arXiv:2304.13482v1 [math.QA] 26 Apr 2023

代数型量子群与对偶性 II 带正积分的乘子 Hopf * 代数

A. Van Daele (*)

摘要

在论文《代数型量子群与对偶性 I》 [22], 中，我们考察正则乘子 Hopf 代数 A 和 B 之间的配对（a，b） $\mapsto \langle a, b\rangle$。当 A 存在积分，且当 B 是 A的对偶时，我们可以用乘子代数 $M(B \otimes A)$ 中的一个元素 V来描述这种对偶性；该元素满足以下条件，并由$\langle V$、$a \otimes b\rangle = \langle a$、$b\rangle$ 定义，对所有 a、b 均成立。对偶对的性质可通过这个乘子 V 来表述。它以自然的方式作用于 $A \otimes A$，成为典范映射 T，其定义为 $T(a \otimes a') = \Delta(a)(1 \otimes a')$。

在这篇关于该主题的第二篇论文中，我们假设这个配对来自一个乘子 Hopf *-代数具有正积分。在这种情况下，可以利用 A 上的正右积分构造希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。对偶性 V现在作为酉算子作用于希尔伯特空间张量积$\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$上。最终，这使得将代数量子群完备化为局部紧量子群成为可能。

从代数量子群过渡到算子代数完备化的过程已在文献中得到讨论（例如参见 [9]），但由于必须使用左希尔伯特代数，该构造相当复杂。

本文提出一种全面而简洁、且相对简单的方法。它可视为通往更复杂的局部紧量子群理论的跳板。

日期：2023年4月26日

（*）数学系，鲁汶大学，Celestijnenlaan 200B，B-3001 Heverlee（比利时）。电子邮箱：alfons.vandaele@kuleuven.be

0. 引言

在该主题的第一篇论文的引言中 [22] ，我们从考察一对有限维 Hopf代数 A 和 B （定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上）开始，并考虑它们之间的非退化配对 $(a,b) \mapsto \langle a,b\rangle$ ，该配对定义在从笛卡尔积 $A \times B$ 到 $\mathbb{C}$的映射上。假设 A 中的乘法诱导出 B 上的余乘法，反之亦然。许多信息都通过对偶性 V来编码，该对偶性在 $B \otimes A$中定义为 $\langle V, a \otimes b\rangle = \langle a,b\rangle$ ，其中 $a \in A$且 $b \in B$。

我们在 [22] 中安排了一些导论章节，回顾乘子Hopf代数、带积分的乘子Hopf代数以及它们的对偶性的基本概念和性质。我们简要讨论了正则乘子 Hopf 代数 A、B （如 [3] 中所述）更一般的配对，但主要研究的是一对乘子 Hopf 代数，其中 A 实际上是带积分的正则乘子 Hopf 代数，而 B 是带积分的对偶正则乘子 Hopf 代数。在这种情况下，对偶性 V 最终属于 $B \otimes A$ 的乘子代数 M（$B \otimes A$）。同样，一些关于 V 的结果虽然是在有限维情形下证明的，在这里仍然成立。

本文研究带正积分的乘子 Hopf *-代数情形。对于这类乘子 Hopf *-代数，我们现在将使用（*-）代数量子群这一术语。

论文内容

在第 1 节中，我们回顾带有正积分的乘子 Hopf *-代数的一些基本性质。特别地，我们讨论其解析性质及其推论。其中一个重要结论是，缩放常数 τ 实际上是平凡的；它由 $\varphi \circ S^2 = \tau\varphi$ 定义，其中 φ 是左积分， S 是反元。因此，当且仅当存在正左积分时，才存在正右积分。

此外，在本节中，我们讨论第一篇论文中已经研究过的傅里叶变换，参见 [22], 的第 2 节，并证明 Plancherel公式的一个类似结论。

在第 2 节以及随后直到第4节的内容中，我们详细描述如何将一个代数量子群（A， Δ）完备化为 Kustermans 和 Vaes 意义下的局部紧量子群（[6, 7, 8]）。
我们在第 2 节中从正右积分出发，通过 GNS构造开始这一过程。我们在希尔伯特空间层面得到对偶性 V ，并得到显然的冯·诺伊曼代数 M，它包含作为稠密 *-子代数的 A ，并在 M 上带有一个余乘法 Δ ，该余乘法扩展了原有的余乘法。
这一过程中较为困难的部分是找出 Haar 权，将积分延拓，并证明它们确实是不变权，从而使 (M,Δ) 成为一个局部紧量子群。为此需要用到左希尔伯特代数理论中的一些技术和结果。这在第 3 节中完成。我们首先将右积分完备化为右 Haar 权。

我们附有一个附录，介绍有关左希尔伯特代数及其相关权构造的最重要概念和结果，见附录 A。本附录略去了较为技术性的证明，但这些证明收集在另一个附录，即附录 B 中。

在第 3 节中，我们还需要模元 δ 的平方根。它用于构造左 Haar 权。至此，由一个代数量子群得到的局部紧量子群的构造便完成了。

在本系列的第三篇论文中， [23] 我们将更深入地研究代数量子群的解析结构，并以希尔伯特空间算子的形式获得模自同构 σ 和 σ' 等各种对象，以及我们已经在 [22] 中发现的一些关系，并将其表述为优美的算子代数形式。

在第4节中，我们研究对偶。在这种情况下，我们比较两种可能的方法。一种方法$\widehat{}$是采用先前的过程，按照代数量子群的意义构造 A 的对偶 A 。另一种方法是按照局部紧量子群的意义，使用局部紧量子群对偶的构造。我们证明，正如预期的那样，这两种方法得到的是同一个对偶局部紧量子群。

在最后一节，即第5节中，我们总结了一些结论，并讨论了可能的进一步研究方向。

动机

本注记中讨论的内容已在早期论文中得到研究，首先是在 [9] 中，之后部分也在 [2]中。然而，此处所采用的方法，尤其是与第一篇论文 [9], 相比，更为简单直接。我们需要左希尔伯特代数的一些结果以及其与正规半有限权之间的关系，但我们会尽量利用必须使用这些结果的具体情形。增加一个关于与左希尔伯特代数相关的正规半有限权的构造的附录，应当能让读者更容易理解这些内容。

记号和约定

我们只研究 $\mathbb{C}$上的 *-代数。 *-代数 A 上的线性泛函 ω 称为正泛函，如果对于所有 $a \in A$都有 $\omega(a^*a) \geq 0$ 。如果只有当 $a = 0$时才有 $\omega(a^*a) = 0$ ，则称其为忠实的。
我们在各种情况下使用张量积符号。当我们有一个 *-代数 A （没有任何拓扑）时， $A \otimes A$ 表示代数张量积。它以一种自然的方式再次成为一个 *-代数。当我们有一个 C^*-代数 P 时，我们考虑最小 C^*-张量积 $P \otimes P$ ；而当我们有一个冯·诺伊曼代数 M时，我们考虑冯·诺伊曼代数张量积 $M \otimes M$。最后，当 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间时，$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 表示希尔伯特空间张量积。根据上下文，所使用的类型应当始终是明确的。如果不明确，我们将对此作出明确说明。

对于一个作用在 a *-代数 A （没有拓扑）上的余乘法 Δ ，按照我们在本理论中的用法，我们假设 $\Delta(a)(1 \otimes a')$ 和 $(a \otimes 1)\Delta(a')$ 对所有 a、 $a' \in A$ 都属于 $A \otimes A$ 。对于算子代数、C*-代数或冯·诺伊曼代数上的余乘法，则不存在这样的限制。在第 2 节中，我们将回顾这两种情况下余乘法的概念。

我们有时会对余乘法使用Sweedler记号。关于这一点的更多信息，请参阅第一部分引言中的“记号和约定”条目 [22] 。
最后，为了避免使用过多不同的记号、下标等，我们对不同的对象使用相同的符号。我们相信这不会造成混淆。无论如何，只要存在任何可能的疑问，我们都会作出更明确的说明。

关于约定的更多说明

众所周知，这一理论中采用了不同的约定。粗略地说，主要有两种基本类型。纯代数处理与算子代数版本之间存在差异。但即使在算子代数方法内部，也采用了不同的约定。这非常令人遗憾，因为这有时会使比较各种公式变得困难。于是它们看起来都会略有不同。此外，还没有一种系统词典可以将一种约定转换为另一种约定。

在纯代数理论中，对偶代数 B 上的余乘法满足 $\langle a \otimes a', \Delta(b)\rangle = \langle aa', b\rangle$ ，其中 $a, a' \in A$ 且 $b \in B$。另一方面，在算子代数方法中（例如局部紧量子群理论），通常采用对偶上的翻转

余乘法，也就是说，假设 $\langle a \otimes a', \Delta(b) \rangle = \langle a'a, b \rangle$，其中 $a, a' \in A$ 且 $b \in B$（只要这样的公式有意义）。
在本文中，我们始终采用代数约定，即使最终在第 2 节构造局部紧量子群时也是如此。

另一个差异主要只会在算子代数方法中遇到。本质上，在一种情况下，对偶性被视为一个酉算子，因为我们使用右积分，即右正则表示来构造它；而在另一种情况下，对偶性是我们从左积分得到的酉算子（通过应用傅里叶变换，然后交换 A 与对偶$\frown A$的角色，也就是左正则表示）。

在本文中，我们将使用右正则表示，并尝试解释为什么这是更好且更自然的选择。我们也请读者参阅第5节中关于这一问题的早先讨论。
最后，同样是在局部紧量子群理论中，不同作者对于反元的极分解采用了不同的约定。我们将在 [23] 引入这一分解时对此进行解释。随后，我们将说明我们采用两种选择中的哪一种，以及这样做的原因。

我们在 [21] 中也对这些不同的约定进行了类似的讨论。

基本参考文献

关于 Hopf代数理论，我们参阅 Abe [1] 和 Sweedler [12] 撰写的著名著作。另请参阅 Radford [11] 较新的研究成果。关于乘子Hopf代数的原始研究见 [16]，而关于带积分的乘子Hopf代数，则见 [17]。关于在乘子Hopf代数中使用 Sweedler记号，已有文献（例如 [18]）对此作了解释，最近的 [24] 也进行了说明。

乘子Hopf代数的配对最早在 [3] 中进行了研究。乘子Hopf代数的作用见 [4]。

局部紧量子群已由多位作者进行研究，并且也存在不同的方法。这里我们主要参考 [7] 和 [8]。关于该理论一种略为简化的处理方法，另请参阅 [19]。同时建议读者参阅较新的综述文章 [21]。

对于由代数量子群产生的局部紧量子群，首先应考虑的论文是 [9]。相关内容是代数量子群的解析结构，见 [5]。较新的处理见 [2]。

致谢

我非常感谢 M.B. Landstad 以及其他同事和朋友，包括特隆赫姆大学和奥斯陆大学的同事和朋友（这些笔记有一部分就是在那里完成的），感谢他们在我定期访问这些系所期间营造了友好而富有成效的氛围。

1. 具有正积分的乘子 Hopf *-代数

在前一篇论文 [22] 中，我们汇集了一些关于具有积分的正则乘子 Hopf 代数的公式和结果。在本文的第一节中，我们补充讨论这些乘子 Hopf 代数为乘子 Hopf *-代数的情形。我们主要研究正积分，但一开始并不作此要求。

以下是一个含有积分、但不含正积分的例子。

1.1. 例 设 λ 是一个不等于 1 和 -1 的单位根复数。设 n 是满足 $\lambda^{2n} = 1$ 的最小自然数。考虑由自伴元素 a、b 生成的幺 $*$-代数，其中

$$a \text{ is invertible}, \qquad b^n = 0, \qquad ab = \lambda ba.$$

注意，这三个条件与元素 a 和 b 的自伴性并不冲突。第三个条件成立，是因为 λ 的模为 1。

这个代数是一个 Hopf $*$-代数，其余乘法由下式确定：

$$\Delta(a) = a \otimes a \qquad \text{and} \qquad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes a^{-1}.$$

参见 [17] 中的命题 5.6。[17] 中的命题 5.8 表明，这个 Hopf $*$-代数有积分。由于这些积分在 1 中为 0，因此无法将它们选为正的。

注意，b 是自伴的，且 $b^n = 0$。这在算子代数中不可能发生。

我们可以添加条件 $a^{2n} = 1$，因为它与 $ab = \lambda ba$ 相容，这是因为 $\lambda^{2n} = 1$。这样便得到一个有限维例子。参见 [15] 中的第 3 节。

接下来我们断言，只要存在积分，就总存在自伴积分。对于 A 上由 $\overline{\omega}(a) = \omega(a)$ 给出的泛函，我们记作 $\overline{\omega}$；其中 ω 是 $*$-代数 A 上的线性泛函。

1.2. 命题 设 φ 为左积分，则 $\overline{\varphi}$ 也是左积分，并且 $\varphi + \overline{\varphi}$ 是自伴的左积分。

证明：对于所有的 $a \in A$，我们有 $\Delta(a^*) = \Delta(a)^*$，因为假设 Δ 是一个 $*$-映射。如果我们在第二个分量上应用φ，则得到

$$\varphi(a^*)1 = (\iota \otimes \varphi)(\Delta(a)^*) = ((\iota \otimes \overline{\varphi})(a))^*$$

因此 $(\iota \otimes \overline{\varphi})(a) = \overline{\varphi}(a)1$，因为 $1^* = 1$。 □

备注，根据左积分的唯一性，我们将有 $\overline{\varphi}$ 和 $\varphi + \overline{\varphi}$ 都是原左积分 φ的标量倍。

接下来假设 φ 是正左积分。现在我们有如下结果。回顾一下，缩放常数由 $\varphi \circ S^2 = \tau\varphi$定义。

1.3. 命题 定义为 $\varphi \circ S$的右积分 ψ是自伴的，当且仅当缩放常数 τ 等于 1。

证明：对于所有 $a \in A$，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(a) &= \psi(a^*)^- = \varphi(S(a^*))^- \\ &= \varphi(S^{-1}(a)^*)^- = \varphi(S^{-1}(a)) \\ &= \tau^{-1}\varphi(S(a)) = \tau^{-1}\psi(a).\end{aligned}$$

我们使用 $\overline{\lambda}$ 表示复数 λ 的复共轭，并使用 λ^- 作为 $\overline{\lambda}$的简写记号。因此 $\overline{\psi} = \tau^{-1}\psi$。这就推出了该结果 □

可以证明，对于代数量子群，当 φ 是正左积分时， $\varphi \circ S$ 也仍然为正。这个结果并不显然，而且曾有一段时间是一个悬而未决的问题。该结果首次在 [2] 中得到证明。作为前一个命题的推论，缩放常数必须为 1。

