正张量分解与不变张量分解的边界秩：在关联中的应用

Andreas Klingler[1,2],Tim Netzer[3],和 Gemma De les Coves[1]

[1]理论物理研究所，Technikerstr. 21a，A-6020 因斯布鲁克，奥地利[2]数学学院，
Oskar-Morgenstern-Platz 1，A-1090 维也纳，奥地利[3]数学系，
Technikerstr. 13，A-6020 因斯布鲁克，奥地利

arXiv:2304.13478v3 [quant-ph] 19 Feb 2025

矩阵秩及其正版本对于小近似具有鲁棒性，即它们不会在小扰动下减小。相比之下，多方张量秩可能因任意小的误差而坍缩，即秩与边界秩之间可能存在间隙，从而导致对固定张量秩集合进行优化时出现不稳定性。多方正秩是否也会因小扰动而坍缩？在这项工作中，我们证明多方正张量分解和不变张量分解在秩与边界秩之间存在间隙，其中包括张量秩纯化和循环可分解分解。我们还证明了正分解与隶属关系之间的对应关系，即与某些多体概率分布集合的隶属关系，并利用秩与边界秩之间的间隙证明这些关联集合不是闭集。由此可知，检验源自平移不变矩阵乘积态等资源的概率分布的隶属关系，在有限时间内是不可能完成的。总体而言，这项工作揭示了秩的不稳定性以及二方系统的独特行为。

1 引言

众所周知，矩阵的低秩近似性质良好：对每个矩阵，都存在一个具有固定误差的最佳低秩近似，而且任何比它更接近原矩阵的元素，其秩都必须更大。换言之，近似秩

$$\operatorname{rank}^{\varepsilon}(T) := \inf_{W \in B_\varepsilon(T)} \operatorname{rank}(W)$$

其中，$B_\varepsilon(T)$表示给定范数 $\|\cdot\|$下元素 T 周围的 ε球，当$\varepsilon > 0$ 足够小时，它与精确秩一致。

令人惊讶的是，多方张量秩的表现截然不同：存在张量 T，其边界秩

$$\underline{\operatorname{rank}}(T) := \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{rank}^{\varepsilon}(T)$$

Andreas Klingler： Andreas.Klingler@univie.ac.at

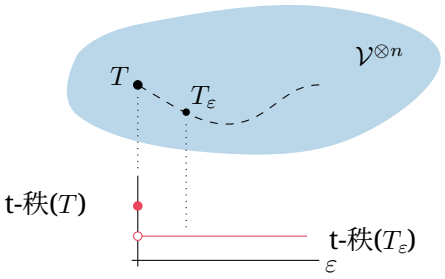


图 1：**边界秩**。给定一个 T，它属于一个 n 重张量积空间，以及某种秩，称为 t-秩。若存在一个张量向量族 $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$，使得 $T_\varepsilon \to T$ 对于 $\varepsilon \to 0$ 成立，并且对所有 $\varepsilon > 0$，t-rank(T_ε) $<$ t-rank(T)，则称 t-秩在秩与边界秩之间存在间隙。

小于 严格小于 的秩 T （见图 1）。对数学家而言，这意味着秩不是下半连续的。这等价于如下表述：秩有上界常数 r

$$\mathcal{T} := \{T \in \mathcal{V}^{\otimes n} : \operatorname{rank}(T) \leq r\}$$

在拓扑上非闭，因为 $\mathcal{T}$ 中存在一些序列，其极限不属于 $\mathcal{T}$。因此，在这类集合上进行优化问题求解（例如计算最优低秩近似）通常是不适定的 [6]。众所周知，包含三个或更多局部空间的张量分解在秩与边界秩之间存在间隙 [1, 7, 8], ，含有环的张量网络分解也如此 [5, 4, 3, 9], ；其中一些结果涉及不变张量的对称分解。关于张量秩拓扑性质的详尽论述，参见 [10] 。关于通过条件数研究定秩张量上的优化问题，参见 [11]。

多体正张量呢？半正定张量和非负张量分别代表量子和经典的正性概念，因此在量子信息论和经典概率论中居于核心地位。然而，上文提到的张量分解不足以表示正元素，因为通常无法保证全局正性 [12, 13]。引入局部正性可以解决这一问题

已于 Quantum 2025-02-17 接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 许可协议发表。

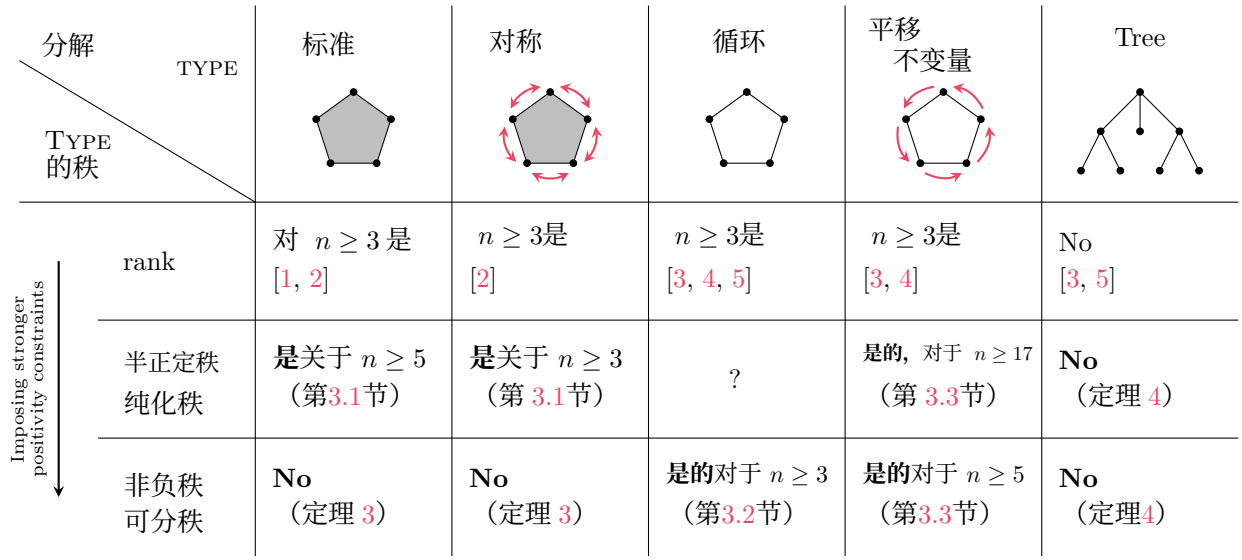


图 2：在 n**重张量积空间中，秩与边界秩之间是否存在间隙?** 本表总结了已知结果以及本文的贡献（以粗体标示）：我们证明，当施加对应于量子关联场景的正性约束时（第二行），间隙仍然存在；而当施加对应于经典关联场景的更强正性约束时（第三行），某些间隙会消失。秩的类型和分解的类型定义于第2节。

约束，例如混合态的局部纯化形式和可分解分解 [14, 15, 16]，或逐元素非负张量的非负、半正定和平方根分解[17, 18, 15, 16, 19]。这些分解方式各自引出一种正秩概念，用以刻画线性规划与半正定规划 [20, 21]，或经典与量子关联复杂度 [18, 22, 23]的复杂性。多体正张量秩（可能具有不变性）与其边界秩之间是否存在间隙?

在这项工作中，我们证明，若干局部正且不变的分解在秩与边界秩之间存在间隙，如图 2所示。这包括矩阵乘积态（MPS）和矩阵乘积算子（MPO）的正版本和/或对称版本。我们还证明，这些分解的秩决定了概率分布能否通过局部测量由某些类别的状态生成；例如，我们证明，非负张量的半正定秩刻画了通过局部测量生成多体概率分布所需的纠缠量（见图3）。接着，我们利用边界秩的间隙及其与量子关联之间的联系，证明：

(i) 如果张量网络中存在环，那么在固定正秩下计算最佳近似是病态的。具体而言，给定一个混合态 ρ（其秩大于 r），通常不存在一个混合态 σ，使其成为所有正秩有界于 r 的分解中的最佳近似，因为对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个与其相距 ε 的秩为 r 的混合态，而 ρ 的秩严格大于 r。

(ii) 由带有局部测量的多体态生成的概率分布（图 3(a)）并非闭集。因此，即使经过任意多轮采样，也无法验证某个特定资源态的必要性。通过局部量子信道生成多体混合态的情形也一样（图3(b)）。

(iii) 我们给出了这样的关联场景：量子情形对近似处理较为脆弱，而经典情形则具有鲁棒性。这揭示了这两种场景之间一种新型的分离。

本文结构如下。第 2 节回顾非负张量上的正张量分解以及半正定多体矩阵。第 3 节介绍图 2 所总结的结果。第 4 节介绍正张量分解的应用以及边界秩存在所带来的影响。第 5 节总结全文并讨论开放问题。

附录的结构如下。在附A中，我们回顾超图结构上的正张量分解与不变张量分解，即所谓的$(\Omega\ G)$-分解。在附录B、附录E、附录F和附录G中，我们给出正文中所用引理的证明。在附录C 和附录D中，我们回顾量子信道拓扑和正算子值测度的基本事实。

已于 Quantum 2025-02-17 接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 发布。

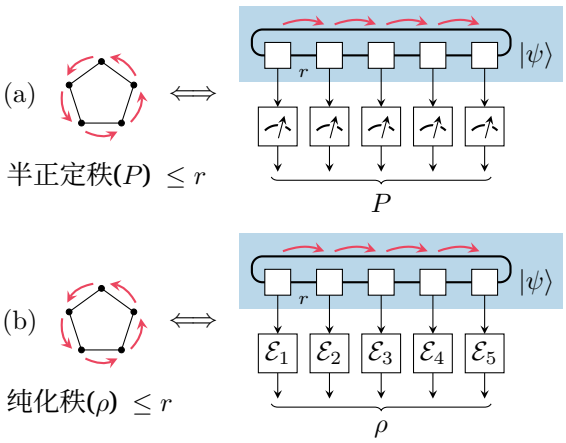


图 3： **边界秩对关联的影响**。（a）平移不变（t.i.）循环半正定秩刻画了通过平移不变矩阵乘积态（MPS）结合局部测量生成该分布所需的最小键维数，其中 P 是一个表示 n-方概率分布的非负张量。秩与边界秩之间的间隙意味着，以这种方式生成的概率分布集合不是闭集。当用其他分解几何结构和对称性替代循环图和平移不变性时，结论同样成立（见定理 6）。（b）边界秩与秩之间的间隙也意味着，通过键维数为 r 的 MPS 和局部量子信道得到的 n-方密度矩阵集合不是闭集。

2 正张量分解

接下来，我们从三个不同方面对逐元素非负张量上的若干张量分解进行变式研究：局部正性（第2.1节）、指标排列（第2.2节）和对称性（第2.3节）。图4总结了所有不同的秩概念及其缩写。稍后，我们将把这些分解推广到多方半正定（psd）矩阵（第2.4节）。最后，我们将在第2.5 节介绍边界秩的概念。

二方局部正张量分解源于矩阵分解。例如，给定一个矩阵 $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$， T 若存在如下分解，则其秩至多为r

$$T = \sum_{\alpha=1}^{r} |v_\alpha\rangle \langle \bar{w}_\alpha| , \tag{1}$$

其中 $\langle \bar{w}_\alpha| := |w_\alpha\rangle^t$。等价地，将 T 视为 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$中的一个元素，矩阵分解可表示为

$$T = \sum_{\alpha=1}^{r} |v_\alpha\rangle \otimes |w_\alpha\rangle .$$

限制为逐元素非负向量，即$\langle j | v_\alpha\rangle$, $\langle j | w_\alpha\rangle \geq 0$ 对于每个 $j \in \{1, \ldots, d\}$，我们得到非负矩阵分解 [24]。我们将这种分解所达到的最小 r 记为 nn-rank(T)。将非负向量替换为半正定矩阵，我们得到半正定矩阵分解，其定义为

$$T_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (A_i)_{\alpha,\beta} \cdot (B_j)_{\alpha,\beta} = \operatorname{tr}\left(A_i B_j^t\right)$$

其中 A_i， $B_j \in \mathcal{M}_r^+(\mathbb{C})$ 是大小为 $r \times r$ 的厄米半正定矩阵。半正定秩 psd-rank(T) 是生成此类分解所必需的最小大小 $r \in \mathbb{N}$ 。

这三个秩之间通过以下不等式相关（见 [17]）

$$\operatorname{rank}(T) \leq \text{psd-rank}(T)^2 \tag{2}$$

and

$$\text{psd-rank}(T), \operatorname{rank}(T) \leq \text{nn-rank}(T). \tag{3}$$

请注意，一般而言，不包含维数 d 时，不存在反方向的不等式。

2.1 多方张量分解

通过考虑更多向量并将求和保留为单个指标，可以将二方分解推广到多方分解，即

$$T = \sum_{\alpha=1}^{r} |v_\alpha\rangle \otimes |w_\alpha\rangle \otimes \cdots \otimes |z_\alpha\rangle .$$

在额外要求局部向量逐项非负的约束下，我们得到标准非负多体张量分解。半正定分解推广到多体情形后为

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (A_{j_1})_{\alpha,\beta} \cdot (B_{j_2})_{\alpha,\beta} \cdots (Z_{j_n})_{\alpha,\beta}, \tag{4}$$

其中 $A_j, B_j, \ldots, Z_j \in \mathcal{M}_r^+(\mathbb{C})$ 是半正定的 [23, 16]。

通过引入多个求和指标，我们可以得到多体张量分解为局部元素的各种分解形式。例如，循环分解可表示为

$$T = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} |x_{\alpha_1,\alpha_2}\rangle \otimes |y_{\alpha_2,\alpha_3}\rangle \otimes \cdots \otimes |z_{\alpha_n,\alpha_1}\rangle , \tag{5}$$

这称为矩阵乘积态（MPS）分解 [25]。再次将范围限制为非负张量，可得到非负循环分解 [16, 19], ，也称为随机矩阵乘积态 [26]。类似地，

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\alpha_i,\beta_i=1}^{r} (A_{j_1})_{\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2} \cdots (Z_{j_n})_{\alpha_n,\alpha_1;\beta_n,\beta_1}, \tag{6}$$

其中 $A_i, \ldots, Z_i \in \mathcal{M}_{r^2}^+(\mathbb{C})$ 是半正定的，定义了循环半正定分解 [15, 19]。

与二分情形类似，这些秩的概念通过公式（2）和（3）中的不等式相关联。

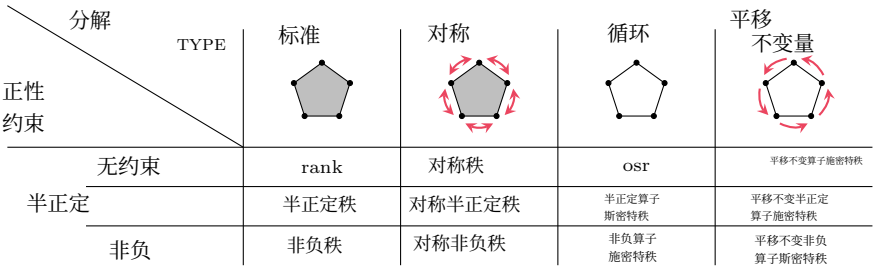


图 4：**各种不同秩概念的缩写**。各列表示分解中指标的不同排列。各行区分施加于分解的正性约束。术语 osr 表示算子施密特秩，缩写 ti 表示平移不变，而 symm 表示对称。

2.2 指标的任意排列

更一般地，可以通过一个超图来定义指标的任意排列 Ω：将节点与局部空间相关联，并将（超）边与求和指标相关联。这包括目前为止提到的所有分解（示例见图5 ）。给定一个超图Ω，我们将相应的秩定义为秩$_\Omega$、非负秩$_\Omega$、半正定秩$_\Omega$ [16]。本文所考察的一个特殊分解子类来源于树（即不含环的连通图）。需要注意的是，树这一概念对超图没有意义。虽然树张量分解无法显示边界秩与秩之间的间隙，但一些正张量分解在最简单的超图（即单纯形）中就已经表现出间隙。关于Ω-分解的详细论述，请参阅附录A，其中通过表示超图结构的Ω-加权单纯复形加权单纯复形Ω 定义了

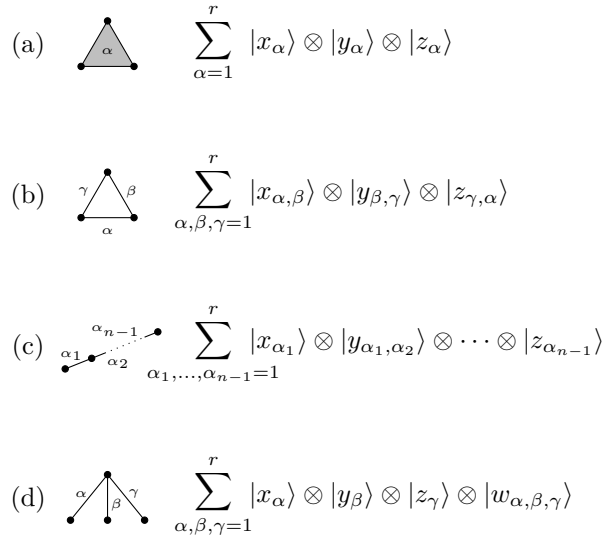


图 5：**分解类型示例**。超图结构 Ω 可以产生不同的张量分解。每个顶点对应一个局部空间，每条（超）边对应分解中的一个指标。如果 Ω 是n-单纯形，则得到标准张量分解 (a)；对于 n-环，则得到循环分解 (b)；对于长度为 n 的线，则得到 (c) 中的分解；对于一棵树，则得到树张量网络 (d)。

2.3 对称分解

许多张量分解都可以采用对称化版本，即通过约束局部元素相同来定义对称分解。例如，对称张量分解表示为

$$T = \sum_{\alpha=1}^{r} |v_\alpha\rangle \otimes |v_\alpha\rangle \otimes \cdots \otimes |v_\alpha\rangle \,.$$

方程 (4) 中给出的半正定分解称为对称的，当且仅当所有局部矩阵 A_j、B_j.....对于每个固定的 j 都相同。在这种情况下，我们将相应的秩分别记为：对于无约束分解，记为 对称秩 ；对于半正定分解，记为 对称半正定秩 ；对于非负分解，记为 对称非负秩 。

对于循环分解，其平移不变（t.i.）版本为

$$T = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} |v_{\alpha_1,\alpha_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |v_{\alpha_n,\alpha_1}\rangle \qquad (7)$$

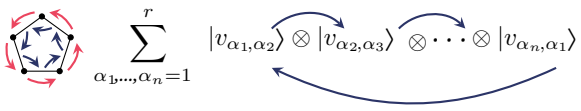


图 6：超图 Ω 上的群作用是对顶点（红色）的群作用，并在边（绿色）上诱导出定义良好的群作用。该群作用产生了对局部张量的约束。在此例中，该群作用产生了约束 $|v_{\alpha}^{[i]}, \beta\rangle = |v_{\alpha}^{[j]}, \beta\rangle$，其中 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$（蓝色）。

类似地，平移不变半正定分解由如下方程中的分解给出 (6)，其中所有局部矩阵 A_j、B_j.....对于每个固定的 j 都是相同的。我们将相应的秩记为 ti-osr、ti-psd-osr 和 ti-nn-osr。

对称分解可通过引入群作用推广到任意结构 Ω，该群作用 G 作用于顶点集合 $\{1, \ldots, n\}$，并且与超图结构兼容（示例见图 6 ）。这产生了 (Ω G)-分解，每个分解都有其对应的秩。更多细节请参见附录 A 。

2.4 多方半正定矩阵的正分解与不变量分解

对于半正定矩阵 $\rho \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^{\otimes n}$，存在类似的张量分解层级，其中包含无约束张量分解[1]

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha \otimes B_\alpha \otimes \cdots \otimes C_\alpha \tag{8}$$

