arXiv:2304.13470v1 [math.QA] 26 Apr 2023

2-函子的 Q-系统完备化

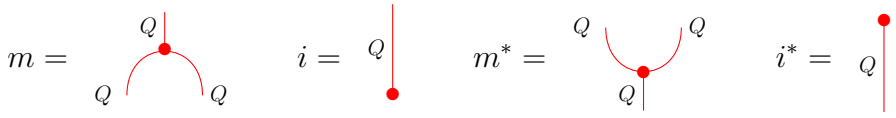
MAINAK GHOSH

Abstract. Q-系统是 C*-张量范畴或 C*-2-范畴中可分Frobenius代数对象的酉版本。我们证明，对于 C*-2-范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，由 $*$-2-函子、$*$-2-变换和 $*$-2-修正构成的 C*-2-范畴 Fun$(\mathcal{C},\mathcal{D})$，只要 $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的，它就是 Q-系统完备的。我们利用这一结果，借助 $*$-2-函子刻画 Q-系统完备的范畴，并证明酉融合范畴 $\mathcal{C}$ 在 C*-代数上的作用所构成的 2-范畴是 Q-系统完备的。

1. Introduction

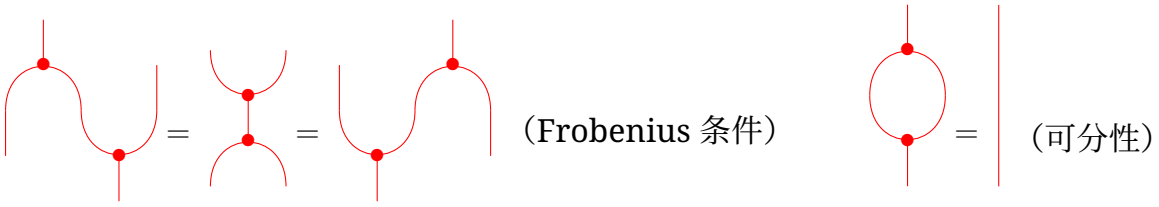
现代子因子理论随着 V. Jones 的里程碑式成果 [J83]而蓬勃发展。II_1 因子的有限指标子因子的标准不变量最初被定义为λ-格 [P95]。S. Popa 证明，超有限 II_1因子的可和有限子因子完全由其标准不变量分类 [P95], ；这些标准不变量的一般公理化形式为 λ-格 [P94, P95] 或平面代数 [J99]。在有限深度情形下，A. Ocneanu 引入并建立了四部图上的双酉连接理论，将其作为构造超有限子因子的重要工具。双酉连接出现在他对有限深度标准不变量的旁群公理化中 [O88, EK98] ，但也可用于从有限图构造无限深度超有限子因子（见[P89, S90]）。尽管如今其他标准不变量方法更为常见，双酉连接理论仍是构造和分类超有限子因子的重要组成部分 [EK98, JMS14]。如今，子因子理论的许多特征都有了清晰的高范畴解释 [M03, B97, CPJP22, JMS14, DGGJ22]。

在 [M03], a Q-系统是 C*-张量范畴或 C*-2-范畴中可分Frobenius代数对象的酉版本，被展示为有限指标子因子标准不变量的另一种公理化方式 [O88, P95, J99]。Q-系统最初在 [L94] 中被引入，用于刻画与无限因子的有限指标子因子相关联的规范自同态。在 C*-2-范畴的语境下，Q-系统是一个 1-胞腔${}_bQ_b \in \mathcal{C}_1(b,b)$，连同两个 2-胞 m : $Q \boxtimes Q \to Q$ (乘法) 和 i : $1_b \to Q$(单位)，其图示如下：



这些 2-胞满足以下条件：





在 [CPJP22] 中，引入了 C*/W*-2-范畴的 Q-系统完备化；与可分单子 2-范畴 [DR18] 以及凝聚单子 [GJF19], 相比，这是 C*/W*-2-范畴高阶幂等完备化的另一种形式，用于诱导酉融合范畴对 C*-代数的作用。近年来，Q-系统完备化引起了广泛关注 [CP22, CPJ22, G23]

给定一个 C*/W*-2-范畴 $\mathcal{C}$，它同时还是局部正交投影完备的，则其 Q-系统完备化是由 $\mathcal{C}$ 中的 Q-系统、双模和交织子构成的 2-范畴 QSys($\mathcal{C}$)。存在一个典范包含 *-2-函子 $\iota_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\hookrightarrow \mathrm{QSys}(\mathcal{C})$，它在所有同态范畴上始终是一个等价。若 $\iota_{\mathcal{C}}$ 是 *-2-范畴的一个 *-等价，则称 $\mathcal{C}$ 是 Q-系统完备的。[CPJP22] 中已经证明，$\mathcal{C}$ 是 Q-系统完备的，当且仅当每个 Q-系统都在 $\mathcal{C}$中“分裂”。

在本文中，我们研究 2-范畴 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 的 Q-系统完备性。该范畴由 $*$-2-函子、$*$-2-变换和 2-修正构成，其中 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是严格的 C*-2-范畴。以下是本文的主要定理。

定理 1.1. 设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是严格 C*-2-范畴，且 $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的。则 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 是 Q-系统完备的。

利用该定理，我们用 2-函子刻画了 Q-系统完备的范畴。在 [CPJ22], 中，引入了酉融合范畴 $\mathcal{C}$ 在 C*-代数 C*Alg$_{\mathcal{C}}$ 上的作用所构成的 2-范畴，以研究融合范畴在 AF-代数上的归纳极限作用。作为定理 1.1 的推论，我们得到以下结果。

推论 1.2. C*Alg$_{\mathcal{C}}$ 是 Q-系统完备的

如果 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是 C*-2-范畴，那么在 [CP22] 中已经证明，Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 也是一个 C*-2-范畴。在第 2 节中，我们证明：当 $\mathcal{D}$ 具有局部正交投影完备性时，Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 也具有局部正交投影完备性。设 $(\psi_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$ 是 End(F) 中的一个 Q-系统，其中 $*$-2-函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，并且 $m:\psi\otimes\psi\Rightarrow\psi$ 是乘法映射，$i:1_F\Rightarrow\psi$ 是单位映射。这意味着，对于每个 $a\in\mathcal{C}_0$，我们都有 End$_{\mathcal{D}_1}(Fa)$ 中的一个 Q-系统 (ψ_a, m_a, i_a)。为了证明 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 是 Q-系统完备的（假设 $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的），我们需要证明存在一个 1-胞腔 $\phi\in\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})_1(F,G)$，其中 $*$-2-函子 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，具有酉可分对偶 $\overline{\phi}\in\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})_1(G,F)$，使得 1-胞腔 ψ 和 $\overline{\phi}\otimes\phi$ 作为 Q-系统同构。为实现这一点，需要完成以下任务：

(1) 我们需要找到一个合适的 $*$-2-函子 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$。(2) 找到一个可对偶 1-胞腔 $\phi\in\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})_1(F,G)$。(3) 找到一个 2-修正 $\gamma:\overline{\phi}\otimes\phi\Rightarrow\psi$，它是酉元并且与代数映射相交织。

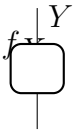
我们将在第 3 节讨论 (1)。第 4 节讨论 (2)。在第 5 节中，我们证明 (3)，并讨论定理 1.1 的推论。

致谢。作者谨此感谢 Shamindra Kumar Ghosh、Corey Jones 和 David Penneys 进行的多次富有成效的讨论。

2. Preliminaries

本节将介绍有关 Q-系统完备化以及 $*$-2-函子范畴 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 的必要背景，其中 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是 C*-2-范畴。

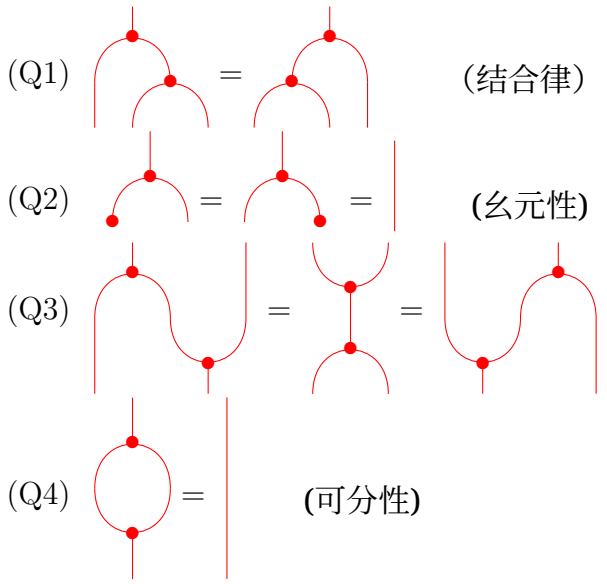
2.1. 与 2-范畴相关的记号。关于 2-范畴的基础知识，请读者参阅 [JY21] 。

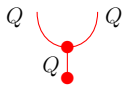
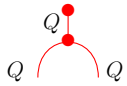
设 $\mathcal{C}$ 是一个 2-范畴，$a,b\in\mathcal{C}_0$ 是两个 0-胞腔。从 $a\to b$ 的记号为 ${}_bX_a^X$。图示中，1-胞腔用一条弦表示，2-胞腔用一个带有穿过其中的线串的方框表示。设有两个 1-胞腔 $X,Y\in\mathcal{C}_1(a,b)$ 以及 $f\in\mathcal{C}_2(X,Y)$ 是一个 2-胞腔。于是我们将 f 记作  我们将张量积记作 $\boxtimes_b$ 从右向左取 ${}_cY\boxtimes_b X_a$。作为 Q-系统的 1-胞腔将用红色线条表示。C*-2-范畴这一概念据信最早出现在 [LR97]中。关于 C*/W*-2-范畴的基础知识，请参阅 [CPJP22, GLR85]。

2.2. Q-系统完备化。

设 $\mathcal{C}$ 是一个 C*-2-范畴。

定义 2.1. $\mathcal{C}$ 中的一个 Q-系统是一个 1-胞腔 ${}_bQ_b\in\mathcal{C}_1(b,b)$，连同乘法映射$m\in\mathcal{C}_2(Q\boxtimes_b Q, Q)$和单位映射 $i\in\mathcal{C}_2(1_b,Q)$，如第 1 节所述，并满足以下性质：



注记2.2. Q-系统 Q 是一个自对偶1-胞腔，满足 $ev_Q :=$  以及 $coev_Q :=$ 

定义 2.3. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个C*-2-范畴，且 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a,b)$。 ${}_bX_a$的酉可分左对偶是一个对偶 $\left({}_a\overline{X}_b, ev_X, coev_X\right)$，使得 $ev_X \circ ev_X^* = \mathrm{id}_{1_a}$（参见 [CPJP22，例3.9]）。

