半一致的。[12] 中考虑的 C^*-代数 A 同构于可分希尔伯特空间上的紧算子代数，其中 A_{c} 恰好是正的范数为一的有限秩元素集合。给定任意 $a \in A_{\mathrm{c}}$，我们因此可以发现 $a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$ 是一个有限维凸集。于是，根据一条一般性结果，$a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$ 对其最大实向量子空间取商后是一个紧凸集，因此 [12] 中的例子确实是局部半一致的。

局部半一致扩展完备谱度量空间这一框架将在未来的工作中进一步探讨。初步研究表明，这类空间相对于严格拓扑具有良好的紧性性质。特别地，我们提出以下均值遍历型猜想，其证明大部分已完成，并将在上述未来工作中发表。

猜想 6.9。设 (A, L) 是一个局部半一致的扩展完备谱度量空间，且 $f: A \to M(A)$ 是一个相对适当的 $*$-同态，使得存在某个$\Lambda \leq 1$，对于所有 $b \in \mathcal{B}^{M(A)}$，都有 $L(T(b)) \leq \Lambda L(b)$。那么，对于任意 $b \in \mathcal{B}^{M(A)}$，序列

$$\left(b_n := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} T^i(b) \right)_{n=0}^{\infty}$$

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 严格地收敛到某个 b，且 $T(b) = b$。如果 $\Lambda < 1$，则 $L(b) = 0$。

6.2. 紧性。

我们采用与第 5 节相同的记号。

A'' 中闭投影的紧性概念由 Akemann 在 [2]中引入，此后许多学者对其进行了研究，包括 Akemann 和 Bice 的近期工作 [3], 以及 Brown 的工作 [10]。

定义 6.10（ [2], 定义 II.1）。若存在 $a \in A^{\mathrm{sa}}$ 满足 $0 \leq a \leq I$ 且 $ap = p$，则称闭投影 $p \in \overline{\mathcal{P}}$（$A$）为紧的。

文献中还有许多其他刻画紧性的方式，例如，面 F（p）：$= \{\phi \in \mathcal{S}$（A）；由 p 生成的 ϕ（p） $= 1\} \subset \mathcal{S}$（$A$）具有弱-$*$ 紧性（参见 [2]）。我们为态引入以下类似定义。

定义 6.11。若态 $\phi \in \mathcal{S}$（A）在 A 上达到其范数，则称其具有紧支撑。也就是说，存在 $a \in A$ 满足

$$\phi(a) = ||a||.$$

紧支态的集合记作 $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}(A)$。

通过取自伴部分并使用函数演算，我们可以等价地要求上述范数化元 a 满足 $0 \leq a \leq I$。容易验证，当且仅当 supp(ϕ) 是紧的时， ϕ 才是紧支撑的。Kadison 传递性定理蕴含，任意纯态都是紧支撑的（等价~~纯态~~的凸组合也同样如此）。为便于讨论，我们将使用下面这个简短引理。回顾一下，近似单位 $(I_n)_{n \in N} \subset A$ 被称为几乎幂等的，如果对于所有 $m \geq n$ 都有 $I_m I_n = I_n$。注意，根据函数演算论证以及严格正元的存在性，非含幺 σ-代数总是具有几乎幂等的，甚至是对易的序列近似单位。

引理 6.12。给定任意 $\phi \in \mathcal{S}_c(A)$，存在满足 $\phi(a) = 1$ 的 $a \in A_c$。如果 A 包含一个几乎幂等近似单位，则 $\mathcal{S}_c(A) \subset \mathcal{S}(A)$ 是弱-$*$ 稠密子集。

证明。对于第一个结论，若对于满足 $0 \leq a \leq I$ 的 $a \in A$，有 $\phi(a) = 1$，那么对于任意使 1 保持不变的连续 $g: [0,1] \to [0,1]$，都有 $\phi(g(a)) = 1$（例如，可以通过对 ϕ 进行 GNS 构造来证明这一点）。若选择的 g 在 0 的某个邻域内恒为零，则 $g(a) \in A^{\text{sa}}$ 且 $0 \leq g(a) \leq I$（根据非含幺连续函数演算），并且存在某个在 0 处为零的连续 $f: [0,1] \to [0,1]$，使得 $fg = g$，因此 $f(a) \in A^{\text{sa}}$，$0 \leq f(a) \leq I$，且 $f(a)g(a) = g(a)$，所以 $g(a) \in A_{\text{c}}$。