其中，$A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \in \mathsf{M}_d(\mathbb{C})$ 是可分分解；在该分解中，$A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ 被限制为半正定矩阵；此外还有局部纯化形式，它由一个因式分解 $\rho = LL^\dagger$ 以及对 L的无约束张量分解组成。我们将相应的秩记为 rank(ρ)、可分秩 sep-rank(ρ) 和纯化秩 puri-rank(ρ)。在无约束情形和可分情形中，rank(ρ) 和 sep-rank(ρ) 分别是使得存在形式如 (8) 的分解的最小$r \in \mathbb{N}$ 。纯化秩 puri-rank(ρ) 是所有 ρ的纯化中秩 L 的最小值。通过以不同方式排列局部矩阵的指标，可以定义任意的 Ω-分解。详情请参阅附录 A。

正张量分解的层级嵌入矩阵张量分解的秩类型框架中，具体如下。选择

$$\rho_T \coloneqq \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{d} T_{j_1,\ldots,j_n} |j_1, \ldots, j_n\rangle \langle j_1, \ldots, j_n|, \tag{9}$$

[1]无约束张量分解是指，该分解的局部项中不包含任何正性约束。

ρ_T 的每个无约束张量分解都可以通过忽略非对角项，转化为 T 的无约束张量分解。对于可分分解和非负分解，以及半正定分解和纯化形式，情况同样如此。特别地，我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(T) &= \operatorname{rank}(\rho_T), \\ \text{nn-rank}(T) &= \text{sep-rank}(\rho_T), \\ \text{psd-rank}(T) &= \text{puri-rank}(\rho_T). \end{aligned}$$

包括所有不同的指标排列以及对称性。关于对应关系的详细阐述和证明，请参阅 [15, 定理 38]和 [16, 定理 43]。

如果非负张量的某种秩类型在边界秩与秩之间存在间隙，那么相应的矩阵张量秩中也存在这一间隙。例如，对于任意满足 psd-rank(T) $<$ psd-rank(T) 的张量 T ，我们有

$$\begin{aligned} \underline{\text{puri-rank}}(\rho_T) &\leq \underline{\text{psd-rank}}(T) \\ &< \text{psd-rank}(T) \\ &= \text{puri-rank}(\rho_T) \end{aligned}$$

其中，第一步和最后一步使用了上述对应关系。

2.5 边界秩

张量的秩与不同描述中的复杂度度量相关 [2, 27, 23]。这些复杂度对于近似是否具有鲁棒性？换言之，给定近似误差 $\varepsilon > 0$，近似的最小秩如何

$$\operatorname{rank}^{\varepsilon}(T) \coloneqq \inf_{\|M-T\|<\varepsilon} \operatorname{rank}(M)$$

与其精确对应量秩(T)有何关系？对于固定的近似误差，参考文献 [28] 表明，对于某些ℓ_p-范数和 Schatten p-范数，相应分解的秩——非负秩$^\varepsilon$ 和可分秩$^\varepsilon$ ——可以有一个与系统维数无关的上界，这与它们的精确对应量形成对比。不过，这些界依赖于 ε ，因此当$\varepsilon \to 0$时会发散。

边界秩 [2, 1, 8] 是近似秩[2]的一种渐近度量，即

$$\underline{\operatorname{rank}}(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{rank}^{\varepsilon}(T).$$

也就是说，当且仅当存在一个收敛的张量序列 $T_n \to T$ ，使得 rank(T_n) $\leq r$时，rank(T) $\leq r$ 。根据定义，我们有

$$\operatorname{rank}^{\varepsilon}(T) \leq \underline{\operatorname{rank}}(T) \leq \operatorname{rank}(T)$$

[2]注意，对于足够小的 ε ，函数 $\varepsilon \mapsto$ rank$^\varepsilon$(T)是常数。

对于每个固定的近似误差 $\varepsilon > 0$。注意，由于有限维向量空间中的所有范数都等价，边界秩与收敛所选用的范数无关。[3]因此，如果$T_n \to T$ 收敛，那么它也在任何其他范数下收敛。此外，边界秩与归一化无关。如果$\mathrm{rank}(T) = r$，那么对于任意范数，我们同样有$\mathrm{rank}(T/\|T\|) = r$。

本节介绍的其他所有秩概念的边界秩也以类似方式定义。我们通过在相应秩的通常标记下方加下划线来表示它们。

已知在矩阵秩（即二分张量秩）的情形下，我们有

$$\underline{\mathrm{rank}}(T) = \mathrm{rank}(T)$$

对于每个二分张量 T，结论均成立。这是因为秩对应于 T 中行列式非零的最大子矩阵的大小，而行列式是连续的。或者，也可以由 Eckart–Young 逼近定理 [29] 得出这一结论。

然而，对于多方张量分解，存在张量 T，使得

$$\underline{\mathrm{rank}}(T) < \mathrm{rank}(T).$$

每当出现这种情况时，我们就称秩与边界秩之间存在间隙。此外，如果存在一个多方张量序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $T_n \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$，且 $\mathrm{rank}(T_n)$ 保持恒定而 $\mathrm{rank}(T_n) \to \infty$，我们就称存在边界秩分离。

关于边界秩与秩之间间隙存在性和不存在性的结果包括具有指标各种排列方式的无约束张量分解、[2, 4, 3], 二部局部正分解 [17], 以及标准非负张量分解 [30]。为完整起见，我们将在下一节简要概述这些结果。

3 秩与边界秩之间的间隙

这里我们介绍图 2 中总结的结果。下文通过给出表现出这些间隙的张量的明确示例，来证明秩与边界秩之间的间隙。

3.1 标准张量分解

由于矩阵秩在边界秩与秩之间不存在间隙，因此大小为 $n = 3$ 的系统是边界秩与秩之间存在间隙的最小示例。虽然这一问题已经针对标准张量秩和对称张量秩进行了研究，但在本小节中，我们还将这一研究扩展到正张量

[3] $A\ B > 0$ $A\|\ \|_1 \le$ 也就是说，存在常数，，$\|\ \|_2 \le B\|\ \|_1$ 使得...

分解、非负张量以及半正定矩阵。

对于标准（无约束）张量分解，未归一化的 n部 W 状态

$$W_n := |0,\dots,0,1\rangle + |0,\dots,1,0\rangle + \dots + |1,0,\dots,0\rangle$$

对于系统大小为 $n \ge 3$ 的情形，边界秩与秩之间以及对称边界秩与秩之间均存在间隙。具体而言，对于 $\varepsilon > 0$，张量族

$$W_n^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(|0\rangle + \varepsilon\,|1\rangle)^{\otimes n} - \frac{1}{\varepsilon}\,|0,\dots,0\rangle \tag{10}$$

意味着

$$\underline{\text{symm-rank}}(W_n) = \underline{\mathrm{rank}}(W_n) = 2$$

由于 $\lim_{\varepsilon\to 0} W_n^\varepsilon = W_n$。另一方面，秩$(W_n) = n$（参见附录 B 中的命题 18，其中给出了自包含的证明）。[4]

现在我们证明，W_n-张量在半正定秩的秩与边界秩之间存在间隙。为此，我们首先利用以下引理给出半正定秩的下界，然后计算边界秩的上界。

引理 1。 设 T 为非负张量。则

$$\mathrm{rank}(T) \le \text{psd-rank}(T)^2$$

对于具有任意对称约束的任意指标排列 Ω，同样的界也成立。

我们参见附录 B中的引理 20以获得证明。引理 1 表明半正定秩$(W_5) \ge 3$ 以及半正定秩$(W_n) = \Omega(\sqrt{n})$。[5] 目前尚不清楚这一下界是否是紧的。

对于 $\varepsilon > 0$ 由半正定矩阵定义的张量向量族 W_n^ε

$$A_0^\varepsilon = \frac{C}{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}\begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{i\pi}{n}} \\ e^{-\frac{i\pi}{n}} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^\varepsilon = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

对于某个适当的常数 $C \in \mathbb{R}$，给出了对 W_n 的任意精确近似，这证明了

$$\underline{\text{psd-rank}}(W_n) = \underline{\text{symm-psd-rank}}(W_n) = 2.$$

换言之，对于具有 $n \ge 5$的n方半正定分解，存在边界秩分离。

在 3方情形下，维数分析表明对称半正定秩$(W_3) \ge 3$，从而也导致边界秩与秩之间出现间隙（参见附录中的命题21 ）。然而，对于非对称情形下的三方情形，其存在性

[4]或者，利用Sylvester定理关于二元形式的结果 [31, 32]，可以证明对称秩的这一陈述。对于标准张量秩，由于Comon猜想对边界秩为 2 [33]的张量成立，因此该陈述也随之成立。

[5]即半正定秩渐近地以下界为 $D\cdot\sqrt{n}$ 对于某个常数 D

已于 2025-02-17接收，点击标题进行验证。根据 CC-BY 4.0 许可发布。

边界秩与秩之间的间隙仍是一个未解决的问题（参见猜想 2 和第 5节）。

与半正定分解不同，在任意 n方情形下，非负分解（以及由此得到的可分分解）中边界秩与秩之间不存在间隙 n，这一点我们将在第3.5节看到。非负分解这一特殊情形已在 [34]中得到证明。

3.2 循环分解的边界秩

现在我们来考察具有和不具有平移不变性的循环分解。Barthel 等人 [3]证明，对于算子施密特秩，双区域态的边界秩与秩之间存在间隙，其形式为

$$\tau := \sum_{\alpha=1}^{k} |\alpha,\alpha\rangle^{\otimes n} + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{\alpha\neq\beta=1}^{k} |\alpha,\alpha\rangle^{\otimes i} \otimes |\alpha,\beta\rangle \otimes |\beta,\beta\rangle^{\otimes(n-i-2)} \otimes |\beta,\alpha\rangle .$$

具体而言，他们证明了 osr(τ) $\leq k <$ osr(τ)。

[3] 中的构造也使非负循环分解的边界秩与秩之间出现间隙，下面我们简要回顾这一构造。令 $\varepsilon > 0$ ，并对每个 α， $\beta \in \{1, \ldots, k\}$定义非负向量

$$|v^{\varepsilon}_{\alpha,\beta}\rangle = \varepsilon\,|\alpha,\beta\rangle + (1-\varepsilon)\delta_{\alpha,\beta}\,|\alpha,\beta\rangle$$

其中 $\delta_{\alpha,\ \beta}$ 是克罗内克δ，以及

$$|w^{\varepsilon}_{\alpha,\beta}\rangle = \delta_{\alpha,\beta}\,|\alpha,\beta\rangle + \frac{1}{\varepsilon}(1-\delta_{\alpha,\beta})\,|\alpha,\beta\rangle .$$

设定

$$\tau^{\varepsilon} = \sum_{\alpha_i=1}^{k} |v^{\varepsilon}_{\alpha_1,\alpha_2}\rangle\otimes|v^{\varepsilon}_{\alpha_2,\alpha_3}\rangle\otimes\cdots\otimes|v^{\varepsilon}_{\alpha_{n-1},\alpha_n}\rangle\otimes|w^{\varepsilon}_{\alpha_n,\alpha_1}\rangle$$

我们得到 $\tau_{\varepsilon} = \tau + \mathcal{O}(\varepsilon)$，因此 nn-osr($\tau$) $\leq k$。这意味着以下不等式链

$$\underline{\text{osr}}(\tau) \leq \underline{\text{nn-osr}}(\tau) \leq k < \text{osr}(\tau) \leq \text{nn-osr}(\tau)$$

其中，严格不等式在 [3, 命题5] 中得证，而 osr 与 nn-osr 之间的不等式成立，是因为后者是前者的受约束版本。

虽然引理 1 无法用于证明边界半正定秩与半正定秩之间存在间隙，因为边界秩与秩之间的间隙太小，但我们将看到，平移不变半正定分解中也会出现间隙。因此，我们预期非对称情形也会表现出相同的行为。

猜想 2。 存在一个非负张量 T，使得 半正定算子斯密特秩(T) $<$半正定算子斯密特秩(T)。

3.3 平移不变循环分解

现在，我们证明循环平移不变分解中边界秩与秩之间存在间隙。我们为所有类型的分解得到了边界秩分离。

首先，对于无约束张量分解， W_n 的平移不变分解的秩会随系统大小增加，而算子施密特秩(W_n) $= 2$ [15, 示例22]。关于平移不变算子施密特秩，已有若干下界。P´erez-Garc´ıa 等人[25] 利用 Wielandt 不等式 [35], 证明了算子施密特秩(W_n) $\geq \Omega(n^{1/3})$，而据我们所知，最紧的下界 [15, 命题 23] 由以下结果给出：

$$\text{ti-osr}(W_n) \geq \sqrt{n} \tag{12}$$

利用 MPS 的不可约形式 [36]。另一方面，Christandl 等人 [4] 通过定义一个近似分解证明了平移不变算子施密特秩(W_n) =2，其中$|v^{\varepsilon}_{12}\rangle = |v^{\varepsilon}_{21}\rangle = 0$，并且

$$|v^{\varepsilon}_{11}\rangle = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix} \text{ and } |v^{\varepsilon}_{22}\rangle = \frac{1}{\varepsilon^{1/n}}\begin{pmatrix}(-1)^{\frac{1}{n}}\\ 0\end{pmatrix}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$。这证明了当 $n \geq 5$时，平移不变循环分解的边界秩与秩之间存在分离。

对于平移不变半正定分解，通过定义半正定矩阵，我们得到平移不变半正定算子斯密特秩(W_n) $\leq$ 对称半正定秩(W_n) $=$ 2

$$\left(B^{\varepsilon}_{j}\right)_{\alpha,\alpha';\beta,\beta'} = \delta_{\alpha,\alpha'}\cdot\delta_{\beta,\beta'}\cdot\left(A^{\varepsilon}_{j}\right)_{\alpha,\beta}$$

其中 A^{ε}_{j} 在公式（11）中定义。我们得到

$$\sum_{\alpha_i,\beta_i=1}^{2} \left(B^{\varepsilon}_{j_1}\right)_{\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2}\cdots\left(B^{\varepsilon}_{j_n}\right)_{\alpha_n,\alpha_1;\beta_n,\beta_1} = (W_n)_{j_1,\ldots,j_n} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\frac{1}{n-1}}).$$

利用引理1 以及公式（12），我们有

$$\text{ti-psd-osr}(W_n) \geq \Omega(n^{1/4}) \tag{13}$$

特别地，当 $n \geq$17 时，平移不变半正定算子斯密特秩(W_n) ≥ 3 。这证明了平移不变循环半正定分解中边界秩与秩之间的分离。

对于平移不变非负分解，我们构造一个张量，使其对于每个奇数 $n \geq 5$ 都具有边界秩与秩之间的分离。再次考虑张量W_n。根据前面的讨论，我们有

$$\text{ti-nn-osr}(W_n) \geq \text{ti-osr}(W_n) \geq \sqrt{n}.$$

现在我们将证明

$$\underline{\text{ti-nn-osr}}(W_n) \leq 2$$

若 n 为奇数。为此，我们在下文使用非负循环分解的表示

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \text{tr}(A_{j_1}\cdots A_{j_n})$$

其中 $A_j \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ 且 $(A_j)_{\alpha,\,\beta} \geq 0$。该表示与方程 (7) 中的循环分解一致，令

$$(A_j)_{\alpha,\beta} = \langle j \,|\, v_{\alpha,\beta} \rangle .$$

因此，分解的秩由矩阵 A_j 的大小决定。令

$$A_0^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{\varepsilon}} P_\tau \qquad A_1^\varepsilon = \varepsilon I_2$$

是 τ 在{1,2}上的循环群的一个非负表示的倍数，其中 $1 \mapsto$ 是置换 $2 \mapsto 1\ 2$，P_τ 是相应的置换矩阵。我们有

$$\begin{aligned} \left(\widehat{W_n^\varepsilon}\right)_{j_1,\ldots,j_n} &\coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(A_{j_1}^\varepsilon \cdots A_{j_n}^\varepsilon\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & : j_1 + \ldots + j_n \text{ even} \\ \varepsilon^{k-1+\frac{k-1}{n-1}} & : j_1 + \ldots + j_n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $k \coloneqq j_1 + \cdots + j_n$。这意味着 $\widehat{W_n^\varepsilon} = \frac{1}{2}W_n + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$。因此，对于奇数 $n \geq 5$，有

$$\begin{aligned} \underline{\text{ti-nn-osr}}(W_n) &= 2 < \sqrt{5} \\ &\leq \text{ti-osr}(W_n) \leq \text{ti-nn-osr}(W_n). \end{aligned}$$

将{1, 2} 替换为{1, . . . , p}，并将 τ 替换为在{1, . . . , p} 上的平移，即可将这一构造推广到任意 n 和 $p|(n-1)$。由于相应的置换矩阵 A_0^ε 和 A_1^ε 的大小为 $p \times p$，因此 $\underline{\text{ti-nn-osr}}(W_n) \leq p$。

3.4 多部半正定矩阵的分解

非负张量的三类正分解与多部半正定矩阵的三类正分解相关（见第2.4节）。这使我们能够将正张量分解中边界秩与秩之间的间隙转换为多部半正定矩阵中边界秩与秩之间的间隙。给定张量 T，使得半正定秩(T) ＜半正定秩(T)，矩阵 ρ_T（公式（9））满足

$$\begin{aligned} \underline{\text{puri-rank}}(\rho_T) &\leq \underline{\text{psd-rank}}(T) \\ &< \text{psd-rank}(T) \\ &= \text{puri-rank}(\rho_T). \end{aligned}$$

从而揭示了纯化秩的边界秩与秩之间存在间隙。类似地，只要相应的张量分解存在间隙，就可以得到矩阵张量分解中的间隙。该策略在对称纯化秩、平移不变纯化算子施密特秩、可分算子施密特秩和平移不变可分离算子施密特秩的边界秩与秩之间产生了间隙。

3.5 不存在边界秩间隙

下面给出两种不存在边界秩与秩之间间隙的情形。首先，我们证明，对于标准张量分解（即仅包含一个求和指标），非负秩、对称非负秩、可分秩和对称可分秩不存在间隙。其次，我们证明，无论正性约束如何，由树 Ω 产生的 Ω-分解在秩与边界秩之间都不存在间隙。

两种情形的证明策略相似。我们首先证明，每个分解都可以约化为一种特定的归一化形式（即每个局部元素都满足归一化约束）。然后，我们对局部元素应用博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，从而保证由全局元素的收敛序列得到的每个分解序列都收敛到具有相同秩的分解。

非负和可分标准张量分解

现在我们将证明，非负秩、对称非负秩、可分秩和对称可分秩在秩与边界秩之间不存在间隙。

定理 3。设 $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个 n-方可分矩阵序列，其极限为 $\rho_k \to \rho$，并且对于每个 k，都有可分秩(ρ_k) $\leq r$。那么，

$$\text{sep-rank}(\rho) \leq r$$

对于对称可分秩，同样的结论也成立。对于非负张量序列以及非负秩和对称非负秩，该结论同样成立。

由于非负分解对应于对角矩阵的可分解分解，因此只需证明可分解分解的结论。下面我们将给出证明的概要；有关详细内容和一般性表述，请参阅附录 G。不失一般性，设 ρ_k 是一个由 n-方可分矩阵组成的序列，并具有一个可分解分解

$$\rho_k = \sum_{\alpha=1}^{r} \rho_{\alpha,k}^{[1]} \otimes \rho_{\alpha,k}^{[2]} \otimes \cdots \otimes \rho_{\alpha,k}^{[n]}.$$

该序列可以选取为归一化的，即$\|\rho_{\alpha\,,\,k}^{[i]}\| \leq C\|\rho\|$，从而 $(\rho_{\alpha\,,\,k}^{[i]})_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个有界序列。博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理（附录中的定理 22 ）表明，存在一个子序列的极限点，从而得到 ρ 的一个可分解分解，并且可分秩（ρ） $\leq r$。