给定 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 的一个酉可分左对偶，${}_bX \boxtimes \overline{X}_b \in \mathcal{C}_1(b,b)$ 是一个 Q-系统$_a$，其乘法映射为 $m := \mathrm{id}_X \boxtimes ev_X \boxtimes \mathrm{id}_{\overline{X}}$，单位映射为 $i := coev_X$。

给定一个 Q-系统 $Q \in \mathcal{C}_1(b,b)$，如果它具有上述形式，则称该 Q-系统Q “分裂”。

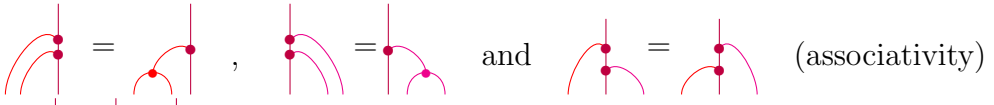
定义 2.4. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个 C*-2-范畴。若对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 的任意投影 $p \in \mathrm{End}(X)$，都存在另一个 1-胞腔 $Y \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 以及一个等距映射 $v \in \mathcal{C}_2(Y,X)$，使得 $vv^* = p$，则称 $\mathcal{C}$ 是局部正交投影完备的。

除非另有说明，本文中的 C*-2-范畴均指局部正交投影完备的 C*-2-范畴。

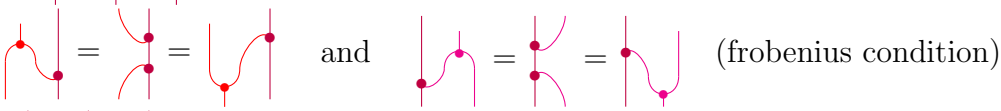
定义 2.5. [CPJP22] 设 $P \in \mathcal{C}_1(a,a)$ 和 $Q \in \mathcal{C}_1(b,b)$ 是 Q-系统。A$Q-P$双模是由 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a,b)$、$\lambda_X \in \mathcal{C}_2(Q \boxtimes X, X)$ 和 $\rho_X \in \mathcal{C}_2(X \boxtimes P, X)$ 组成的三元组 (X, λ_X, ρ_X)，满足某些性质。我们分别用紫色、红色和洋红色线来图示表示 X, P, Q。我们将 $\lambda_X, \rho_X, \lambda_X^*, \rho_X^*$记为：

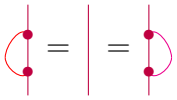
$\lambda_X =$  $\rho_X =$  $\lambda_X^* =$  $\rho_X^* =$ 

双模公理如下：

(B1) 

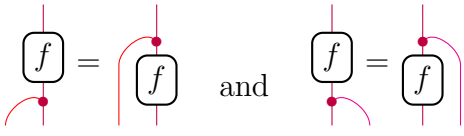
(B2) 

(B3) 

(B4) 

定义 2.6. 给定一个 C*/W*-2-范畴 $\mathcal{C}$，其 Q-系统完备化是 C*/W*-2-范畴 QSys($\mathcal{C}$)，其中：

(1) 0-胞腔是 Q-系统 $(Q, m, i) \in \mathcal{C}_1(b,b)$。(2) Q-系统 $P \in \mathcal{C}_1(a,a)$ 与 $Q \in \mathcal{C}_1(b,b)$ 之间的 1-胞腔是 $Q-P$ 双模 (X, λ_X, ρ_X)。(3) 2-胞是双模交织子。给定 Q-系统 ${}_aP_a$, ${}_bQ_b$ 和 $Q-P$双模${}_bX_a$, ${}_bY_a$，QSys($\mathcal{C}$)$_2$(${}_QX_P$, ${}_QY_P$) 是满足以下条件的 $f \in \mathcal{C}_2(X, Y)$ 的集合：



关于 QSys($\mathcal{C}$) 是一个 *-2-范畴的完整细节，请读者参阅 [CPJP22] .

让我们回顾一下 [CPJP22, Construction 3.24] 中已经给出的典范包含函子 *-2-函子 $\iota_{\mathcal{C}}$: $\mathcal{C} \hookrightarrow$QSys ($\mathcal{C}$) 的描述。

（I1）对于 $c \in \mathcal{C}_0$，我们将 c 映射到 $1_c \in \mathcal{C}_1(c,c)$，并赋予其作为 $\mathcal{C}_1(c,c)$ 的张量单位所具有的显然 Q-系统结构。

（I2）对于 1-胞腔 ${}_aX_b \in \mathcal{C}_1(a,b)$， X 本身是一个带单位的 Frobenius 1_a-1_b 双模对象，因此我们将 X 映射到其自身。（I3）对于 2-胞腔 $f \in \mathcal{C}_2(X,Y)$，我们看到 f 是 $1_a - 1_b$ 双模的，因此我们将 f 映射到其自身。

关于典范包含函子 *-2-函子 $\iota_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{QSys}(\mathcal{C})$ 的更多细节，请参阅 [CPJP22]。

定义 2.7. 若典范包含函子 *-2-函子 $\mathcal{C}\colon \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{QSys}(\mathcal{C})$ 是一个 *-2-等价，则称 2-范畴 $\mathcal{C}$ 为 Q-系统完备。

在 [CPJP22], 中，C*-2-范畴 $\mathcal{C}$ 的 Q-系统完备化被刻画为那些能够“分裂”的 Q-系统。

定理 2.8. [CPJP22，定理 3.36]。当且仅当每个 Q-系统 $Q \in \mathcal{C}_1(b,b)$ 都分裂时，称一个 C*/W*-2-范畴为 Q-系统完备；也就是说，存在一个对象 $c \in \mathcal{C}_0$ 和一个可对偶 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(c,b)$，它具有一个酉可分对偶 $\left(\overline{X}, ev_X, coev_X\right)$，使得 (Q,m,i) 与 ${}_bX \boxtimes \overline{X}_b$ 作为 Q-系统同构。$_c$

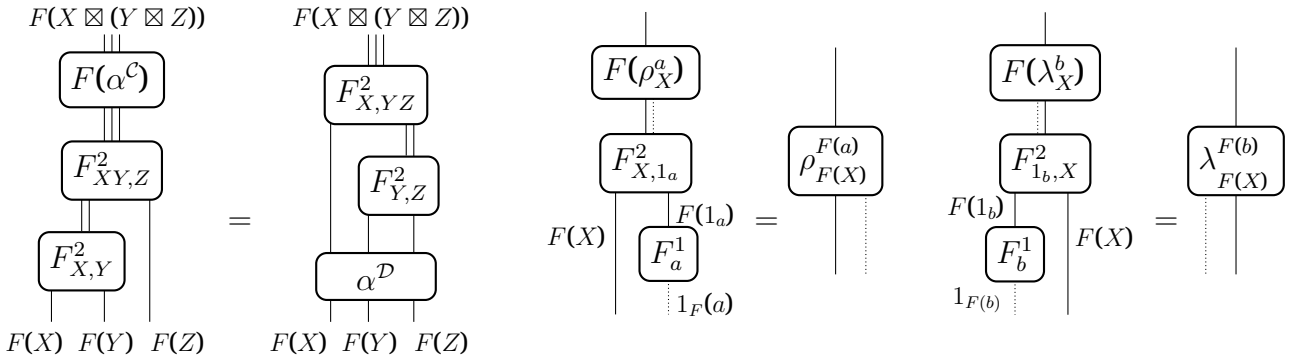
2.3. 2-函子的 C*-2-范畴。

设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是 C*-2-范畴。

定义 2.9. [CP22] A $*$-2-函子 $F = (F, F^1, F^2)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由酉 2-胞腔组成

$$F^2_{X,Y} \in \mathcal{D}_2\left(F(X) \boxtimes F(Y), F(X \boxtimes Y)\right) \text{ and } F^1_a \in \mathcal{D}_2\left(1_{F(a)}, F(1_a)\right)$$

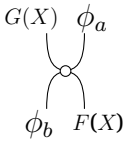
满足以下条件：



对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$、$Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$ 和 $Z \in \mathcal{C}_1(d,c)$

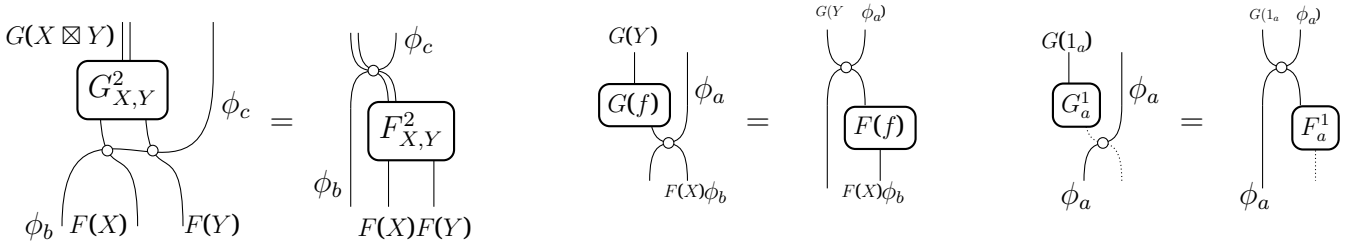
定义 2.10. 设 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $*$-2-函子。一个 $*$-2-变换 $\phi\colon F \Rightarrow G$ 由以下部分组成：

(1) 对于每个 $a \in \mathcal{C}_0$，一个 1-胞腔 $\phi_a \in \mathcal{D}_1(F(a)\ G(a))$；以及 (2) 对于每个 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$，一个酉 2-态射 $\phi_X \in \mathcal{D}_2(\phi_b \boxtimes F(X)\ G(X) \boxtimes \phi_a)$。我们

将记作 ϕ_X 由 

.

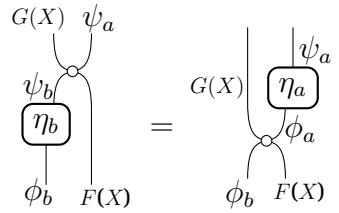
该数据满足以下相容性:



对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 和 $Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$，对于每个 2-胞腔 $f \in \mathcal{C}_2({}_bX_a, {}_bY_a)$

定义 2.11。 [CP22] 设 F、G： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $*$-2-函子，且 ϕ、ψ： $F \Rightarrow G$ 是 $*$-2-变换。一个 $*$-2-修正 η： $\phi \Rrightarrow \psi$ 由每个 $a \in \mathcal{C}_0$ 对应的一个 2-胞腔 $\eta_a \in \mathcal{D}_1(\phi_a, \psi_a)$ 组成，使得，$\sup_{a \in \mathcal{C}_0} \|\eta_a\| < \infty$ 和

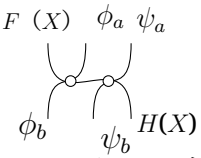
(2.1)



对于每个 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$

现在我们继续描述 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 中的张量结构。我们将用 $\boxtimes$ 表示 2-范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 中的张量，而 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 中的张量则记为 $\otimes$。

定义 2.12。（Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 中的水平复合）。设 F,G,H： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为 $*$-2-函子，且 ϕ： $G \Rightarrow F$, ψ： $H \Rightarrow G$ 为 $*$-2-变换。张量积 $\phi \otimes \psi$： $H \Rightarrow F$ 定义如下。对于每个 $a \in \mathcal{C}_0$，$(\phi \otimes \psi)_a := \phi_a \boxtimes_{G\,a\,()} \psi_a$。对于每个 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$，$(\phi \otimes \psi)_X :=$



.