我们将简要证明这些重要结果。不过，我们首先要为在 [22] 中获得的公式集合补充一些公式，这些公式适用于带有积分（不一定为正）的乘子 Hopf *-代数。

对合情形中的一些基本公式

由反元的唯一性可知， $a \mapsto S(a)^*$ 是对合的，即对于所有 a，都有 $S(S(a)^*)^* = a$。我们还得到，对于所有 a、a'，有 $S(aa')^* = S(a)^* S(a')^*$ 。
接下来介绍在带有积分（不一定为正）的乘子 Hopf *-代数情形下其他对象的一些性质，这些性质相对容易获得。

1.4. 命题 设 (A, Δ) 是一个带有积分的乘子 Hopf *-代数。那么，我们得到相关对象的以下性质。

i）缩放常数 τ 的模必须为 1。ii）模元 δ 是自伴的。iii）对于分别对应于左积分和右积分的模自同构 σ 和 σ' ，对所有 $a \in A$ ，有

$$\sigma(a^*) = \sigma^{-1}(a)^* \qquad \text{and} \qquad \sigma'(a^*) = \sigma'^{-1}(a)^*. \tag{1.1}$$

证明：为证明这些结果，我们需要处理自伴积分。正如我们在命题 1.2 中所见，只要存在积分，它们总是存在。

i) 现在取一个自伴左积分 φ。根据缩放常数的定义，我们有$\varphi(S^2(a)) = \tau\varphi(a)$（参见 [22]中的命题 A.3）。取复共轭，并利用 φ 是自伴的以及 $S^2(a)^* = S^{-2}(a^*)$。于是，对于所有 a，我们得到 $\varphi(S^{-2}(a^*)) = \overline{\tau}\varphi(a^*)$。由此可得$\tau^{-1} = \overline{\tau}$，进而得到 $|\tau| = 1$。

ii) 对在 [22], 中的命题 1.6 中得到的等式 $(\varphi \otimes \iota)\Delta(a) = \varphi(a)\delta$ 两边取伴随，我们得到 $\delta^* = \delta$。

iii) 如果我们取自伴积分，公式 (1.1) 也是 [22] 中命题 1.7 关于模自同构的定义公式的直接推论。

□

请注意，项目 iii) 中的等式 (1.1) 将意味着，例如， [22] 中命题 1.9 的两个等式可以相互推出。事实上，可以验证，我们在 [22] 第 1 节中得到的公式与上述命题中的公式是一致的。

存在正左积分时的更多性质

从现在开始，我们 假设 (A, Δ) 是一个具有正左积分 φ 的乘子 Hopf *-代数 .
可以证明， δ 必须是 $M(A)$ 中的正元素。以下命题对此进行了说明。在这里，如果 A 中的元素可表示为某个 a 的 a^*a ，则称其为正元素。

1.5. 命题 对于所有 a，元素 $a^*\delta a$ 是 A 中的正元素。

证明：任取 b，属于 A，并写作 $\Delta(b)(1\otimes a) = \sum_i q_i \otimes p_i$。于是

$$(1\otimes a^*)\Delta(b^*b)(1\otimes a) = \sum_{i,j} q_i^* q_j \otimes p_i^* p_j$$

并且，如果我们将 φ 作用于第一腿，就得到（利用 [22] 的命题 1.6）

$$\varphi(b^*b)a^*\delta a = \sum_{i,j} \varphi(q_i^* q_j) p_i^* p_j$$

由于 φ 是正的，我们得到一个元素为 $\varphi(q_i^* q_j)$ 的正矩阵。我们可以将其对角化，最终得到形如 $\varphi(b^*b)a^*\delta a = c^*c$ 的等式，其中 c 是元素 (p_i) 的线性组合。

□

虽然这是意料之中的，但也不清楚 δ^{-1} 是否为正。不过，稍后确实会证明这一点。我们可以用右积分重复上述论证，但那样就需要预先知道右积分也为正。

现在我们继续论证情况确实如此。
首先，我们证明以下结果。证明受到 [2] 中论证的启发（例如，参见 [2] 中的命题 2.8）。

1.6. 命题 设 (A,Δ) 是一个带有正左积分 φ 的乘子 Hopf *-代数。那么，对所有元素 $a\in A$，都存在一个有限维子空间，其中包含元素 $\delta^n a$ 和 $a\delta^n$，且 $n\in\mathbb{Z}$。

证明：i) 令 $a, b\in A$，并假设 $b\neq 0$。我们将 $a\otimes b^*b$ 写成有限和

$$a\otimes b^*b = \sum_i \Delta(p_i)(q_i\otimes 1)$$

其中 (p_i) 和 (q_i) 是 A 中的元素。用 $\delta^n\otimes\delta^n$ 从左侧相乘，并利用 $\Delta(\delta) = \delta\otimes\delta$（参见 [22]中的命题 1.6）。我们得到

$$\delta^n a\otimes \delta^n b^*b = \sum_i \Delta(\delta^n p_i)(q_i\otimes 1)$$

对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 均成立。现在在此方程的第二个张量因子上应用左积分 φ。可得

$$\varphi(\delta^n b^*b)\delta^n a = \sum_i \varphi(\delta^n p_i) q_i. \tag{1.2}$$

若 $n=2m$ 对于 $m\in\mathbb{Z}$ 成立，则有

$$\varphi(\delta^n b^*b) = \varphi(\delta^{2m} b^*b) = \varphi(\delta^m b^* b\sigma(\delta^m)) = \tau^{-m}\varphi(\delta^m b^* b\delta^m).$$

这里用到了 $\sigma(\delta) = \tau^{-1}\delta$，参见 [22]中的命题 1.9。

由于 $\delta^* = \delta$，由 φ 的忠实性可知，只有当 $b\delta^m = 0$ 时，这才可能等于 0。然而，根据假设 $b\neq 0$，因此 $\varphi(\delta^n b^*b)\neq 0$，至少当 n 为偶数时如此。于是由方程 1.2 可知，$\delta^n a$ 属于由元素 (q_i) 张成的空间，至少当 n 为偶数时如此。

ii）如果我们将此应用于 a 以及 δa，就得到 $\delta^n a$ 属于 A 的一个有限维子空间。类似地，或者通过取伴随，我们得到一个包含所有元素 $a\delta^n$ 的有限维空间。

□

下面的结论可以直接得到。

1.7. 命题 设 (A,Δ) 是一个带有正积分的乘子 Hopf *-代数。则 A 由同时作为 δ 的左乘法和右乘法特征向量的元素张成。此外，所有特征值都是正的。

证明：i) 固定 a 于 A 中，并令 L 为由满足 $n\in\mathbb{Z}$ 的元素 $\delta^n a$ 张成的空间。该空间在用 δ 从左侧进行乘法运算下保持不变。在 L 上定义标量积为 $\langle x',x\rangle=\varphi(x^*x')$。由于 δ 是自伴的，它在这个有限维内积空间上作为自伴算子作用。它可以被对角化，且特征值为实数。事实上，由于 $a^*\delta a$ 是正的，这些特征值必定为正。

ii) 对于用 δ 进行右乘法，我们也有相同的性质。结果可以用类似的方式得到，或者通过取伴随算子得到。

iii) 由于 δ 的左乘法与右乘法相互对易，我们可以得到同时作为左乘法和右乘法特征向量的向量。 □

现在使用这一结果。参见 [2]中的定理 3.4。

1.8. 命题 若 (A,Δ) 是一个带有正积分的乘子 Hopf *-代数，则缩放常数 τ 等于 1。

证明：取任意满足以下性质的非零元素 a：对于某个 $\lambda\in\mathbb{R}$，有 $\delta a=\lambda a$。我们已经看到，根据前一个引理，这样的元素确实存在。于是

$$\begin{aligned}\lambda\varphi(aa^*)&=\varphi(\delta aa^*)=\varphi(aa^*\sigma(\delta))\\&=\tau^{-1}\varphi(aa^*\delta)=\tau^{-1}\varphi(a(\delta a)^*)\\&=\tau^{-1}\lambda\varphi(aa^*).\end{aligned}$$

这意味着 $\tau=1$。 □

也可以如下论证。由于 $\sigma(\delta)=\tau^{-1}\delta$（参见 [22]中的命题 1.9），我们有 $\sigma(\delta a)=\tau^{-1}\delta\sigma(a)$。由于关于 δ 的左乘法的所有特征值都必须为正，我们需要 τ 为正。但我们已经知道它的模为 1，因此 $\tau=1$。

现在证明当 φ 为正时，$\varphi\circ S$ 也是正的。参见 [2] 中的推论 3.6。

1.9. 定理 设 (A,Δ) 是具有正左积分 φ 的乘子 Hopf *-代数。则 $\varphi\circ S$ 是正右积分。

证明：取元素 a，将其写成和式 $\sum_i a_i$，其中 a_i 是满足条件 $a_i\delta=\lambda_i a_i$ 的元素，且对于某个 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 成立。这是因为命题 1.6 而成为可能。我们假设所有这些特征值彼此不同。对于所有 j、k，可得

$$\varphi(a_j^*a_k\delta)=\lambda_k\varphi(a_j^*a_k)\qquad\text{and}\qquad\varphi(\delta a_j^*a_k)=\lambda_j\varphi(a_j^*a_k).$$

这两个表达式与 $\sigma(\delta)=\delta$ 相同。如果 $j\neq k$，则有 $\lambda_j\neq\lambda_k$，从而得到 $\varphi(a_j^*a_k)=0$。

Then

$$\varphi(a^*a\delta)=\sum_{j,k}\lambda_k\varphi(a_j^*a_k)=\sum_k\lambda_k\varphi(a_k^*a_k).$$

这是正的，因为对于所有 k，λ_k 和 $\varphi(a_k^*a_k)$ 都是正的。

由于 $\varphi(S(a))=\varphi(a\delta)$，结论得证。 □

正如我们所看到的，这也意味着缩放常数为 1。然而，我们不能使用这一论证，因为在证明中，我们已经使用了缩放常数为 1 这一事实。

代数量子群的解析结构

Kustermansin [5] 证明了，映射 S^2、 σ、 σ' 以及与δ 的左乘法和右乘法都具有解析延拓。

可以采用命题 1.6 的证明中所给出的类似论证，以更简单的方式得到这类结果。参见 [2]中的第 3 节。特别地， [2]中有定理 3.5：

1.10. 定理 设 (A, Δ) 是一个具有正积分的乘子 Hopf *-代数。那么， A 由同时作为 S^2、 σ、 σ' 以及对 δ的左乘法和右乘法的特征向量的元素张成。此外，所有特征值都严格为正。

我们已经在命题 1.8 中证明了这一结果的一部分。关于另一部分的证明，请参见 [23] 中的第 2 节，在那里我们将进一步讨论 *-代数量子群的解析结构。这里不需要用到这一点。

我们将在此使用命题 1.8 的结果，为我们在定理 1.9 中得到的右积分 $\varphi \circ S$ 的正性提供另一种论证。这一结果也见于 [2] 的第 3 节。在构造左 Haar 权时，第 4 节也将需要以下结果。

1.11. 命题 存在一个自伴乘子 γ ，属于 $M(A)$，满足 $\gamma^2 = \delta$。如果要求它为正，则满足此性质的元素是唯一的。在此情况下，我们有$\sigma(\gamma) = \gamma$。

证明：我们定义乘子 γ 为

$$\gamma a = \lambda^{\frac{1}{2}} a \text{ if } a \in A \text{ and } \delta a = \lambda a$$
$$a\gamma = a\lambda^{\frac{1}{2}} \text{ if } a \in A \text{ and } a\delta = \lambda a.$$

可以验证，这在 $M(A)$ 中是良定义的。为此，我们利用 A 中的任意元素都是特征向量之和这一事实。
现在假设 $\sum_i a_i = 0$ ，其中对于每个 i ，都有 $\delta a_i = \lambda_i a_i$ ，这里 λ_i 是某个实数。假设所有这些特征值彼此不同。对于由 φ 诱导的标量积，我们有元素 a_i 彼此正交。因此，对于所有 i，都有 $a_i = 0$。于是还有 $\sum_i \lambda^{\frac{1}{2}} a_i = 0$。这意味着我们可以定义映射 $a \mapsto \gamma a$。另一个映射也同理。

我们有一个 A 的乘子，因为 $a'(\gamma a) = (a'\gamma)a$ 对所有特征向量都成立，因此对所有元素a, a'也成立。

显然， $\gamma^2 = \delta$ ，而且它是满足这一性质且具有正特征值的唯一元素。

最后，由唯一性以及因为 $\sigma(\delta) = \delta$，还可得出 $\sigma(\gamma) = \gamma$.