这推广了 [30]，中的结果，该结果表明，多方非负标准张量分解在秩与边界秩之间不存在间隙。

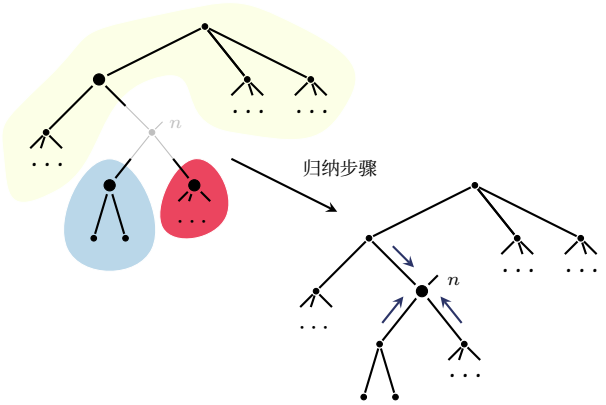


图 7: **引理 5**的证明思路。假设可分矩阵 ρ 在大小至多为 $n-1$ 的子树上达到一个归一化分解（即除一个局部矩阵族外，其余均已归一化），那么通过将权重移至新增顶点，我们可以得到一个大小为 n 的归一化分解。

树张量网络分解

不具有局部正性的张量网络当且仅当其指定分解结构的超图 Ω 包含环时，才会表现出边界秩现象 [3]。特别地，如果超图 Ω 是一棵树，则相应的无约束张量网络分解在秩与边界秩之间不存在间隙（另请参见附录 H，其中对这一结果作了简要回顾）。下文将证明，对于正张量网络，情况同样如此。我们证明如下：

定理 4。 设Ω 是一棵树，T 是一个非负张量，ρ_1 是一个 n-分部可分矩阵，ρ_2 是一个n-分部半正定矩阵。则有：

$$\begin{aligned}
&(i)\ \underline{\text{nn-rank}}_\Omega(T) &&= \text{nn-rank}_\Omega(T)\\
&(ii)\ \underline{\text{psd-rank}}_\Omega(T) &&= \text{psd-rank}_\Omega(T)\\
&(iii)\ \underline{\text{sep-rank}}_\Omega(\rho_1) &&= \text{sep-rank}_\Omega(\rho_1)\\
&(iv)\ \underline{\text{puri-rank}}_\Omega(\rho_2) &&= \text{puri-rank}_\Omega(\rho_2)
\end{aligned}$$

关于 (i)和 (iii)的证明，请参见附录 H.2；关于 (ii) 和 (iv) 的证明，请参见附录 H.3。

同样，证明包含相同的两个步骤：首先，每个元素都能达到一个局部元素有界的分解；其次，每个有界序列都包含一个极限序列，该序列可导出一个最优分解。下面我们将简要概述可分分解的证明。归一化分解的存在性由以下引理得出。

引理 5. 设Ω 是一棵树，ρ 是一个 n-分部可分矩阵，其可分秩$\Omega(\rho) \leq r$ 且迹范数有界$\|\rho\|_1 \leq 1$。存在一个秩为 r 的可分解分解，使得每个局部矩阵的迹范数都不超过1。

引理H.2 的证明见附录 5。按照可分标准张量分解的相同推理，引理5 结合博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理可推出，对于每个序列 $\rho_k \to \rho$，若满足可分秩$(\rho_k) \leq r$ 对每个k，则可得可分秩$(\rho) \leq r$，从而证明了定理(iii) 中的4。

注意，引理 5意味着每个可分密度矩阵都能达到一个最优分解

$$\rho = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} \rho^{[1]}_{\alpha_1} \otimes \rho^{[2]}_{\alpha_1,\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \rho^{[n-1]}_{\alpha_{n-2},\alpha_{n-1}} \otimes \rho^{[n]}_{\alpha_{n-1}}$$

其中 $\|\rho^{[i]}_{\alpha,\beta}\|_1 \leq 1$，因为求和指标是按照一条线排列的。相比之下，循环分解通常无法归一化，因为这违反了第 3.2节和第 3.4节中所展示的可分解分解的秩与边界秩之间的间隙。

现在我们介绍引理5的证明思路。每棵树都可以由更小的树构建而成，并且通过对这类分解进行归纳，可以将局部元素的权重转移到较大树中的相邻顶点（见图 12）。对于单个系统，该陈述是显然的。对于 $n-1 \to n$，考虑移除顶点 n 后得到的图。该树分解为大小至多为$n-1$的较小树。根据归纳假设，我们可以假定每个子树都产生一个归一化分解的向量族，其中每个局部向量均按1进行归一化，但与 n 相邻的系统中的局部向量按 $\|\rho\|_1$进行归一化。最后，我们证明，通过添加系统 n并将权重转移到系统 n，它能得到一个局部矩阵按 1 归一化的分解，其中系统 1、……、$n-1$ 按 $\|\rho\|_1 \leq 1$ 归一化，而系统 n 按 $\|\rho\|_1$ 归一化。

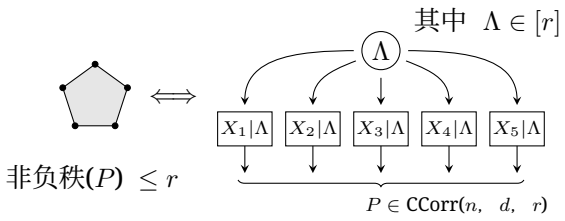
4 结论

现在介绍多方正张量分解中秩与边界秩之间存在间隙所产生的两个影响。在第4.1 节中，我们展示正张量分解与量子关联集合之间的对应关系。边界秩与秩之间的间隙随后表明，某些量子关联集合并非闭集。在第4.2 节中，我们证明这些间隙还会导致正张量秩之间出现新类型的分离。

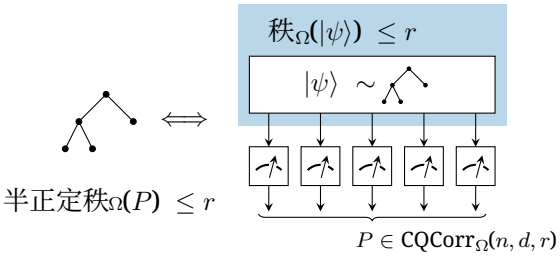
4.1 量子关联集合并非闭集

正张量分解可以得出关于（Quantum）关联的论断。考虑一个表示为逐项非负张量 $P \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ via 的二方有限概率分布

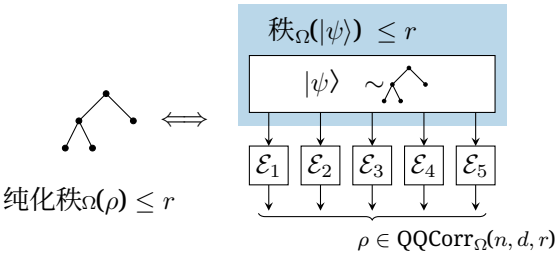
$$P_{ij} = P(X = i, Y = j)$$



(a)**多方经典**



(b)**多方量子-经典**



(c)**多方量子-量子**

图 8：**正秩刻画关联场景**。(a) 对于表示一个 n 方概率分布的非负张量 P，标准非负秩刻画了通过局部条件概率分布生成 P 所需的共享隐变量取值范围。(b) 半正定秩$_\Omega(P)$刻画了通过局部测量生成 P 所需资源态 $|\psi\rangle$ 的最小秩$_\Omega$。(c) 对于一个 n 方密度矩阵 ρ，纯化秩$_\Omega(\rho)$刻画了通过局部量子信道生成 ρ 所需资源态 $|\psi\rangle$ 的最小秩$_\Omega$。

其中 X 和 Y 是取值于$\{1, \ldots, d\}$的随机值。已知，P 的非负秩对应于局部采样该概率分布所需的隐藏变量 Λ 的最小取值范围。类似地，半正定秩(P) 是生成 $|\psi\rangle$ 所需的双方态的最小施密特秩，该状态可通过在每个量子位上进行局部测量P 来生成 [17, 18]。

现在我们展示，这些对应关系同样推广到多方张量分解以及多方矩阵张量分解。结合非平凡边界秩的存在性，这意味着这些概率分布集合以及密度矩阵集合在拓扑上非闭。

关联场景中的纠缠与正秩

我们将集合 CCorr$(n,\ d,\ r)$ 定义为由以取值属于$\{1, \ldots\ldots, r\}$ 的共享隐变量为条件的局部分布所产生的概率分布集合（见图 8 (a)），即

$$P(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n) = \sum_{\alpha=1}^{r} P(\Lambda = \alpha) \prod_{i=1}^{n} P(X_i = j_i \,|\, \Lambda = \alpha)$$

其中 X_1、……、X_n 是取值于 $\{1$、……、$d\}$中的随机变量。

类似地，对于给定的超图 Ω 以及 Ω 上的群作用 G，我们将集合 CQCorr$^{(\Omega,G)}(n$、d、$r)$ 定义为所有如下形式的概率分布 P 所组成的集合：

$$P(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n) = \langle\psi| A_{j_1}^{[1]} \otimes \cdots \otimes A_{j_n}^{[n]} |\psi\rangle$$

其中 $\left(A_j^{[i]}\right)_{j=1}^{d}$ 对于 $i \in \{1$、……、$n\}$ 是满足 G-对称性的 POVM 测量，即位置 i 上的测量与位置 gi 上的测量重合，对于每个 $g \in G$。换言之，我们有 $A_j^{[gi]} = A_j^{[i]}$ 对于每个 $g \in G$。此外，$|\psi\rangle$ 满足以下约束：秩$^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle) \le r$ （见图 8（b））。

例如，当 $\Omega = \Theta_n$ 是长度为 n 的环图（即，顶点 i 仅与 $i-1$ 和 $i+1$相连，其中加法模 $n+1$）时，CQCorr$^{\Theta_n}(n$、d、$r)$ 是所有通过对每个局部空间进行局部测量、由具有算子施密特秩 osr$(|\psi\rangle) \le r$ 的 MPS $|\psi\rangle$ 得到的 n-方概率分布的集合。对于循环群 $G = C_n$，CQCorr$^{(\Theta_n,C_n)}(n$、d、$r)$ 是通过在每个局部空间上进行相同的局部测量、由具有平移不变算子施密特秩 ti-osr$(|\psi\rangle) \le r$ 的 MPS $|\psi\rangle$得到的概率分布集合。

这些关联场景也可以推广到量子态，而非概率分布：将局部测量算子替换为局部量子信道（见图8 (c)。我们将集合QQCorr$^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$ 定义为所有由下式得到的密度矩阵组成的集合：

$$\rho = (\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n)(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

其中 $(\mathcal{E}_i)_{i=1}^{n}$ 是一个 G-不变量子信道向量族，即 $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{gi}$。此外，$|\psi\rangle$ 满足限制条件：秩$^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle) \le r$。

类似于上述例子，若 $\Omega = \Theta_n$ 是一个长度为 n 的环图，则 QQCorr$^{\Theta_n}(n,\ d,\ r)$ 是所有由具有 osr$(|\psi\rangle) \le r$ 的 MPS $|\psi\rangle$ 得到的 n-部密度矩阵组成的集合，并且在每个局部空间上施加局部量子信道。集合 QQCorr$^{(\Theta_n,C_n)}$ $(n,\ d,\ r)$ 则由具有 ti-osr$(|\psi\rangle) \le r$ 的 MPS $|\psi\rangle$ 得到的密度矩阵组成，其中在每个局部空间上施加相同的量子信道。

与二方情形类似，[23, 34], 局部纯化形式与多方量子场景之间存在对应关系。

定理 6。 设 P 为表示具有局部维数 d的 n方概率分布的张量， ρ 为具有局部维数d的 n方密度矩阵。那么，

$$(i)\ P \in \mathsf{CCorr}(n,d,r) \quad \Leftrightarrow \quad \text{nn-rank}(P) \le r$$

$$(ii)\ P \in \mathsf{CQCorr}_{(\Omega,G)}(n,d,r) \Leftrightarrow \text{psd-rank}_{(\Omega,G)}(P) \le r$$

$$(iii)\ \rho \in \mathsf{QQCorr}_{(\Omega,G)}(n,d,r) \Leftrightarrow \text{puri-rank}_{(\Omega,G)}(\rho) \le r$$

关于该定理中各陈述的证明，请分别参见附录 25 中的定理 29 和定理 31，以及附录 E和附录F。

量子关联情景的非闭性 ios

现在我们展示，定理 6 中的对应关系，加上秩与边界秩之间的间隙，意味着关联集合不是闭集。由此可知，通常不可能仅通过有限次测量来检验某个概率分布是否属于这些集合。

为证明非闭性，设 $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一列表示概率分布的张量，满足 $\lim_{k\to\infty} P_k = P$ ，并且秩与边界秩之间存在间隙，即

$$\text{psd-rank}_{(\Omega,G)}(P_k) \le r < \text{psd-rank}_{(\Omega,G)}(P).$$

那么对于所有 $k \in \mathbb{N}$， $P_k \in \mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r) P \notin$ 均成立，而$^{(\Omega,G)}\mathsf{CQCorr}n(d,\ r,\ n)$，即 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(d,\ r,\ )$ 不是闭集。

这意味着，并非总存在一个见证，能够检测生成某一概率分布所需资源态的秩。如果且仅当对所有 $Q \in \mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,d,r)$， $f(P) < 0$ and $f(Q) \ge 0$ 时，我们称连续函数 $f : \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ a witness detecting$P \notin \mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,d,r)$。假设这样的函数存在，那么展示边界秩与秩之间存在间隙的序列将违背 f 连续这一性质。因此，不可能通过生成 P 的有限个样本来检测生成 P 所需的秩，因为 ε 周围的每个球都与 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,d,r)$ 相交。

根据秩与边界秩之间的间隙（见图 2），以下情形中也会出现相同行为：

(i) 测试 $n \ge 5$ 的标准张量秩。(ii) 对称地测试 $n \ge 3$ 的对称张量秩。(iii) 对称地测试 $n \ge 17$ 的平移不变算子施密特秩。

类似地，可以证明，在上述情况下，$\mathsf{QQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$ 不是闭的。

相比之下，对于任意的 $n,d,r \in \mathbb{N}$，经典关联 $\mathsf{CCorr}(n,d,r)$ 的集合是闭的。这是因为非负秩在边界秩与秩之间不存在间隙，因此对于每个收敛的非负张量序列 $P_k \to P$，若其 $\text{nn-rank}(P_k) \le r$，我们也有 $\text{nn-rank}(P) \le r$。对于每个 $P \notin \mathsf{CCorr}(n,d,r)$，还存在一个分离见证，因为 $\mathsf{CCorr}(n,d,r)$ 与 P 之间的距离严格为正。此外，如果 Ω 是一棵树，则量子关联 $\mathsf{CQCorr}_\Omega(n,d,r)$ 和 $\mathsf{QQCorr}_\Omega(n,d,r)$ 的集合是闭的。

4.2 近似张量分解中分离的稳定性

各种正张量分解都表现出分离 [17], ，这意味着存在二部张量族 $(T_d)_{d\in\mathbb{N}}$，其中 $T_d \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$，使得

$$\text{rank}(T_d) = \text{const.} \quad \text{and} \quad \text{psd-rank}(T_d) \to \infty.$$

此外，还存在一个二部张量向量族 $(S_d)_{d\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\text{psd-rank}(S_d) = \text{const.} \quad \text{and} \quad \text{nn-rank}(S_d) \to \infty.$$

这些分离对于近似是否具有鲁棒性？在 [28] 中证明，对于固定的近似误差 $\varepsilon > 0$ 和固定的范数，秩、半正定秩和非负秩之间的分离会消失。更准确地说，秩$^\varepsilon(T)$, 半正定秩$^\varepsilon(T)$, 非负秩$^\varepsilon(T)$可以由一个仅依赖于 ε 和$\|T\|$的函数给出上界，而与张量积空间的维数无关。然而，如果 $\varepsilon > 0$ 和向量空间维数的选择过小，该上界会超过平凡的、依赖维数的上界。因此，只有当张量积空间的维数较大时，这些上界才具有意义。

现在我们将证明一个“对偶”结论。如果张量积空间的维数固定，则存在一个误差 $\varepsilon > 0$，使得秩与非负秩之间的分离仍然存在。

定理 7。 存在一个非负张量向量族 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $T_n \in \left(\mathbb{C}^d\right)^{\otimes n}$，以及一个近似误差向量族 $\varepsilon_n > 0$，使得

$$\text{nn-rank}^{\varepsilon_n}(T_n) = n.$$

我们还可以得到

$$\text{rank}^\varepsilon(T_n) = \text{psd-rank}^\varepsilon(T_n) = 2$$

对于每个与 n 无关的 $\varepsilon > 0$。

注意，对于边界秩与秩之间不存在间隙的任何秩概念，都可以证明类似的结论。

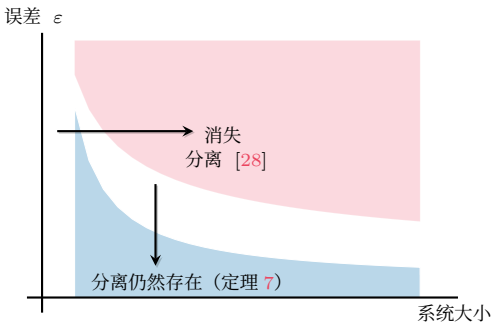


图 9：**近似分解中的分离何时仍然存在？** 固定近似误差并改变系统大小，会导致分离的消失 [28],然而，固定系统大小并选取足够小的误差时，分离仍然存在（定理 7）。红色区域表示 [28] 中推导出的上界小于精确分解的上界的情形，蓝色区域表示定理 ε_n 中的近似误差 7。

证明。 设 $T_n = W_n$ 为 W_n-量子态的向量族。对于固定的 $n \in \mathbb{N}$，我们知道

$$\underline{\text{nn-rank}}(W_n) = \text{nn-rank}(W_n) = n.$$

因此，存在一个 $\varepsilon_n > 0$，使得

$$\text{nn-rank}^{\varepsilon_n}(W_n) = n.$$

对于第二个结论，回顾一下

$$\underline{\text{rank}}(W_n) = \underline{\text{psd-rank}}(W_n) = 2.$$

由于

$$\text{rank}^{\varepsilon}(W_n) \leq \underline{\text{rank}}(W_n) = 2$$

and

$$\text{psd-rank}^{\varepsilon}(W_n) \leq \underline{\text{psd-rank}}(W_n) = 2$$

对于每个 $\varepsilon > 0$，这就证明了该结论。 □

5 结论与展望

在这项工作中，我们表明，在为张量分解引入正性和不变性约束时，秩与边界秩之间的许多间隙依然存在，并探讨了由此产生的结果。更确切地说，我们证明了：

（i）标准张量分解和对称张量分解表明，在半正定分解和局部纯化中，边界秩与秩之间存在间隙（第 3.1节）；而对于非负分解和可分解分解，这些间隙会消失（定理 3）；（ii）对于循环不变量分解和平移不变量分解，大多数间隙仍然存在（第 3.2节和第 3.3节）；（iii）对于树张量分解，无论是否存在正性约束，都不存在间隙（定理 4）；（iv）各种正秩中的上界对应于对某些（Quantum）关联集合的隶属关系（定理 6），这些结果与边界秩和秩之间的间隙相结合，意味着某些关联集合并非拓扑闭。

许多展现这种分离现象的例子都是带有 $n > 3$的 n 方张量分解。这留下了这样一个问题：对于正且不变量的三方分解，边界秩与秩之间是否存在间隙。具体来说，是否存在

- 半正定秩
- 平移不变半正定算子斯密特秩
- 平移不变非负算子斯密特秩

对于 $n = 3$，边界秩与秩之间存在间隙？此外，对于任意 n，半正定算子斯密特秩是否存在间隙仍是一个开放问题。进一步可以探讨的是，正分解中边界秩与秩之间的间隙可能有多大。关于没有正性约束的标准张量分解情形的研究，请参见 [8] 。

张量分解在 $n = 3$ 已经呈现出的其他令人惊讶的性质包括：相对于直和 [37, 38, 39], ，张量秩和边界秩并不具有可加性；相对于张量积 [40, 41]，它们也不具有可乘性。这些性质对于正且不变量的分解是否同样成立？它们对于关联场景又有何影响？