假设 A 有一个几乎幂等近似单位 $(I_n)_{n\in N}$。给定任意 $\phi \in \mathcal{S}(A)$，必有 $\phi(I_n^2) \to 1$。必要时取一个子网之后，我们可以构造一个态网

$$\phi_n(\cdot) = (\phi(I_n^2))^{-1}\phi(I_n \cdot I_n)$$

容易验证 $\phi_n \xrightarrow{w*} \phi$，并且对于任意 $m \geq n$，$\phi_n(I_m) = 1$，因此 $\mathcal{S}_{\text{c}}(A) \subset \mathcal{S}(A)$ 是弱-$*$稠密的 □

自然会让人产生疑问：对于与严格压缩对偶迭代函数系统相关联的某些或所有自相似态，$\phi \in \mathcal{S}_{\text{c}}(A)$ 或 $\text{supp}(\phi)$ 是否是紧的。

在严格压缩的情形下，我们已经注意到集合 $K_{\mathbb{F}} = \{\phi_\omega;\ \omega \in \Sigma_k\}$ 是经典严格压缩迭代函数系统 $\mathbb{F}^*$ 在经典（扩展）完备度量空间 $(\mathcal{S}(A)\ d_L)$ 上的“紧” d_L-吸引子（还需始终处理使用扩展距离函数所带来的问题），并且对于任意 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$，$\phi_\pi$ 包含于 K 的弱-$*$ 闭凸包中（推论 5.3）。

然而，d_L的紧性并不（必然）意味着对于任意 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$，$\phi_\pi$ 都是紧支撑的。事实上，这等价于断言 $K_{\mathbb{F}}$ 包含在 $\mathcal{S}(A)$ 的某个弱-$*$紧面中（见 [2]）。或者，存在某个 $a \in A$，使得 $0 \leq a \leq I$，并且对于所有 $\omega \in \Sigma_k$都有 $\phi_\omega(a) = 1$。存在一些简单的例子，其中态集的紧性并不意味着它包含于某个弱-$*$ 紧面中，即使在交换情形下也是如此；例如，包含 $\mathbb{R}$ 上某个高斯概率测度的单点集。

情况甚至更糟：我们甚至不知道每个 ϕ_ω 都是紧支撑的。在交换情形下，每个 ϕ_ω 实际上都是纯态；这由纯态集的（弱-$*$ 或 d_L）闭性，以及相对适当的 $*$-同态的伴随保持纯性的事实得出。在非交换情形下，已知对于某些 C^*-代数，纯态集的闭性会（极其严重地）失效（见 [17], [6], [13]），而相对适当的 $*$-同态的伴随的纯性保持

$*$-同态的情况较为微妙（参见 [28] 中的推论 5.8，并结合 [11]）。

尽管存在这些复杂性，我们仍对严格压缩对偶迭代函数系统提出以下猜想，并阐述一些验证这些猜想的思路。

猜想 6.13. 假设 $\phi_0 \in \mathcal{S}_{\mathrm{c}}(A)$ 满足第 5 节的要求。那么，如果 (A, L) 是局部一致的（分别为半一致的），则每个 ϕ_ω 都是纯的（分别为紧支撑的）。

猜想 6.14。假设 $\phi_0 \in \mathcal{S}_{\mathrm{c}}(A)$ 满足第 5 节的要求。若 (A, L) 局部半一致，则对每个 $\pi \in \mathring{\Delta}^k$，$\phi_\pi$ 都是紧支撑的。

这两个猜想归根结底都是考察 $\mathcal{B}_1^{M(A)}$ 在 $\mathbb{F}$ 下的动力学，但只关注其与 ϕ_0 的关系。鉴于 ϕ_0 是紧支撑的，存在某个 $a \in A_{\mathrm{c}}$，使得 $\phi_0(a) = 1$。于是 $\phi_0(\cdot) = \phi_0(a \cdot a)$（由柯西–施瓦茨不等式），因此我们也可以研究 $\mathbb{F}$ 在 $\mathcal{B}_1^{M(A)}$ 上的动力学，其中允许在左侧和右侧分别乘以 a。这样便落在 $a\mathcal{B}_1^{M(A)}a$ 中；该集合（由局部一致性／半一致性）模去某个有限维向量子空间后，得到一个紧凸商。$\mathbb{F}$ 在这类集合上的动力学应当是可理解的，并能帮助找到必要的不动点，从而证明每个 ϕ_ω 和 ϕ_π 都是紧支撑的。特别地，猜想 6.9 给出了恰当类型的收敛（尽管针对的是 Ces`aro 平均）。