□

我们将这个元素 γ 记作 $\delta^{\frac{1}{2}}$。

事实上，对于任意复数 z ，我们都可以这样定义 δ^z 。并且对于所有 z、 $z' \in \mathbb{C}$，我们得到 $\delta^z \delta^{z'} = \delta^{z+z'}$ 。此外，当 $z = 1$ 时，我们得到原来的乘子 δ ；而当 $z = \frac{1}{2}$ 时，我们得到该命题的乘子 γ 。

这个结果可以用来给出定理 1.9 的另一个证明。事实上，我们有

$$\varphi(S(a)) = \varphi(a\delta) = \varphi(\delta^{\frac{1}{2}} a \delta^{\frac{1}{2}})$$

对所有 a。由于假设 φ 是正的，且 $\delta^{\frac{1}{2}}$ 是自伴的，因此我们也得到 $\varphi \circ S$ 是正的。这正是 [2]中推论 3.6 的证明所给出的论证。

对偶与傅里叶变换

我们已在 [22]的第 2 节中考察了带有积分的乘子 Hopf 代数的对偶。对于带有积分的乘子 Hopf *代数，其对偶仍是乘子 Hopf *代数，如果我们对 $b \in A$ 定义 b^* 如下：

$$\langle a, b^* \rangle = \langle S(a)^*, b \rangle^-.$$

如果 A 上的左积分 φ 是正的，那么按照[22], 中命题 2.1 的方式在 A 上定义的右积分 ψ仍然是正的。 [17]中的命题 4.8 已经得到了这一结果。下面我们给出该结果的证明。

在 [22], 的第 2 节中，我们给出了从 A 到 A的两种形式的傅里叶变换。一方面，有映射 $a \mapsto \varphi(\cdot a)$，如 [22]中的命题 2.6 所述。另一方面，我们有 $a \mapsto \psi(S(\cdot)a)$，如 [22]中的命题 2.7 所述。

如下一条命题所示，它们与对合结构相容性良好。

1.12. 命题 i) 如果 $b = \varphi(\cdot a)$，则定义 $\psi(b) = \varepsilon(a)$。再次当 $b = \varphi(\cdot a)$ 时，有 $\psi(b^*b) = \varphi(a^*a)$。

ii) 当 $b = \psi(S(\cdot)a)$ 对于 $a \in A$ 成立时，定义 $\widehat{\varphi}(b) = \varepsilon(a)$。再次当 $b = \psi(S(\cdot)a)$ 对于 $a \in A$ 成立时，有 $\widehat{\varphi}(b^*b) = \psi(a^*a)$。

证明：i) 取 $a \in A$ 并定义 $b = \varphi(\cdot a)$。取 $c \in A$。于是

$$\begin{aligned}
\langle c, b^*b \rangle &= \sum_{(c)} \langle c_{(1)}, b^* \rangle \langle c_{(2)}, b \rangle \\
&= \sum_{(c)} \langle c_{(1)}, b^* \rangle \varphi(c_{(2)} a) \\
&= \sum_{(a)} \langle S^{-1}(a_{(1)}), b^* \rangle \varphi(c a_{(2)}).
\end{aligned}$$

我们使用了 $(\iota \otimes \varphi)(1 \otimes c)\Delta(a)) = S((\iota \otimes \varphi)(\Delta(c)(1 \otimes a)))$（参见 [22] 中命题 1.1 的方程 (1.2)）。根据 ψ 的定义，我们得到

$$\widehat{\psi}(b^*b) = \sum_{(a)} \langle S^{-1}(a_{(1)}), b^* \rangle \varepsilon(a_{(2)}) = \langle S^{-1}(a), b^* \rangle = \langle a^*, b \rangle^-.$$

这证明了 $\psi(b^*b) = \varphi(a^*a)$。

ii) 取 $a \in A$，并定义 $b = \psi(S(\cdot)a)$。取 $c \in A$。于是

$$\begin{aligned}\langle c, b^*b\rangle &= \sum_{(c)} \langle c_{(1)}, b^*\rangle \langle c_{(2)}, b\rangle \\ &= \sum_{(c)} \langle c_{(1)}, b^*\rangle \psi(S(c_{(2)})a) \\ &= \sum_{(Sc)} \langle S^{-1}((Sc)_{(2)}), b^*\rangle \psi((Sc)_{(1)}a) \\ &= \sum_{(a)} \langle S^{-1}(S(a_{(2)}), b^*\rangle \psi(S(c)a_{(1)}) \\ &= \sum_{(a)} \langle (a_{(2)}, b^*\rangle \psi(S(c)a_{(1)}).\end{aligned}$$

我们在 [22]的命题 1.1 中使用了公式 1.3

$$S((\psi \otimes \iota)((c' \otimes 1)\Delta(a))) = (\psi \otimes \iota)(\Delta(c')(a \otimes 1))$$

对 $c' = S(c)$。于是我们得到

$$b^*b = \sum_{(a)} \langle (a_{(2)}, b^*\rangle \psi(S(\cdot)a_{(1)}).$$

and

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(b^*b) &= \sum_{(a)} \langle (a_{(2)}, b^*\rangle \varepsilon(a_{(1)}) \\ &= \langle a, b^*\rangle = \langle S(a)^*, b\rangle^- \\ &= \psi(S(S(a)^*)a)^- = \psi(a^*a)^-.\end{aligned}$$

这证明了这里同样有 $\widehat{\varphi}(b^*b) = \psi(a^*a)$。 □

从这些结果可以看出，如果 A 上存在正左积分，那么其对偶 B 上就存在正右积分。如果 A 上存在正右积分，那么 B 上也存在正左积分。根据前面的结果可知，只要 A 上存在正左积分，那么 A 和 B 上就都存在正左积分和正右积分。

1.13. 备注 事实上，我们没有必要证明前一个命题的第二部分。根据对偶性，这一部分可以推出，因为映射 $a \mapsto \varphi(\cdot a))$ 的逆映射是映射 $b \mapsto \psi(S(\ \cdot)a)$（见 [22]的命题 2.6），而且 $a \mapsto \psi(S(\cdot)a)$ 的逆映射也是 $b \mapsto \widehat{\varphi}(\cdot b)$（见 [22]中的命题 2.7）。

2. 相关的局部紧量子群

在 [22] 中，我们从一对乘子Hopf代数的对偶对开始。我们考察了由配对诱导的海森堡对易关系，并研究了海森堡代数。随后，我们很快转向由带有积分的正则乘子 Hopf 代数 A 所产生的更具限制性的情形。取$\frown$ $\frown A$ 作为 B 的对偶，并且对偶性是 A 与其对偶 A之间的自然对偶性。在这种情况下，对偶性是乘子代数 $M(B \otimes A)$中的一个可逆元 V，具有反映该对偶性的良好性质。

在这里，我们假设乘子 Hopf 代数 A 是一个乘子 Hopf *-代数，具有积分 $\widehat{\ }$，并且这些积分是正的。我们知道，其对偶 A 再次是一个具有正积分的乘子 Hopf *-代数。这两个代数之间的自然对偶性提供了一对乘子 Hopf *代数。事实上，我们有如下结果。

2.1. 命题 具有正积分的乘子 Hopf *代数 A 与其$\widehat{\ }$对偶 A 之间的配对，是按照 [3]中的定义 2.8 对乘子 Hopf *代数的配对。

该结果在 [3] 中有所提及，但没有给出详细证明。在 [22] 的命题 3.7 中，我们针对具有积分的正则乘子 Hopf 代数表述并证明了这一结果。我们参见 [22]中该结果的证明。于是，要完成上述命题的证明，唯一缺少的就是定义对偶上的对合的基本关系。它表明，对于所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，有 $\langle a, \widehat{\ } b^* \rangle = \langle S\ a\ ^*\ b \rangle^-$ ( ) 。事实上，对偶 A上的对合就是这样定义的。

海森堡代数的 *表示

固定 ψ 上的一个正右积分。它是忠实的，因此只有在 $a = 0$时， $\psi(a^*a) = 0$ 才有可能。

2.2. 记号 在 A 上定义标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，其定义为 $\langle a', a \rangle = \psi(a^*a')$，其中 $a, a' \in A$。记 $\mathcal{H}$为关于此标量积的 A 的希尔伯特空间完备化，并令 Λ 为 A 在 $\mathcal{H}$中的典范嵌入。

我们的记号存在一个问题。在这里，我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示标量积，而此前我们一直用它表示 A 与 B 之间的配对。由于对这两种情况使用相同的记号非常自然，我们将继续这样做。根据上下文应当可以清楚地判断我们讨论的是其中哪一种情况。

现在我们考虑 与 ψ 相关联的 A 的 GNS表示，如下述命题所示 n.

2.3. 命题 存在一个非退化的 *表示 π ，它通过 $\mathcal{H}$上的有界算子作用于 A ，由 $\pi(a)\Lambda(x) = \Lambda(ax)$ 给出，其中 $a, x \in A$。

证明：i) 由于右积分是忠实的，典范映射 $\Lambda : A \to \mathcal{H}$ 是单射。因此，$\pi(a)$ 在 $\Lambda(A)$ 上定义良好。

ii) 我们断言， $\pi(a) : \Lambda(x) \mapsto \Lambda(ax)$ 是一个有界算子。为证明这一点，固定 $a \in A$ 并考虑映射

$$\Lambda(x) \mapsto \sum_{(a)} \Lambda(a_{(1)}) \otimes \Lambda(a_{(2)}x) \tag{2.1}$$

从 $\Lambda(A)$ 到 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$。注意到 $\Delta(a)(1 \otimes x)$ 属于 $A \otimes A$，因此该映射定义良好。我们有

$$\begin{aligned} \| \sum_{(a)} \Lambda(a_{(1)}) \otimes \Lambda(a_{(2)}x) \|^2 &= (\psi \otimes \psi)((1 \otimes x^*)\Delta(a)^*\Delta(a)(1 \otimes x)) \\ &= \psi(a^*a)\psi(x^*x) = \psi(a^*a)\|x\|^2. \end{aligned}$$

我们利用了 ψ 是右不变的。这证明了 (2.1) 中的映射是连续的。若在第一因子上与 $\Lambda(a')$ 取标量积，我们还可得出，对于所有 $a, a' \in A$，映射 $\Lambda(x) \mapsto \sum_{(a)} \psi(a'^* a_{(1)})\Lambda(a_{(2)}x)$ 也是连续的。由于 $(A \otimes 1)\Delta(A) = A \otimes A$ ，我们有 A 中的任意元素都是如下形式元素的线性张成

$$\sum_{(a)} \psi(a'^* a_{(1)})a_{(2)}.$$

由此可知，对于所有 $a \in A$， $\Lambda(x) \mapsto \Lambda(ax)$ 都是连续的。

iii) 我们可以将其唯一延拓为作用于整个 $\mathcal{H}$ 上的有界算子。对于这个作用于整个 $\mathcal{H}$ 上的延拓，我们也使用 $\pi(a)$ 表示。

iv) 显然，我们得到一个由有界算子构成的 A 表示。此外，根据定义，我们有 e

$$\langle \Lambda(ax'), \Lambda(x) \rangle = \psi(x^* a x') = \psi((a^* x)^* x') = \langle \Lambda(x'), \Lambda(a^* x) \rangle$$

只要 a、x、$x' \in A$。因此，我们得到一个 * 表示。

v) 该表示是非退化的，因为 $A^2 = A$。 □

读者应注意，上述结果并非自动成立。在某个 * 代数上可能存在忠实正线性泛函，使得相应的GNS表示并不产生有界算子。

在下一个命题中，我们将证明，对偶 *-代数同样可以通过有界算子作用在希尔伯特空间上。这一结果甚至更加不明显。

2.4. 命题 存在一个非退化的 *-表示 γ，它通过有界算子作用在 $\mathcal{H}$ 上的对偶代数 B 上，且给出为

$$\gamma(b)\Lambda(x) = \Lambda(b \triangleright x) = \sum_{(x)} \langle x_{(2)}, b \rangle \Lambda(x_{(1)})$$

其中 $x \in A$ 和 $b \in B$。

证明：i）首先注意，在 $\gamma(b)$ 的定义中，我们使用了 A 与其对偶 B 之间的原始配对。此外，由于元素 $x_{(2)}$ 通过配对被 b 覆盖，对 Sweedler记号的使用也是合理的。因此， $\gamma(b)\Lambda(x)$ 是良定义的。

ii）为了证明定义在 $\Lambda(A)$ 上的 $\gamma(b)$ 是一个有界算子，我们采用与前一个命题的证明类似的方法。取 $a \in A$，现在考虑映射

$$\Lambda(x) \mapsto \sum_{(x)} \Lambda(x_{(1)}) \otimes \Lambda(x_{(2)} a) \tag{2.2}$$

从 $\Lambda(A)$ 到 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$。这里我们利用了 $\Delta(x)(1 \otimes a)$ 属于 $A \otimes A$。如前所述，我们得到

$$\| \sum_{(x)} \Lambda(x_{(1)}) \otimes \Lambda(x_{(2)} a) \|^2 = \psi(a^* a)\psi(x^* x) = \psi(a^* a)\|x\|^2.$$

这表明（2.2）中的映射也是连续的。在这里，我们在第二因子中与 $\Lambda(a')$ 取标量积。我们发现，该映射

$$\Lambda(x) \mapsto \sum_{(x)} \psi(a'^* x_{(2)} a) \Lambda(x_{(1)})$$

对所有 $a, a' \in A$ 也连续。现在我们断言，形如 $\psi(a'^* \cdot a)\,\widehat{}$ 的线性泛函张成整个对偶 A。事实上，

$$\psi(a'^* \cdot a) = \psi(\cdot\, a\sigma'(a'^*))$$

其中 σ' 是 ψ的模自同构。由于 $A^2 = A$，该断言得证。这意味着映射 $\Lambda(x) \mapsto \Lambda(b \triangleright x)$对所有 $b \in B$ 都连续。我们可以将其扩张，并且显然得到 B 在 $\mathcal{H}$ 上的一个有界表示。

iii）我们证明它是一个 *-表示。因此，取 x、$x' \in A$ 和 $b \in B$。于是

$$\begin{aligned}\langle \gamma(b)\Lambda(x'), \Lambda(x)\rangle &= \sum_{(x')} \langle x'_{(2)}, b\rangle \langle \Lambda(x'_{(1)}), \Lambda(x)\rangle \\ &= \sum_{(x')} \langle x'_{(2)}, b\rangle \psi(x^* x'_{(1)}) \\ &= \sum_{(x')} \langle S^{-1}(x^*_{(2)}), b\rangle \psi(x^*_{(1)} x') \\ &= \sum_{(x')} \langle x_{(2)}, b^*\rangle^- \psi(x^*_{(1)} x') \\ &= \langle \Lambda(x'), \gamma(b^*)\Lambda(x)\rangle.\end{aligned}$$

在这一系列等式中，我们对配对和标量积都使用括号表示。我们还使用了以下事实：

$$(\psi \otimes \iota)((a' \otimes 1)\Delta(a)) = S^{-1}((\psi \otimes \iota)(\Delta(a')(a \otimes 1)))$$

对于所有 a、$a' \in A$，参见 [22] 中命题 1.1 的公式 1.3。

iv）最后，由于 B 在 A 上的作用是幺的，因此 $A = B \triangleright A$，我们有 $\gamma(B)\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。因此，B 在 $\mathcal{H}$ 上的 *-表示 π 是非退化的。 □

从第 iii）项的证明可以看出，我们所使用的 [22] 中命题 1.1 的公式 1.3，本质上等价于说 γ 是一个 *-表示。这为对偶空间上的对合定义提供了依据。

这两个代数通过有界算子作用在希尔伯特空间上，这并不令人意外。毕竟，它们是酉算子 V 的两条腿，该酉算子将在下一个命题中定义。

2.5. 命题 映射线性映射 V，定义在 $\Lambda(A) \otimes \Lambda(A)$ 上，满足

$$V : \Lambda(x) \otimes \Lambda(x') \mapsto \sum_{(x)} \Lambda(x_{(1)}) \otimes \Lambda(x_{(2)} x')$$

等距的 映射。它可延拓为希尔伯特空间张量积 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上的酉算子 .