最后，还有多方非负多项式和平方和多项式等正性结构 [42]，其行为与多方正张量非常相似。如果多项式的正分解在边界秩与秩之间表现出间隙，将会很有意思。

6 致谢

本研究部分由奥地利科学基金（FWF）资助 [doi:10.55776/P33122]。为实现开放获取，作者已针对因本次投稿产生的任何作者已接受稿件版本，采用知识共享署名许可公共版权许可。AK 还感谢奥地利科学院（OAW）通过 DOC奖学金 26547 提供的资助。¨。

参考文献

[1] D. Bini、G. Lotti 和 F. Romani。“双线性形式计算问题的近似解”。SIAM计算杂志9，692–697（1980年）。[2] J. M. Landsberg。“张量：几何与应用”。第128卷。美国数学会（2011年）。

[3] T. Barthel、J. Lu 和 G. Friesecke。“关于张量网络态集合的闭性与几何”。《数学物理通讯》112，72（2022年）。[4] M. Christandl、A. Lucia、P. Vrana 和 A. H. Werner。“由纠缠态的几何得到的张量网络表示”。《SciPost物理》9，1–35（2020年）。[5] J. M. Landsberg、Y. Qi 和 K. Ye。“关于张量网络态的几何”。《量子信息与计算》12，346–354（2012年）。[6] V. De Silva 和 L. H. Lim。“张量秩与最佳低秩逼近问题的不适定性”。《SIAM矩阵分析与应用杂志》30，1084–1127（2008年）。[7]J. M. Landsberg 和 Mateusz Micha-lek。“阿贝尔张量”。纯粹与应用数学杂志108，333–371（2017年）。[8] J. Zuiddam。“关于秩与边界秩之间间隙的注记”。《线性代数及其应用》525，33–44（2017年）。[9] M. Christandl、F. Gesmundo、D. Stilck Fran。ca 和 A. H. Werner。“在张量网络簇边界上的优化”。《物理评论B辑》103，1–9（2021年）。[10]P. Comon、L.-H. Lim、Y. Qi 和 K. Ye。“张量秩的拓扑”。《数学进展》367，107128（2020年）。[11] C. Beltr´an、P. Breiding 和 N. Vannieuwenhoven。“大多数张量秩分解问题的平均条件数是无穷大”。《计算数学基础》23，433–491（2023年）。[12] G. De las Cuevas、T. S. Cubitt、J. I. Cirac、M. M. Wolf 和 D. P´erez-Garc´ıa。“张量网络纯化中的基本限制”。《数学物理杂志》57，071902（2016年）。[13] M. Kliesch、D. Gross 和 J. Eisert。“矩阵乘积算子和状态：NP困难性与不可判定性”。《物理评论快报》113，160503（2014年）。[14] G. De las Cuevas、N. Schuch、D. P´erez-Garc´ıa 和 J.I. Cirac。“多体态的纯化：限制与构造性方法”。《新物理学杂志》15，123021（2013年）。[15] G. De las Cuevas 和 T. Netzer。“一维空间中的混合态：与非负矩阵的分解及对应关系”。《数学物理杂志》61，41901（2020年）。[16]G. De las Cuevas、M. Hoogsteder Riera 和 T. Netzer。“具有不变性的单纯复形上的张量分解”。《符号计算杂志》124，102299（2024年）。[17] H. Fawzi、J. Gouveia、P. A. Parrilo、R. Z. Robin- son 和 R. R. Thomas。“半正定秩”。《数学规划》153，133–177（2015年）。[18] R. Jain、Y. Shi、Z. Wei 和 S. Zhang。《生成双部经典分布与量子态的高效协议》。IEEE信息论汇刊 59，5171–5178（2013年）。[19] I. Glasser、R. Sweke、N. Pancotti、J. Eisert 和 J. I. Cirac。《用于概率建模的张量网络分解的表达能力：从隐马尔可夫模型到量子机器学习的应用》。Adv. NeurIPS 32，1498–1510（2019）。[20] M. Yannakakis。《用线性规划表示组合优化问题》。《计算机与系统科学杂志》43，441–466（1991）。[21]J. Gouveia、P. A. Parrilo 和 R. R. Thomas。《凸集的提升与锥分解》。《数学运筹学》38，248–264（2013）。[22] S. Fiorini、S. Massar、S. Pokutta、H. R. Tiwary 和 R. De Wolf。《线性与半定扩展表述：指数分离与强下界》。ACM计算理论研讨会论文集（2012年）。[23] R. Jain、Z. Wei、P. Yao 和 S. Zhang。《多部量子关联与通信复杂度》。《计算复杂性》26，199–228（2017年）。[24] J. E. Cohen 和 U. G. Rothblum。《非负矩阵的非负秩、分解与因式分解》。《线性代数及其应用》190，149–168（1993年）。[25]D. P´érez-Garc´ía、F. Verstraete、M. M. Wolf 和 J. I. Cirac。《矩阵乘积态表示》。《量子信息与计算》7，401–430（2007年）。[26] K. Temme 和 F. Verstraete。《随机矩阵乘积态》。《物理评论快报》104，210502（2010年）。[27] A. Fawzi 等。《通过强化学习发现更快的矩阵乘法算法》。Nature 610，47–53（2022年）。[28] G. De las Cuevas、A. Klingler 和 T. Netzer。《近似张量分解：许多分离现象的消失》。《数学物理杂志》62，093502（2021年）。[29] C. Eckart 和 G. Young。《用另一个低秩矩阵逼近一个矩阵》。《心理计量学》1，211–218（1936年）。[30] Y. Qi、P. Comon 和 L. H. Lim。《非负张量秩的半代数几何》。《SIAM矩阵分析与应用杂志》37，1556–1580（2016年）。[31] J. J. Sylvester。《论形式演算原理》。《剑桥与都柏林数学杂志》7，52–97（1852年）。

[32] G. Comas 和 M. Seiguer。《论二元形式的秩》。《计算数学基础》11，65–78（2011年）。[33] E. Ballico 和 A. Bernardi。《Segre簇切向展开曲面上的张量秩》。《线性与多重线性代数》61，881–894（2013年）。[34] L. H. Lim 和 P. Comon。《非负张量的非负近似》。《化学计量学杂志》23，432–441（2009年）。[35] M. Sanz、D. P´érez-Garc´ía、M. M. Wolf 和 J. I. Cirac。《Wielandt不等式的量子版本》。《IEEE信息论汇刊》56，4668–4673（2010年）。[36] G. De las Cuevas、J. I. Cirac、N. Schuch 和 D. P´érez-Garc´ía。《矩阵乘积态的不可约形式：理论与应用》。《数学物理杂志》58，121901（2017年）。[37] A. Sch¨onhage。《部分与整体矩阵乘法》。《SIAM计算杂志》10，434–455（1981年）。[38] Y. Shitov。《Strassen直和猜想的反例》。《数学学报》222，363–379（2019年）。[39] M. Christandl、F. Gesmundo、M. Micha-lek 和 J. Zuiddam。《高阶张量的边界秩非加性》。《SIAM矩阵分析与应用杂志》42，503–527（2021年）。[40] M. Christandl、A. K. Jensen 和 J. Zuiddam。《张量秩在张量积下不具乘法性》。《线性代数及其应用》543，125–139（2018年）。[41] M. Christandl、F. Gesmundo 和 A. K. Jensen。《边界秩在张量积下不具乘法性》直积”。《SIAM应用代数与几何杂志》**3**，231–255（2019年）。

[42] G. De las Cuevas、A. Klingler 和 T. Netzer。“受张量启发的具有不变性和正性的多项式分解”。《线性代数及其应用》**698**，537–588（2024年）。

[43]J. I. Cirac, D. P´erez-Garc´ıa, N. Schuch, 和 F. Verstraete。《矩阵乘积态与投影纠缠对态：概念、对称性与定理》。《现代物理评论》**93**，045003（2021年）。[44]M. Christandl、P. Vrana 和 J. Zuiddam。《图张量的渐近张量秩：超越矩阵乘法》。ComputationalComplexity **28**，57–111（2019年）。[45] R. A. Horn 和 C. R. Johnson。《矩阵分析》。CambridgeUniversityPress。（1985年）。第2版。[46] C. Bocci、E. Carlini 和 F. Rapallo。《面向统计模型的矩阵扰动与非负秩》。《SIAM矩阵分析与应用杂志》**32**，1500–1512（2011年）。[47]G. H. Golub 和 C. F. Van Loan。《矩阵计算》。Johns HopkinsUniversityPress。（1996年）。第3版。[48] R. Or´us。《张量网络实用入门：矩阵乘积态与投影纠缠对态》。《物理年鉴》**349**，117–158（2014年）。

附录

附录结构如下：

- 在附录A中，我们回顾(Ω G)-分解的概念。
- 在附录B中，我们证明正文中使用的张量秩不等式。
- 在附录C中，我们介绍有关量子信道和 POVM（正算子值测度）的必要背景知识。
- 在附录D中，我们介绍博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理及其推论。
- 在附录E 和附录F中，我们证明正张量分解的秩与某些（量子）关联之间的对应关系。
- 在附录 G中，我们证明，对于标准张量分解，非负分解和可分解分解在秩与边界秩之间不存在间隙。
- 在附录 H中，我们证明，任何树张量分解在边界秩与秩之间都不存在间隙。

一般加权单纯复形上的张量分解 s

这里，我们回顾 [16] 中介绍的框架，该框架将张量分解推广到具有任意对称性约束的任意多重超图（加权单纯复形）结构。其组织如下：在附录 A.1中，我们回顾加权单纯复形和群作用，它们决定了张量分解的结构。在附录A.2中，我们回顾加权单纯复形 Ω 上分别带有群作用 G的无约束、非负和半正定张量分解。在附录 A.3中，我们回顾可分解分解和纯化形式，作为矩阵张量积空间上的分解示例。我们还展示了正文中讨论的示例都是 (Ω G)-分解的特殊实例。

A.1 加权单纯复形与群作用

这里给出加权单纯复形 (wsc) Ω 和群作用 G [16] 的定义。回顾一下， $[n]$ 表示集合 $\{1,\dots,n\}$，而 $\mathcal{P}_n$ 表示幂集 $\mathcal{P}([n])$（即 $[n]$ 的所有子集组成的集合，其中有 2^n 个元素）。

定义 8. *(i)* 定义在上的加权单纯复形 *(wsc)* 是一个函数

$$\Omega : \mathcal{P}_n \to \mathbb{N}$$

其中 $S_1 \subseteq S_2$ 意味着 Ω(S_1) 整除 Ω(S_2)。

(ii) 若 Ω(S) $\neq 0$，则称集合 $S \in P_n$ 为 Ω 的单纯形。我们假设每个单元素集合 *{i}* $\in P_n$ 都是一个单纯形，而元素 $i \in [n]$ 是该加权单纯复形的顶点。关于集合包含关系的极大单纯形称为 Ω 的面。面集记作

$$\mathcal{F} := \{F \in \mathcal{P}_n : F \ facet \ of \ \Omega\}.$$

包含顶点 i 的面集记为

$$\mathcal{F}_i := \{F \in \mathcal{F} : i \in F\}.$$

~将 Ω 限制到 F 上，得到多重集 F，其中恰好包含 $F \in F$ Ω(F) 次。多重集~F_i 对于 $i \in [n]$ 的定义类似。存在一个规范塌缩映射

$$c : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F} \quad and \quad c : \widetilde{\mathcal{F}}_i \to \mathcal{F}_i$$

将一个面的所有副本映射到底层面。

(iii) 如果两个顶点 i、j 满足邻接顶点 条件

$$\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \neq \emptyset$$

若存在一个顶点序列 $i = i_1, i_2, \dots, i_k = j$，使得对于所有 $m \in [k-1]$， i_m 和 i_{m+1} 都是邻接顶点，则称两个顶点 i、 j 连通。

在介绍加权单纯复形上的群作用之前，我们先定义 G-线性映射空间性和G-不变性的概念。

定义 9。 设 G 是作用于集合 X、Y上的群。函数 $f\colon X \to Y$ 称为 G-线性的，如果

$$f(gx) = gf(x)$$

对所有 $x \in X$ 和 $g \in G$均成立。如果 G 在 Y上的作用是平凡的，则 f 是 G-不变的。

Ω 上群作用的定义分为两部分。首先，我们考虑 G 在集合$[n]$上的群作用。然后，将此群作用扩展到 Ω 的面集。无妨假设 G 是集合 $[n]$上的置换群的子群。 $[n]$ 上的每个群作用都会自然地在 $\mathcal{P}_n$上诱导出一个群作用。若 Ω 是 G-不变的，则 G 也会在 $\mathcal{F}$上诱导出一个群作用，因为对于 $F \in \mathcal{F}$、 $g \in G$ 和 $F \subsetneq S$，有 $\Omega(gS) = \Omega(S) = 0$。由此得到以下定义。

定义 10。 *wsc* Ω 上的群作用由以下内容构成：

(i) 在 $[n]$ 上对 G 的作用，使得 Ω 相对于 P_n 上的诱导作用是 G-不变量。这诱导出 G 在 F 上的作用。

(ii) G 在 F 上的作用，使得坍缩映射

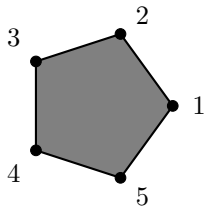
$$c : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$$

是 G-线性映射（我们也称 G 在 F 上的作用细化了 G 在 F 上的作用）。

为了在 wsc 上定义群作用，不仅要指定群如何作用于 $\mathcal{F}$，还要说明 群如何置换多重集 $\mathcal{F}$ 中面的副本。

例 11 （加权单纯复形）。 我们来考察三个 wsc 示例，它们导出了正文中研究的分解。

(i) “全单纯形” Σ_n 由 Σ_n 给出：$\mathcal{P}_n \to \mathbb{N}\colon S \mapsto 1$。因此，面集为 $\mathcal{F} = \big\{\{1, \ldots, n\}\big\}$。对于 $n = 5$，其示意图如下：



其中每个节点表示一个顶点，面由灰色区域表示。

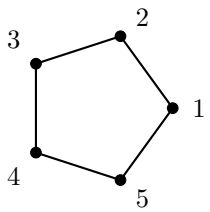
(ii) “环”定义为

$$\Theta_n : \mathcal{P}_n \to \mathbb{N} : S \mapsto \begin{cases} 1 & : \text{ if } |S| = 1 \text{ or } S = \{i, i+1\} \text{ for } i \in [n-1] \text{ or } \{n, 1\} \\ 0 & : \text{ else.} \end{cases}$$

因此，面集为

$$\mathcal{F} = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\big\}.$$

对于 $n = 5$，其表示为



其中，连接两个顶点 i、$i+1$ 的每条线表示面 $\{i,\ i+1\}$。

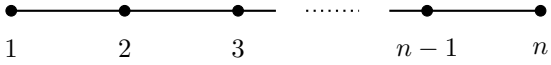
(iii) 线 Λ_n 由下式给出

$$\Lambda_n : \mathcal{P}_n \to \mathbb{N} : S \mapsto \begin{cases} 1 & : \text{ if } |S| = 1 \text{ or } S = \{i, i+1\} \text{ for } i \in [n-1] \\ 0 & : \text{ else.} \end{cases}$$

其中，$+$ 是 $\mathbb{N}$上的普通加法。因此，面集由下式给出

$$\mathcal{F} = \big\{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\}\big\},$$

表示为



△

例 12（wsc 上的群作用）。（i）置换在 $[n]$ 上的群作用 S_n 在全单纯形 Σ_n 上诱导出一个群作用，因为 S_n 通过将单纯形$\{1,\ldots,n\}$ 映射到自身，在$\mathcal{F}$ 上诱导出 S_n 的群作用。

（ii）设 $C_n = \{e, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^{n-1}\}$ 是 $[n]$上的平移群，由 τ生成：$[n] \to [n]$ 其定义为：对于 $i \in [n-1]$，$\tau(i) = i+1$，以及 $\tau(n) = 1$。C_n 在环 Θ_n上诱导出一个有效的群作用，因为通过对每个顶点应用 τ的倍数，面$\{i, i+1\}$ 会被映射到其他面$\{k, k+1\}$。△

~在后续对 (Ω G)-分解的定义（定义 13）中，我们使用 $\beta \in \mathrm{I}^{\mathcal{F}_i}$ 作为求和指标。因此，我们将 β理解为一个指标列表，其中各指标取值于 $\{1,\ldots,d\}$，且每个指标对应于 F_i中的一个面，即 $\beta = (\beta_{F_1},\ldots,\beta_{F_n})$，其中 $\mathrm{F}_i = \{F_1,\ldots,F_n\}$。此外，我们将对应于 β 的计算基态定义为

$$|\beta\rangle \coloneqq \bigotimes_{F \in \widetilde{\mathcal{F}}_i} |\beta_F\rangle \ \in \ \bigotimes_{i=1}^{|\widetilde{\mathcal{F}}_i|} \mathbb{C}^{\mathcal{I}}. \tag{14}$$

~对于群 G 中作用于 $\widetilde{\ }\mathcal{F}$的元素 g，以及函数 $(\alpha : \widetilde{\ }\mathcal{F} \to \mathcal{I}) \in \mathcal{I}^{\mathcal{F}}$，我们定义

$${}^{g}\alpha : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{I} : F \mapsto \alpha(g^{-1}F)$$

~我们通常将范围限制为函数 $\beta \in \mathcal{I}^{\mathcal{F}_i}$，即定义在包含顶点 i的面 $\widetilde{\ }\mathcal{F}_i$ 上。在这种情况下，$\widetilde{\ }$我们有 ${}^{g}\beta : \mathcal{F}_{gi} \to \mathcal{I}$。

A.2 非负张量的 (Ω G)-分解

现在我们回顾非负张量 $T \in \mathbb{C}^d \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^d$上的 (Ω G)-分解的定义。更详细的介绍请参阅 [16, 第 5] 节和 [15]。如果 $T_{j_1,\ldots,j_n} \geq 0$ 对每个 $j_1,\ldots,j_n \in \{1,\ldots,d\}$均成立，我们就称张量 T 非负。对于任意函数 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$，我们将其限制 $\alpha|_{\widetilde{\mathcal{F}}_i} : \mathcal{F}_i \to \mathcal{I}$记为 $\alpha_{|_i}$，其中 $i \in [n]$为任意值。

定义 13 (张量的不变分解 [16])。设 $T \in \mathbb{C}^d \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^d \cong \mathbb{C}^{d^n}$。

(i) T 的(Ω G)-分解由以下局部张量族给出

$$\mathcal{T}^{[i]} = \Big(|T^{[i]}_{\beta}\rangle\Big)_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}}$$

其中，对于所有 $i \in [n]$ 和 $\beta \in I^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}$，$|T^{[i]}_{\beta}\rangle \in \mathbb{C}^d$，满足

$$T = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} |T^{[1]}_{\alpha_{|_1}}\rangle \otimes |T^{[2]}_{\alpha_{|_2}}\rangle \otimes \cdots \otimes |T^{[n]}_{\alpha_{|_n}}\rangle$$

and

$$|T^{[gi]}_{{}^{g}\beta}\rangle = |T^{[i]}_{\beta}\rangle$$

~对所有 $i \in [n]$ 和 $\beta \in I^{\mathcal{F}_i}$，在所有(Ω G)分解中，I 的最小基数称为 T 的(Ω G)-秩，记作秩$^{(\Omega,G)}(T)$。

(ii) T 的非负 $(\Omega\ G)$-分解是 T 的一种$(\Omega\ G)$分解，其中所有局部向量 $|T_\beta^{[i]}\rangle$ 在标准基下的分量均为非负，即对所有 $j\in\{1,\ldots,d\}$，$\langle j\,|\,T_\beta^{[i]}\rangle\geq 0$。相应的秩称为 T 的非负 $(\Omega\ G)$-秩，记作非负秩$^{(\Omega,G)}(T)$。

(iii) 一个正半定（$\Omega\ G$）-分解由 T 个正半定矩阵组成（索引为$\sim\beta$、$\beta'\in I^{\mathcal{F}_i}$）

$$E_j^{[i]}\in\mathcal{M}^+_{\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}}(\mathbb{C})$$

对于 $i\in[n]$ 和 $j\in\{1、\ldots、d\}$，满足

$$\langle{}^g\beta|\,E_j^{[gi]}\,|{}^g\beta'\rangle=\langle\beta|\,E_j^{[i]}\,|\beta'\rangle$$