设 ϕ,ϕ'： $G \Rightarrow F$ 和 ψ,ψ'： $H \Rightarrow G$ 是 $*$-2-变换，且 n： $\phi \Rrightarrow \phi'$ 和 t： $\psi \Rrightarrow \psi'$ 是 $*$-2-修正。它们的张量积 $n \otimes t$： $\phi \otimes \psi \Rrightarrow \phi' \otimes \psi'$ 定义为:

$$(n \otimes t)_a := n_a \boxtimes t_a \quad \text{for each} \quad a \in \mathcal{C}_0$$

我们将 2-范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 中 2-胞的垂直复合记为 $\cdot$，而 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 中的垂直复合记为 $\circ$。

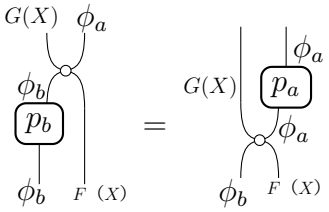
定义 2.13。（Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 中的垂直复合）。设 F,G： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $*$-2-函子，且 ϕ,ϕ',ϕ''： $F \Rightarrow G$ 是 $*$-2- 变换， n： $\phi \Rrightarrow \phi'$、 n'： $\phi' \Rrightarrow \phi''$ 是 $*$-2-修正。垂直复合 $n' \circ n$： $\phi \Rrightarrow \phi'$ 定义为，对每个 $a \in \mathcal{C}_0$，$(n' \circ n)_a := n'_a \cdot n_a$。

关于 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 是一个 2-范畴的完整细节，请参阅 [CP22]。 [CP22] 已经证明，当 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 是 C*/W*-2-范畴时，Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 是 C*/W*-2-范畴。下面我们将证明，当 $\mathcal{D}$ 是局部正交投影完备时，Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 也是局部正交投影完备的

命题 2.14. 设 $\mathcal{D}$ 是一个局部正交投影完备的 C*-2-范畴。那么 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 是局部正交投影完备的

证明. 设 F 和 G 是 Fun($\mathcal{C},\mathcal{D}$) 中的两个 $*$-2-函子， $\phi:\ F \Rightarrow G$ 是一个 $*$-2-变换，且 $p:\ \phi \Rrightarrow \phi$ 是一个同时也是投影的 $*$-2-修正，也就是说，

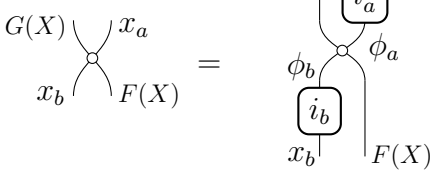
$$\forall a \in \mathcal{C}_0,\quad p_a^2 = p_a^* = p_a \in \mathcal{D}_2\ (\phi_a,\ \phi_a) \text{ 且 } \quad = \quad \forall\ X \in \mathcal{C}_1\ (a,\ b)$$



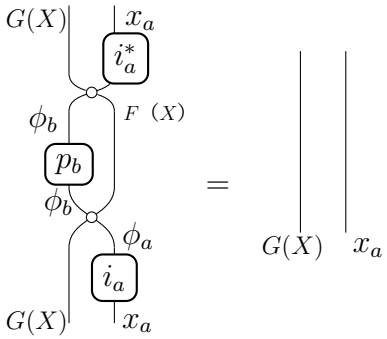
因此， $p_a \in \mathcal{D}_2\ (\phi_a,\ \phi_a)$ 是一个投影。由于， $\mathcal{D}$ 是局部正交投影完备的$\exists\ x_a \in \mathcal{D}_1$ $(F\ (a)\ \ G\ (a))$，并且 $i_a \in \mathcal{D}_2\ (x_a,\ \phi_a)$ 使得，

$$i_a^* i_a = 1_{x_a} \ \text{ and } \ i_a i_a^* = p^{(a)} \ \ \forall a \in \mathcal{C}_0. \tag{2.2}$$

For a 1-cell, $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$, let $x_X :=$ $\quad =$



$x_X x_X^* =$ $\quad =$ $\quad$。最后一个等式是由以下事实得出的

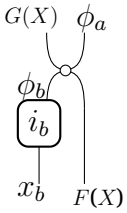


$p:\ \ \phi \Rrightarrow \phi$ 是一个 $*$-2-修正，并由方程（2.2）得出。类似地，可得，$x_X^* x_X = 1_{x_b \boxtimes F(X)}$

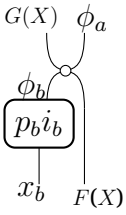
事实上， $x:\ F \Rightarrow G$ 是一个 $*$-2-变换。现在，由以下断言即可得出该命题

断言： $i:\ x \Rrightarrow \phi$ 是 $*$-2-修正。

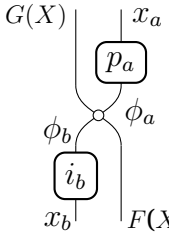
断言的证明：由于每个 i_a 都是等距映射，因此 $\sup_{a\in\mathcal{C}_0} \|i_a\| = 1$。此外，



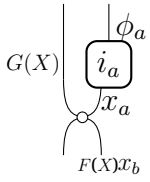
$=$



$=$



$=$



. 第一个等式由 Equa-

方程（2.2）。现在， $p:\ \ \phi \Rrightarrow \phi$ 是一个 $*$-2-修正，这说明了第二个等式。

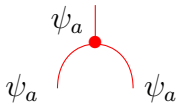
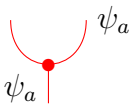
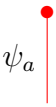
第三个等式再次由方程（2.2）得出。至此，断言得证。因此，Fun$(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是局部正交投影完备的。□

3. Construction of 0-cell

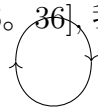
在本文其余部分，我们假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是严格 C*-2-范畴。在本节中，我们构造一个合适的 2-函子 $G\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$。

设 $(\psi_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$ 是 $\mathrm{End}^{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F)$ 中的一个 Q-系统，其中 $F\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是某个 $*$-2-函子，$m\colon\ \psi\otimes\psi\Rrightarrow\psi$ 是乘法映射，而 $i\colon\ 1_F\Rrightarrow\psi$ 是单位映射。这意味着，对于每个 $a\in\mathcal{C}_0$，我们都有 $\mathrm{End}^{\mathcal{D}_1}(Fa)$ 中的一个 Q-系统 (ψ_a, m_a, i_a)，并且 m_a 和 i_a 满足方程 (2.1)。我们将利用这些数据构造所需的 $*$-2-函子 $G\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$。

我们将使用以下记号：

$m_a =$  $i_a =$  $m_a^* =$  $i_a^* =$  for each $a\in\mathcal{C}_0$

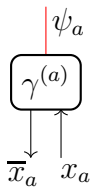
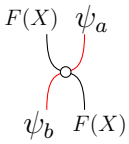
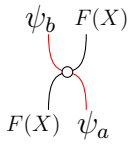
3.1. G 在 0-胞腔上。

由于 $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的，根据 [CPJP22，定理 3。36]，我们有 Q-系统的同构 ψ_a 和 $\overline{x}_a\boxtimes_{c_a} x_a$，其中 $c_a\in\mathcal{D}_0$，$x_a\in\mathcal{D}_1(Fa,\ c_a)$ 以及 x_a  $\overline{x}_a = \mathrm{id}_{1_{c_a}}$。对于 $a\in\mathcal{C}_0$，定义 $G(a)\colon= c_a\in\mathcal{D}_0$。

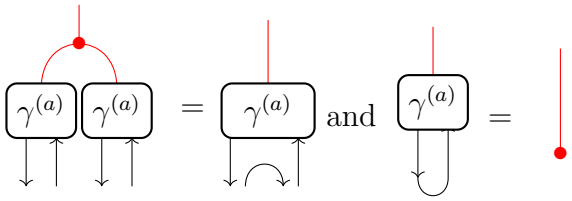
接下来，我们定义 G 在 $\mathcal{C}$的 1-胞腔和 2-胞腔上的作用。

3.2. G 在 1-胞腔上的作用。

令 ${}_bX_a\in\mathcal{C}_1(a,b)$ 和 $\gamma^{(a)}\in\mathcal{D}_2(\overline{x}_a\boxtimes x_a,\psi_a)$ 为对代数c_a映射的酉交织，对每个 $a\in\mathcal{C}_0$均如此。记

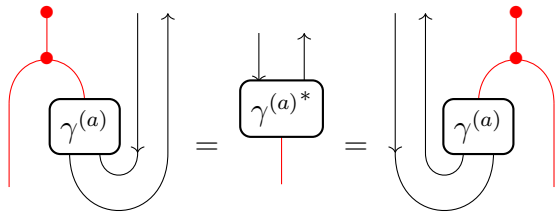
$\gamma^{(a)} =$  , $\psi_X =$  and $\psi_X^* =$ 

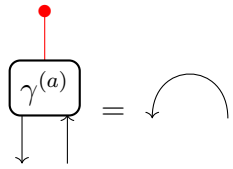
对每个 $a\in\mathcal{C}_0$，我们有

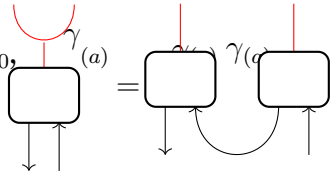
(3.1) 

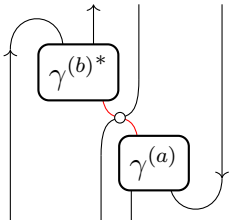
运用图形微积分证明下面的引理既直接又令人愉快。

引理 3.1。对于每个 $a\in\mathcal{C}_0$，我们有如下结论：

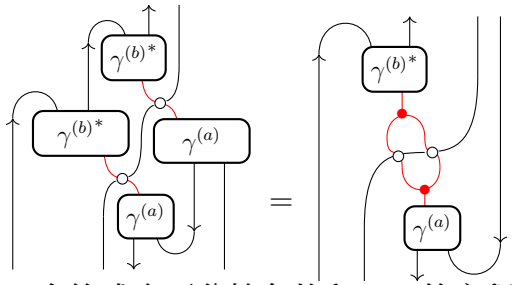
(i) 

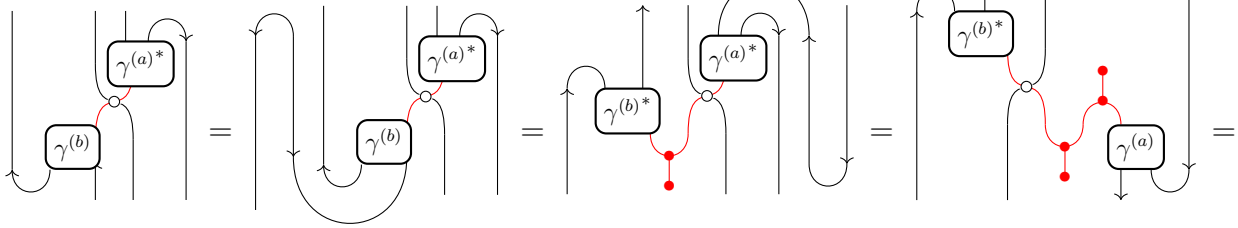
(ii) 

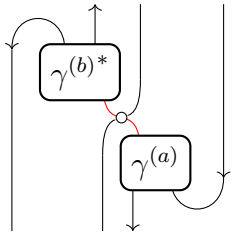
- 推论 3.2。 对于每个 $a \in \mathcal{C}_0$, .