证明：i）与前面命题的证明一样，我们有

$$\begin{aligned}\| \sum_{(x)} \Lambda(x_{(1)}) \otimes \Lambda(x_{(2)} x')\|^2 &= (\psi \otimes \psi)((1 \otimes x'^*)\Delta(x^* x)(1 \otimes x')) \\ &= \psi(x'^* x')\psi(x^* x)\end{aligned}$$

并且我们看到 $\|V(\Lambda(x) \otimes \Lambda(x'))\| = \|\Lambda(x) \otimes \Lambda(x')\|$。这不足以证明 V是等距的，但很容易看出，可以对这类元素求和，论证本质上保持不变。

ii) 由于 $\Delta(A)(1 \otimes A) = A \otimes A$，我们可知 $V(\Lambda(A) \otimes \Lambda(A))$ 在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 中稠密。因此，V 可扩张为该希尔伯特空间张量积上的一个酉算子。 □

命题 2.3 和 2.4 的证明中隐含地用到了这些论证。

我们再次遇到了记号上的歧义。在 [22], 中，我们使用 V 表示对偶性；特别是在 [22], 的命题 3.17中，我们已经证明，它在 $A \otimes A$ 上的作用是典范映射$a \otimes a' \mapsto \Delta(a)(1 \otimes a')$。在前一个命题中，我们是在希尔伯特空间层面上考察这个映射的。这就说明了使用同一符号是合理的。本备注与下一条备注有关。

2.6. 记号 i) A 上的表示 π 以及 B 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的表示 γ 都是忠实的。因此，可以省略对 A 使用 π 以及对 B 使用 γ，让这些代数直接作用在 $\mathcal{H}$上。所以，当 $a \in A$ 和 $b \in B$ 时，对于 $\pi(a)\xi$ 和 $\gamma(b)\xi$，我们分别写作 $a\xi$ 和 $b\xi$，其中 ξ 是 $\mathcal{H}$中的任意向量。当然，在 $\xi = \Lambda(x)$且 $x \in A$ 的情况下，我们有

$$a\Lambda(x) = \Lambda(ax) \qquad \text{and} \qquad b\Lambda(x) = \sum_{(x)} \langle x_{(2)}, b\rangle \Lambda(x_{(1)})$$

对于 $a \in A$ 和 $b \in B$。

ii）按照这一约定，$\Lambda(A) \otimes \Lambda(A)$上的算子 V与典范映射 T中的算子完全相同，正如 [22]中的命题 3.17 所述。

A 的两个 *-表示—— π 和 γ 的 B ——结合起来，给出了希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的海森堡代数 AB 的一个带有有界算子的非退化 *-表示。

在 [22], 中的命题 3.16里，我们已经看到，海森堡代数通过形如 $x \mapsto \langle x、\ b\rangle a$ 的算子作用在 A 上，其中 $a \in A$和 $b \in B$。由于 B中的任意元素都具有 $\psi(a'^* \cdot)$的形式，因此在其于希尔伯特空间上的表示中，我们得到形如 $\xi \mapsto \langle \xi、\ \Lambda(a')\rangle \Lambda(a)$的算子，其中 $a、\ a' \in A$。这些算子是有界秩一算子。注意，并非所有秩一算子都属于这种形式，因为并非 $\mathcal{H}$ 中的所有向量都属于 Λ的值域。然而，由于该值域是稠密的，我们得到以下结果。

2.7. 命题 海森堡代数在该表示中的范数闭包是由所有紧算子构成的 C*-代数，而弱闭包则是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上所有有界算子构成的冯·诺伊曼代数。

A的算子代数完备化上的余乘法

在本条中，我们使用酉算子 V 将余乘法延拓到以下算子代数。

2.8. 记号 我们用 P 表示 A 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上作用时的范数闭包，并用 M 表示 A 的弱闭包。换言之，P 是由 A 在 $\mathcal{H}$ 上生成的 C*-代数，而 M 是由其生成的冯·诺伊曼代数。

在第4节中，我们将考虑与对偶相关的算子代数，它们由 B 在 $\mathcal{H}$ 上作用生成，参见记号4.5。

Δ 在 A 上的余乘法显然可以延拓到 C*-代数 P 和冯·诺伊曼代数 M。在表述这一结果之前，我们先回顾算子代数框架中的两种余乘法概念。

2.9. 定义 i) 设 P 为任意 C*-代数。P 上的余乘法是从 P 到最小 C*-张量积 $P \otimes P$ 的乘子代数 $M(P \otimes P)$ 的非退化 *-同态Δ。它

被假设为余结合的。集合 $\Delta(P)(1 \otimes P)$ 和 $(P \otimes 1)\Delta(P)$ 被认为包含于 $P \otimes P$ 中。

ii) 如果 M 是任意冯·诺伊曼代数，则 M 上的余乘法是一个幺的正规 *-同态$\Delta: M \to M \otimes M$，其中现在考虑的是冯·诺伊曼代数张量积。再次假设它是余结合的。

这些概念在关于局部紧量子群的文献中多处出现。例如参见 [6], [7] 和 [8]。在较新的工作中（参见 [19] 和 [20]），还包含了关于这两个概念的一些讨论。

有了这些定义，现在我们可以表述以下结果。这里，P 再次表示由 A 生成的C*-代数，而 M 表示由 A生成的冯·诺伊曼代数，二者都视为作用在希尔伯特空间上的代数。

2.10. 命题 在 M 上定义 Δ_1 为

$$\Delta_1(x) = V(x \otimes 1)V^*.$$

则 Δ_1 是冯·诺伊曼代数 M 上的余乘法（如定义2.9的ii)所述）。将 Δ_1 限制到 P 所得的映射是该C*-代数上的余乘法（如定义2.9的i)所述）。它扩展了 A上的原余乘法。

证明：i) 如果 a 是 A 中的一个元素，我们知道 $V(a \otimes 1)V^* = \Delta(a)$ 属于 $AB \otimes A$ 的乘子代数。右端属于代数乘子代数 $M(A \otimes A)$。显然，$V(a \otimes 1)V^*$ 在整个 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上都有定义且是有界的。另一方面，$\Delta(a)$ 在形如 $\xi \otimes \Lambda(x)$ 的向量上有定义，因为对于所有 a、$x \in A$，$\Delta(a)(1 \otimes x) \in A \otimes A$。它同样是一个有界算子，并可延拓到整个 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$。

现在我们将这个方程视为 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上的有界算子。于是，对于所有 $a \in A$，$\Delta(a)$ 属于 C*-代数张量积的乘子代数 $M(P \otimes P)$。

此外，由于 C*-代数 P 以非退化方式作用，这个乘子代数是冯·诺依曼张量积 $M \otimes M$的子代数。由连续性可知，对于所有 $x \in M$，$V(x \otimes 1)V^*$ 也将属于 $M \otimes M$。显然，Δ_1 是从 M 到 $M \otimes M$的正规幺 *-同态。M 上的余结合性由 A上 Δ的余结合性通过连续性得到。它也是 V 满足五边形方程的结果。这就证明了该命题的第一个陈述。

ii) 我们刚刚论证了，对于 $x \in A$，$\Delta_1(x) \in M(P \otimes P)$，并且再次由连续性可知，对于 $x \in P$，这仍然成立。由于 $\Delta(A)(1 \otimes A)$ 和 $(A \otimes 1)\Delta(A)$ 等于代数张量积 $A \otimes A$，因此 $\Delta_1(P)(1 \otimes P)$ 和 $(P \otimes 1)\Delta_1(P)$ 将是 C*-张量积 $P \otimes P$ 的子集。这证明了我们确实在 C*-代数 P上得到了一个余乘法。

□

下文中，我们也将用 Δ 表示原余乘法从 A 到 M 的这些延拓，因此也表示到 P 的延拓。

在第4节中，我们将对偶 B 也作同样的处理。

首先，我们将积分扩展为冯·诺伊曼代数 M 上的 Haar 权。这将在下一节中完成。

3. 对 (M, Δ) 上的 Haar 权

在上一节中，我们将余乘法从 A 扩展到了冯·诺伊曼代数 M，该代数由 A 在 A 上的右积分 ψ 的 GNS表示生成。在本节中，我们将 ψ 扩展为 M 上的忠实正规半有限权，并证明它是右 Haar 权。我们利用原代数量子群的更多性质来得到左 Haar 权。所得结果是一个局部紧量子群。

将积分延拓为 C*-代数上的哈尔权以及冯·诺伊曼代数完备化上的哈尔权，可通过左希尔伯特代数理论中的标准技巧来实现。这并非易事，但遗憾的是，似乎无法避开这一理论。

相关内容见 [13] 中第VI章关于左、右希尔伯特代数的第1段。由于我们不需要这一理论的全部内容，并且为了方便不熟悉该理论的读者，我们附上了两个附录，讨论获得后续结果所需的部分。我们主要会引用这两个附录，而非 [13]。附录中还列出了对 [13] 的引用。

以下结果很容易证明。关于左希尔伯特代数的定义，请参见附录 A 中的定义 A.1。

3.1. 命题 空间 $\Lambda(A)$ 是一个左希尔伯特代数 $\mathfrak{A}$，其 *-代数结构继承自 A，并带有给定的标量积。

证明：定义 A.1 中的大多数公理，只是对先前关于 A 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 GNS表示结果的平凡改写，其中 $\mathcal{H}$ 定义为 $\Lambda(A)$ 的完备化。$\mathfrak{A}^2$ 在 $\mathcal{H}$ 中的稠密性，是事实 $A^2 = A$ 的直接结果。

本质上，我们只需证明 $\sharp$-运算是预闭的。为此，取元素 a、$a' \in A$，并写成

$$\langle \Lambda(a^*), \Lambda(a') \rangle = \psi(a'^* a^*) = \psi(a^* \sigma'(a'^*)) \tag{3.1}$$
$$= \langle \Lambda(\sigma'(a'^*)), \Lambda(a) \rangle. \tag{3.2}$$

我们用到了 ψ 的模自同构 σ'。这证明了 $\Lambda(a')$ 属于 $\sharp$-映射的伴随 $\flat$ 的定义域 $\mathcal{D}^\flat$，并且

$$(\Lambda(a'))^\flat = \Lambda(\sigma'(a'^*)).$$

证明完毕。 □

请注意，我们在这里处理的是共轭线性算子。对于 $\sharp$ 的伴随 $\flat$，我们有基本等式

$$\langle \xi_1^\sharp, \xi_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2^\flat \rangle^- = \langle \xi_2^\flat, \xi_1 \rangle$$

当 $\xi_1 \in \mathcal{D}^\sharp$ 和 $\xi_2 \in \mathcal{D}^\flat$ 时。

我们对左希尔伯特代数的希尔伯特空间完备化使用了相同的符号，因为这显然与之前使用的 $\Lambda(A)$ 的希尔伯特空间完备化相同。

备注：如上文证明所示，预期只要代数 A 上的正线性泛函 ψ 存在模自同构，就足以保证 $\sharp$-算子具有稠密定义的伴随。

构造 Haar 权时，我们采用附录中所述的过程。
首先，我们需要右有界向量。回顾左希尔伯特代数框架下的以下定义（参见附录 A 中的定义 A.5）。

3.2. 定义 若存在 $\mathcal{H}$ 上的有界算子 $\pi_r(\eta)$，使得对所有 $\xi \in \mathfrak{A}$ 都满足 $\pi_r(\eta)\xi = \pi_\ell(\xi)\eta$，则称向量 $\eta \in \mathcal{H}$ 是右有界的；该算子必然唯一。

对于此处所考虑的左希尔伯特代数，右有界向量是 $\mathcal{H}$ 中满足映射 $\Lambda(a) \mapsto a\eta$ 有界的元素 η。唯一的有界延拓是算子 $\pi_r(\eta)$，因此对于所有 $a \in A$，我们有 $\pi_r(\eta)\Lambda(a) = a\eta$。

现在可以将积分 ψ 延拓为 A 的 von Neumann 代数完备化 M 上的正规半有限忠实权。这是主要结果——附录 A 中的定理 A.20——的一个应用。

3.3. 定理 对于 $x \in M$ 和 $x \geq 0$，定义 $\psi_1(x)$ 为

$$\psi_1(x) = \sup\{\langle x\eta, \eta\rangle \mid \eta \text{ is right bounded and } \|\pi_r(\eta)\| \leq 1\}. \tag{3.3}$$

那么，ψ_1 是冯·诺伊曼代数 M 上的忠实正规半有限权。若 $a \in A$，则 $\psi_1(a^*a) = \psi(a^*a)$。

证明：该结果可由附录中的一般定理直接推出。最后一个结论成立，是因为当 $\xi \in \mathfrak{A}$ 且 $x = \pi_\ell(\xi)$ 时，我们有 $\psi_1(x^*x) = \langle \xi, \xi\rangle$。事实上，当 $\xi = \Lambda(a)$ 时，我们有 $a = \pi_\ell(\xi)$，其中 $a \in A$。

□

3.4. 备注 要证明方程 3.3) 确实定义了一个权，难点之一在于证明它具有可加性。这一结果的证明基于附录 B 中的引理 B.2。人们或许会想，既然已知它在 A 中正元素构成的稠密子集上具有可加性，是否可以更容易地得出其可加性。但显然，情况似乎并非如此。

在下文中，我们也将使用 ψ 表示冯·诺依曼代数上的权 ψ_1。
对于下面的结果，我们需要左有界向量（参见附录 A 中的定义 A.16）。

3.5. 定义 如果存在一个有界算子（必然唯一，记为 $\pi_\ell(\xi)$），满足对所有右有界元素 η都有 $\pi_\ell(\xi)\eta = \pi_r(\eta)\xi$，则称 $\mathcal{H}$ 中的元素 ξ 为左有界。

任意元素 $\xi \in \mathfrak{A}$ 都是左有界的，因为根据右有界元素的定义，有 $\pi_\ell(\xi)\eta = \pi_r(\eta)\xi$。我们还可以看到，这与记号并不冲突。

3.6. 命题 记 $\mathfrak{N}_\psi$ 为满足 $\psi(x^*x) \leq \infty$ 的元素 $x \in M$ 的集合。它们恰好是算子 $\pi_\ell(\xi)$，其中 ξ 是左有界向量。

这就是附录 A 中的命题 A.22。
由此结果还可推出，典范希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\psi$ 与原始希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 相同，并且从左理想 $\mathfrak{N}_\psi$ 到 $\mathcal{H}_\psi$ 的典范嵌入 Λ_ψ 由 $\pi_\ell(\xi) \mapsto \xi$ 给出。另见命题 A.21。

我们将需要这一点来证明，在下面的命题中，冯·诺伊曼代数上的权 ψ 仍然是右不变的。

3.7. 命题 命题 定理 3.3 中定义的权 ψ 在 (M, Δ 上右不变).