对于所有的 i、g、j、β、β'，以及

$$T_{j_1,\ldots,j_n}=\sum_{\alpha,\alpha'\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}}\left(E_{j_1}^{[1]}\right)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}}\cdots\left(E_{j_n}^{[n]}\right)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}}=\sum_{\alpha,\alpha'\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}}\langle\alpha_{|_1}|\,E_{j_1}^{[1]}\,|\alpha'_{|_1}\rangle\cdots\langle\alpha_{|_n}|\,E_{j_n}^{[n]}\,|\alpha'_{|_n}\rangle$$

对于所有的 j_1、$\ldots$、j_n。在所有正半定（$\Omega\ G$）-分解中，I 的最小基数称为 T 的正半定（$\Omega\ G$）-秩，记作半正定秩$^{(\Omega,G)}(T)$。

例 14（（$\Omega\ G$）-分解的示例）。现在介绍正文中出现的（$\Omega\ G$）-分解示例。

（i）设 $\Omega=\Sigma_n$ 是完整的 n-单纯形（见例11 (i)），即面集是单元素集 $\mathcal{F}=\{\{1、\ldots、n\}\}$。分解中恰好有一个索引；因此，一个 Σ_n-分解为

$$|T\rangle=\sum_{\alpha=1}^r|T_\alpha^{[1]}\rangle\otimes|T_\alpha^{[2]}\rangle\otimes\cdots\otimes|T_\alpha^{[n]}\rangle$$

其中 $|T_\alpha^{[i]}\rangle\in\mathbb{C}^d$。在所有 Σ_n-分解中，r 的最小自然数称为 Σ_n-秩。进一步地，如果对于每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 和 $\alpha\in\{1,\ldots,r\}$，$|T_\alpha^{[i]}\rangle$ 都是标准基中的非负向量，则得到一个非负 Σ_n- 分解。半正定 Σ_n- 分解为

$$T_{j_1,\ldots,j_n}=\sum_{\alpha,\alpha'=1}^r\left(E_{j_1}^{[1]}\right)_{\alpha,\alpha'}\cdots\left(E_{j_n}^{[n]}\right)_{\alpha,\alpha'}$$

其中对于每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 和 $j\in\{1,\ldots,d\}$，$E_j^{[i]}\geqslant 0$ 都是半正定的。

在考虑 Σ_n-分解时，我们通过 rank,非负秩和半正定秩来指代其对应的秩，而省略下标 Σ_n。

(ii) 令 $G=S_n$ 为作用于单纯形 Σ_n 上的完整置换群（见例 12 (i)）。$|T\rangle$ 的一个（Σ_n,S_n）-分解由附加约束 $|T_\alpha^{[i_1]}\rangle=|T_\alpha^{[i_2]}\rangle=:|T_\alpha\rangle$ 对每个 $i_1,i_2\in\{1,\ldots,n\}$均成立，即

$$|T\rangle=\sum_{\alpha=1}^r|T_\alpha\rangle\otimes|T_\alpha\rangle\otimes\cdots\otimes|T_\alpha\rangle\,.$$

类似地，一个半正定（Σ_n，S_n）-分解为

$$T_{j_1,\ldots,j_n}=\sum_{\alpha,\alpha'=1}^r(E_{j_1})_{\alpha,\alpha'}\cdots(E_{j_n})_{\alpha,\alpha'},$$

即，对于每个 $i\in\{1，\ldots，n\}$，半正定矩阵 $E_j^{[i]}$ 都相同。

在考虑（Σ_n，S_n）-分解时，我们将其对应的秩分别称为对称秩、对称非负秩和对称半正定秩，并且不使用下标（Σ_n，S_n）。

（iii）设 Θ_n 为长度为 n 的环（见例11（ii））。分解中有 n 个指标 α_i，每个指标分别对应一个面$\{i，\ i+1\}$。因此，一个 Θ_n分解可表示为

$$T=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^r|T^{[1]}_{\alpha_1,\alpha_2}\rangle\otimes|T^{[2]}_{\alpha_2,\alpha_3}\rangle\otimes\cdots\otimes|T^{[n]}_{\alpha_n,\alpha_1}\rangle$$

其中 $|T^{[i]}_{\alpha_i,\ \alpha_{i+1}}\rangle \in \mathbb{C}^d$。所有 Θ_n分解中最小的自然数 r 是 Θ_n秩。一个Θ_n分解对应于具有闭边界条件的矩阵乘积态（MPS）分解 [25, 43]，而秩对应于键维数。此外，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，若 $|T^{[i]}_{\alpha,\ \beta}\rangle$ 在计算基下都是非负向量，则得到一个非负Θ_n分解。

半正定 Θ_n 分解表示为

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\\ \alpha'_1,\ldots,\alpha'_n=1}}^{r} \langle \alpha_1,\alpha_2|\, E^{[1]}_{j_1}\, |\alpha'_1,\alpha'_2\rangle \cdot \langle \alpha_2,\alpha_3|\, E^{[2]}_{j_2}\, |\alpha'_2,\alpha'_3\rangle \cdots \langle \alpha_n,\alpha_1|\, E^{[n]}_{j_n}\, |\alpha'_n,\alpha'_1\rangle$$

其中，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, d\}$，均有 $E^{[i]}_j \geqslant 0$。

在考虑 Θ_n 分解时，我们用 osr、nn-osr 和 psd-osr 表示其相应的秩，不带下标 Θ_n。

(iv) 令 C_n 为平移群（见例 12 (ii)）。一个 $(\Theta_n,\ C_n)$-分解由附加约束 $|T^{[i]}_{\alpha,\ \beta}\rangle = |T^{[j]}_{\alpha,\ \beta}\rangle =: |T_{\alpha,\ \beta}\rangle$ 给出，即该分解显式地具有平移不变性。因此，

$$T = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} |T_{\alpha_1,\alpha_2}\rangle \otimes |T_{\alpha_2,\alpha_3}\rangle \otimes \cdots \otimes |T_{\alpha_n,\alpha_1}\rangle\,.$$

这称为平移不变 MPS 分解 [15, 25] 或均匀矩阵乘积态[43]。

此外，如果$|T_{\alpha,\ \beta}\rangle$ 在计算基下是非负向量，则称其为非负 $(\Theta_n,\ C_n)$-分解。此外，

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\\ \alpha'_1,\ldots,\alpha'_n=1}}^{r} \langle \alpha_1,\alpha_2|\, E_{j_1}\, |\alpha'_1,\alpha'_2\rangle \cdot \langle \alpha_2,\alpha_3|\, E_{j_2}\, |\alpha'_2,\alpha'_3\rangle \cdots \langle \alpha_n,\alpha_1|\, E_{j_n}\, |\alpha'_n,\alpha'_1\rangle$$

称为半正定（$\Theta_n,\ C_n$）分解。

在考虑（$\Theta_n,\ C_n$）分解时，我们将其对应的秩分别记为 ti-osr，ti-nn-osr 和 ti-psd-osr。△

A.3 半正定矩阵的（Ω G）分解

现在让我们回顾矩阵 $\rho \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^n$ 上（Ω G）分解的定义，其中矩阵是半正定或可分的。回忆一下，ρ 是可分的，当且仅当存在一个分解

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{n} \rho^{[1]}_\alpha \otimes \cdots \otimes \rho^{[n]}_\alpha$$

使得 $\rho^{[i]}_\alpha \geqslant 0$。有关更详细的说明，请参见 [16, 第 3] 节和 [15]。

定义 15 （矩阵 [16]的不变分解）。令 $\rho \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_d(\mathbb{C}$).

(i) 给定了一个(Ω G)-分解，其中 ρ 由以下族构成

$$\mathcal{A}^{[i]} = \left(A^{[i]}_\beta\right)_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}}$$

其中，对于所有 $i \in [n]$ 和 $\beta \in I^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}$，$A^{[i]}_\beta \in M_d(\mathbb{C})$，满足

$$\rho = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} A^{[1]}_{\alpha_{|_1}} \otimes A^{[2]}_{\alpha_{|_2}} \otimes \cdots \otimes A^{[n]}_{\alpha_{|_n}}$$

and

$$A^{[gi]}_{g\beta} = A^{[i]}_\beta$$

~对于所有 $i \in [n]$ 和 $\beta \in I^{\mathcal{F}_i}$。在所有 （Ω G）-分解中，I 的最小基数称为（Ω G）-秩 ρ，记作 秩$_{(\Omega,G)}(\rho)$ 。

(ii) ρ 的可分（Ω G）-分解是一种（Ω G）-分解，并且满足以下附加约束：

$$A_\beta^{[i]} \geqslant 0 \quad \textit{for every } i \in \{1,\ldots,n\} \textit{ and } \beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}.$$

在所有可分的 (Ω G)-分解中，I 的最小基数称为 ρ 的可分 (Ω G)-秩，记为可分秩$^{(\Omega,G)}(\rho)$。

(iii) ρ 的一种(Ω G)-纯化是一个因式分解 $\rho = LL^\dagger$，其中

$$L \in \mathcal{M}_{d,d'}(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{d,d'}(\mathbb{C})$$

以及 L 的一个(Ω G)-分解。对于所有(Ω G)-纯化， L 的分解中 I 的最小基数称为 ρ 的(Ω G) 纯化秩，记为纯化秩$^{(\Omega,G)}(\rho)$。

例 16 （Ω G）-分解（多部矩阵）。 现在我们给出正文中出现的（Ω G）-分解的例子。

(i) 设 Ω 为完整的 n-单纯形 Σ_n。一个 Σ_n-分解为

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha^{[1]} \otimes A_\alpha^{[2]} \otimes \cdots \otimes A_\alpha^{[n]}$$

其中 $A_\alpha^{[i]} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$。在所有 Σ_n-分解中， r 的最小自然数是 Σ_n-秩。
此外，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $\alpha \in \{1, \ldots, r\}$，若 $A_\alpha^{[i]} \geqslant 0$，则该分解是一个可分$\Sigma_n$-分解。

我们将 Σ_n-分解所对应的秩称为秩、可分秩和纯化秩，不带下标 Σ_n。

（ii） ρ 的（Σ_n， S_n）-分解由附加约束 $A_\alpha^{[i_1]} = A_\alpha^{[i_2]} =: A$给出 α，

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha \otimes A_\alpha \otimes \cdots \otimes A_\alpha$$

类似地， （Σ_n， S_n）-纯化由因式分解 $\rho = LL^\dagger$ 给出，其中

$$L = \sum_{\alpha=1}^{r} L_\alpha \otimes L_\alpha \otimes \cdots \otimes L_\alpha$$

我们将（Σ_n， S_n）-分解所对应的秩称为对称秩、对称可分秩和对称纯化秩，不带索引（Σ_n， S_n）。

（iii）设 Θ_n 是一个长度为 n的环。 Θ_n-分解由下式给出

$$\rho = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} A_{\alpha_1,\alpha_2}^{[1]} \otimes A_{\alpha_2,\alpha_3}^{[2]} \otimes \cdots \otimes A_{\alpha_n,\alpha_1}^{[n]}$$

其中 $A_{\alpha,\ \beta}^{[i]} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$。所有 Θ_n分解中最小的自然数 r 称为 Θ_n秩。
A Θ_n-分解对应于矩阵乘积算子（MPO）分解 [15]。其秩称为键维数，有时也称为算子施密特秩（osr）。图10用张量网络表示了这一分解。

此外，若对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 以及 $\beta \in \{1, \ldots, r\}$，均满足 $A_{\alpha,\ \beta}^{[i]} \geqslant 0$和 α，，则可得到一个可分Θ_n-分解。
一个 Θ_n-纯化由因式分解 $\rho = LL^\dagger$ 以及以下内容给出

$$L = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} L_{\alpha_1,\alpha_2}^{[1]} \otimes L_{\alpha_2,\alpha_3}^{[2]} \otimes \cdots \otimes L_{\alpha_n,\alpha_1}^{[n]}.$$

一个 Θ_n-分解更广为人知的名称是一维局部纯化形式 [15, 16]，，图10通过张量网络展示了这一形式。

我们称 t 通过算子施密特秩、可分算子施密特秩和纯化算子施密特秩确定 Θ_n-分解的秩，而不使用指标 Θ_n .

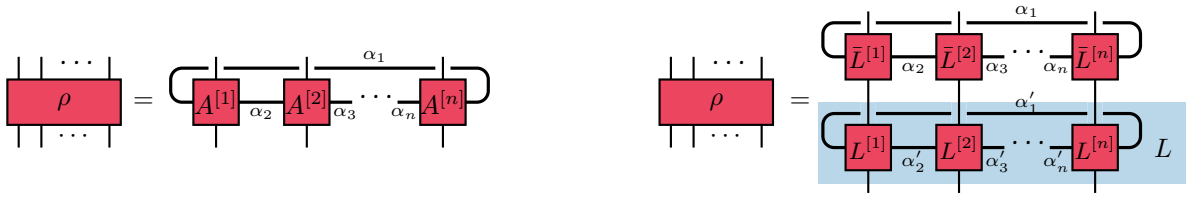


图 10：作为张量网络绘制的 $\Omega = \Theta_n$ 的（左）矩阵乘积密度算子（MPDO）形式和（右）局部纯化形式。每条线表示一个指标，每次缩并表示一次求和。求和指标 α_i 构成一个环。

(iv) (Θ_n, C_n)-分解由以下附加约束给出：$A^{[i]}_{\alpha,\beta} = A^{[j]}_{\alpha,\beta} =: A_{\alpha,\beta}$，即

$$\rho = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} A_{\alpha_1,\alpha_2} \otimes A_{\alpha_2,\alpha_3} \otimes \cdots \otimes A_{\alpha_n,\alpha_1}$$

换言之，该分解是显式平移不变的。这种分解也称为平移不变算子施密特分解 [15]。

此外，如果 $A_{\alpha,\beta} \geqslant 0$，则它是一个可分（$\Theta_n$，$C_n$）-分解。一个（$\Theta_n$，$C_n$）-纯化由因式分解 $\rho = LL^\dagger$ 以及一个（Θ_n，C_n）-分解给出

$$L = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} L_{\alpha_1,\alpha_2} \otimes L_{\alpha_2,\alpha_3} \otimes \cdots \otimes L_{\alpha_n,\alpha_1}.$$

我们将相应的（Θ_n，C_n）-分解的秩分别称为 ti-osr、ti-sep-osr 和 ti-puri-osr。 △

备注 17。 矩阵的（Ω G）-分解推广了张量上的（Ω G）-分解。给定一个张量$T \in \mathbb{C}^d \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^d$，对角矩阵

$$\rho_T \coloneqq \mathrm{Diag}(T) \coloneqq \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{d} T_{j_1,\ldots,j_n} |j_1,\ldots,j_n\rangle \langle j_1,\ldots,j_n|$$

是半正定的，当且仅当 T 逐元素非负。此外，T的每个非负（Ω G）-分解都对应于 ρ_T的一个可分（Ω G）-分解，而 T的每个半正定（Ω G）-分解都对应于 ρ_T的一个（Ω G）-纯化。特别地，我们有 [16, 定理 43]

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \mathrm{rank}_{(\Omega,G)}(T) &&= && \mathrm{rank}_{(\Omega,G)}(\rho_T)\\
&\text{(ii)} && \text{nn-rank}_{(\Omega,G)}(T) &&= && \text{sep-rank}_{(\Omega,G)}(\rho_T)\\
&\text{(iii)} && \text{psd-rank}_{(\Omega,G)}(T) &&= && \text{puri-rank}_{(\Omega,G)}(\rho_T)
\end{aligned}$$

△

A.4 结构张量 $|\Omega_r\rangle$

现在，我们为每个 wscΩ 引入一个对应的结构张量 $|\Omega_r\rangle$ 其秩$_\Omega(|\Omega_r\rangle) \leq r$。该张量可以更紧凑地表示 ($\Omega$ G)-分解，我们将在定理 29 和定理 31 的证明中使用它。基于超图的类似结构张量已在 [44, 39]中引入。具体而言，对于给定的 wsc Ω，我们定义

$$|\Omega_r\rangle \coloneqq \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} |\alpha_{|_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_{|_n}\rangle \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}^{r_i}$$

其中 $\mathcal{I} = \{1,\ldots,r\}$ 且 $r_i = |\mathcal{I}^{\mathcal{F}_i}|$。由于 $\beta \in \mathcal{I}^{\mathcal{F}_i}$可以理解为 $\{1,\ldots,r\}$ 中的指标数组，$|\beta\rangle$按方程 (14)定义。

例如选择环 Θ_n，我们得到 n 重矩阵乘法（MaMu）张量

$$|\Theta_{n,r}\rangle = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{r} |\alpha_1,\alpha_2\rangle \otimes |\alpha_2,\alpha_3\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_n,\alpha_1\rangle \in (\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r)^{\otimes n}.$$

对于 n 重单纯形 Σ_n，我们得到未归一化的 n 重 r 维 GHZ态

$$|\Sigma_{n,r}\rangle = \sum_{\alpha=1}^{r} |\alpha\rangle^{\otimes n} \in (\mathbb{C}^r)^{\otimes n}.$$

注意，每个秩为 r 的 $(\Omega\ G)$-分解都可以使用 $|\Omega_r\rangle$ 写成

$$|T\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} |v^{[1]}_{\alpha_{|_1}}\rangle \otimes \cdots \otimes |v^{[n]}_{\alpha_{|_n}}\rangle = W^{[1]} \otimes \cdots \otimes W^{[n]} |\Omega_r\rangle \quad \text{with} \quad W^{[i]} = \sum_{\beta\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}} |v^{[i]}_{\beta}\rangle \langle\beta| . \tag{15}$$

在这种情况下，$v^{[i]}_{\beta}$ 的 G-不变性转化为 $W^{[gi]} |{}^g\beta\rangle = W^{[i]} |\beta\rangle$。此外，每个半正定的 $(\Omega\ G)$-分解都可以写成

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\alpha,\alpha'\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \left(B^{[1]}_{j_1}\right)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}} \cdots \left(B^{[n]}_{j_n}\right)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}} = \langle\Omega_r| B^{[1]}_{j_1} \otimes \cdots \otimes B^{[n]}_{j_n} |\Omega_r\rangle .$$

注意，在两 个例子中，相应的 $(\Omega\ G)$-秩由结构 re
张量 that admi 出这样的分解。

B 张量秩不等式

下面我们将证明正文中使用的三个不等式：即 W_n-态的秩为 n（附录 B.1），秩 与 半正定秩 之间的关系（附录 B.2），以及 W_n 的对称半正定秩的一个下界（附录 B.3）。

B.1 W_n-态的秩

让我们回顾一个标准张量秩中边界秩与秩之间间隙的著名例子。该结论已在 [6] 中针对 $n = 3$ 得到证明，并推广到更大的 n。为完整起见，我们在此给出证明。W_n-态已从许多不同角度得到研究，例如， $W_3^{\otimes k}$的秩的界也已在 [8]中建立。

命题18。 对于 $n \geq 2$，我们有 秩$(W_n) = n$。

证明。 根据 W_n的定义，秩$(W_n) \leq n$ 显然成立。我们通过归纳证明秩$(W_n) \geq n$ 。情形 $n = 2$ 显然，因为 $W_2 \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 对应于矩阵

$$W_2 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

通过公式（1）中给出的对应关系。因此 W_2 的秩为 2。

对于归纳步骤 $n \to n+1$，假设 W_{n+1} 的秩$(W_{n+1}) \leq n$ 具有如下分解

$$W_{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} |v^{[1]}_{\alpha}\rangle \otimes \cdots \otimes |v^{[n]}_{\alpha}\rangle .$$

对于系统 1，我们将证明

(a) 向量 $\{|v^{[1]}_{\alpha}\rangle\}_{\alpha=1、\ldots、\ n}$ 张成 $\mathbb{C}^2$。

(b) $|v^{[1]}_{\beta}\rangle = c_\beta |0\rangle$ 对于每个 $\beta \in \{1、\ldots、\ n\}$。

这两个条件彼此矛盾，从而证明了命题的陈述 n.