在 (A, L) 局部一致的情况下，预期每个 ϕ_ω 的纯性可由 $\mathcal{B}_0^a$ 的一维性以及 ϕ_ω 的支撑投影应包含于一个与 $\mathcal{B}_0^a$ 相关的集合这一事实推出。

此类尝试还必须依赖代数性质（否则 $\mathbb{F}$ 中的映射也可以是正映射，而非 $*$-同态；对于一般的正映射，该结果显然不成立），因此可能还需要额外假设 L 满足某种形式的莱布尼茨性质（见 [24] 及其中的参考文献）。

6.3. 遍历定理。

我们的推论 5.3 是迈向自相似态概率研究的一步。关于自相似概率测度以及与经典迭代函数系相关的集合，还有许多其他有用的概率刻画，例如混沌游戏（见 [7], [8]）和埃尔顿遍历定理（见 [15]）。自然会有人提出疑问：类似的结果是否也适用于非交换情形?

值得注意的是，埃尔顿遍历定理仅适用于正则度量空间（即所有闭有界集都是紧的空间）。因此，任何非交换推广都需要在定义 6.6 中增加一个刻画正则性的条件。

6.4. 自相似投影的唯一性与直接逼近。

经典地（例如如 [19] 中所述），人们可以在某个完备度量空间 (X, d) 上，通过严格压缩迭代函数系统 $\mathbb{G}$ 到达吸引子，而无需提及自相似态。这可以通过使用 Pompeiu-Hausdorff 距离来实现，该距离在 [19] 的非空紧子集集合上是完备的，并且使得 Hutchinson 算子（定义为

X 的非空紧子集，并且使得 Hutchinson 算子定义为 b y

$$\mathbb{G}(K) := \bigcup_{g\in\mathbb{G}} g(K)$$

对于紧的 $K \subset X$，具有压缩性。

本文所述研究始于尝试将上述方法推广到非交换情形，但后来发现，由于种种原因，这种构造行不通。

如果将投影 p、$q \in \overline{\mathcal{P}}(A)$ 之间的 Pompeiu-Hausdorff 距离看似合理地推广为其对应的 $\mathcal{S}(A)$ 中弱-$*$闭面之间的经典 Pompeiu-Hausdorff 距离（由 d_L 诱导），那么就会遇到 Glimm 定理 [17] 带来的问题。具体而言，若 $(\phi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(A)$ 是一个纯态序列，它弱-$*$收敛到一个非纯态 ϕ，且这种收敛也发生在 d_L 中，那么弱-$*$ 闭面序列 $(\{\phi_n\})_{n=1}^{\infty}$ 就不可能收敛到一个面。事实上，它的 Pompeiu-Hausdorff 极限是 $\{\phi\}$；由于 ϕ 不是纯态，因此该极限不是面。

接下来尝试了一种更为审慎的方法：基于以左理想表述 Pompeiu-Hausdorff 距离的对偶表述，并与 $\mathcal{B}_1^A$相交。该方法（可能）是完备的，但不够灵活，无法使 Hutchinson 算子的类似物成为压缩映射（这是由于序理论方面的问题）。

因此，该项目转而研究自相似态，结果显然好得多。问题仍在于，是否可以通过 $\overline{\mathcal{P}}(A)$ 中的某种迭代过程，直接逼近自相似投影。

也就是说，给定一个扩展完备谱度量空间（A, L），能否在 $\overline{\mathcal{P}}(A)$ 上定义一个完备的（扩展）距离函数，使得对于任意严格压缩对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$，由 $\overline{\mathcal{P}}(A) \to \overline{\mathcal{P}}(A)$ 定义的映射

$$p \mapsto \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_{\geq}^{-1}(p)\right)}$$

是一个压缩映射?