定义 $p_X :=$  $\in$ 终结$_{\mathcal{D}_1}\left(x_b \underset{F_b}{\boxtimes} F(X) \underset{F_a}{\boxtimes} \bar{x}_a\right)$

引理 3.3。对于每个 a、$b \in \mathcal{C}_0$ 和 $X \in \mathcal{C}_1(a, b)$，$p_X$ 是 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}_1}\left(x_b \underset{F_b}{\boxtimes} F(X) \text{ 中的一个投影 } \underset{F_a}{\boxtimes} \bar{x}_a\right)$

证明。我们有 $p_X^2 =$  $= p_k$。第二个等式由推论 3.2 得出，最后一个等式由可分性条件和 m_a 的方程 (2.1) 得出。

$p_X^* =$ 

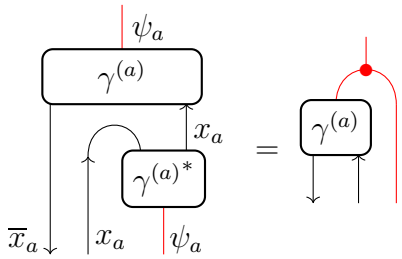
 $= p_X$。第二个和第三个等式由引理 3.1 得出。

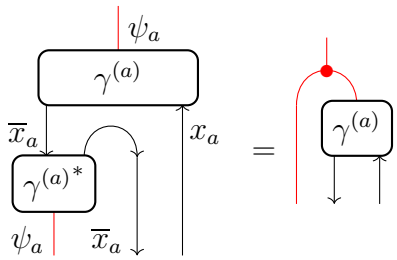
第四个等式由关于 m_a 的方程 (2.1) 和注记2.2 得出。因此， p_X 是一个投影。□

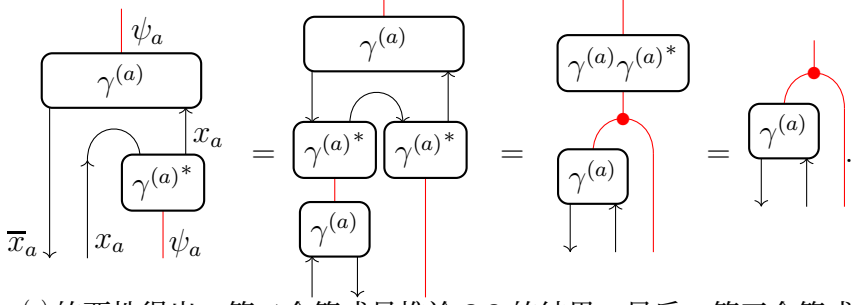
~由于 $\mathcal{D}$ 是幂等完备的，由引理 3.3 可得一个 $X \in \mathcal{D}_1(G(a)\ G(b))$，以及$u_X \in \mathcal{D}_2\left(\widetilde{X}、x_b \underset{F_b}{\boxtimes} F(X) \underset{F_a}{\boxtimes} \overline{x}_a\right)$，使得 $u_X^* u_X = 1_{\widetilde{X}}$，并且对每个 a，都有 $u_X u_X^* = p_X$ 和 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$。

~定义 $G(X) \coloneqq X \in \mathcal{D}_1(G(a)\ G(b))$。

引理 3.4. 对每个 $a \in \mathcal{C}_0$

(i) 

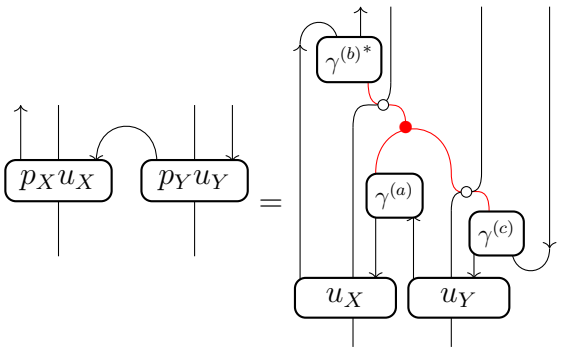
(ii) 

证明。 (i) 

. 第一个等式由 $\gamma^{(a)}$ 的酉性得出。第二个等式是推论 3.2 的结果。最后，第三个等式源于 $\gamma^{(a)}$ 的酉性。

（ii）证明与（i）的证明类似

□

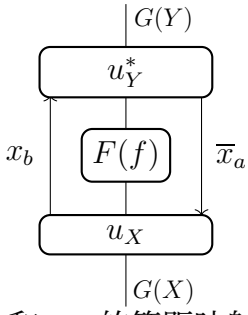
命题 3.5。 

对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 以及 $Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$。

证明。最后一个等式可直接应用引理 3.4、推论 3.2、m 是一个 2-修正这一事实，以及 Q- 系统 ψ_a's 的可分性和 Frobenius 条件得到。□

3.3. G 关于 2-胞。

设 $X, Y \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 和 $f \in \mathcal{C}_2(X,Y)$。

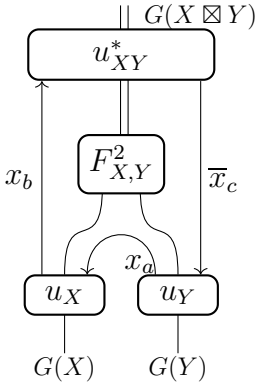
Define $G(f) :=$ 

$\in \mathcal{D}_2(G(X), G(Y))$, where u_X and u_Y are the 分别是分解投影 p_X 和 p_Y 的等距映射。

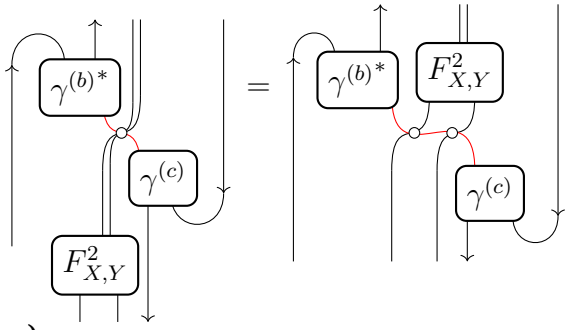
3.4. G的张量子和单位子。

我们接下来定义张量子 $G^2_{X,\,Y} \in \mathcal{D}_2\left(G(X) \underset{G(a)}{\boxtimes} G(Y)\ G\left(X \underset{a}{\boxtimes} Y\right)\right)$，对每个 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 和 $Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$ 均如此。

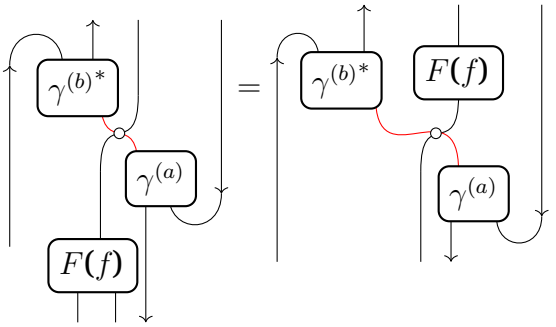
我们有 $u_X\colon\ G(X) \to x_b \underset{F_a}{\boxtimes} F(X) \boxtimes \overline{x}_a$，$u_Y\colon\ G(Y) \to x_a \underset{F_a}{\boxtimes} F(Y) \boxtimes \overline{x}_c$，以及$u_{XY}\colon\ G\left(X \underset{G\ a}{\boxtimes}() Y\right) \to x_b \underset{F_b}{\boxtimes} F(X \boxtimes Y) \underset{F_c}{\boxtimes} \overline{x}_c$，其中 u_X、u_Y 和 u_{XY}分别是与投影 p_X、p_Y 和 $p_{X\boxtimes Y}$相对应的同构。

Define $G^2_{X,Y} :=$ 

$\in \mathcal{D}_2\left(G(X) \underset{G(a)}{\boxtimes} G(Y), G\left(X \underset{a}{\boxtimes} Y\right)\right)$.

引理 3.6。 (i) 

对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$ 以及 $Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$

(ii) 

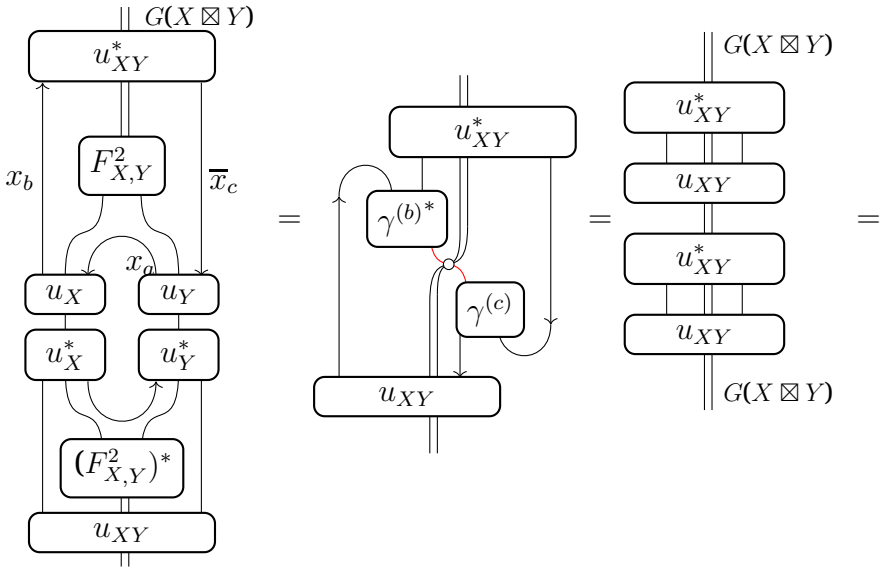
对于 2-胞 $f \in \mathcal{C}_2({}_aX_b, {}_aY_b)$