为证明（a），假设向量族$\{|v^{[1]}_{\alpha}\rangle\}_{\alpha=1,\ldots,n}$ 不能张成 $\mathbb{C}^2$。那么存在一个非零向量$|x\rangle \in \mathbb{C}^2$，使得对每个 α都有$\langle x\,|\,v^{[1]}_{\alpha}\rangle = 0$。将$\langle x|$ 作用于 W_{n+1}的第一个张量因子，得到

$$0 = \langle x\,|\,0\rangle\, W_n + \langle x\,|\,1\rangle\, |0, 0, 0, \ldots, 0\rangle .$$

由于 $|W_n\rangle$和 $|0, \ldots, 0\rangle$ 线性无关，因此可推出 $|x\rangle = 0$，这与结论矛盾 。为证明（）请注意

$$\operatorname{rank}(W_n + b\,|0, \ldots, 0\rangle) \geq \operatorname{rank}(W_n) \geq n$$

对于每个 $b \in \mathbb{R}$ 因为

$$W_n = A^{\otimes n}\Big(W_n + b\,|0,0,0,\ldots,0\rangle\Big)$$

with

$$A : |0\rangle \mapsto |0\rangle\,, \quad |1\rangle \mapsto |1\rangle - \frac{b}{n}\,|0\rangle\,.$$

这表明 $\mathrm{rank}(W_n + b\,|0,\ldots,0\rangle) \geq \mathrm{rank}(W_n)$，因为秩在局部操作下不会增加。现在固定 $\beta \in \{1,\ldots,r\}$，并选择 $|x\rangle \in \mathbb{C}^2$，使得 $\langle x\,|\,v_\beta^{[1]}\rangle = 0$。将 $\langle x|$ 作用于 W_{n+1} 的第一个张量因子，我们得到

$$\sum_{\alpha=1,\alpha\neq\beta}^{n} \langle x\,|\,v_\alpha^{[1]}\rangle\,|v_\alpha^{[2]}\rangle \otimes \cdots \otimes |v_\alpha^{[n]}\rangle = \langle x\,|\,0\rangle\,W_n + \langle x\,|\,1\rangle\,|0,0,0,\ldots,0\rangle$$

由于左侧的和包含 $n-1$ 个初等张量，而右侧的秩至少为n，若 $\langle x\,|\,0\rangle \neq 0$，则可得 $\langle x\,|\,0\rangle = 0$。但这意味着 $|v_\beta^{[1]}\rangle = c_\beta\,|0\rangle$。 □

推论 19。 对于 $n \geq 3$，我们有

$$\underline{\mathrm{rank}}(W_n) = 2 < n = \mathrm{rank}(W_n)$$

B.2 联系秩与半正定秩

我们现在回顾 [16, 推论 44]中给出的秩与半正定秩之间的不等式。为完整起见，我们也给出该结论的证明。

引理 20 （秩与半正定秩的关系）。 设Ω 是一个 *wsc*，且 G 是 Ω 上的群作用。对于每个非负张量 T，都有

$$\mathrm{rank}_{(\Omega,G)}(T) \leq \text{psd-rank}_{(\Omega,G)}(T)^2$$

证明。设

$$T_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\alpha,\alpha'\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \Big(A_{j_1}^{[1]}\Big)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}} \cdots \Big(A_{j_n}^{[n]}\Big)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}}$$

是 T的一个半正定分解，其半正定秩为$_{(\Omega,G)}(T) = |\mathcal{I}|$。考虑新的指标集 $\mathcal{L} \coloneqq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$，以及两个投影 $p_{1,2} : \mathcal{L} \to \mathcal{I}$，并定义

$$\langle j\,|\,v_\beta^{[i]}\rangle \coloneqq \Big(A_j^{[i]}\Big)_{p_1\circ\beta,p_2\circ\beta}$$

~对于每个 $i \in [n], j \in \{1,\ldots,d\}$ 以及 $\beta \in \mathcal{L}^{\mathcal{F}_i}$。新的向量 $\{|v_\beta\rangle\}_{\beta\in\mathcal{L}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}}$ 给出了 T的一个 $(\Omega\ G)$-分解，其中

$$\mathrm{rank}_{(\Omega,G)}(T) \leq |\mathcal{L}| = |\mathcal{I}|^2 = \text{psd-rank}_{(\Omega,G)}(T)^2$$

这就证明了该结论。 □

B.3 三方系统中对称半正定分解的边界秩间隙

现在我们证明，对于$n = 3$，边界秩与对称半正定秩之间已经存在间隙。

命题 21。 对于对称半正定秩， W_3 的边界秩与秩之间存在间隙。具体而言，我们有

$$\underline{\text{symm-psd-rank}}(W_3) = 2 < 3 \leq \text{symm-psd-rank}(W_3)$$

证明。 对称半正定秩$(W_3) = 2$ 已在公式(11)中证明。

现在假设对称半正定秩$(W_3) = 2$。那么存在一个对称半正定分解

$$W_{j_1,j_2,j_3} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (A_{j_1})_{\alpha,\beta} \cdot (A_{j_2})_{\alpha,\beta} \cdot (A_{j_3})_{\alpha,\beta}.$$

该分解也可以等价地表示为

$$W_{j_1,j_2,j_3} = \langle M|\,A_{j_1} \star A_{j_2} \star A_{j_3}\,|M\rangle$$

其中 $|M\rangle = (1, \ldots, 1)^t$， $\star$ 是 Hadamard乘积，即

$$(X \star Y)_{\alpha,\beta} = X_{\alpha,\beta} \cdot Y_{\alpha,\beta}.$$

我们声称 A_0 和 A_1 在该分解中的秩为 1。假设例如 A_0 具有满秩，则它是正定的，因此 $A_0 \star A_0 \star A_0$ 根据 Schur乘积定理（见 [45, 定理 7.5.3。]）是正定的。但这意味着

$$0 = W_{0,0,0} = \langle M| A_0 \star A_0 \star A_0 |M\rangle > 0.$$

对 A_1也同样适用。

由于 A_0， A_1 的秩为 1，我们可以将它们参数化为

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{j,0} & \sqrt{a_{j,0}a_{j,1}}\exp(i2\pi\varphi_j) \\ \sqrt{a_{j,0}a_{j,1}}\exp(-i2\pi\varphi_j) & a_{j,1} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{j,\,0}$， $a_{j,\,1} \geq 0$。由于 $W_{0,\,0,\,0} = W_{1,\,1,\,1} = 0$，我们有 $a_{j,\,0} = a_{j,\,1}$ 对于 $j = 0$， 1 以及 $\varphi_j = 1/2$ 同样成立，这意味着对于所有 j_1， j_2， $j_3 \in \{0, 1\}$，都有 $W_{j_1,\,j_2,\,j_3} = 0$。 □

C 正算子值测度和 Quantum 信道

如果 $A_j \geqslant 0$and，矩阵 $r \times r$ matrices $(A_j)_{j=1}^d$ 被称为一个正算子值测度 (POVM)，

$$\sum_{j=1}^{d} A_j = \mathbb{1}_r.$$

注意，如果 $(A_{j_1})_{j_1 \in [d_1]}$、 $(B_{j_2})_{j_2 \in [d_2]}$ 是 POVM，那么它们的张量积

$$(A_{j_1} \otimes B_{j_2})_{j_1 \in [d_1], j_2 \in [d_2]}$$

也同样是 POVM。POVM 的定义保证，对于任意量子态 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^r$， d元数组

$$\left(p_j \coloneqq \langle\psi| A_j |\psi\rangle\right)_{j=1,\ldots,d}$$

构成一个概率分布。

线性映射 $\mathcal{E}$： $\mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{d_2}(\mathbb{C})$ 称为完全正（cp），如果对于每个 $d' \in \mathbb{N}$， $\mathrm{id}_{d'} \otimes \mathcal{E}$ 都是正映射，即

$$(\mathrm{id}_{d'} \otimes \mathcal{E})(A) \geqslant 0 \quad \text{for every psd matrix } A \in \mathcal{M}_{d'}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C}).$$

如果它是 cp 映射且保持迹，则进一步称为完全正保迹（cptp）或量子信道，即对于每个 $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$， $\mathrm{tr}(\mathcal{E}(A)) = \mathrm{tr}(A)$。

注意，每个 POVM $(A_j)_{j=1}^d$ 都会导出以下量子信道：

$$\mathcal{E} : \rho \mapsto \sum_{j=1}^{d} |j\rangle \langle j| \operatorname{tr}(A_j \rho). \tag{16}$$

换言之，它将每个状态映射为执行测量后得到的经典态（即概率分布）。反过来，任何像仅由对角矩阵组成的量子信道，都可通过公式 (16)得到一个 POVM。

D 博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理及其应用

本部分回 顾博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理的一个版本。这使我们能够证明，某些 (Ω, G)-分解 d 在秩与边界秩之间不存在间隙。

设 $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ 是一个有限维赋范向量空间。集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ 若存在一个常数 $C \geq 0$， 使得对每个 $x \in \mathcal{S}$都有 $\|x\| \leq C$， 则称其为有界。若对于每个序列 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$， 该序列关于 $\|\cdot\|$收敛于 $s \in \mathcal{V}$ 中的某一点，均有 $s \in \mathcal{S}$，则称$\mathcal{S}$ 为闭集。若集合既闭又有界，则称$\mathcal{S}$为紧集。

定理 22（有限维向量空间中的博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理）。设 $S \subseteq V$ 是有限维向量空间 V 的一个紧子集。那么，每个序列 $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ 都有一个收敛子列，即存在严格递增的序列 $(k_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$，其中 $\mathbb{N}$ 满足

$$\lim_{\ell\to\infty} s_{k_\ell} = s \in \mathcal{S}.$$

现在将其应用于量子信道空间。我们将 $\mathrm{CPTP}(d_1, d_2) \subseteq \mathrm{Lin}(\mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C}), \mathcal{M}_{d_2}(\mathbb{C}))$ 定义为 $\mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{d_2}(\mathbb{C})$ 中量子信道的集合。

引理 23。$\mathrm{CPTP}(d_1, d_2)$ 在 $\mathrm{Lin}(\mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C}), \mathcal{M}_{d_2}(\mathbb{C}))$ 中是紧的。

证明。在 $\mathrm{Lin}(\mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C}), \mathcal{M}_{d_2}(\mathbb{C}))$ 空间上赋予范数

$$\|\mathcal{E}\| := \max_{\|\rho\|_1 \le 1} \|\mathcal{E}(\rho)\|_1$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 是 $\mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$ 上的迹范数，由此可得，对于每个属于 $\mathrm{CPTP}(d_1, d_2)$ 的 $\mathcal{E}\| \le 1$，都有 $\|$，这说明了有界性。

此外，$\mathrm{CPTP}(d_1, d_2)$ 是闭的，因为它可以由以下闭条件刻画：对于每个半正定的 $A \in \mathcal{M}_{d_1\cdot n}(\mathbb{C})$，都有 $\mathrm{id}_n \otimes \mathcal{E}(A) \geqslant 0$；并且对于每个 $\rho \in \mathcal{M}_{d_1}(\mathbb{C})$，都有 $\mathrm{tr}(\mathcal{E}(\rho)) = \mathrm{tr}(\rho)$。由于闭集的交仍然是闭集，结论得证。 □

推论 24。每个量子信道序列都有一个收敛子列。

证明。这是定理 22 和引理 23的直接推论。 □

E 非负 Σ_n-分解与因果结构

我们现在证明，刻画概率张量 P 的非负 Σ_n-秩，等价于 P 源自具有隐藏复杂度约束的特定贝叶斯网络。该陈述已在二分情形 [24] 以及多体情形 [34]中得到证明。

定理 25（非负秩与经典关联）。设 $P \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes n}$ 为表示概率分布的非负向量，即

$$P_{j_1,\ldots,j_n} = P(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n).$$

以下各项等价：

(i) 非负秩$(P) \le r$

(ii) 存在一个随机变量 Z，其取值为 $\{1, \ldots, r\}$，使得

$$P(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n) = \sum_{\alpha=1}^{r} P(X_1 = j_1 \mid Z = \alpha) \cdots P(X_n = j_n \mid Z = \alpha) \cdot P(Z = \alpha)$$

对于 对称非负秩，同样的等价关系也成立，但需额外满足约束：对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，条件概率分布 $P(X_i = -|Z = z)$ 均相同。

正如 正文中所述，我们将所有满足 (ii) 的概率分布集合记为 $\mathrm{CCorr}(n, d, r)$.

证明。我们仅对对称非负秩证明该等价关系，因为另一种情况可类似地得到。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：
由于对称秩$(P) \le r$ 存在一个非负分解

$$P = \sum_{\alpha=1}^{r} |v_\alpha\rangle \otimes \cdots \otimes |v_\alpha\rangle . \tag{17}$$

定义

$$P(X_i = j|Z = \alpha) := \frac{\langle j \,|\, v_\alpha\rangle}{\sum_{j=1}^{d} \langle j \,|\, v_\alpha\rangle}$$

and

$$P(Z=\alpha)=\left(\sum_{j=1}^{d}\langle j\,|\,v_\alpha\rangle\right)^n.$$

根据定义， $P(X_i=-|Z=\alpha)$ 是一个概率分布。此外， $P(Z=-)$ 也是一个概率分布，因为

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{r}P(Z=\alpha)&=\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{d}\langle j\,|\,v_\alpha\rangle\right)^n=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{d}\langle j_1,\ldots,j_n|\left(|v_\alpha\rangle\right)^{\otimes n}\\&=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{d}\langle j_1,\ldots,j_n|\left(\sum_{\alpha=1}^{r}|v_\alpha\rangle^{\otimes n}\right)=\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{d}P(X_1=j_1,\ldots,X_n=j_n)=1\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：令

$$P(X_1=j_1,\ldots,X_n=j_n)=\sum_{\alpha=1}^{r}P(X_1=j_1|Z=\alpha)\cdots P(X_n=j_n|Z=\alpha)\cdot P(Z=\alpha).$$

定义

$$|v_\alpha^{[i]}\rangle:=\sum_{j=1}^{r}P(X_i=j|Z=\alpha)\cdot P(Z=\alpha)^{\frac{1}{n}}\,|j\rangle$$

在计算基下产生非负向量。由于所有条件分布 P（$X_i=-|Z=\alpha$）均相同，因此有 $|v_\alpha^{[i]}\rangle=|v_\alpha^{[j]}\rangle=:|v_\alpha\rangle$ 对于每个 i， $j\in\{1$，…， $n\}$。显然，公式（17）成立。

□

F 纯化秩对应于关联中的最小纠缠

现在，我们在任意 （Ω G）-分解的层面上证明半正定秩和纯化秩的刻画定理（正文中的定理 6 给出了一个简化版本）。首先，我们定义关联集合 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}$ 和 $\mathsf{QQCorr}^{(\Omega,G)}$ （附录 F.1），随后在附录 F.2中证明半正定秩（定理 29），并在附录 F.3中证明纯化秩（定理 31）。。

F.1 关联集

下面，我们定义集合 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$ 和集合 $\mathsf{QQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$。直观地说，任一集合中的每个元素都由一个 n-方量子态作为资源生成，并满足秩$^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle)\leq r$。换言之， $|\psi\rangle$ 的纠缠结构受到限制。具有局部维数d的 n-方概率分布 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$，通过在每个张量积因子上施加 POVM 生成；而 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$ 中的 n-方混合态，则通过在每个张量积因子上施加量子信道生成。此外，如果 G 非平凡，则 POVM 和量子信道还需满足额外的对称性约束。

定义 26 （关于 (Ω G)-结构的量子关联场景）。令 Ω 为一个 *wsc*，且 G 为作用于 Ω上的群。

(i) 多方量子关联概率分布集合 多方量子关联概率分布 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,d,r)$ 是所有n重 d维概率分布 $(P_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{d}$ 的集合，满足

$$P_{j_1,\ldots,j_n}=\mathrm{tr}\left(A_{j_1}^{[1]}\otimes\cdots\otimes A_{j_n}^{[n]}\,|\psi\rangle\langle\psi|\right)$$

其中， $|\psi\rangle$ 是一个归一化态，其 秩$^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle)\leq r$，且 $\left(A_j^{[i]}\right)_{j=1,\ldots,d}$ 满足 $i=1$、…、 n 是 G-不变量 *POVM* 集合，即对于 $g\in G$， 我们有

$$A_j^{[gi]}=A_j^{[i]}.$$

(*ii*) 多方量子关联量子态$\mathsf{QQCorr}^{(\Omega,G)}(n、\ d、\ r)$是所有满足以下条件的 n 重密度矩阵 $\rho\in M_d(\mathbb{C})^{\otimes n}$ 的集合：

$$\rho=(\mathcal{E}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}_n)\big(|\psi\rangle\langle\psi|\big)$$

其中，$|\psi\rangle$ 是一个秩为$\mathrm{rank}^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle)\le r$的归一化态，并且 E_1、...、E_n 是 G-不变量量子信道向量族，即对于所有 $g\in G$，我们都有

$$\mathcal{E}_{gi}=\mathcal{E}_i.$$

我们将证明，对于任意 wsc Ω 以及 Ω 上称为外部 群作用的某一类群作用，这些关联集合与低秩张量集合之间的对应关系。

定义 27（外部群作用）。 设 Ω 是一个 *wsc*。若 G 在Ω上的群作用满足

$$\forall g\in G\ s.t.\ gi=i\ we\ have\ that\ gF=F\ for\ every\ F\in\widetilde{\mathcal{F}}_i.$$

直观地说，G 的外部群作用不会对张量产生任何局部约束。它只会在不同局部系统的张量之间产生约束。

例 28（外部和非外部群作用的例子）。 正文中使用的所有群作用（见图 2）都是外部的：

(i) n-环 Θ_n 上的群作用 C_n 是外部的。这是因为，只有满足对于某个 $i\in[n]$ 有 $gi=i$ 的 $g\in C_n$ 才是单位元，而该单位元也会保持面不变。

(ii) n-单纯形 Σ_n 上的群作用 S_n 是外部的。与 (i) 不同，存在 $g\in S_n$，使得对于某个 $i\in[n]$，$gi=i$。然而，由于 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_i$ 都是单点集，因此该面显然保持不变。

对于非外部的群作用，考虑具有 3 个顶点的线 Λ_3（参见例 11）以及由反射 C_3 生成的群作用 τ：$1\mapsto3, 2\mapsto2, 3\mapsto1$ 及其在各面上的诱导作用。C_3在 Λ_3上不是外部的，因为 $\tau(2)=2$而 $\tau F_1=F_2$。相应的（Λ_3, C_3）-分解为

$$T=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}|v_\alpha\rangle\otimes|w_{\alpha,\beta}\rangle\otimes|v_\alpha\rangle$$

并附加约束$|w_{\alpha,\beta}\rangle=|w_{\beta,\alpha}\rangle$对每个 $\alpha,\beta\in\{1,\dots,r\}$均成立。局部张量向量族 $\{|w_{\alpha,\beta}\rangle\}_{\alpha,\beta}$ 中出现的“内部”对称性约束，正是该定义名称的由来。△

F.2 半正定秩与 CQCorr 之间的对应关系

现在我们证明定理 6 的第一部分，即 $\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$ 中的元素恰好是满足 $\text{半正定秩}^{(\Omega,G)}(P)\le r$的这些张量。特殊情形下的类似陈述（即 $\Omega=\Sigma_n$ 和 $G=\{e\}$）由 Jain 等人通过 [23, 定理 13]得以证明。

定理 29（半正定秩与量子关联场景）。 设 Ω 为一个 *wsc*，且 G 为 Ω 上的外部群作用。此外，设 $P\in\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes n}$ 为一个 n 重概率分布。以下各项等价：

(*i*) $P\in\mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$。

(*ii*) $\text{半正定秩}^{(\Omega,G)}(P)\le r$。

我们首先需要一个准备引理。

引理 30（G-对称矩阵对角化）。设Ω 为 *wsc*，且 G 是 Ω 上的外部群作用。设 $i=1,\ \dots,\ n$ 对应的 $K^{[i]}\in M_{\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}}(\mathbb{C})$ 为一个厄米矩阵向量族，使得

$$\langle{}^g\beta|\,K^{[gi]}\,|{}^g\beta'\rangle=\langle\beta|\,K^{[i]}\,|\beta'\rangle\qquad for\ all\ \beta,\beta'\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}$$