还请注意，即使 d_L 取有限值，自相似投影的唯一性也无法从所呈现的任何定理中推出；不过，它应当可以通过直接逼近过程得到。

Kuperberg 和 Weaver（见 [21]）通过 von Neumann 代数研究非交换度量空间的方法，很可能更适合解决上述问题；与 C^*-代数框架相比，该方法具有更好的序理论性质（尽管这是相对于“谱”序而言的）。在本文中之所以主要倾向于采用 C^*-代数表述，而不是 von Neumann 代数表述，主要是因为分形

及其逼近属于拓扑主题（在转到几乎处处等价时表现不佳），其次是因为我们所考虑的应用（例如非阿贝尔群的类 Littlewood-Paley 分解）更接近 C^*-代数形式主义。

6.5. 应用。

正如引言中所述，我们发展当前理论的动机目标，是将其应用于自相似分解，类似于 $\mathbb{R}^n$上函数空间的 Littlewood-Paley 分解。

如 [9], 所述，与经典迭代函数系相关的自相似铺砌理论，在某些假设下已发展得相当完善，例如要求吸引子具有非空内部，或满足开集条件（例如上述参考文献中的定理 3.8）。这些要求在非交换情形中有明确的对应概念，因此，若能有相应技术来验证具体例子是否满足这些要求，将会很有帮助。

关于非空内部，即使对于经典迭代函数系，目前也只有一些特殊情形得到了理解（参见 [16]及其中的参考文献）。因此，我们不指望能够对非交换情形作出任何一般性论述。

关于重叠，我们可以说得更多。假设存在 τ 上的一个迹的半有限正规权（不一定忠实，例如，它可能是经由某个从 A 到某个半有限 von Neumann 代数的非退化 $*$-同态拉回而得到的） τ，且在某个由可逆映射组成的对偶迭代函数系统 $\mathbb{F}$ 中，每个映射 f_i 都将其按因子 $S_i \in [0, \infty$ 缩放。再假设我们有一个自相似投影 $p \in \mathcal{P}(A')$，满足 $\lambda(p) < \infty$。那么我们得到

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \tau\left(\bigvee_{i=1}^{k} f_i^{-1}(p)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \tau\left(f_i^{-1}(p)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} S_i^{-1}\tau(p).\end{aligned}$$

如果和式$\sum_{i=1}^{k} S_i^{-1}$ 等于1，那么我们有等式

$$\tau\left(\bigvee_{i=1}^{k} f_i^{-1}(p)\right) = \sum_{i=1}^{k} \tau\left(f_i^{-1}(p)\right),$$

由此，反复应用Kaplansky公式（ [20], 定理6.1.7），并利用 τ 是迹的这一事实，我们可以得出

$$\tau\left(f_i^{-1}(p) \wedge f_j^{-1}(p)\right) = 0$$

对所有 $i \neq j$。

类似的说法对闭自相似投影未必成立，即 $p \in \overline{\mathcal{P}}(A)$，其中

$$p = \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{k} f_i^{-1}(p)\right)},$$

因为上述等式严格要求右侧取闭包（否则，并未必是闭的），而投影的闭包可能比初始投影“大”得多。然而，正如定理 4.4 和推论 5.2 所表明的，捕捉对偶迭代函数系统内在信息的是闭支撑投影。

上述计算涉及一个重要事实：在应用中，我们不太可能真正关心 A'' 中的投影，反而会关注某个商（即使 τ 上述忠实）。例如，在李群上研究偏微分方程时，我们只会关注约化群 C^*-代数 $C_r^*(G)$ 在 $L^2(G)$ 上的正则表示，而包络冯·诺伊曼代数 $C_r^*(G)$ 中的许多投影在映射到正则表示后会被视为相同。这引出了更多正则性问题，例如，某个自相似投影 p 的“边界” $\partial p = \overline{p} - \mathring{p}$ 何时在给定商中消失。如果要使某种自相似分解对分析有用，这一事实很可能是必需的（例如，参见 [18]的第 3 章）。

或者，我们可以利用投影的正则性理论中的结果（参见 [4]及其中的参考文献）来控制商中的 ∂p ，或者利用 Akemann 的以下定理（ [1],定理II.7），从而完全无需在 A'' 层面取闭包。