证明：i) 设 a, a' 是 A 中的元素。取 $\mathcal{H}$ 中的一个右有界向量 η。于是我们有

$$\begin{aligned}\Delta(a)(\eta\otimes\Lambda(a')) &= \sum_{(a)} a_{(1)}\eta\otimes\Lambda(a_{(2)}a')\\ &= \sum_{(a)}\pi_r(\eta)\Lambda(a_{(1)})\otimes\Lambda(a_{(2)}a')\\ &= (\pi_r(\eta)\otimes 1)V(\Lambda(a)\otimes\Lambda(a')).\end{aligned}$$

由 $\mathcal{H}$ 中 $\Lambda(A)$ 的连续性和稠密性可知

$$\Delta(a)(\eta\otimes\xi) = (\pi_r(\eta)\otimes 1)V(\Lambda(a)\otimes\xi) \tag{3.4}$$

对所有 $\xi\in\mathcal{H}$ 均成立。

ii) 现在我们使用左希尔伯特代数理论的一个性质。考虑 $x\in\mathfrak{N}_\psi$。正如我们在命题 3.6 中所见，存在一个左有界向量 ξ，使得 $\pi_\ell(\xi) = x$。根据附录 A 中的命题 A.23，存在 A 中的一个有界序列 (a_n)，使得 $\Lambda(a_n)\to\Lambda(x)$。对于所有右有界向量 η，我们有

$$a_n\eta = \pi_r(\eta)\Lambda(a_n)\to\pi_r(\eta)\Lambda(x) = x\eta.$$

因此，对于 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ 中稠密的一组向量 ξ_1，$(a_n\otimes 1)\xi_1\to(x\otimes 1)\xi_1$。由于序列 $(a_n\otimes 1)$ 有界，这对所有向量 ξ_1 都成立。因此

$$(a_n\otimes 1)V^*(\eta\otimes\xi)\to(x\otimes 1)V^*(\eta\otimes\xi)$$

对所有向量 η 和 ξ 均成立。若应用 V，我们看到 $\Delta(a_n)(\eta\otimes\xi)\to\Delta(x)(\eta\otimes\xi)$。现在我们对 a_n 使用等式 (3.4)，并取极限。又因为 $\Lambda(a_n)\to\Lambda(x)$，所以仍有

$$\Delta(x)(\eta\otimes\xi) = (\pi_r(\eta)\otimes 1)V(\Lambda(x)\otimes\xi)$$

对于所有右有界向量 η、所有 $\xi\in\mathcal{H}$ 以及所有 $x\in\mathfrak{N}_\psi$。

iii）于是我们得到，其中 $\omega = \langle\cdot\,\xi,\ \xi\rangle$，并且上确界取遍满足 $\|\pi_r(\eta)\|\le 1$ 的右有界向量 η，

$$\begin{aligned}\psi((\iota\otimes\omega)\Delta(x^*x)) &= \sup\langle\Delta(x^*x)(\eta\otimes\xi),\eta\otimes\xi\rangle\\ &= \sup\langle(\pi_r(\eta)\otimes 1)V(\Lambda(x)\otimes\xi),(\pi_r(\eta)\otimes 1)V(\Lambda(x)\otimes\xi)\rangle\\ &= \langle V(\Lambda(x)\otimes\xi),V(\Lambda(x)\otimes\xi)\rangle\\ &= \langle\Lambda(x)\otimes\xi,\Lambda(x)\otimes\xi\rangle\\ &= \psi(x^*x)\omega(1)\end{aligned}$$

这足以说明 ψ 是不变的。 □

这给出 对 (M,Δ) 上的右 Haar 权。现在我们来寻找左 Haar 权 ht.

(M,Δ) 上的左 Haar 权

现在我们需要将定义在 A 上的左积分 φ 延拓到冯·诺伊曼代数。有几种方法可以做到这一点。

一种方法如下。我们可以将先前的论证应用于由对 A 的余乘法进行翻转而得到的代数量子群。原来的左积分变为右积分。然而，尚不清楚由此得到的冯·诺伊曼代数完备化是否与最初由右积分得到的完备化相同。要证明这一点需要进行一些工作。

第二种可能性是采用局部紧量子群的一般理论中的方法。为此，我们需要反元及相关对象的算子代数版本。这种方法的优点在于，我们可以得到局部紧量子群（M,Δ）的其他重要性质。

然而，完全符合本文的范围，我们将充分利用原代数量子群（A,Δ）的性质，正如我们在第 1 节中所回顾的那样。特别是，命题1.11中得到的模元 δ 的平方根 $\delta^{\frac{1}{2}}$，正是我们在此方法中所使用的对象。我们再次使用左希尔伯特代数的理论。

3.8. 命题 定义一个映射 Λ_φ，从 A 到 $\mathcal{H}$，使得 $\Lambda_\varphi(a) = \Lambda(a\delta^{\frac{1}{2}})$。则 $\Lambda_\varphi(A)$关于从 A 继承的 *-代数结构，并配备给定的标量积形式 $\mathcal{H}$，是一个左希尔伯特代数。这个左希尔伯特代数的左冯·诺依曼代数是 M。

证明：证明过程大体上很直接，就像前面命题3.1中的情形一样。

首先注意到，正如命题1.11所示，$\delta^{\frac{1}{2}}$是 A 的良定义乘子。若 ξ、η是这个左希尔伯特代数中的元素，分别由 $\xi = \Lambda_\varphi(a)$和 $\eta = \Lambda_\varphi(c)$给出，则

$$\xi\eta = \Lambda_\varphi(ac) = \Lambda(ac\delta^{\frac{1}{2}}) = a\Lambda(c\delta^{\frac{1}{2}}) = a\Lambda_\varphi(c) = a\eta$$

由此可见，作为希尔伯特空间上的算子，$\pi_\ell(\xi) = a$。

对于 $\sharp$ 映射的伴随，我们对任意 a、$c \in A$计算得：

$$\begin{aligned}\langle\Lambda_\varphi(a^*), \Lambda(c)\rangle &= \langle\Lambda(a^*\delta^{\frac{1}{2}}), \Lambda(c)\rangle = \psi(c^*a^*\delta^{\frac{1}{2}}) \\ &= \psi(a^*\delta^{\frac{1}{2}}\sigma'(c^*)) = \psi(\delta^{\frac{1}{2}}a^*\delta^{\frac{1}{2}}\sigma'(c^*)\delta^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \langle\Lambda(\delta^{\frac{1}{2}}\sigma'(c^*)\delta^{-\frac{1}{2}}), \Lambda(a\delta^{\frac{1}{2}})\rangle \\ &= \langle\Lambda(\delta^{\frac{1}{2}}\sigma'(c^*)\delta^{-\frac{1}{2}}), \Lambda_\varphi(a)\rangle.\end{aligned}$$

这里用到了 $\delta^{\frac{1}{2}}$是自伴的，以及 $\sigma'(\delta^{\frac{1}{2}}) = \delta^{\frac{1}{2}}$。

这证明了 $\Lambda(A)$属于 $\sharp$-映射的伴随的定义域。 □

接下来考虑由这个左希尔伯特代数得到的哈尔权 φ_1 在 M 上。

3.9. 命题 对于所有 $a \in A$，我们有 $\varphi_1(a^*a) = \varphi(a^*a)$。它是 (M,Δ) 上的左不变权。显然，对于所有 $a \in A$，我们有。

$$\begin{aligned}\varphi_1(a^*a) &= \langle\Lambda_\varphi(a), \Lambda_\varphi(a)\rangle \\ &= \langle\Lambda(a\delta^{\frac{1}{2}}), \Lambda(a\delta^{\frac{1}{2}})\rangle \\ &= \psi(\delta^{\frac{1}{2}}a^*a\delta^{\frac{1}{2}}) \\ &= \psi(a^*a\delta) = \varphi(a^*a).\end{aligned}$$

M 在 φ_1 上的左不变性，正如命题 3.7 的证明中所示，是由 A 在 φ 上的左不变性得到的。

在下文中，我们也用 φ 表示 M 上的忠实正规半有限权 φ_1，正如我们对右 Haar 权所做的那样。现在，我们已经准备好陈述本节的主要结果。

主要结果

我们得到如下结果。

3.10. 定理 对 (M,Δ) 是一个局部紧量子群，其右 Haar 权为 ψ，左 Haar 权为 φ。

现在有一个从冯诺依曼代数量子群 (M,Δ) 过渡到 C*-代数量子群的一般步骤。在这种情况下，我们得到了预期的结果。

3.11. 定理 使用一般理论从 (M,Δ) 得到的 C*-代数量子群是对 (P,Δ)，其中 P 是此前所考虑的 A 的 C*-代数完备化，并且 Δ 是余乘法在 M 上的限制，限制到 P。

> 证明：根据一般理论，我们知道，相应的 C*-代数由元素 $(\omega\otimes\iota)V$ 所构成的空间的闭包得到，其中 ω 遍历 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的所有正规线性泛函。我们可以将范围限制为 $\omega=\langle\cdot\,\Lambda(a)\ \Lambda(b)\rangle$ 类型的泛函，其中 a、$b\in A$。由于 $V(\Lambda(a)\otimes\xi)=\sum_{(a)}\Lambda(a_{(1)}\otimes a_{(2)}\xi)$，于是得到
>
> $$(\omega\otimes\iota)V=\sum_{(a)}\langle\Lambda(a_{(1)}),\Lambda(b)\rangle a_{(2)}=\sum_{(a)}\psi(b^*a_{(1)})a_{(2)}.$$
>
> 这类元素张成了全部的 A，由此可见，相应的 C^*-代数确实与 A 的闭包 P 重合。

□

研究从局部紧量子群的一般理论中得到的进一步结果，以及如何用原代数型量子群的术语来表述这些结果，是很有意义的。其中需要考虑的问题之一，是代数量子群的解析结构；鉴于局部紧量子群的性质，该解析结构已在第 1 节中得到。本文将于本系列的第三部分 [23]中回顾这些结果。

现在，我们将重点放在对偶局部紧量子群的构造上。这是下一节的内容范围。

4. 对偶及对偶上的哈尔权

为了研究前两节中得到的局部紧量子群（M,Δ）的对偶，我们可以在两种方法之间进行选择。我们可以先考虑代数量子群的对偶，然后像前面两节中那样应用完备化过程，以得到局部紧量子群的完备化。或者，我们也可以像一般理论中那样，直接取已完备局部紧量子群（M,Δ）的对偶。

本节所做的主要工作，是说明这两种方法给出相同的结果。我们将采用第一种方法，并在不同层次上说明，应用第二种方法时也会得到相同的结果。

在开始之前，我们需要提及局部紧量子群的一般理论中对偶的处理方式与本文方法之间的一些基本区别。

4.1. 备注 i) 在一般理论中（例如 [19] 中的阐述），首先使用左 Haar 权。本文则从右积分出发，因此得到了冯·诺依曼代数上的右 Haar 权。

ii）对于对偶上的余乘法，在局部紧量子群理论中，通常采用与代数理论中所采用的余乘法相反的余乘法。

iii）首先构造对偶上的左 Haar 权。

我们将遵循代数约定，因为这在代数量子群理论中很常见。不过，这意味着当我们提及局部紧量子群理论中所得到的对偶性时，必须修改公式。但这些变更相当明显，不应造成任何实际困难。

和之前一样，令（B，Δ）表示代数量子群意义下（A，Δ）的对偶。从 A 到 B 的傅里叶变换由 $a \mapsto \psi(S(\cdot)a)$ 定义，其中 ψ 是右积分，发挥着重要作用。对于 B 上的左积分 $\widehat{\varphi}$，我们有普朗歇尔公式，即当 $b = \psi(S(\cdot)a)$ 时，对于 $a \in A$，有 $\widehat{\varphi}(b^*b) = \psi(a^*a)$。参见第 1 节中的命题 1.12 的 ii）项。

这一过程中的第一个重要步骤源于局部紧量子群理论中的一个观察（例如，参见 [19] 第4节定义4.6之前的备注）。该理论的一个特征是，通过傅里叶变换，可以将局部紧阿贝尔群 G 及其对偶 G 上的平方可积函数空间 $L^2(G)$ 和 $L^2(\widehat{G})$ 联系起来。在这里，这意味着我们将从 A 到 $\mathcal{H}$ 的映射 $a \mapsto \Lambda(a)$ 与傅里叶变换结合起来，从而得到一个从 B 到 $\mathcal{H}$ 的映射。

这引出了以下定义和结果。

4.2. 定义 我们通过以下方式定义一个映射 $\Lambda: B \to \mathcal{H}$：若 $b = \psi(S(\cdot)a)$，则 $\Lambda(b) = \Lambda(a)$，其中 $a \in A$。

对于这个映射，我们有以下性质。在比较构造对偶上的左 Haar 权的两种方法时，我们将在后文使用它。

4.3. 命题 对于所有 $b \in B$ 和 $x \in A$，我们有

$$\langle \widehat{\Lambda}(b), \Lambda(x) \rangle = \langle S(x)^*, b \rangle.$$

我们在左侧使用 Hilbert 标量积，在右侧使用配对。

证明：取 $a \in A$，并令 $b = \psi(S(\cdot)a)$。那么对于所有 $x \in A$，我们有

$$\langle \widehat{\Lambda}(b), \Lambda(x) \rangle = \langle \Lambda(a), \Lambda(x) \rangle = \psi(x^*a)$$

同时

$$\langle S(x)^*, b \rangle = \psi(S(S(x)^*)a) = \psi(x^*a).$$

□

我们有 $\widehat{\varphi}(b^*b) = \psi(a^*a)$，这是由于命题 1.12 中的 ii) 项。因此，对于所有 $b \in B$，$\widehat{\varphi}(b^*b) = \langle \Lambda(b), \Lambda(b) \rangle$。

我们预计 Λ 是与 *-代数 B上的对偶左积分 $\widehat{\varphi}$ 相关联的 GNS 映射。以下结果表明确实如此。

4.4. 命题 对于所有 b、$b' \in B$，我们有 $\Lambda(b'b) = b'\Lambda(b)$。

证明：当 $b=\psi(S(\cdot)a)$ 对于 $a\in A$ 时，对于所有 $x\in A$,

$$\begin{aligned}\langle x,b'b\rangle &= \sum_{(x)}\langle x_{(1)},b'\rangle\psi(S(x_{(2)})a)\\ &= \sum_{(S(x))}\langle S^{-1}((S(x))_{(2)}),b'\rangle\psi((S(x))_{(1)})a)\\ &= \sum_{(a)}\langle a_{(2)},b'\rangle\psi(S(x)a_{(1)}).\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们使用了 [22] 中命题 1.1 的方程 (1.3)。于是

$$\begin{aligned}\widehat{\Lambda}(b'b) &= \sum_{(a)}\langle a_{(2)},b'\rangle\Lambda(a_{(1)})\\ &= b'\Lambda(a)=b'\widehat{\Lambda}(b).\end{aligned}$$