于是，存在所有矩阵 $K^{[i]}$ 的一个相容特征分解，其形式为

$$K^{[i]}=\sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell^{[i]}\,|w_\ell^{[i]}\rangle\langle w_\ell^{[i]}|\qquad such\ that\ \ \langle{}^g\beta\,|\,w_\ell^{[gi]}\rangle=\langle\beta\,|\,w_\ell^{[i]}\rangle\ \ and\ \lambda_\ell^{[gi]}=\lambda_\ell^{[i]}$$

证明。选取群作用不同轨道的表示 $i_1, \ldots, i_m \in [n]$。计算 $K^{[i_1]}, \ldots, K^{[i_m]}$ 的特征向量和特征值，我们通过如下设定，为每个矩阵 $K^{[i]}$ 得到一个特征分解的生成集

$$\lambda_\ell^{[i]} = \lambda_\ell^{[gi_k]} \text{ and } |w_\ell^{[i]}\rangle = \sum_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}{}_{i_k}} |{}^g\beta\rangle \langle \beta | w_\ell^{[i_k]}\rangle$$

对于 $g \in G$ 以及满足 $i = gi_k$ 的代表元 i_k。

由于该作用是外部的，这与 g 的选择无关。 □

定理的证明 *29*。 (i) ⇒ (ii)：令 $P \in \mathsf{CQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$。根据定义，存在一个状态

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} |v_{\alpha_{|_1}}^{[1]}\rangle \otimes \cdots \otimes |v_{\alpha_{|_n}}^{[n]}\rangle$$

以及 G-不变量 POVM $\left(A_j^{[i]}\right)_{j=1}^d$，其中 $|\mathcal{I}| \le r$ 满足

$$P_{j_1,\ldots,j_n} = \mathrm{tr}\Big(A_{j_1}^{[1]} \otimes \cdots \otimes A_{j_n}^{[n]} |\psi\rangle\langle\psi|\Big).$$

定义

$$B_j^{[i]} \coloneqq \left(X^{[i]}\right)^\dagger A_j^{[i]} X^{[i]} \quad \text{with} \quad X^{[i]} = \sum_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}} |v_\beta^{[i]}\rangle\langle\beta|.$$

注意，$B_j^{[i]} \in \mathcal{M}^+{}_{\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}}(\mathbb{C})$。此外，我们有

$$\langle {}^g\beta | B_j^{[gi]} | {}^g\beta'\rangle = \langle v_{g\beta}^{[gi]} | A_j^{[gi]} | v_{g\beta'}^{[gi]}\rangle = \langle v_\beta^{[i]} | A_j^{[i]} | v_{\beta'}^{[i]}\rangle = \langle \beta | B_j^{[i]} | \beta'\rangle$$

其中 w e 我们使用了 $|v_\beta^{[i]}\rangle$ 构成一个 (Ω G)-分解，并且 $A_j^{[i]}$ 是 G-不变量。此外 r,

$$\sum_{\alpha,\alpha' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \left(B_{j_1}^{[1]}\right)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}} \cdots \left(B_{j_n}^{[n]}\right)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}} = \langle\psi| A_{j_1}^{[1]} \otimes \cdots \otimes A_{j_n}^{[n]} |\psi\rangle = P_{j_1,\ldots,j_n}$$

这证明了半正定秩$^{(\Omega,G)}(P) \le r$。

(ii) ⇒ (i)：令

$$P_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{\alpha,\alpha' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \left(B_{j_1}^{[1]}\right)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}} \cdots \left(B_{j_n}^{[n]}\right)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}} = \langle\Omega_r| B_{j_1}^{[1]} \otimes \cdots \otimes B_{j_n}^{[n]} |\Omega_r\rangle \tag{18}$$

是 G 的一个半正定 (Ω G)-分解，其中 P的半正定秩为$^{(\Omega,G)}(P) \le r = |\mathcal{I}|$。正如 (18) 中的最后一个表达式已经暗示的那样，我们使用 $B_j^{[i]}$ 来构造一个 POVM，并使用 $|\Omega_r\rangle$ 来构造一个状态，二者结合后得到 P。虽然矩阵 $B_j^{[i]}$ 是半正定的，但它们通常并不构成 POVM，因为

$$\sum_{j=1}^k B_j^{[i]} \neq \mathbb{1}_{r_i}$$

~与 $r_i = |\mathcal{I}^{\mathcal{F}_i}|$。为此，定义

$$S^{[i]} \coloneqq \sum_{j=1}^d B_j^{[i]} = \sum_{\ell=1}^{m_i} \lambda_\ell^{[i]} |w_\ell^{[i]}\rangle\langle w_\ell^{[i]}|$$

其中 $\lambda_\ell^{[i]} > 0$ 是 $S^{[i]}$ 的正特征值，并且 $|w_\ell^{[i]}\rangle$ 是向量族 G-不变量特征向量 $S^{[1]}, \ldots, S^{[n]}$，根据引理 30。定义

$$T^{[i]} = \sum_{\ell=1}^{m_i} \left(\lambda_\ell^{[i]}\right)^{-1/2} |w_\ell^{[i]}\rangle\langle\ell| \quad \text{and} \quad W^{[i]} = \sum_{\ell=1}^{m_i} \left(\lambda_\ell^{[i]}\right)^{1/2} |\ell\rangle\langle w_\ell^{[i]}|.$$

根据 CC-BY 4.0 许可协议发布。

注意，$T^{[i]} \cdot W^{[i]}$ 是子空间 $\mathrm{span}(\{|w_1^{[i]}\rangle \ldots, |w_{m_i}^{[i]}\rangle\})$上的投影算子。因此，我们有

$$B_j^{[i]} = \left(T^{[i]} \cdot W^{[i]}\right)^\dagger \cdot B_j^{[i]} \cdot \left(T^{[i]} \cdot W^{[i]}\right). \tag{19}$$

我们有

$$\langle {}^g\beta| T^{[gi]} = \langle \beta| T^{[i]} \quad \text{and} \quad W^{[gi]} |{}^g\beta\rangle = W^{[i]} |\beta\rangle \tag{20}$$

由于向量 $|w_\ell^{[i]}\rangle$ 是 G-不变量。现在我们通过以下方式定义一个 POVM $(A_j^{[i]})_{j=1}^d$

$$A_j^{[i]} = \left(T^{[i]}\right)^\dagger \cdot B_j^{[i]} \cdot T^{[i]}.$$

我们有 $A_j^{[i]}$ 是半正定的，并且

$$\sum_{j=1}^d A_j^{[i]} = \mathbb{1}_{m_i}$$

这表明 $A^{[i]} := \left(A_j^{[i]}\right)_{j=1,\ldots,d}$ 确实是 $i \in \{1, \ldots, n\}$的一个 POVM。此外，$\left(A^{[i]}\right)_{i=1}^n$ 是一个 G-不变量向量族，因为

$$\begin{aligned} A_j^{[gi]} &= \left(T^{[gi]}\right)^\dagger \cdot B_j^{[gi]} \cdot T^{[gi]} = \sum_{\beta,\beta' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}} \left(\langle \beta| T^{[gi]}\right)^\dagger \langle \beta| B_j^{[gi]} |\beta'\rangle \langle \beta'| T^{[gi]} \\ &= \sum_{\beta,\beta' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}} \left(\langle {}^g\beta| T^{[gi]}\right)^\dagger \langle {}^g\beta| B_j^{[gi]} |{}^g\beta'\rangle \langle {}^g\beta'| T^{[gi]} \\ &= \sum_{\beta,\beta' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}} \left(\langle \beta| T^{[i]}\right)^\dagger \langle \beta| B_j^{[i]} |\beta'\rangle \langle \beta'| T^{[i]} = A_j^{[i]} \end{aligned}$$

~ ~其中我们在第三步中使用了 $\beta \mapsto {}^g\beta$ 是 $\mathcal{I}^{\mathcal{F}_i}$ 与 $\mathcal{I}^{\mathcal{F}_{gi}}$ 之间的双射，在第四步中使用了公式（20）。此外，定义

$$|\psi\rangle = W^{[1]} \otimes \cdots \otimes W^{[n]} |\Omega_r\rangle$$

得到一个秩为 $\chi^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle) \leq r$ 的归一化态，因为

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \langle \Omega_r| \left(W^{[1]}\right)^\dagger W^{[1]} \otimes \cdots \otimes \left(W^{[n]}\right)^\dagger W^{[n]} |\Omega_r\rangle = \langle \Omega_r| S^{[1]} \otimes \cdots \otimes S^{[n]} |\Omega_r\rangle \\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^d \sum_{\alpha,\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \left(B_{j_1}^{[1]}\right)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}} \cdots \left(B_{j_n}^{[n]}\right)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}} = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^d P_{j_1,\ldots,j_n} = 1 \end{aligned}$$

其中，在最后一步中我们使用了 $(P_{j_1,\ldots,j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^d$ 表示一个概率分布这一事实。最后，所定义的 POVM $\left(A_j^{[i]}\right)_{j=1}^d$ 对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 以及状态 $|\psi\rangle$ 生成概率分布 P，因为

$$\langle \psi| A_{j_1}^{[1]} \otimes \cdots \otimes A_{j_n}^{[n]} |\psi\rangle = \sum_{\alpha,\alpha' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \left(B_{j_1}^{[1]}\right)_{\alpha_{|_1},\alpha'_{|_1}} \cdots \left(B_{j_n}^{[n]}\right)_{\alpha_{|_n},\alpha'_{|_n}} = P_{j_1,\ldots,j_n}$$

其中，我们在第一步使用了公式（19），在第二步使用了公式（18）。 □

F.3 纯化秩与 QQCorr 之间的对应关系

现在我们证明定理 29 的量子版本，即 $\mathrm{QQCorr}^{(\Omega,G)}(n,d,r)$ 中的元素恰好是半正定矩阵 ρ，满足 $\mathrm{tr}(\rho) = 1$，并且 纯化秩$^{(\Omega,G)}(\rho) \leq r$。该陈述的证明与定理29的证明类似。具体而言，根据注记 17，证明首先将范围限制为在计算基下为对角的密度矩阵，然后利用像为对角态的量子信道与 POVM（见公式 (16)）相对应这一事实。

定理 31 （纯化秩与量子关联场景）。 设Ω 是一个 *wsc*， G 是一个外部群作用。此外，设 $\rho \in M_d(\mathbb{C})^{\otimes n}$ 是半正定的，且$\mathrm{tr}(\rho) = 1$。以下条件等价：

(*i*) $\rho \in \mathsf{QQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$。

(ii) 纯化秩$^{(\Omega,G)}(\rho) \leq r$。

定理 31 (ii) $\Longrightarrow$ (i) 的构造针对一维纯化形式，即一个 Λ_n-纯化，在图 11 中表示为张量网络。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：设 ρ 是 $\mathsf{QQCorr}^{(\Omega,G)}(n,\ d,\ r)$ 中的一个密度矩阵。根据定义，存在一个统计 e

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} |v^{[1]}_{\alpha_{|_1}}\rangle \otimes \cdots \otimes |v^{[n]}_{\alpha_{|_n}}\rangle$$

使得 $\mathsf{rank}^{(\Omega,G)}(|\psi\rangle) \leq r = |\mathcal{I}|$ 以及 G-不变量量子信道

$$\mathcal{E}_i(-) := \sum_{k=1}^{d_i} \left(A^{[i]}_k\right) \cdot\ -\ \cdot \left(A^{[i]}_k\right)^\dagger \tag{21}$$

满足条件：$A^{[i]}_k = A^{[gi]}_k$ 生成 $\rho_\circ$ 现在我们定义 $L \in \mathcal{M}_{d,\ d_0}(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{d,\ d_n}(\mathbb{C})$，使得

（a） $\rho = LL^\dagger$

（b）秩$^{(\Omega,G)}(L) \leq r$

~这证明了（ii）。对于 $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ 以及 $\beta \in \mathcal{I}^{\mathcal{F}_i}$ 令

$$L^{[i]}_\beta := \sum_{k=1}^{d_i} A^{[i]}_k |v^{[i]}_\beta\rangle \langle k| . \tag{22}$$

进一步，令

$$L = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} L^{[1]}_{\alpha_{|_1}} \otimes \cdots \otimes L^{[n]}_{\alpha_{|_n}} .$$

根据定义，我们有秩$^{(\Omega,G)}$（L）$\leq r_\circ$ 剩下的只需证明（a）。这由下式可得

$$LL^\dagger = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{d} \left(A^{[1]}_{k_1} \otimes \cdots \otimes A^{[n]}_{k_n}\right) |\psi\rangle\langle\psi| \left(A^{[1]}_{k_1} \otimes \cdots \otimes A^{[n]}_{k_n}\right)^\dagger = (\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n)(|\psi\rangle\langle\psi|) = \rho$$

其中第一步使用了公式（22），第二步使用了公式（21）。（ii）$\Longrightarrow$（i）：令 $\rho = LL^\dagger$ 其中

$$L = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} L^{[1]}_{\alpha_{|_1}} \otimes \cdots \otimes L^{[n]}_{\alpha_{|_n}}$$

是一个（Ω G）-纯化，具有纯化秩$^{(\Omega,G)}$（ρ）$\leq r = |\mathcal{I}|_\circ$

定义完全正映射

$$\mathcal{N}_i(-) := \sum_{k=1}^{d'} \left(B^{[i]}_k\right) \cdot\ -\ \cdot \left(B^{[i]}_k\right)^\dagger \quad \text{with} \quad \left(B^{[i]}_k\right)_{\ell,\beta} = \left(L^{[i]}_\beta\right)_{\ell,k}$$

我们有

$$\rho = (\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_n)(|\Omega_r\rangle\langle\Omega_r|). \tag{23}$$

其中 $|\Omega_r\rangle$ 是附录 A.4 中定义的结构张量。然而，$\mathcal{N}_i$ 既不保持迹，也不是G-不变量，并且 $|\Omega_r\rangle$ 未归一化。因此，定义

$$S^{[i]} := \sum_{k=1}^{d'} \left(B^{[i]}_k\right)^\dagger \left(B^{[i]}_k\right) = \sum_{\ell=1}^{m_i} \lambda^{[i]}_\ell |w^{[i]}_\ell\rangle\langle w^{[i]}_\ell|$$

其中 $|w^{[i]}_\ell\rangle$ 是 G-不变量向量族 $S^{[1]},\ldots,S^{[n]}$ 根据引理 30。类似于定理 29的证明，我们定义

$$T^{[i]} = \sum_{\ell=1}^{m_i} \left(\lambda^{[i]}_\ell\right)^{-1/2} |w^{[i]}_\ell\rangle\langle\ell| \quad \text{and} \quad W^{[i]} = \sum_{\ell=1}^{m_i} \left(\lambda^{[i]}_\ell\right)^{1/2} |\ell\rangle\langle w^{[i]}_\ell| . \tag{24}$$

根据 CC-BY 4.0 发布。

以及完全正映射

$$\mathcal{E}_i(-) = \sum_{k=1}^{d'} \left(A_k^{[i]}\right) \cdot \; - \; \cdot \left(A_k^{[i]}\right)^\dagger \quad \text{with} \quad A_k^{[i]} \coloneqq B_k^{[i]} \cdot T^{[i]}. \tag{25}$$

注意到 $(\mathcal{E}_i)_{i=1}$ ..... n 根据定义是一个 G-不变量量子信道向量族。此外，根据以下推理 of 定理的证明 29，

$$|\psi\rangle = W^{[1]} \otimes \cdots \otimes W^{[n]} |\Omega_r\rangle \tag{26}$$

定义了一个秩为$_{(\Omega,G)}(|\psi\rangle) \leq r$的归一化态。此外，

$$(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n)(|\psi\rangle\langle\psi|) = (\mathcal{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{N}_n)(|\Omega_r\rangle\langle\Omega_r|) = \rho$$

这就证明了该陈述。 □

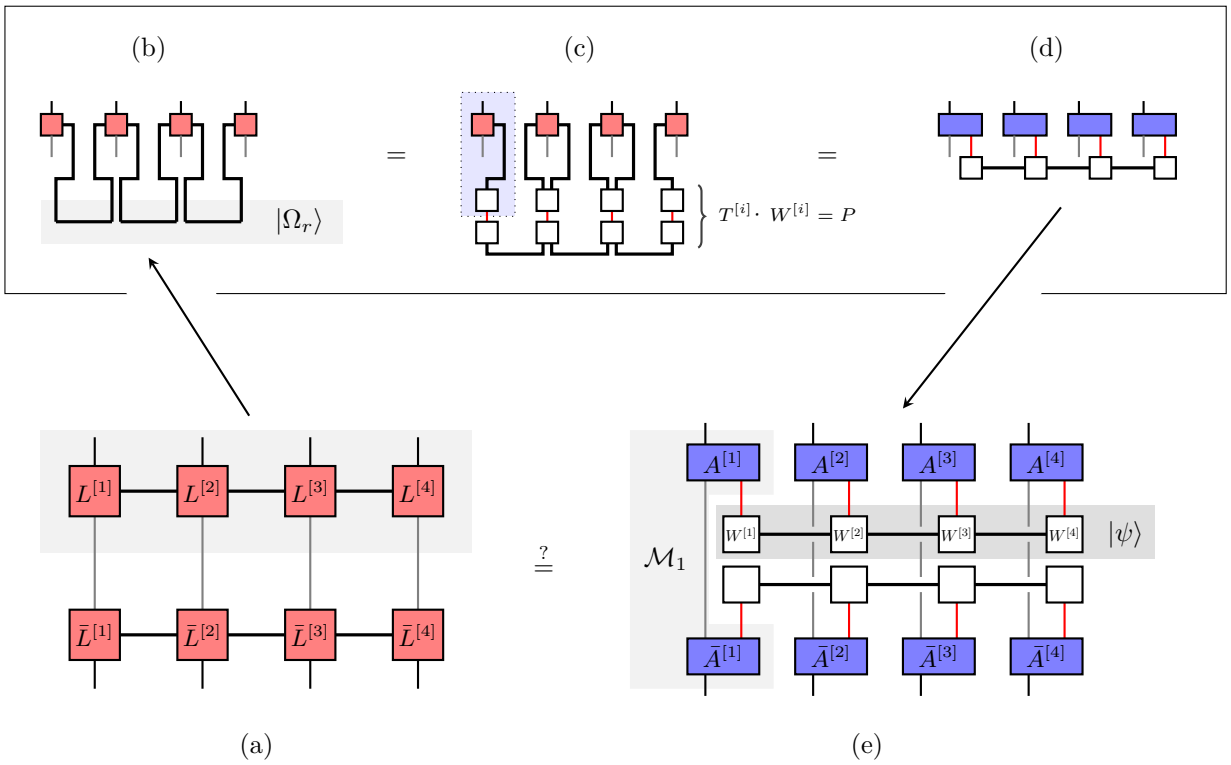


图 11：一维链上定理 31（ii）$\Longrightarrow$（i）的证明，即证明表达式 (a) 和 (e) 相等。(a) 是具有纯化算子施密特秩$(\rho) \leq r$ 的局部纯化形式。(b) 重新排列线路时，我们根据公式 (15)，使用结构张量 $|\Omega_r$ 得到 Ω-分解的定义（在此设置中，$|\Omega_r$ 是 MaMu 张量）。根据公式 (23)，该分解也可以理解为对 $|\Omega_r$ 应用完全正映射。在 (c) 中，我们插入一个投影算子 $P^{[i]}$，其作用于张量 $L^{[i]}$ 非平凡的空间，并根据公式 (24) 将其因式分解为乘积 $T^{[i]} \cdot W^{[i]}$。为了得到 (d)，我们将上方方框（$T^{[i]}$）与红色方框（公式 (25)）合并。由此得到一个归一化态（公式 (26)）以及局部量子信道 (e)。