证明。

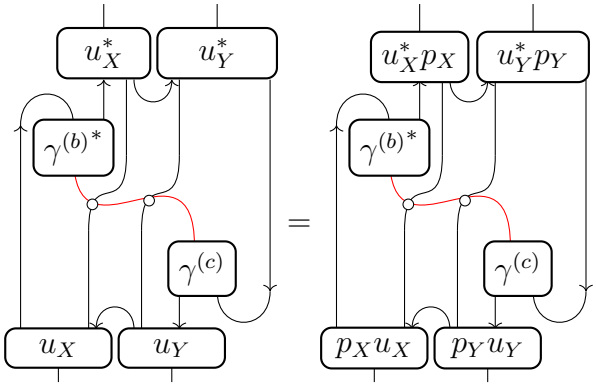
(i) 由命题 3.5 可知，对于每个 1-胞腔 X， $p_X = p_X^*$；并且 $\psi : F \Rightarrow F$ 是一个 2-变换。(ii) 证明与 (i) 类似

□

命题 3.7. 对于 $\mathcal{C}$ 中的每一对 1-胞腔 X 和 Y， $G^2_{X,\,Y}$ 是酉元。

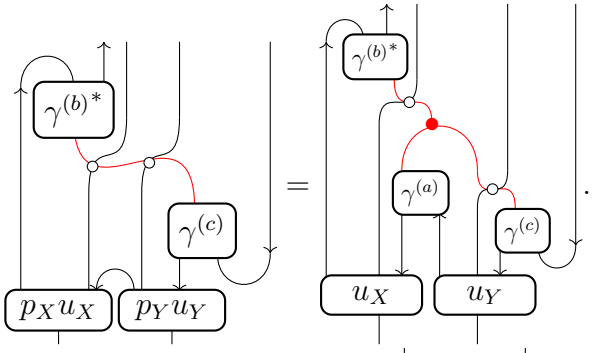
证明. $G^2_{X,\,Y}(G^2_{X,\,Y})^* =$ 

$G(X \boxtimes Y)$。第二个等号根据 p_X 和 p_Y 的定义，并利用 F^2_X 的酉性得出，$_{\,Y}$。最后一个等号利用了 u_{XY} 是等距映射这一事实。

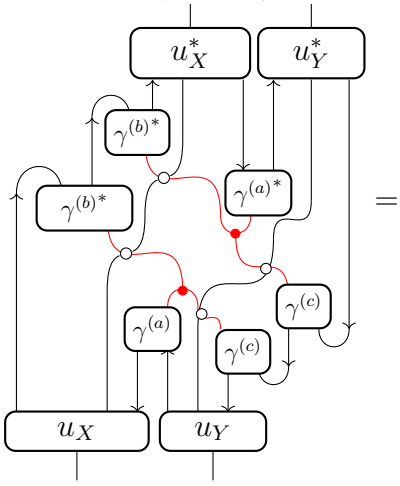
(3.2) $(G^2_{X,\,Y})^* G^2_{X,\,Y} =$ 

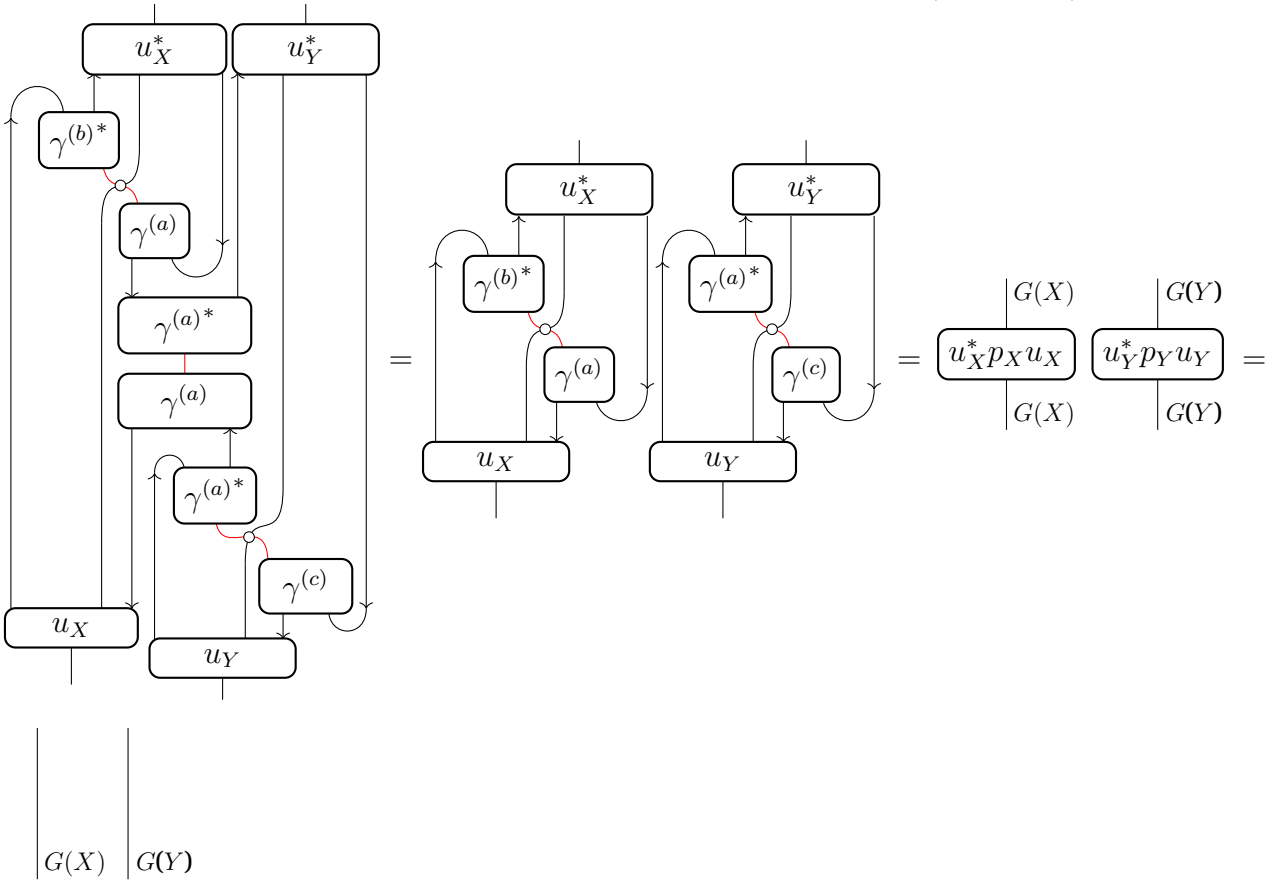
因此 e，利用以下事实： m是一个 2-修正（方程 (2.1)）、可分性，以及 an d

ψ_a的 Frobenius 条件和命题 3.5，

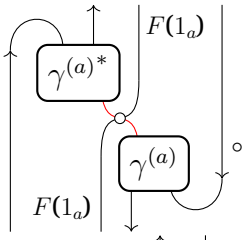


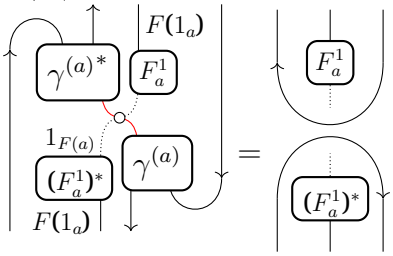
利用公式 (3.2) 中的最后一个等式，我们得到 $(G^2_{X,\,Y})^* G^2_{X,\,Y} =$

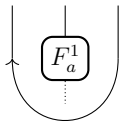


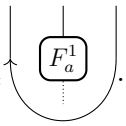


第二个等式由推论 3.2、Frobenius 条件和引理 3.4 得出。至此，命题得证。□

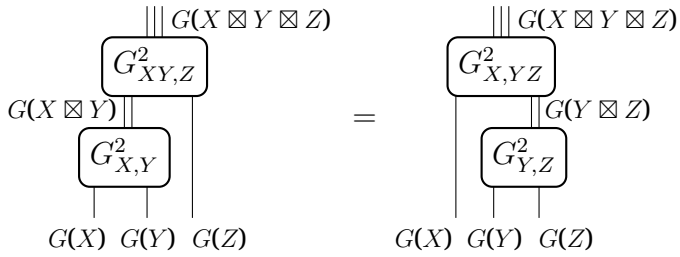
对每个 $a \in \mathcal{C}_0$，考虑投影 p_1 $_a =$ 

。利用 F_a^1 这一事实是酉元，且 ψ 是一个 $*$-2-变换，p_1 $_a =$ 

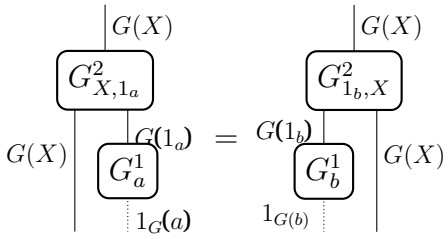
。由于等距映射 

将投影 p_{1_a} 分裂，我们定义 $G(1_a) := 1_{G(a)}$，$G_a^1 :=$ 恒等$_{1_{G(a)}}$，以及 $u_{1_a} =$ 

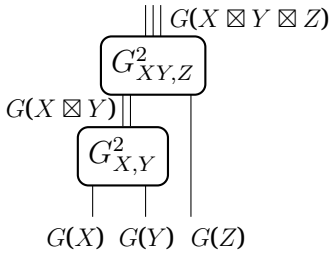
.

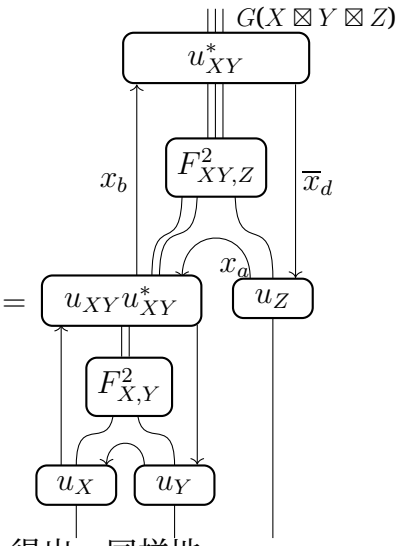
引理 3.8。 (i) 

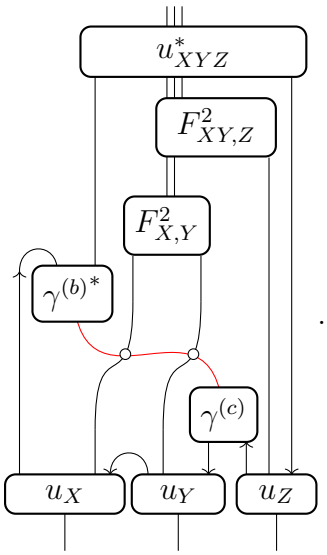
对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$、$Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$和 $Z \in \mathcal{C}_1(d,c)$。

(ii) 