定理6.15. 假设 p、$q \in \overline{\mathcal{P}}$ （A）满足

$$||p(q - p \wedge q)|| < 1.$$

则 $p \vee q \in \overline{\mathcal{P}}$ （A）。

References

[1] Charles A. Akemann。一般Stone-Weierstrass问题。 *Journal of Functional Analysis*，4(2):277–294，1969。[2] Charles A. Akemann。 C^*-代数的Gelfand表示理论。 *Pacific Journal of Mathematics*，39(1):1 – 11，1971。[3] CharlesA. Akemann和Tristan Bice。遗传c∗-子代数格。 *Advances in Mathematics*，285:101– 137，2015。

[4] CHARLES A. AKEMANN和SØREN EILERS。重新审视投影的正则性。 *Journal of OperatorTheory*, 48(3):515–534，2002。[5] E.M. Alfsen和F.W. Shultz。 *State Spaces of Operator Algebras: Basic Theory, Orientations, and C*-products*。数学：理论与应用。Birkh¨auser Boston，2001年。[6] R. J. Archbold。纯态的极限。 *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*，32(2):249–254，1989。[7] Michael Barnsley。 *Fractals Everywhere*，第97卷。1989年11月。[8] Michael Barnsley和Andrew Vince。一般迭代函数系统上的混沌游戏。 *Ergodic Theoryand Dynamical Systems*，31，2010年5月。[9] Michael Barnsley和Andrew Vince。由迭代函数系统生成的分形铺砌。 *Discrete & Computa-tional Geometry*，51，2014年4月。[10] Lawrence G. Brown。算子代数中的几乎相对紧投影。 *Banach Journal of Mathe-matical Analysis*，12(2):259 – 293，2018年。[11] L.J. BUNCE和C.-H. CHU。C*-代数纯态的唯一延拓。 *Journal of Operator Theory*，39(2):319–338，1998年。[12] Eric Cagnache、Francesco D'Andrea、Pierre Martinetti和Jean-Christophe Wallet。Moyal平面上的谱距离。 *Journal of Geometry and Physics*，61(10):1881–1897，2011年。[13] Jacques。Dixmier。 *C*-algebras / Jacques Dixmier*。北荷兰出版社；美国和加拿大的独家发行商，Elsevier North Holland，阿姆斯特丹；纽约：纽约，1977年。[14] Søren Eilers和Dorte Olesen，编。 *C*-Algebras and Their Automorphism Groups*。纯粹与应用数学。美国Academic Press出版社，第2版，2018年。[15] John H. Elton。迭代映射的遍历定理。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，7(4):481–488，1987年。[16] De-Jun Feng和Zhou Feng。具有非空内部的典型自仿射集。 *arXiv e-prints*，页码arXiv:2209.09126，2022年9月。[17] James Glimm。I型C*代数。 *Annals of Mathematics*，73(3):572–612，1961年。[18] Sean Harris。 *Weyl Pseudodifferential Calculus and the Heisenberg Group in New Settings*。博士论文，澳大利亚首都领地，2020年。[19] JOHN E. HUTCHINSON。分形与自相似性。 *Indiana University Mathematics Journal*，30(5):713–747，1981年。[20] R.V. Kadison和J.R. Ringrose。 *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II*。算子代数理论基础。美国数学会，1997年。[21] Greg Kuperberg和Nik Weaver。量子度量的von Neumann代数方法。 *Memoirs of theAmerican Mathematical Society*，215，2010年5月。[22] E. Christopher Lance。 *Hilbert C*-Modules: A Toolkit for Operator Algebraists*。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，1995年。[23] Fr´ed´eric Latr´emoli`ere。C\*-代数态空间上的有界Lipschitz距离。 *Taiwanese Journal of Mathematics*，11(2):447 – 469，2007年。[24] Fr´ed´eric Latr´emoli`ere。量子局部紧度量空间。 *Journal of Functional Analysis*，264(1):362– 402，2013年。[25] Bram Mesland和Adam Rennie。无界KK理论中的非单位谱三元组与度量完备性。 *Journal of Functional Analysis*，271(9):2460–2538，2016年。[26] Marc Rieffel。由紧群作用诱导的态上的度量。 *Documenta Mathematica*，1998年。

[27] MarcRieffel。《紧致量子度量空间》。09 2003年。[28] Erling Størmer。关于偏序向量空间及其对偶，以及其在单纯形和 C*-代数中的应用。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，s3-18(2):245–265，1968年。

Hanna Neumann Building #145,
Science Road The Australian National University Canberra ACT2601。
Email address: Sean.Harris@anu.edu.au