□

在记号 2.8 中，我们分别引入了冯·诺伊曼代数 M 和 C*-子代数 P，它们分别是 A 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上作用时的弱闭包和范数闭包。现在我们对 B 做同样的处理。

4.5. 记号 我们分别用 Q 和 N 表示由 B 在 $\mathcal{H}$ 上作用时生成的 C*-代数和冯·诺伊曼代数。

在局部紧量子群理论中，对偶冯·诺伊曼代数 M 在此被定义为酉算子 V 的左腿。正如下面的结果所示，这与冯·诺伊曼代数 N 一致。对于相应的 C^*-代数，情况类似。这是以下事实的自然结果： V 本质上就是对偶性。

4.6. 命题 设 $b=\psi(S(\cdot)a)$，其中 a 属于 A，并设 ω 是 M 上相应的线性泛函。于是 $(\iota\otimes\omega)V=b$，视为作用在 $\mathcal{H}$ 上的算子。

证明：首先注意到， B 中的元素在 M上给出了有界线性泛函。事实上，给定a， $a'\in A$ 我们有

$$\begin{aligned}\langle x\Lambda(a'),\Lambda(a)\rangle &= \psi(a^*xa)=\psi(S(a^*xa)\delta^{-1})\\ &= \psi(S(a)S(x)S(a^*)\delta^{-1})\\ &= \psi(S(x)S(a^*)\delta^{-1}\sigma'(S(a)))\end{aligned}$$

对所有 $x\in A$均成立。我们使用了 [22] 中命题 1.6 的一个公式，并且缩放常数为 1。这类泛函是连续的，并可延拓为 M上的正规泛函。由于 $A^2=A$ 最终我们得到，所有形如 $x\mapsto\psi(S(\cdot)a)$ 的泛函都是连续的，并可延拓为 M 上的正规线性泛函。对于所有 $x\in A$ 和 $\xi\in\mathcal{H}$，我们有 $V(\Lambda(x)\otimes\xi)=\sum_{(x)}\Lambda(x_{(1)})\otimes x_{(2)}\xi$，因此

$$((\iota\otimes\omega)V)\Lambda(x)=\sum_{(x)}\omega(x_{(2)})\Lambda(x_{(1)})=\sum_{(x)}\langle x_{(2)},b\rangle\Lambda(x_{(1)})=\gamma(b)\Lambda(x).$$

□

接下来我们证明， B 上的余乘法正是局部紧量子群对偶框架中的余乘法。

4.7. 命题 对于所有形如 $\Lambda(a)$ 的 $b \in B$ 和 $\xi \in \mathcal{H}$，其中 $a \in A$，我们有

$$V^*(\xi \otimes \widehat{\Lambda}(b)) = \sum_{(b)} b_{(1)}\xi \otimes \widehat{\Lambda}(b_{(2)}).$$

因此，我们得到 $V^*(1 \otimes b)V = \Delta(b)$ 作为作用于 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上的算子。

证明：设 $\xi = \Lambda(a)$ 且 $b = \psi(S(\cdot)c)$，其中 a、$c \in A$。于是

$$\begin{aligned} V^*(\xi \otimes \widehat{\Lambda}(b)) &= \sum_{(a)} \Lambda(a_{(1)}) \otimes S(a_{(2)})\Lambda(c) \\ &= \sum_{(a)} \Lambda(a_{(1)}) \otimes \Lambda(S(a_{(2)})c). \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\sum_{(b)} b_{(1)}\Lambda(a) \otimes \widehat{\Lambda}(b_{(2)}) = \sum_{(a)(b)} \Lambda(a_{1)}) \otimes \langle a_{(2)}, b_{(1)}\rangle \widehat{\Lambda}(b_{(2)}). \tag{4.1}$$

现在，对于所有 a、$x \in A$，我们再次有

$$\sum_{(b)} \langle a, b_{(1)}\rangle\langle x, b_{(2)}\rangle = \langle ax, b\rangle = \psi(S(ax)c) = \psi(S(x)S(a)c).$$

于是我们得到

$$\sum_{(b)} \langle a, b_{(1)}\rangle b_{(2)} = \psi(S(\cdot)S(a)c)$$

and

$$\sum_{(b)} \langle a, b_{(1)}\rangle \widehat{\Lambda}(b_{(2)}) = \Lambda(S(a)c).$$

若将方程 (4.1) 中的 a 替换为 $a_{(2)} \in$，则得到

$$V^*(\xi \otimes \widehat{\Lambda}(b)) = \sum_{(b)} b_{(1)}\xi \otimes \widehat{\Lambda}(b_{(2)}).$$

□

在上述证明中使用 Sweedler记号时需要格外注意。特别是，在方程 (4.1 中，必须指出形如

$$\sum_{(a)(b)} \langle a_{(2)}, b_{(1)}\rangle a_{1)} \otimes b_{(2)})$$

的元素在 $A \otimes B$ 中是良定义的。例如，参见 [22] 的第 3 节中关于海森堡代数的条目。

我们还指出，$\Delta(b)$ 在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上作为有界算子作用。这是因为 B 作为有界算子作用，并且在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上作用时，$V^*(1 \otimes b)V = \Delta(b)$。参见第 2 节中的命题 2.10，其中我们对方程 $V(a \otimes 1)V^* = \Delta(a)$ 作了类似论证。

与 A 的情形一样，参见命题 2.10，B 上的余乘法可以延拓到 C*-代数Q 以及由 B 在希尔伯特空间上的表示所生成的冯·诺伊曼代数 N。

4.8. 命题 在 N 上定义 Δ_1 为

$$\Delta_1(y) = V^*(1 \otimes y)V.$$

于是， Δ_1 是冯·诺伊曼代数 N 上的余乘法，其在 Q 上的限制是 C*-代数上的余乘法。它扩展了 B上的原余乘法。

证明与命题 2.10 的证明完全类似。我们可以结合命题 4.4 和命题 4.7 来使用。我们也可以利用这样一个事实： $\Delta(b) = V^*(1\otimes b)V$在代数 $B\otimes AB$中成立，因此在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$上的 *-表示中也成立。

与 M上的余乘法一样，在这里，后文也将用 Δ 表示 N上的扩张余乘法。

这与我们从局部紧量子群的一般理论中得到的对偶上的余乘法定义一致，参见 [19] 中的定义 4.5；并且请记住，在局部紧量子群理论中，对偶上的余乘法是翻转的。

从代数 B 的左积分到 N 上的左 Haar 权

现在我们必须考察对偶上的权。为了按照本节前面对 ψ 所做工作的思路，将 $\widehat{\varphi}$ 从 B 延拓到算子代数，我们需要下面这个命题3.1 的类似结果。

4.9. 命题 子空间 $\Lambda(B)$ 配备从 B 继承的 *-代数结构后，成为一个左希尔伯特代数。其关联的冯·诺伊曼代数恰好是 N。

证明：首先注意到，映射 Λ 是单射的，并且在 $\mathcal{H}$ 中具有稠密值域。这是由以下事实得出的： Λ：$A \mapsto \mathcal{H}$ 是单射且具有稠密值域，同时 $a \mapsto \psi(S(\cdot)a)$ 是从 A 到 B 的双射。

然后，与命题3.1的证明一样，我们只需论证对合是一个预闭算子。为此，我们证明

$$\langle\widehat{\Lambda}(b^*), \Lambda(x)\rangle = \langle\Lambda(S(x)^*), \widehat{\Lambda}(b)\rangle$$

对于所有 $x \in A$ 和 $b \in B$。这就得出了所需结果。

为证明此公式，我们利用：给定 $b = \psi(S(\cdot)a)$,

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\Lambda}(b^*), \Lambda(x)\rangle &= \langle S(x)^*, b^*\rangle = \langle x, b\rangle^- \\ &= \psi(S(x)a)^- = \psi(a^*S(x)^*) \\ &= \langle\Lambda(S(x)^*), \Lambda(a)\rangle = \langle\Lambda(S(x)^*), \widehat{\Lambda}(b)\rangle.\end{aligned}$$

□

现在，我们可以仿照在对 (M, Δ) 上构造右 Haar 权 ψ 的情形进行。首先，将积分 $\widehat{\varphi}$ 从 B 扩展为正规半有限权，仍记为作用于 von Neumann 代数 N 上的 $\widehat{\varphi}$。它是由左希尔伯特代数 $\Lambda(B)$ 构造出的权。它是一个左 Haar 权。

因此，我们得到了对偶局部紧量子群。

4.10. 定理 对 (N, Δ)，其中 N 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上由 B 生成的冯·诺伊曼代数，且 Δ 是按照命题 4.8 将余乘法从 B 延拓到 N，是一个局部紧量子群。

由于哈尔权是唯一的，我们得到的权与通过应用一般程序所得到的权相同。

一般理论中的对偶左 Haar 权同样构造为与左希尔伯特代数相关联的权。为了完成这两种方法的比较，我们只需证明，这里使用的命题 4.9 中的左希尔伯特代数是一般理论中所使用的左希尔伯特代数的子代数。

参见 [19] 第4节中的命题 4.10。那里给出了以下结果。我们采用该文中的记号。

4.11. 命题 记 $\mathcal{N}$ 为由形如 $(\omega \otimes \iota) W$ 的元素 $y \in M$ 组成的子空间，其中 ω 是 M 上的正规线性泛函，并且存在一个记为 $\Lambda(y)$ 的向量，满足 $\langle \Lambda(y) \ \Lambda(x) \rangle = \omega(x^*)$，对所有 $x \in \mathfrak{N}_\varphi$ 均成立。空间 $\Lambda(\mathcal{N} \cap \mathcal{N}^*)$ 是一个左希尔伯特代数。

为了将这一结果转化到我们的框架中，注意到余乘法 Δ 在 M 上由 $\Delta(y) = W(y \otimes 1)W*$ 给出（见 [19] 中的引理 4.4），而这里我们有 Δ 在 N 上由 $\Delta(y) = V^*(1 \otimes y)V$ 给出（见命题 4.8）。因此，要将上述命题转化到我们的框架中，我们需要将 W 替换为 V^*，并使用翻转映射。由此得到以下结果，此处使用本文中的记号。

4.12. 命题 记 $\mathcal{N}$ 为由形如 $(\iota \otimes \omega) V^*$ 的元素 $y \in N$ 构成的子空间，其中 ω 是 M 上的正规线性泛函，并且存在一个记作 $\Lambda(y)$ 的向量，使得对所有 $x \in \mathfrak{N}_\varphi$，都有 $\langle \Lambda(y) \ \Lambda(x) \rangle = \omega(x^*)$。空间 $\Lambda(\mathcal{N} \cap \mathcal{N}^*)$ 是一个左希尔伯特代数。

最后我们证明这个左希尔伯特代数包含 $\Lambda(B)$。

4.13. 命题 设 $b = \psi(S(\cdot)a)$，其中 $a \in A$。记泛函 $\psi(\cdot\, a)$ 为 ω_1。则 $(\iota \otimes \omega)V^* = \gamma(b)$。特别地，映射 $\Lambda(b) = \Lambda(a)$，其中此时 $\Lambda(b)$ 的定义同前一命题。

证明：我们利用 $V^* = (\iota \otimes S)V$。于是，对于所有的 $x \in A$，有

$$\begin{aligned}((\iota \otimes \omega_1)V^*)\Lambda(x) &= \sum_{(x)} \Lambda(x_{(1)})\omega_1(S(x_{(2)})) \\ &= \sum_{(x)} \Lambda(x_{(1)})\omega(x_{(2)}) \\ &= \gamma(b)\Lambda(x).\end{aligned}$$

□

现在还缺少一个论证。我们需要证明，对于命题 4.9 中的左希尔伯特代数 $\Lambda(B)$，右有界元素与在 [19]对偶性的框架下定义的、可能更大的左希尔伯特代数中的右有界元素相同。这等价于证明：较大代数中的任意元素 ξ 都可以用较小代数中的元素 ξ_n 逼近，并且使得 $\pi_\ell(\xi_n)$保持有界。我们知道这一定成立，但要直接进行严谨论证可能并不简单。这里不再展开。

5. 结论与进一步备注

在关于这一主题的第一篇论文《代数型量子群与对偶性 I》中， [22] 我们研究了一个代数量子群及其对偶。在那篇论文中，我们使用该术语来表示正则乘子 Hopf 代数。我们所得到的大多数结果在文献中都有体现，但较为分散。因此，本文更具有综述性质。

在本文中，我们研究了 *-代数量子群。它们现在是具有正积分的乘子 Hopf *-代数。

首先，我们考察了 [22] 中的一些结果，并补充了额外的信息。第一个关键结果是：正左积分存在，当且仅当正右积分存在。缩放常数始终为 1。我们还具有一种解析结构。其中，我们可以定义模元 δ 的平方根。

对偶性表现良好。当 A上存在正积分时，我们在$\widehat{\ }$对偶 A上也具有正积分。它们之间的关系类似于局部紧阿贝尔群的 Plancherel 公式中的关系。
在本文接下来的三个部分中，我们将详细描述一个 *-代数量子群如何按照 Kustermans 和 Vaes 的意义导出一个局部紧量子群。这需要运用左希尔伯特代数理论中的一些内容。我们已将这些内容收录在两个附录中。

此外，本文讨论的内容大多也见于文献的其他地方，但在这个问题上，我们的处理方式与原始论文中的处理方式不同，而且更为简洁。

其中一个（细微的）差别在于，我们以右积分为出发点，因此采用右正则表示。大多数处理方式都使用左积分，但从右积分出发有一些优点。

这项工作引出了进一步研究的方向。本文在第 1 节中非常简要地讨论了解析结构。我们从第 2、3 和 4 节中的代数量子群得到相应的局部紧量子群，观察这些性质如何体现为该量子群的结果，颇具启发性。我们计划在即将发表的一篇题为《代数型量子群与对偶性 III：算子代数上的解析结构》的论文 [23], 中开展这项研究。