对于每个 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$。

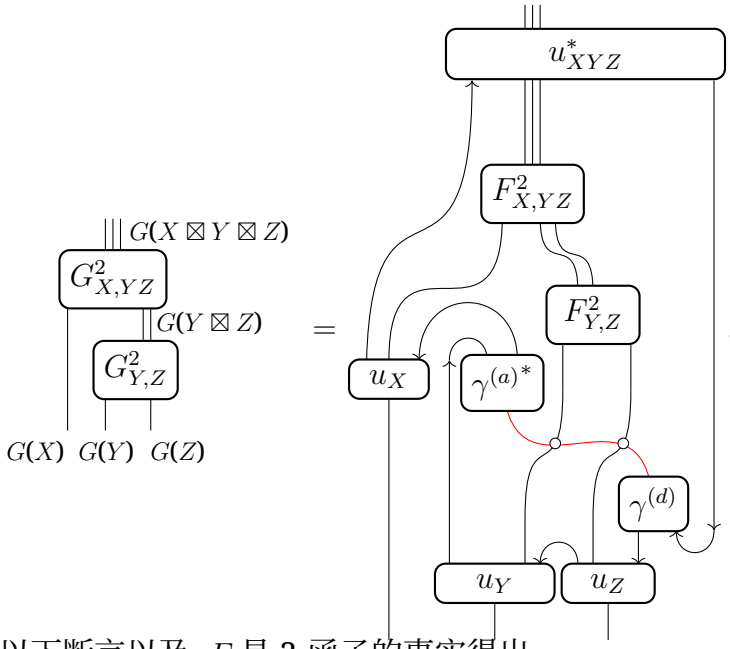
证明。 (i) 

= 

= 

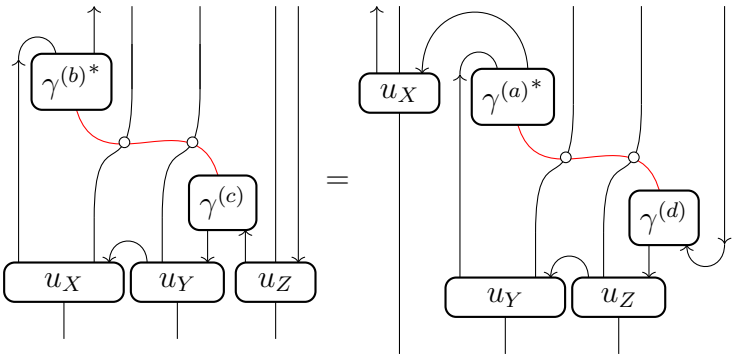
.

最后一个等式可直接应用引理 3.6(i) 得出。同样地，

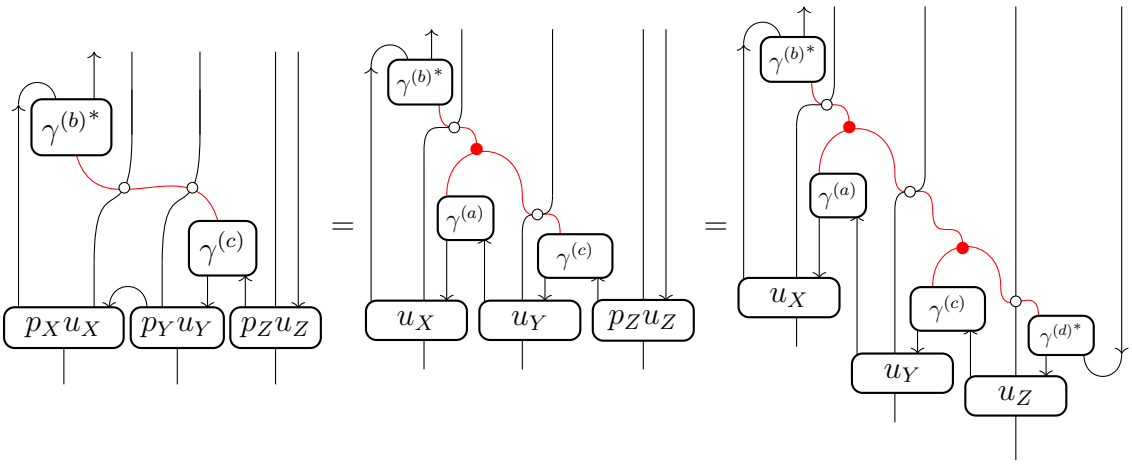


。因此，结果将由以下断言以及 F 是 2-函子的事实得出。

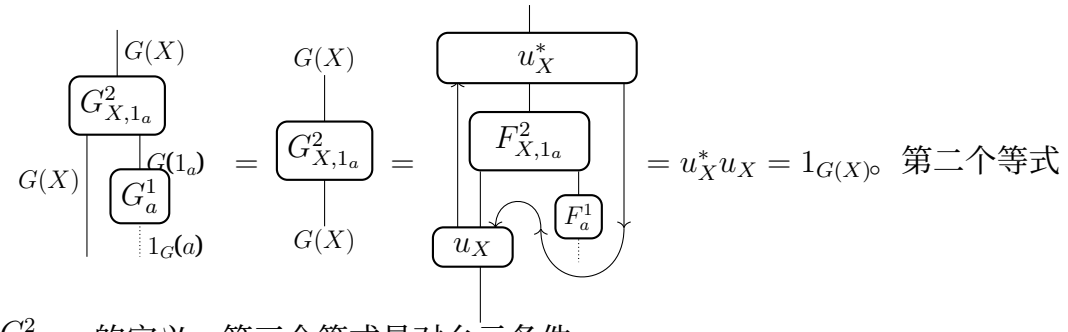
断言：



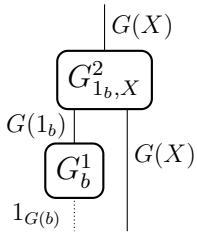
该断言的证明：断言的左侧变为方程 (3.3)。



第一个等式由命题 3.5 得出，第二个等式由 p_Z 的定义和引理 3.4 得出。同样，断言的右侧变为方程 (3.3) 的最后一项。至此，该断言得证。

(ii) 

$= u^*_X u_X = 1_{G(X)}$。第二个等式是 $G^2_{X,\,1_a}$ 的定义。第三个等式是对幺元条件的 2-函子的应用 F。类似地可得，



$= 1_{G(X)}$. □

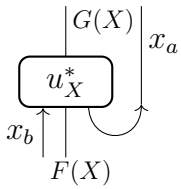
命题 3.7 和引理 3.8 推出了以下命题。

命题 3.9. $G:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 $*$-2-函子。

4. Construction of a dualizable 1-cell in $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

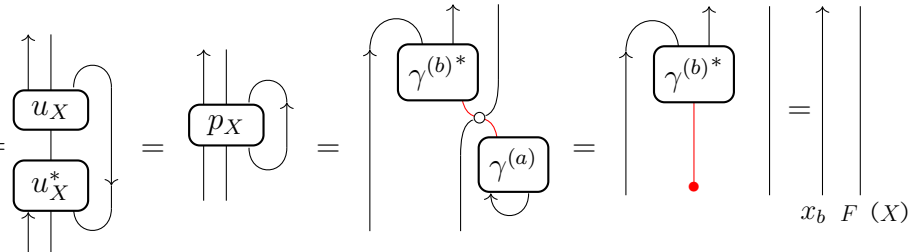
在本节中，我们构造一个适当的可对偶 2-变换 ϕ，从 F 到 G。我们将沿用第 3 节中的记号。

对于 a、$b \in \mathcal{C}_0$ 和 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a, b)$，定义

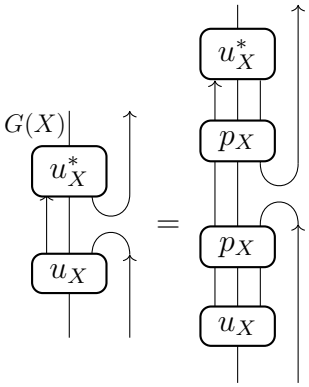
$$\phi_a \coloneqq x_a \in \mathcal{D}_1(Fa, Ga) \text{ and } \phi_X \coloneqq$$ 

$\in \mathcal{D}_2\left(\phi_b \boxtimes F(X), G(X) \boxtimes \phi_a\right)$

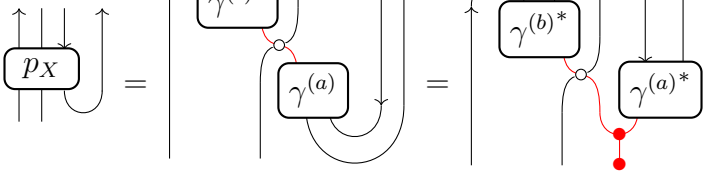
引理 4.1. 对于每个 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a, b)$，$\phi_X$ 是一个酉元。

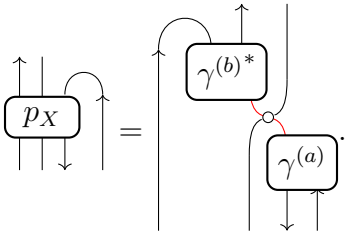
证明。 $\phi^*_X \phi_X =$ 

。该第四个等式由单位映射 $i:\ 1_F \Rightarrow \psi$ 是一个 2-修正以及方程 (3.1) 的第二部分这一事实得出。直接应用引理 3.1(ii) 可得到最后一个等式。

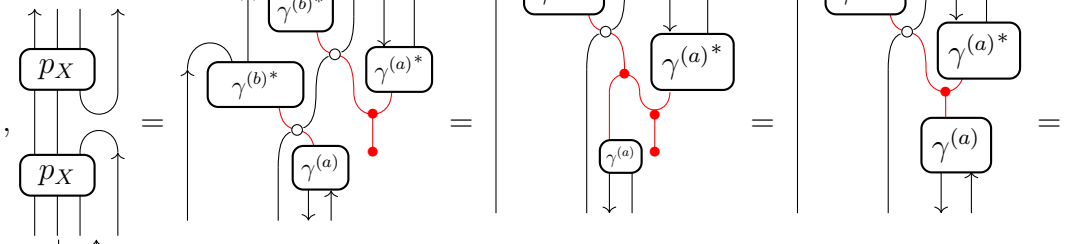
$\phi_X\phi_X^* =$ 

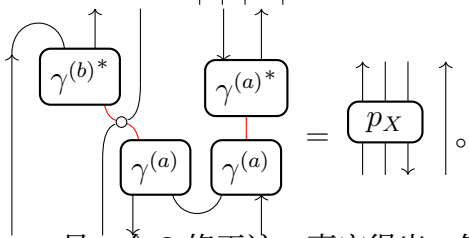
（这是因为 $u_X u_X^* = p_X$ 和 $u_X^* u_X = 1_{G(X)}$）

Now 

（最后一个等式由引理 3.1 的 (i) 得出），并且 

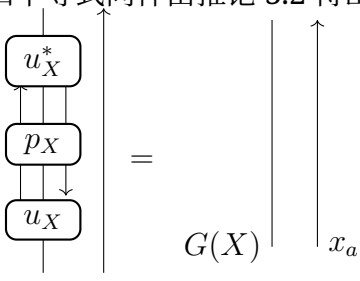
.