G 非负和可分分解以及定理 3 的证明

我们现在证明，非负和可分的 Σ_n-分解在边界秩与秩之间不存在间隙。这推广了非负矩阵秩和非负张量秩是下半连续的结果 [46, 30]。

定理 32。 设 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列可分矩阵，满足 $\rho_n \to \rho$ 且 可分秩$(\rho_n) \leq r$。则

$$\text{sep-rank}(\rho) \leq r$$

同样的表述也适用于对称可分秩、非负秩 和对称非负秩。

这意味着以下结论。

推论 33。 对于非负秩、对称非负秩、可分秩 和对称可分秩，边界秩与秩之间不存在间隙。

为证明定理 32 ，我们需要以下预备引理。

引理 34。 设 $A, B \in M_d^+(\mathbb{C})$。则，

$$\max\left\{\lambda_{\max}(A), \lambda_{\max}(B)\right\} \leq \lambda_{\max}(A+B)$$

证明。设

$$R_X(x) := \frac{\langle x| X |x\rangle}{\langle x | x\rangle}$$

对于 $x \in \mathbb{C}^d$。我们有 $R_A(x) + R_B(x) = R_{A+B}(x)$，并且由于 A， B 是半正定的，因此对于每个 x，都有 $R_A(x)$ $R_B(x) \geq 0$。这意味着

$$\max\{R_A(x), R_B(x)\} \leq R_{A+B}(x).$$

由于 $\lambda_{\max}(X) = \max_{x\in\mathbb{C}^d} R_X(x)$，结论成立。 □

定理 32的证明。 我们针对对称可分秩给出证明。可分秩的证明类似，而非负秩和对称非负秩的证明则可通过限制到对角矩阵，并利用非负秩(T) =可分秩(Diag(T))（见备注 17）得到。

设 $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一列可分矩阵，其对称可分秩$(\rho_k) \leq r$，即具有一个可分分解

$$\rho_k = \sum_{\alpha=1}^{r} \rho_{\alpha,k} \otimes \cdots \otimes \rho_{\alpha,k}$$

其中 $\rho_{\alpha,\, k}$ 半正定。由于所有初等张量本身都是半正定的，因此对于所有 α， k

$$\|\rho_{\alpha,k}\|_\infty^n = \|\rho_{\alpha,k}^{\otimes n}\|_\infty \leq \|\rho_k\|_\infty \leq \|\rho\|_\infty + C$$

对于某个常数 $C \in \mathbb{N}$，其中第一个等式成立是因为 $\lambda_{\max}(\rho^{\otimes n}) = \lambda_{\max}(\rho)^n$；第一个不等式由引理 34得到，最后一个不等式则由 ρ_k 收敛到 ρ得到。

这意味着 $(\rho_{\alpha,\, k})_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个有界序列。根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理（定理 22），存在一个子序列 (k_ℓ) $_{\ell\in\mathbb{N}}$，使得 $\rho_{\alpha,\, k_\ell}$ 收敛到一个极限点 ρ_α，该点仍然是半正定的。由于根据假设 $\rho_k \to \rho$，我们有

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{r} \rho_\alpha \otimes \cdots \otimes \rho_\alpha,$$

即 symm-sep-rank$(\rho) \leq r$，这说明了该陈述。 □

H 树张量分解与定理 4 的证明

这里我们证明，只要 Ω 是一棵树，就不存在能体现边界秩与秩之间间隙的分解。尽管对于无约束张量分解而言这一点已为人所知（见 [3, 5]），但据我们所知，对于正张量分解而言，这一点此前尚未得到证明。

如果一个 wsc Ω 满足以下两个条件，我们就称其为一棵树：

~(i) Ω 的面表示一个图，即 Ω 是一个单纯复形，并且对于每个 $F \in \mathcal{F}$，都有 $|F| \leq 2$。

(ii) Ω 中不存在环，即对于任意满足以下条件的顶点序列 $i_1, \ldots, i_n$，

$$\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{n-1}, i_n\}, \{i_n, i_1\} \in \widetilde{\mathcal{F}}$$

我们有 $i_1 = i_2 = \ldots = i_n$。

在附录H.1 中，我们回顾无约束张量分解的相关结果，遵循 [3]。在附录 H.2中，我们证明可分和非负张量分解的主要结论；在附录 H.3中，我们展示半正定分解和局部纯化形式的主要结果。

H.1 无约束树张量分解

本部分中，我们回顾这样一个结果：树 Ω 上的无约束 Ω-分解在边界秩与秩之间不存在间隙，即

$$\underline{\mathrm{rank}}_\Omega(T) = \mathrm{rank}_\Omega(T)$$

The 其思想如下。一个张量分解中，若某个指标只连接两个局部空间，则该 s

$$T = \sum_{\alpha=1}^{r} |v_\alpha\rangle \otimes |w_\alpha\rangle$$

分解对应于矩阵因式分解 $T = A\cdot B$，其中有 $A \in \mathbf{M}_{d,\,r}(\mathbb{C})$ 和 $B \in \mathbf{M}_{r,\,d}(\mathbb{C})$，$A$ 的每一列由向量 $|v_\alpha$ 给出，而 B 的每一行由向量 $|w_\alpha$ 给出。注意，这些分解中存在“规范自由度”：具体而言，对于每个可逆的 $X \in \mathbf{M}_{r,\,r}(\mathbb{C})$，$\widetilde{A} = A\cdot X^{-1}$ 和 $\widetilde{B} = X\cdot B$ 会产生 T 的一个具有相同秩的新分解。计算 QR- A [47,Chapter 5], 的薄（或约化）分解，我们得到 $A = Q\cdot R$，其中 Q 是 $\mathbf{M}_{d,\,r}(\mathbb{C})$ 中的一个等距映射，而 $R \in \mathbf{M}_r(\mathbb{C})$ 是一个可逆~ ~矩阵。因此， $A\coloneqq Q$ 和 $B\coloneqq R\cdot B$ 会产生一个分解，其中第一部分的所有张量因子构成一个正交归一基，并且局部向量相对于希尔伯特-施密特范数满足归一化条件

$$\|X\|_2 \coloneqq \sqrt{\mathrm{tr}(X^\dagger X)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} |X_{i,j}|^2},$$

~即 $\|A\|_2 = \sqrt{r}$ 和

$$\|T\|_2 = \|\widetilde{A}\widetilde{B}\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\Big(\widetilde{B}^\dagger Q^\dagger Q \widetilde{B}\Big)} = \sqrt{\mathrm{tr}\Big(\widetilde{B}^\dagger \widetilde{B}\Big)} = \|\widetilde{B}\|_2$$

同样，可以证明 对于任意树 Ω，都存在一个归一化 Ω-分解。这类分解 被称为左正 则形式，在张量网络文献中如此称呼（见 [48, 3]）。

引理 3 **5. </style}令 ⋯ 和 Ω 为一棵树，其秩$_\Omega(\psi) \le r$。存在一个分解** n

$$|\psi\rangle = W^{[1]} \otimes \cdots \otimes W^{[n]} |\Omega_r\rangle$$

使得

$$\|W^{[i]}\|_2 = \sqrt{r} \quad for\ i = 1, \ldots, n-1, \ and \quad \|W^{[n]}\|_2 = \sqrt{\langle\psi\,|\,\psi\rangle}$$

证明。 直接由 [3, 命题 1]的证明可得。

□

引理 35 表明，对于无约束的 Ω-分解，只要 Ω 是一棵树，边界秩与秩之间就没有间隙。

定理 36。 若 Ω 是一棵树，则 秩$_\Omega$ =秩$_\Omega$。 ____

证明。 设 $|\psi_k\rangle$ 是一列量子态，满足 $|\psi_k\rangle \to |\psi\rangle$ 且秩$_\Omega(|\psi_k\rangle) \le r$。我们证明秩$_\Omega(|\psi\rangle) \le r$。根据引理 35，存在张量分解

$$|\psi_k\rangle = W_k^{[1]} \otimes \cdots \otimes W_k^{[n]} |\Omega_r\rangle$$

使得 $\|W_k^{[i]}\|_2 = \sqrt{r}$ 对于 $i = 1$、……、 $n-1$ 和 $\|W_k^{[n]}\|_2 = \sqrt{\langle\psi_k\,|\,\psi_k\rangle}$。由于 $|\psi_k\rangle \to |\psi\rangle$ 存在一个常数C 使得

$$\sqrt{\langle\psi_k\,|\,\psi_k\rangle} \le \sqrt{\langle\psi\,|\,\psi\rangle} + C$$

这意味着 $(W_k^{[i]})_{k\in\mathbb{N}}$ 对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都是有界序列。根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理（定理 22），存在子序列 $(W_{k_\ell}^{[i]})_{\ell\in\mathbb{N}}$，对于每个 $W^{[i]}$， $i \in \{1, \ldots, n\}$ 收敛到一个矩阵

$$|\psi\rangle = W^{[1]} \otimes \cdots \otimes W^{[n]} |\Omega_r\rangle\,.$$

□

H.2 非负与可分树张量分解

这里证明，树上的非负和可分张量分解 Ω 在秩与边界秩之间不存在间隙。证明策略与 Σ_n-分解类似：我们证明存在一个具有有界约束的最小秩分解，然后应用博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理。在这一部分中，我们仅证明可分 Ω-分解的结论；非负 Ω-分解的结果可通过将矩阵限制为对角矩阵，并利用 可分秩$_\Omega$（Diag(T) = 非负秩$_\Omega$（T）（见注释 17）得到。我们首先构造一个最小秩的张量分解，使其中每个局部元素都满足某个有界约束。

引理 37. 设Ω 是一棵树，且 $\rho \in M_d(\mathbb{C})^{\otimes n}$ 是一个可分矩阵，其可分秩$_\Omega(\rho) \leq r$。则存在一个秩为 r 的可分Ω-分解

$$\rho = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \rho^{[1]}_{\alpha|_1} \otimes \cdots \otimes \rho^{[n]}_{\alpha|_n}$$

使得 $\operatorname{tr}(\rho^{[i]}_\beta) \leq 1$ 对每个 $\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}$ 以及 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，并且 $\sum_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}} \operatorname{tr}(\rho^{[n]}_\beta) = \operatorname{tr}(\rho$).

证明。 我们通过对顶点数 n 进行归纳来证明一个更强的结论。具体而言，我们证明，对于每个具有联合 Ω-分解的向量族 $(\rho_\delta)_{\delta \in \mathcal{I}}$

$$\rho_\delta = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \rho^{[1]}_{\alpha|_1} \otimes \cdots \otimes \rho^{[n]}_{\alpha|_n, \delta} \tag{27}$$

局部张量可选取为满足 $\operatorname{tr}(\rho^{[i]}_\beta) = 1$ 对于 $\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_i}$ 以及 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，并且 $\sum_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_n}} \operatorname{tr}(\rho^{[n]}_{\beta\,\delta},) = \operatorname{tr}(\rho_\delta)$。令 $\delta = 1$ 即可证明该结论。归纳步骤的思路如图 12所示。

对于 $n = 1$ （即单个顶点），该命题显然成立。

对于归纳步骤 $n - 1 \to n$，根据公式（27）选择一个不带归一化约束的联合 Ω-分解。不失一般性，我们假设顶点 n 恰好与另外两个顶点连通。[6] 我们将第一棵子树 Ω_1 中的顶点记为 $\{1, \ldots, k_1\}$，将第二棵子树 Ω_2 中的顶点记为 $\{k_1 + 1, \ldots, n-1\}$。此外，顶点 k_1 和 $n-1$ 与顶点 n 相连（图 12）。因此，我们可以将可分 Ω-分解 ρ_δ 改写为

$$\rho_\delta = \sum_{\gamma, \eta \in \mathcal{I}} \rho^{[1,\ldots,k_1]}_\gamma \otimes \rho^{[k_1+1,\ldots,n-1]}_\eta \otimes \rho^{[n]}_{\gamma,\eta,\delta}$$

with

$$\rho^{[1,\ldots,k_1]}_\gamma = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{G}}}} \rho^{[1]}_{\alpha|_1} \otimes \cdots \otimes \rho^{[k_1]}_{\alpha|_{k_1}, \gamma} \quad \text{and} \quad \rho^{[k_1+1,\ldots,n-1]}_\eta = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{H}}}} \rho^{[k_1+1]}_{\alpha|_{k_1+1}} \otimes \cdots \otimes \rho^{[n-1]}_{\alpha|_{n-1}, \eta}$$

其中，$\widetilde{\mathcal{G}}$ 和 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 分别是 Ω_1 和 Ω_2 的面的集合。对 $\rho^{[1,\ldots,k_1]}_\gamma$和 $\rho^{[k_1+1,\ldots,n-1]}_\eta$ 应用归纳假设可知，除了位置 k_1 和$n-1$处的张量因子外，所有张量因子的迹均为一。在这两个位置处，我们有

$$\sum_{\beta \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_{k_1}}} \operatorname{tr}(\rho^{[k_1]}_{\beta,\gamma}) = \operatorname{tr}(\rho^{[1,\ldots,k_1]}_\gamma) \quad \text{and} \quad \sum_{\beta' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}}} \operatorname{tr}(\rho^{[n-1]}_{\beta',\eta}) = \operatorname{tr}(\rho^{[k_1+1,\ldots,n-1]}_\eta).$$

定义

$$\widetilde{\rho}^{[k_1]}_{\beta,\gamma} := \frac{1}{\operatorname{tr}(\rho^{[1,\ldots,k_1]}_\gamma)} \rho^{[k_1]}_{\beta,\gamma},$$

$$\widetilde{\rho}^{[n-1]}_{\beta',\eta} := \frac{1}{\operatorname{tr}(\rho^{[k_1+1,\ldots,n-1]}_\eta)} \rho^{[n-1]}_{\beta,\eta},$$

and

$$\widetilde{\rho}^{[n]}_{\gamma,\eta,\delta} := \operatorname{tr}(\rho^{[1\ldots k_1]}_\gamma) \cdot \operatorname{tr}(\rho^{[k_1+1\ldots n-1]}_\eta) \cdot \rho^{[n]}_{\gamma,\eta,\delta}$$

我们得到一个联合 Ω-分解

$$\begin{aligned}\rho_\delta &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{G}}}} \sum_{\alpha' \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{H}}}} \sum_{\gamma,\eta \in \mathcal{I}} \rho^{[1]}_{\alpha|_1} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\rho}^{[k_1]}_{\alpha|_{k_1}, \gamma} \otimes \rho^{[k_1+1]}_{\alpha'|_{k_1+1}} \cdots \otimes \widetilde{\rho}^{[n-1]}_{\alpha'|_{n-1}, \eta} \otimes \widetilde{\rho}^{[n]}_{\gamma,\eta,\delta} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \rho^{[1]}_{\alpha|_1} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\rho}^{[k_1]}_{\alpha|_{k_1}} \otimes \rho^{[k_1+1]}_{\alpha|_{k_1+1}} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\rho}^{[n-1]}_{\alpha|_{n-1}} \otimes \widetilde{\rho}^{[n]}_{\alpha|_n, \delta}\end{aligned}$$

[6] 如果它与更多或更少的顶点相连，证明过程也同样成立。

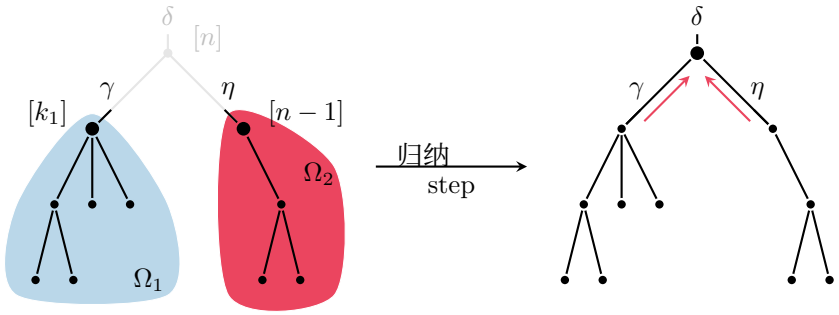


图 12：引理 37证明中归纳步骤的示意图。我们假设每个子树 Ω_1, Ω_2 上都存在一个归一化分解。这意味着小节点上的所有局部元素的迹均为 1。大节点表示其归一化由全局元素给出的局部元素。在归纳步骤中，我们将节点 k_1 和 $n-1$ 的全局归一化约束转移到节点 n。

满足所需性质。由于每棵树都可以通过以所述方式依次附加顶点而得到，这就证明了该陈述。

□

推论 38。 设 Ω 是一棵树。那么，非负秩$_\Omega$ = 非负秩$_\Omega$ 和 可分秩$_\Omega$ = 可分秩$_\Omega$ ·

证明。 证明类似于推论 33。我们仍然只对可分解分解进行证明。设 $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$是一列可分矩阵，使得可分秩$(\rho_k) \leq r$ 且 $\rho_k \to \rho$。我们证明可分秩$(\rho) \leq r$。为此，设

$$\rho_k = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \rho^{[1]}_{\alpha_{|_1},k} \otimes \cdots \otimes \rho^{[n]}_{\alpha_{|_n},k}$$

根据引理 5，这是一个归一化分解。我们有 $\mathrm{tr}(\rho^{[i]}_{\beta},_k) = 1$ 对于每个 $i \in \{1,\ldots,n-1\}$，并且 $\mathrm{tr}(\rho^{[n]}_{\beta\,k},) \leq \mathrm{tr}(\rho) + C$ 对于 C 的某个适当选择，这是由于 $\rho_k \to \rho$的收敛性。因此，每个张量因子都是一个有界序列，并且具有一个收敛子列 $\rho^{[i]}_{\beta},_{k_\ell} \to \rho^{[i]}_{\beta}$ 对于 $\ell \to \infty$ 这是由于定理 22。由于$\rho_k \to \rho$，我们有

$$\rho = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}^{\widetilde{\mathcal{F}}}} \rho^{[1]}_{\alpha_{|_1}} \otimes \cdots \otimes \rho^{[n]}_{\alpha_{|_n}}$$

这表明 sep-rank$(\rho) \leq r$。 □

H.3 树上的纯化秩与半正定秩

我们将在此证明，对于每棵树 Ω，无论是 psd Ω-分解还是 Ω-纯化，都不会在秩与边界秩之间产生间隙。证明策略与其他不存在间隙的情形类似：我们利用存在具有相同表达能力的有界分解这一事实，然后应用博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理。在此情形下，我们还要利用与关联场景的对应关系（定理 31）以及定理 36。

定理 39。 设 Ω 是一棵树。那么，半正定秩$_\Omega$ =半正定秩$_\Omega$ 以及 纯化秩$_\Omega$ =纯化秩$_\Omega$。

证明。我们仅证明纯化秩$_\Omega$ 的情形，因为半正定秩$_\Omega$ 的情形类似。设 $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一列半正定矩阵，使得纯化秩$_\Omega$ $(\rho_k) \leq r$ 且 $\rho_k \to \rho$。为证明纯化秩$_\Omega(\rho) \leq r$，根据定理 31，存在一列量子态 $|\psi_k\rangle$，满足秩$_\Omega(|\psi_k\rangle) \leq r$，以及一列量子信道 $\mathrm{E}^{(k)}_i$，对每个 $i \in [n]$ 均满足

$$\rho_k = \left(\mathcal{E}^{(k)}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{(k)}_n\right)(|\psi_k\rangle\langle\psi_k|).$$

由于量子态空间是紧的（我们有 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ 对每个 $|\psi\rangle$均成立），并且根据引理 23，完全正迹保持映射空间是紧的，因此存在一个联合子序列 k_ℓ，使得 $\mathcal{E}_i :=$ 极限$_{\ell\to\infty}\mathcal{E}^{(k_\ell)}{}_i$ 且$|\psi\rangle :=$ 极限$_{\ell\to\infty}|\psi_{k_\ell}\rangle$，这意味着

$$\rho = (\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n)(|\psi\rangle\langle\psi|).$$

由于秩$_\Omega$ = 秩$_\Omega$，我们有秩$_\Omega(|\psi\rangle) \leq r$，这证明了纯化秩$_\Omega(\rho) \leq r$。

半正定秩的证明同样使用定理29 以及以下事实：根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，POVM 的每个序列都有一个收敛子列，且该子列收敛到一个 POVM。 □