最后，这一切都属于一个更大的项目，旨在全面而与时俱进地阐述局部紧量子群理论。该项目计划于 [20] 开展。

A. 附录。权与左 Hilbert 代数

在本附录中，我们描述如何从一个左希尔伯特代数得到一个正规忠实半有限权。在第 2 节中，我们将利用这一点，为作为一个代数量子群完备化而得到的局部紧量子群构造右 Haar 权。

首先我们回顾左希尔伯特代数的定义。关于 [13] 中的左希尔伯特代数和右 Hilbert 代数，请参阅第VI章。下面的定义是 [13] 第VI章中的定义 1.1。
A.1. 定义 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 *-代数，其对合记为 $\xi \mapsto \xi^\sharp$。假设在 $\mathfrak{A}$ 上定义了一个标量积。记 $\mathcal{H}$ 为 $\mathfrak{A}$ 关于此标量积的希尔伯特空间完备化，并将 $\mathfrak{A}$ 视为 $\mathcal{H}$ 的子空间。如果满足以下条件，则称 $\mathfrak{A}$ 为左希尔伯特代数：

> i) 对于每个元素 $\xi \in \mathfrak{A}$，存在一个有界线性算子 $\pi_\ell(\xi)$ 作用于 $\mathcal{H}$，满足 $\pi_\ell(\xi)\eta = \xi\eta$，对所有 η 属于 $\mathfrak{A}$ 均成立。

ii) 对于所有 ξ、η、$\zeta \in \mathfrak{A}$，有 $\langle \xi\eta、\ \zeta\rangle = \langle \eta、\ \xi^\sharp\zeta\rangle$。iii) 子空间 $\mathfrak{A}^2$ 仍然是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的稠密子空间。iv) 映射 $\xi \mapsto \xi^\sharp$ 作为 $\mathcal{H}$ 上的共轭线性算子是预闭的。

$\sharp$-映射的闭包仍用相同的符号表示，而 $\eta \mapsto \eta^\flat$ 用于表示 $\xi \mapsto \xi^\sharp$的伴随。这些映射的定义域分别记为 $\mathcal{D}^\sharp$ 和 $\mathcal{D}^\flat$。它们是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$的稠密子空间。

A.2. 备注 可以证明，$\sharp$-映射也是其在 $\mathfrak{A}^2$上的限制的闭包。这一点在 [T]的第VI章引理 1.15中得到证明。证明这一点需要做一些工作。在我们处理左希尔伯特代数 [14], 的方法中，从一开始我们就取了平方 $\mathfrak{A}^2$ 上的 sharp 映射的闭包。此外，对于我们在第 2 节中使用的左希尔伯特代数，有 $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$。

因此，对于我们的目的而言，下面的额外假设并不是真正的限制，尽管它使本附录中的处理稍微简单一些。

A.3. 条件 在下文中，我们假设 $\mathfrak{A}^2$ 在 $\mathfrak{A}$ 中关于 $\sharp$-范数是稠密的。换句话说，如果我们有向量 η 和 $\eta' \in \mathcal{H}$，使得对于所有 ξ、$\xi' \in \mathfrak{A}$都有 $\langle \xi^\sharp\xi'、\ \eta\rangle = \langle \eta'、\ \xi'^\sharp\xi\rangle$，那么 $\eta \in \mathcal{D}^\flat$ 且$\eta^\flat = \eta'$。

请记住，我们处理的是共轭线性算子。对于 $\sharp$ 的伴随 $\flat$，我们有基本等式

$$\langle \xi_1^\sharp, \xi_2\rangle = \langle \xi_1, \xi_2^\flat\rangle^- = \langle \xi_2^\flat, \xi_1\rangle$$

当 $\xi_1 \in \mathcal{D}^\sharp$ 和 $\xi_2 \in \mathcal{D}^\flat$ 时。

根据定义 A.1 中的条件 i)、ii) 和 iii)，我们知道，元素 $\pi_\ell(\xi)$（其中 $\xi \in \mathfrak{A}$）的 σ-弱闭包是一个冯·诺伊曼代数。

A.4. 定义 我们用 M 表示由算子 $\pi_\ell(\xi)$（其中 $\xi \in \mathfrak{A}$）生成的冯·诺伊曼代数。

右有界元素和 $\mathfrak{A}'$

为了在 M 上构造关联权，我们需要右有界向量，参见 [13] 第VI章中的定义 1.7。

A.5. 定义 如果存在定义在 $\mathcal{H}$ 上的有界算子，则称向量 $\eta \in \mathcal{H}$ 为右有界；该算子必然唯一，记为 $\pi_r(\eta)$，并且对所有 $\xi \in \mathfrak{A}$ 都满足 $\pi_r(\eta)\xi = \pi_\ell(\xi)\eta$。其唯一性源于 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的稠密性。右有界元素的集合记为 $\mathcal{B}$。

这一定义 正是我们定义冯·诺伊曼代数上的关联权所需的全部内容 .

A.6. 定义 对于 $x \in M$ 和 $x \geq 0$，定义 $\psi(x)$ 为

$$\psi(x) = \sup\{\langle x\eta, \eta\rangle \mid \eta \in \mathcal{B} \text{ and } \|\pi_r(\eta)\| \leq 1\}. \tag{A.1}$$

我们将在后文证明，ψ 是一个忠实正规半有限权，进一步获得该权的性质，并证明当 $\xi \in \mathfrak{A}$ 且 $x = \pi_\ell(\xi)$ 时，$\psi(x^*x) = \langle \xi, \xi\rangle$（见下文定理 A.20）。为此，我们需要研究右有界元素集合的性质。

A.7. 命题 设 $\eta \in \mathcal{B}$。算子 $\pi_r(\eta)$ 属于 M' 的 M 的交换子。此外，若 $y \in M'$，则有 $y\eta \in \mathcal{B}$，且 $\pi_r(y\eta) = y\pi_r(\eta)$。特别地，集合 $\pi_r(\mathcal{B})$ 是 M' 的左理想。

证明：i) 设 $\xi \in \mathfrak{A}$ 和 $\eta \in \mathcal{B}$。对于所有 $\xi_1 \in \mathfrak{A}$，有

$$\pi_r(\eta)\pi_\ell(\xi)\xi_1 = \pi_r(\eta)(\xi\xi_1) = \pi_\ell(\xi\xi_1)\eta = \pi_\ell(\xi)\pi_\ell(\xi_1)\eta = \pi_\ell(\xi)\pi_r(\eta)\xi_1$$

由 $\mathfrak{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的稠密性，我们有 $\pi_r(\eta)\pi_\ell(\xi) = \pi_\ell(\xi)\pi_r(\eta)$。然后 $\pi_r(\eta) \in M'$，因为带有 $\xi \in \mathfrak{A}$ 的算子 $\pi_\ell(\xi)$在 M中稠密。

ii) 现在再次设 $\eta \in \mathcal{B}$ 和 $y \in M'$。对于所有 $\xi \in \mathfrak{A}$，我们都有

$$\pi_\ell(\xi)y\eta = y\pi_\ell(\xi)\eta = y\pi_r(\eta)\xi$$

由此可得 $y\eta \in \mathcal{B}$ 和 $\pi_r(y\eta) = y\pi_r(\eta)$。 □

为了获得更多性质，我们需要考虑 $\mathcal{B}$的以下子空间。

A.8. 定义 我们 将 $\mathfrak{A}'$ 表示为既属于 $\mathcal{D}^\flat$的定义域、又属于 $\eta \in \mathcal{B}$ 的元素所构成的空间。

再次利用基本公理，我们得到如下结果。

A.9. 命题 当 $\eta \in \mathfrak{A}'$ 时， $\eta^\flat \in \mathfrak{A}'$ 和 $\pi_r(\eta^\flat) = \pi_r(\eta)^*$。

证明：设 $\xi \in \mathfrak{A}$ 和 $\eta \in \mathfrak{A}'$。对于所有 $\xi_1 \in \mathfrak{A}$，我们有

$$\begin{aligned}\langle \xi_1, \pi_\ell(\xi)\eta^\flat\rangle &= \langle \pi_\ell(\xi)^*\xi_1, \eta^\flat\rangle = \langle \xi^\sharp\xi_1, \eta^\flat\rangle \\ &= \langle \eta, \xi_1^\sharp\xi\rangle = \langle \eta, \pi_\ell(\xi_1)^*\xi\rangle \\ &= \langle \pi_\ell(\xi_1)\eta, \xi\rangle = \langle \pi_r(\eta)\xi_1, \xi\rangle \\ &= \langle \xi_1, \pi_r(\eta)^*\xi\rangle.\end{aligned}$$

由此可得，对于所有 ξ， $\pi_\ell(\xi)\eta^\flat = \pi_r(\eta)^*\xi$。因此， $\eta^\flat$ 再次是右有界的，并且 $\pi_r(\eta^\flat) = \pi_r(\eta)^*$。由于它属于 $\mathcal{D}^\flat$，我们有 $\eta^\flat \in \mathfrak{A}'$。 □

事实上，由于我们取 $\sharp$-映射在 $\mathfrak{A}^2$ 上的限制的闭包，因此在这一层次上，我们可以很容易地得到某种形式的逆命题。

A.10. 命题 假设 η、η' 是右有界向量，且 $\pi_r(\eta)^* = \pi_r(\eta')$，则 $\eta \in \mathcal{D}^\flat$ 和 $\eta^\flat = \eta'$。

证明：取 ξ、$\xi' \in \mathfrak{A}$。则

$$\begin{aligned}\langle \xi^\sharp\xi', \eta\rangle &= \langle \xi', \pi_\ell(\xi)\eta\rangle = \langle \xi', \pi_r(\eta)\xi\rangle \\ &= \langle \pi_r(\eta')\xi', \xi\rangle = \langle \pi_\ell(\xi')\eta', \xi\rangle \\ &= \langle \eta', (\xi')^\sharp\xi\rangle\end{aligned}$$

并且我们有 $\eta \in \mathcal{D}^\flat$ 和 $\eta^\flat = \eta'$。 □

A.11. 命题：空间 $\pi_r(\mathfrak{A}')$ 是 M' 的 *-子代数。

证明：取 $\xi \in \mathfrak{A}$ 和 $\eta, \eta_1 \in \mathfrak{A}'$。那么

$$\begin{aligned}\langle \xi, \pi_r(\eta)\eta_1\rangle &= \langle \pi_r(\eta)^*\xi, \eta_1\rangle = \langle \pi_r(\eta^\flat)\xi, \eta_1\rangle \\ &= \langle \pi_\ell(\xi)\eta^\flat, \eta_1\rangle = \langle \eta^\flat, \pi_\ell(\xi)^*\eta_1\rangle \\ &= \langle \eta^\flat, \pi_\ell(\xi^\sharp)\eta_1\rangle = \langle \eta^\flat, \pi_r(\eta_1)\xi^\sharp)\rangle \\ &= \langle \pi_r(\eta_1)^*\eta^\flat, \xi^\sharp)\rangle = \langle \pi_r(\eta_1^\flat)\eta^\flat, \xi^\sharp\rangle.\end{aligned}$$

由此可得 $\pi_r(\eta)\eta_1$ 属于 $\mathcal{D}^\flat$，且 $(\pi_r(\eta)\eta_1)^\flat = \pi_r(\eta_1^\flat)\eta^\flat$。因此 $\pi_r(\eta_1^\flat)\eta^\flat \in \mathfrak{A}'$，并且由于

$$\pi_r(\pi_r(\eta_1^\flat)\eta^\flat) = \pi_r(\eta_1^\flat)\pi_r(\eta^\flat)$$

我们得到 $\pi_r(\mathfrak{A}')$ 是 M' 的 *-子代数。 □

有足够多的右有界元素

现在我们继续证明存在足够多的右有界元素 s.

A.12. 命题 设 $\eta \in \mathcal{D}^\flat$。在 $\mathfrak{A}$ 上定义算子 a，其定义为 $a\xi = \pi_\ell(\xi)\eta$。该算子具有伴随算子，定义在 $\mathfrak{A}$ 上，其定义为 $\xi \mapsto \pi_\ell(\xi)\eta^\flat$。

证明：对于所有 ξ、$\xi' \in \mathfrak{A}$，我们有

$$\begin{aligned}\langle a\xi, \xi'\rangle &= \langle \pi_\ell(\xi)\eta, \xi'\rangle = \langle \eta, \xi^\sharp\xi'\rangle \\ &= \langle \xi'^\sharp\xi, \eta^\flat\rangle = \langle \xi, \pi_\ell(\xi')\eta^\flat\rangle.\end{aligned}$$

由此可得 ξ' 属于算子 a 的伴随 a^* 的定义域，并且 $a^*(\xi') = \pi_\ell(\xi')\eta^\flat$。 □

我们用 $\pi_r(\eta)$表示该算子 a的闭包。

A.13. 命题 对于所有 $\eta \in \mathcal{D}^\flat$，我们有 $\pi_r(\eta)$从属于 M'。

证明：i) 在 $\mathfrak{A}$上定义 $a\xi = \pi_\ell(\xi)\eta$。那么，对于所有 ξ、$\xi_1 \in \mathfrak{A}$，我们有

$$a\pi_\ell(\xi_1)\xi = a(\xi_1\xi) = \pi_\ell(\xi_1\xi)\eta = \pi_\ell(\xi_1)\pi_\ell(\xi)\eta = \pi_\ell(\xi_1)a\xi.$$

ii) 现在设 ξ 属于 a^* 的定义域，且 ξ_1、$\xi_2 \in \mathfrak{A}$。那么

$$\begin{aligned}\langle a\xi_1, \pi_\ell(\xi_2)\xi\rangle &= \langle \pi_\ell(\xi_2^\sharp)a\xi_1, \xi\rangle \\ &= \langle a\pi_\ell(\xi_2^\sharp)\xi_1, \xi\rangle \\ &= \langle \pi_\ell(\xi_2^\sharp)\xi_1, a^*\xi\rangle \\ &= \langle \xi_1, \pi_\ell(\xi_2)a^*\xi\rangle.\end{aligned}$$

iii) 由于 $\pi_\ell(\mathfrak{A})$ 在 M 中稠密，我们还可得到

$$\langle a\xi_1, x\xi\rangle = \langle \xi_1, xa^*\xi\rangle$$

对于定义域中的所有 $x \in M$、$\xi_1 \in \mathfrak{A}$ 和 ξ。那么 $x\xi$ 属于 a^* 的定义域，并且 $a^*x\xi = xa^*\xi$。这对定义域中的所有 ξ 以及所有 $x \in M$ 都成立。由此可知，a^* 从属于 M'。此外，$\pi_r(\eta)$ 也从属于 M'，因为那就是 a^{**}。