因此， 



$=$

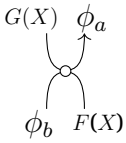
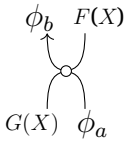
。第二个等式由推论 3.2 以及 m 是一个 2-修正这一事实得出。第三个等式将由 $(\psi_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$ 的 Frobenius 条件和幺元性得出。第四个等式同样由推论 3.2 得出。因此，

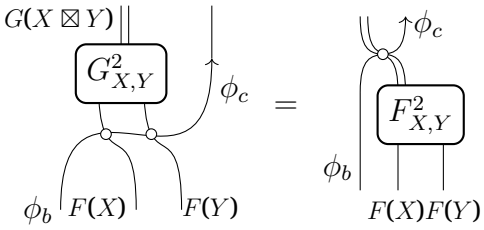
$\phi_X\phi_X^* =$ 

$=$

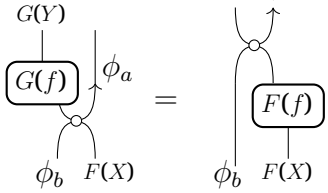
因此，每个 ϕ_X 都是酉元 □

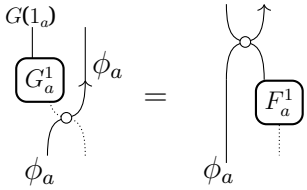
我们将使用以下图示记号：

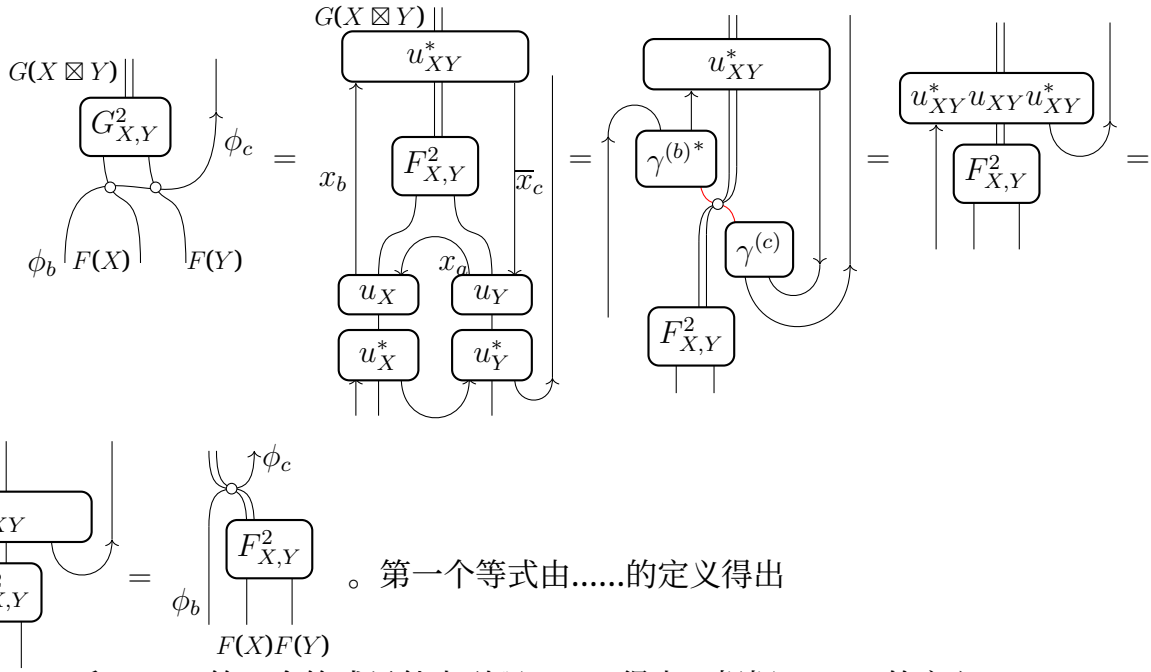
$\phi_X =$  以及 $\phi_X^* =$ 

命题 4.2。 (i)  对于 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$

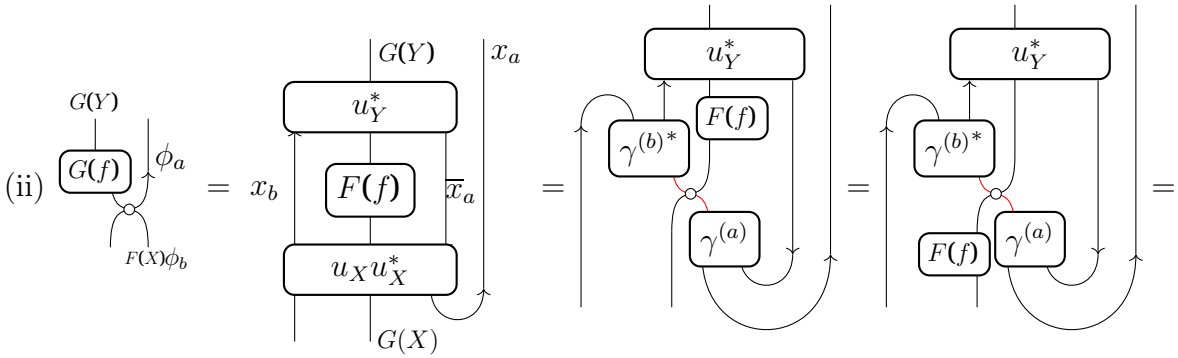
以及 $Y \in \mathcal{C}_1(c,a)$

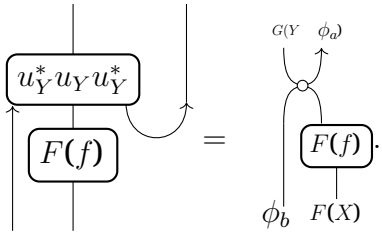
(ii)  对于每个 2-胞腔 $f \in \mathcal{C}_2({}_bX_a, {}_bY_a)$.

(iii)  对每个 $a \in \mathcal{C}_0$。

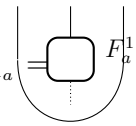
证明。 (i) 

 。第一个等式由.....的定义得出 $G^2_{X,\ Y}$、 ϕ_X 和 ϕ_Y。第二个等式显然由引理 3.6(i) 得出。根据 $p_{X\boxtimes Y}$ 的定义可得第三个等式。最后一个等式由 $\phi_{X\boxtimes Y}$ 的定义得出

(ii) 



第一个等式由 $G(f)$ 的定义得出以及 ϕ_X。由于 $u_X u_X^* = p_X$，我们得到第二个等式。第三个等式由引理 3.6(ii) 得出，第四个等式则由 p_Y 的定义得出。观察 ϕ_Y 的定义即可轻松得到最后一个等式。

(iii) 由于，$G_a^1 :=$ 恒等$^{1_{G(a)}}$，且 $u_{1_a} =$ ，直接验证即可得出 (iii)。

□

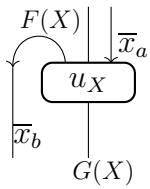
推论 4.3。$\phi : F \Rightarrow G$ 是一个 $*$-2-变换。

4.1. ϕ 在 Fun$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中的可对偶性。

我们构造 $*$-2-变换 $\phi :\ F \Rightarrow G$的一个对偶$\overline{\phi} :\ G \Rightarrow F$

对于 a、$b \in \mathcal{C}_0$ 和 ${}_bX_a \in \mathcal{C}_1(a,b)$，定义

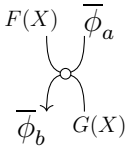
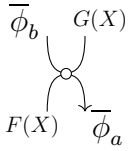
$$\overline{\phi}_a := \overline{x}_a \in \mathcal{D}_1(Ga, Fa) \text{ and } \overline{\phi}_X := \quad \in \mathcal{D}_2\left(\overline{\phi}_b \boxtimes G(X), F(X) \boxtimes \overline{\phi}_a\right).$$



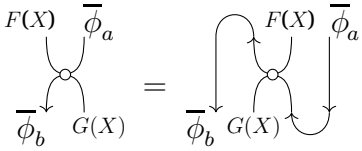
引理 4.4。对于每个 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$，$\overline{\phi}_X$ 是一个酉元

证明。证明与引理 4.1 的证明类似。 □

我们将使用以下图示记号：

$\overline{\phi}_X =$  and $\overline{\phi}_X^* =$ 

备注 4.5. 由 ϕ_X 和 $\overline{\phi}_X$ 的定义可知,

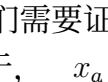


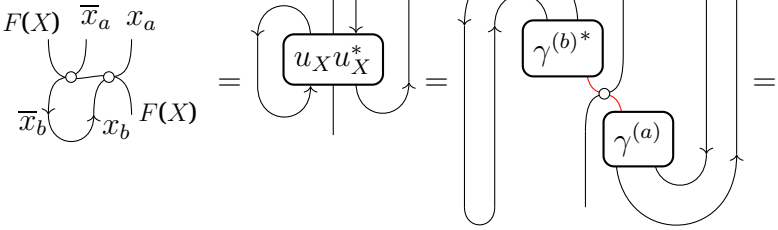
对于每个 1-胞腔 $X \in \mathcal{C}_1(a,b)$。

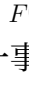
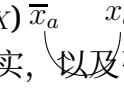
命题 4.6。$\overline{\phi}\colon\ G \Rightarrow F$ 是一个 $*$-2-变换。

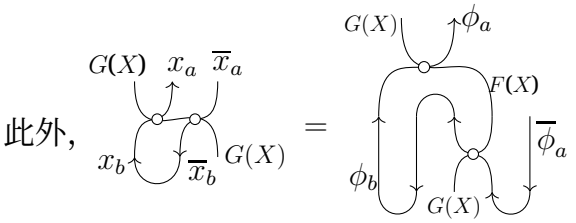
证明。证明沿用了命题 4.2 中的相同思路 □

命题 4.7。 $\phi\colon\ F \Rightarrow G$ 具有一个酉可分对偶 $\overline{\phi}\colon\ G \Rightarrow F$，位于 Fun$(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 中

证明。 我们需要证明，对于每个 $a \in \mathcal{C}_0$， 以及 都满足方程 (2.1)。由于， 对于每个 $a \in \mathcal{C}_0$，我们有，sup

∞以及 sup  $< \infty$。现在，

 $F(X)$  。最后一个等式由方程 (3.1) 的第二部分、$i\colon\ 1_F \Rrightarrow \psi$ 是一个 2-修正这一事实，以及引理 3.1(ii) 得出

此外，

备注 4.5 得出。因此，我们得到结果 □

5. Isomorphism of Q-systems

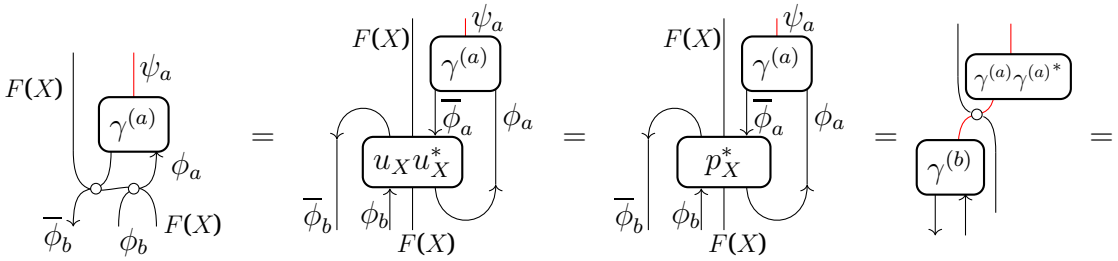
本节将应用前几节的结果，在 Fun$(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 中构造 1-胞腔 $(\psi_\bullet, m_\bullet, i_\bullet)$ 与 $\overline{\phi}\otimes\phi$ 之间的酉元。我们证明 $\{\gamma^{(a)}\colon\ \overline{\phi}_a \boxtimes \phi_a \to \psi_a\}_{a\in\mathcal{C}_0}$ 是一个交织代数映射的酉二修改。

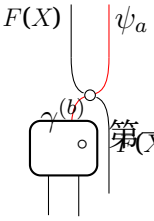
命题 5.1. $\{\gamma^{(a)}\colon \overline{\phi}_a \boxtimes \phi_a \to \psi_a\}_{a\in\mathcal{C}_0}$ 交织代数映射。

证明. 这由方程 (3.1) 显然可得。 □

命题 5.2. $\{\gamma^{(a)}\colon\ \overline{\phi}_a \boxtimes \phi_a \to \psi_a\}_{a\in\mathcal{C}_0}$ 是一个 2-修改20

证明。对于每个 $a \in C_0$， $\gamma^{(a)} \in \mathcal{D}_2(\overline{\phi}_a \boxtimes \phi_a, \psi_a)$ 都是酉元。因此，$\sup_{a \in \mathcal{C}_0} \left\| \gamma^{(a)} \right\| = 1$。所以，为了完成证明，我们需要证明每个 $\gamma^{(a)}$ 都满足方程 (2.1)。

Now, 



第二个等式是对 ϕ_X 和 $\overline{\phi}_X$的定义的简单应用。$\overline{\phi}_b$、 ϕ_b 由于 $u_X u_X^* = p_X = p_X^*$，我们得到第二个等式。最后一个等式由 $\gamma^{(a)}$的酉性得出。因此，$\gamma : \overline{\phi} \otimes \phi \Rrightarrow \psi$ 是一个酉二修改□

利用命题 5.1 和命题 5.2，我们得到如下结果

Theo备注 5.3。 （$\psi_\bullet, m_\bullet, i_\bullet$）与 $\overline{\phi} \otimes \phi$ 在 $\mathrm{End}^{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})}($ 中作为 Q-系统同构 $F)$

由此，利用 [CPJP22, 定理 3.36]，即可证明定理 1.1

推论 5.4. 设 $\mathcal{D}$ C^*-2-范畴是幂等完备的。我们有如下结论。

(i) $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的，当且仅当 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ 是 Q-系统完备的。(ii) $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的，当且仅当对于每个 C^*-2-范畴 $\mathcal{C}$，$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 都是 Q-系统完备的

证明。

(i) 若 $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的，则由定理 1.1 显然可知，$\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ 是 Q-系统完备的。

反过来，设 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ 是 Q-系统完备的，且 $({}_bQ_b, m, i)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个 Q-系统。我们证明 Q 在 $\mathcal{D}$ 中「可分裂」。首先，我们定义如下 2-函子 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$。

$$F(a) \coloneqq b \ \ \forall a \in \mathcal{D}_0 \ , \ F(X) \coloneqq 1_b \ \ \forall X \in \mathcal{D}_1(c,d) \ , \ F(f) \coloneqq \mathrm{id}_{1_b} \ \ \forall f \in \mathcal{D}_2(X,Y)$$

现在我们定义如下的 2-变换 $\psi\colon \ F \Rightarrow F$ 以及 2-修正 $\widetilde{m}\colon \ \psi \boxtimes \psi \Rrightarrow \psi^{\widetilde{}}$ 和 $i\colon \ 1_F \Rrightarrow \psi$。

$$\psi_a \coloneqq {}_bQ_b \ \ \forall a \in \mathcal{D}_0 \ , \ \psi_X \coloneqq 1_Q$$

$$\widetilde{m}_a \coloneqq m \ , \ \widetilde{i}_a \coloneqq i \ \ \text{for all} \ \ a \in \mathcal{D}_0$$

直接验证可知，$\psi : \ F \Rightarrow F$ 是一个 2-变换，而 $\widetilde{m}$和 $\widetilde{i}$ 是 2-修正。同样容易看出，$\left(\psi, \widetilde{m}, \widetilde{i}\right)$ 是 $\mathrm{End}^{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})}(F)$ 中的一个 Q-系统。现在，由于 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ 是 Q-系统完备的，我们得到一个 2-函子 $G\colon \ \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 以及一个具有酉可分对偶的 2-变换 $\phi\colon \ F \Rightarrow G$，使得 ψ 与 $\overline{\phi} \boxtimes \phi$ 作为 $\mathrm{End}^{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})}(F)$ 中的 Q-系统同构。因此，

$\psi_a \simeq \overline{\phi}_a \boxtimes_{G\,a\,()} \phi_a$ 对每个 $a \in \mathcal{D}_0$都成立。特别地，${}_bQ_b \simeq_b \overline{\phi} \boxtimes_{G\,b\,()} \phi_b$ 作为 Q-系统成立。因此， $\mathcal{D}$ 中的每个 Q-系统都可以分裂。因此，根据 [CPJP22，定理 3.36] $\mathcal{D}$ 是 Q-系统完备的 (ii) 定理 1.1 的一个直接应用得出 (ii)

□

注记 5.5. 尽管我们假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是严格 C*-2-范畴，但即使去掉严格性条件，定理 5.3 以及因此定理 1.1 仍然成立。证明几乎可以逐字照搬，并且需要反复应用命题 3.5

关于 C*Alg$_{\mathcal{C}}$这一由 $\mathcal{C}$ 在 C*-代数上的作用构成的 2-范畴的细节，其中 $\mathcal{C}$ 是酉融合范畴，请读者参阅 [CPJ22，定义 3.2] 。

推论 5.6. 设 $\mathcal{C}$ 是酉张量范畴。 C^*-2-范畴中 $\mathcal{C}$ 对 C^*-代数的作用构成的 C*Alg$_{\mathcal{C}}$ 是 Q-系统完备的

证明. 证明由以下观察和定理 1.1 得出： [CPJ22，注记 3.3] 指出，C*Alg$_{\mathcal{C}}$ =等价于 Fun(B$\mathcal{C}$,C*Alg)；其中 B$\mathcal{C}$ 是一个只有一个对象且其自同态构成范畴 $\mathcal{C}$ 的 2-范畴，而 C*Alg 是由 C*-代数、双模和交织子构成的 C*-2-范畴 □

References

[AMP15] N.Afzaly、S.Morrison 和 D.Penneys，2015 年。指标不超过 5 的子因子分类 1 4。https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.00038 即将由《美国数学会回忆录》出版。[B97] Dietmar Bisch，1997 年。与子因子相关的双模、高阶相对交换子和融合代数，《算子代数及其应用》（加拿大安大略省滑铁卢，1994/1995），13–63，Fields Inst. Commun.，13，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997 年。[CP22] Q.Chen、D.Penneys，2022 年。Q-系统完备化是一个 3-函子。《范畴理论及其应用》，第 38 卷，第 4 期，2022 年，101–134 页。arXiv:2106.12437。[CPJ22] Q.Chen、R.H. Palomares 和 C.Jones，2022 年。AF-代数上融合范畴归纳极限作用的 K 理论分类。https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.11854[CPJP22] Q.Chen、R.H. Palomares、C.Jones 和 D.Penneys，2022 年。C*-2-范畴的 Q-系统完备化。《函数分析杂志》，第 283 卷，第 3 期，2022 年，109524，ISSN 0022-1236，https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109524。（https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123622001446）[DGGJ22] P.Das、M.Ghosh、S.Ghosh 和 C.Jones，2022 年。Bratteli 图上的酉联络。arXiv:2211.03822。[DR18] C.L. Douglas 和 D.Reutter，2018 年。融合 2-范畴与 4-流形的态和不变量。arXiv:1812.11933。[EK98] D. Evans 和 Y. Kawahigashi，1998 年。量子对称性与算子代数。牛津数学专著，牛津大学出版社。[G23] M. Ghosh。酉联络的 Q-系统完备性。arXiv:2302.04921。[GJF19] D.Gaiotto 和 T.Johnson-Freyd，2019 年。高阶范畴中的凝聚。arXiv:1905.09566。[GLR85] P. Ghez、R. Lima 和 J. E. Roberts。W*-范畴，1985 年。《太平洋数学杂志》，120(1)：79–109，1985 年。https://doi.org/pjm/1102703884。[J83] V.F.R. Jones，1983 年。子因子的指标。《数学发明》，73，1–25 页。[J99] V.F.R. Jones。平面代数 I。arxiv:math.QA/9909027。[JMS14] V.Jones、S.Morrison 和 N.Snyder。指标不超过 5 的子因子分类。《美国数学会通报》（新系列），51(2)：277–327，2014 年。arXiv:1304.6141，doi :10.1090/S0273-0979-2013-01442- 3。

[JY21] N.Johnson 和 D.Yau。二维范畴。牛津大学出版社。
https://doi.org/10.1093/oso/9780198871378.001.0001。arXiv:2002.06055。[L94] R.Longo，1994 年。霍普夫代数与子因子的对偶性。I。《数学物理通讯》，159(1)，133–150，1994 年。
https://doi.org/cmp/1104254494 。[LR97] R. Longo 和 J.E. Roberts，1997 年。维数理论。K理论 11(2)：103–159 页，1997 年。[M03] M. M¨uger，2003 年。从子因子到范畴与拓扑 I：张量范畴的弗罗贝尼乌斯代数与 Morita等价。《纯粹与应用代数杂志》，180.1，81–157 页。[O88] A. Ocneanu，1988 年。代数的量子化群、弦代数与伽罗瓦理论。《算子代数及其应用》，伦敦数学学会讲义丛书，136：119–172 页。[P89] S. Popa，1989 年。子因子的相对维数、投影塔与交换方块。《太平洋数学杂志》，第 137 卷（1989 年），第 1 期，181–207。[P94] S. Popa，1994 年。II型可和子因子的分类。《数学学报》，172，163–225 页。[P95] S. Popa，1995 年。高阶相对交换子的格的公理化。《数学发明》，120，237–252 页。[S90] J.K. Schou，1990 年。博士论文。子因子的交换方块与指标。
https://doi.org/10.48550/arXiv.1304.5907。

MainakGhosh，Stat-Math Unit，Indian Statistical Institute电子邮箱地址：main ghosh@rediffmail.com