□

A.14. 命题 右有界向量空间在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

证明：i) 考虑 η 属于 $\mathcal{D}^\flat$、算子 $\pi_r(\eta)$ 及其极分解 hu。设 f 是一个支集紧且定义在正实数（包括 0）集合上的连续函数，并考虑 $f(h)$。由于 $\pi_r(\eta)$ 从属于 M'，因此 $f(h)$ 在 M' 中是良定义的。对于所有 $\xi \in \mathfrak{A}$，我们有

$$\pi_\ell(\xi)f(h)\eta = f(h)\pi_\ell(\xi)\eta = f(h)\pi_r(\eta)\xi.$$

由于 f 的支集是紧的，且 $f(h)\pi_r(\eta) = f(h)hu$，我们得到一个有界算子，因此 $f(h)\eta$ 是一个右有界向量。

ii) 现在取 f_n 为一个值域包含在 $[0,1]$ 中、且对 $t \in [0,n]$ 有 $f_n(t) = 1$ 的函数。于是，对所有向量 ξ，都有 $f_n(h)\xi \to \xi$（因为这对 $\pi_r(\eta)$ 定义域中的稠密向量集成立）。由此可得 $f_n(h)\eta \to \eta$，这就证明了右有界向量集的稠密性。 □

现在我们要证明， $\mathfrak{A}'$ 也仍然足够大。

A.15. 命题：我们有 $\mathfrak{A}'$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，并且 $\pi_r(\mathfrak{A}')$ 是 M' 的一个非退化 *-子代数。

证明：i) 我们首先证明 $\mathfrak{A}'$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。回到命题 A.14 的证明。我们有

$$\pi_r(f(h)\eta)^* = \pi_r(\eta)^* f(h)^* = \pi_r(\eta^\flat)f(h) = f(k)\pi_r(\eta^\flat) = \pi_r(f(k)\eta^\flat)$$

其中 $k = (\pi_r(\eta)^*\pi_r(\eta))^{\frac{1}{2}}$。由此可得， $f(h)\eta$ 属于 $\mathcal{D}^\flat$，并且 $(f(h)\eta)^\flat = f(k)\eta^\flat$。于是我们可以得出， $f_n(h)\eta \to \eta$ 且 $(f_n(h)\eta)^\flat \to \eta^\flat$，因此 $\mathfrak{A}'$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

ii) 我们有 $\pi_r(\eta)\xi = \pi_\ell(\xi)\eta$。由 $\mathfrak{A}'$ 的稠密性以及 $\pi_\ell(\mathfrak{A})$ 的非退化性可知，空间 $\pi_r(\mathfrak{A}')\mathcal{H}$ 是稠密的。由此证明了结论。 □

左有界元

我们还需要左有界元这一概念。

A.16. 定义 若存在作用于 $\mathcal{H}$ 上的有界线性映射 x，使得对所有右有界向量 η 都满足 $x\eta = \pi_r(\eta)\xi$，则称向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 是左有界的。若该映射存在，则由于右有界向量集是稠密的，它必定唯一。当 $\xi \in \mathfrak{A}$ 时，该映射由 $\pi_\ell(\xi)$ 给出，因此 ξ 是左有界的。此外，对于每个左有界元，我们仍可使用 $\pi_\ell(\xi)$ 表示该线性映射。

左有界向量的性质与右有界向量的性质非常相似。这里列出其中最重要的性质，不作证明。

A.17. 命题 i) 对于每个左有界向量 ξ，有 $\pi_\ell(\xi) \in M$。
ii) 对于任意左有界的 $x \in M$ 和 ξ，有 $x\xi$ 左有界，且 $\pi_\ell(x\xi) = x\pi_\ell(\xi)$。

我们看到，具有 ξ 左有界性质的算子集合 $\pi_\ell(\xi)$ 是 M的左理想。

A.18。记号 我们用 $\mathfrak{A}''$ 表示属于 $\mathcal{D}^\sharp$的左有界向量集合 ξ .

I显然， $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}''$ 因为 $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{D}^\sharp$。于是我们得到以下性质 .

A.19. 命题 如果 $\xi \in \mathfrak{A}''$ 那么 $\xi^\sharp \in \mathfrak{A}''$ 和 $\pi_\ell(\xi^\sharp) = \pi_\ell(\xi)^*$。空间 $\pi_\ell(\mathfrak{A}'')$ 是 M的 *-子代数。

由于 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}''$，我们在 $\mathfrak{A}''$ 中有足够多的元素，尤其是有足够多的左有界元。对于右有界元素，我们不需要为得到这一结果而采用的那些论证。我们稍后还将证明，$\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}''$ 中是稠密的，也就是说，对于 $\mathfrak{A}$ 中的任意元素 ξ，都可以用满足 $\|\pi_\ell(\zeta)\| \leq \|\pi_\ell(\xi)\|$ 的 $\mathfrak{A}$ 中的元素 ζ 来逼近。左有界元的情形也类似。参见本附录后面的命题 A.23 以及附录 B 中的定理 B.4。

相伴权

现在我们得到本附录的主要结果。

A.20. 定理：定义在元素 $x \in M_+$ 上的映射 ψ 为

$$\psi(x) = \sup\{\langle x\eta, \eta\rangle \mid \eta \in \mathcal{B} \text{ and } \|\pi_r(\eta)\| \leq 1\}$$

（如定义 A.6 所述）是冯·诺伊曼代数 M 上的忠实正规半有限权。我们还有 $\psi(x^*x) = \langle\xi, \xi\rangle$，当 $\xi \in \mathfrak{A}$ 且 $x = \pi_\ell(\xi)$ 时。

证明：i）显然，对于所有 $x \in M_+$ 和 $\lambda > 0$，$\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$。同样显然的是，$\psi(0) = 0$。在附录 B 的命题 B.3 中，我们证明了 ψ 是可加的。

ii) 由于该权是正规泛函的上确界，因此它是正规的。

iii) 该权是忠实的，因为如果对所有 η 都有 $\langle x\eta、\eta\rangle = 0$，那么必有 $x = 0$，这是因为右有界向量的集合在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

iv) 如果 $\xi \in \mathfrak{A}$ 且 $x = \pi_\ell(\xi)$，则有 $\psi(x^*x) = \langle\xi、\xi\rangle$，因为

$$\sup\{\pi_r(\eta)^*\pi_r(\eta) \mid \eta \text{ is right bounded and } \|\pi_r(\eta)\| \leq 1\} = 1.$$

这源于以下事实：$\pi_r(\mathcal{A}')$ 是 $\mathcal{H}$ 上有界算子构成的一个非退化 *-子代数。

v) 因此，ψ 是半有限的。 □

接下来我们要证明，该权的 GNS 空间与原始希尔伯特空间相同。我们采用在讲义中看到的一种论证。

A.21. 命题 我们有一个线性映射 $\Lambda : \mathfrak{N}_\psi \to \mathcal{H}$ 使得 $\psi(x^*x) = \langle\Lambda(x)\ \Lambda(x)\rangle$ 并且$\pi_\psi(x)\eta = \pi_r(\eta)\Lambda(x)$ 对所有右有界向量 η均成立。

证明：i) 记 $\mathcal{K}$ 为由向量 $\pi_r(\eta)^*\eta_1$ 张成的 $\mathcal{H}$，其中 $\eta_1 \in \mathcal{H}$ 且 $\eta \in \mathcal{B}$。设 $x \in M$，并通过 $\rho(\pi_r(\eta)^*\eta_1) = \langle\eta_1, x\eta\rangle$ 在 V 上定义一个线性泛函。我们断言它是良定义的。为证明这一点，假设我们有一个和式 $\sum \pi_r(\eta_i)^*\eta_{1i} = 0$。那么

$$\begin{aligned}\sum\langle\eta_{1i}, \pi_\ell(\xi)\eta_i\rangle &= \sum\langle\eta_{1i}, \pi_\ell(\xi)\eta_i\rangle \\ &= \sum\langle\eta_{1i}, \pi_r(\eta_i)\xi\rangle \\ &= \sum\langle\pi_r(\eta_i)^*\eta_{1i}, \xi\rangle = 0.\end{aligned}$$

那么对所有 $x \in M$，也有 $\sum\langle\eta_{1i}, x\eta_i\rangle = 0$。这就证明了该断言。

ii) 接下来我们证明，当 $x \in \mathfrak{N}_\psi$ 时，映射 ρ 是有界的。事实上，我们有

$$\begin{aligned}|\rho(\pi_r(\eta)^*\eta_1)|^2 &= |\langle\eta_1, x\eta\rangle|^2 \\ &\leq \|\eta\|^2\|x\eta\|^2\langle x^*x\eta, \eta \\ &\leq \|\eta\|^2\|x\eta\|^2\psi(x^*x)\end{aligned}$$

若 $\|\pi_r(\eta)\| \leq 1$。取极限 $\pi_r(\eta) \to 1$，我们得到 $|\rho(\eta_1)|^2 \leq \psi(x^*x)\|\eta\|^2\|$。

ii) 因此，我们有一个满足下式的向量 $\Lambda(x)$

$$\langle\eta_1, x\eta\rangle = \langle\pi_r(\eta)^*\eta_1, \Lambda(x)\rangle = \langle\eta_1, \pi_r(\eta)\Lambda(x)$$

因此 $x\eta = \pi_r(\eta)\Lambda(x)$。这对所有 $x \in \mathfrak{N}_\psi$ 和 $\eta \in \mathcal{B}$ 都成立。

iii) We get in the end that $\psi(x^*x) = \langle\Lambda(x), \Lambda(x)\rangle$ for all $x \in \mathfrak{N}_\psi$. □

由此可得以下结果。

A.22. 命题 $\mathcal{H}$ 的子集 $\Lambda(\mathfrak{N}_\psi)$ 等于左有界向量的集合。

证明：我们在前一个命题中已经看到，对于所有 $x \in \mathfrak{N}_\psi$ 和 η 右有界，$x\eta = \pi_r(\eta)\Lambda(x)$。因此，$\Lambda(x)$ 是左有界的。反过来，设 ξ 是左有界的，且 $x = \pi_\ell(\xi)$。那么

$$\langle x\eta, x\eta\rangle = \langle\pi_r(\eta)\xi, \pi_r(\eta)\xi\rangle$$

并且如果 $\|\pi_r(\eta)\| \leq 1$，我们得到 $\langle x\eta, x\eta\rangle \leq \|\pi_\ell(\xi)\|^2$，因此 $\psi(x^*x)$将是有限的。因此 $x \in \mathfrak{N}_\psi$。 □

我们将需要以下结果。这是 [13]第1章中的定理 1.26的一部分。证明参见附录 B中的定理 B.4。

A.23. 命题 对于所有 ξ 左有界的情形，存在 ξ_n 中的一个序列 $\mathfrak{A}$，使得 $\xi_n \to \xi$，而 $\|\pi_\ell(\xi_n)\| \leq\|\pi_\ell(\xi\|$ 对于所有 n。

这里的意思是，给定 $x \in \mathfrak{N}_\psi$，存在一个序列$(a_n) \in A$，使得 $\Lambda(a_n) \to \Lambda(x)$，同时 $\|a_n\|$保持有界。这用于证明第 2 节命题 3.7中的权的保持性。

B. 附录。杂项技术结果

在本附录中，我们讨论关于左希尔伯特代数的一些较为复杂的结果。我们使用前一附录中的记号。特别地，$\mathfrak{A}$ 是一个左希尔伯特代数，而 M 是由 $\pi_\ell(\mathfrak{A})$生成的冯·诺依曼代数。

左希尔伯特代数的典范权的可加性

回顾关联权的定义（参见定义 A.6）。

B.1. 定义 对于 $x \in M$ 和 $x \geq 0$，将 $\psi(x)$ 定义为

$$\psi(x) = \sup\{\langle x\eta, \eta\rangle \mid \eta \in \mathcal{B} \text{ and } \|\pi_r(\eta)\| \leq 1\}. \tag{B.1}$$

这里， $\mathcal{B}$ 是右有界向量的集合。

我们将用以下引理证明 ψ 的可加性。

B.2. 引理 正线性泛函 $x \mapsto \langle x\eta, \eta\rangle$ 的集合，其中 η 右有界且 $\|\pi_r(\eta)\| <1$，是向上有向的。这意味着，给定两个这样的泛函 $x \mapsto \langle x\eta_i, \eta_i\rangle$，存在另一个泛函满足

$$\langle x\eta_i, \eta_i\rangle \leq \langle x\eta, \eta\rangle$$

对所有 $x \in M_+$ 均成立。

证明：令 $T_i = \pi_r(\eta_i)^*\pi_r(\eta_i)$。于是 $0 \leq T_i < 1$。定义 $S_i = \frac{T_i}{1-T_i}$，令 $S = S_1 + S_2$，最后令 $T = \frac{S}{S+1}$. 。我们有 $S_i \leq S$，因此

$$T_i = \frac{S_i}{S_i + 1} \leq \frac{S}{S+1} = T.$$

这里我们用到

$$\frac{S_i}{S_i+1} = 1 - \frac{1}{S_i+1} \qquad \text{and} \qquad \frac{S}{S+1} = 1 - \frac{1}{S+1},$$

以及

$$\frac{1}{S_i+1} \geq \frac{1}{S+1},$$

因为 $S_i + 1 \leq S + 1$。

接下来我们断言，存在一个右有界向量 η，使得 $T = \pi_r(\eta)^*\pi_r(\eta)$。首先我们写出

$$\eta_i' = \frac{1}{\sqrt{1 - \pi_r(\eta_i)\pi_r(\eta_i)^*}}\eta_i.$$

那么 η_i' 是右有界的，因为它具有 $y\eta_i$ 的形式，其中 η_i 是右有界的且 $y \in M'$，见命题 A.7。此外

$$\begin{aligned}\pi_r(\eta_i')^*\pi_r(\eta_i') &= \pi_r(\eta_i)^*\frac{1}{1 - \pi_r(\eta_i)\pi_r(\eta_i)^*}\pi_r(\eta_i) \\ &= \pi_r(\eta_i)^*\pi_r(\eta_i)\frac{1}{1 - \pi_r(\eta_i)^*\pi_r(\eta_i)} \\ &= \frac{T_i}{1-T_i} = S_i.\end{aligned}$$

接下来我们还证明， S 对某个右有界元素 η'' 具有 $\pi_r(\eta'')^*\pi_r(\eta'')$ 的形式。由于 $\pi_r(\eta_i')^*\pi_r(\eta_i') = S_i \leq S$，我们有 u_i 中的元素 M'，满足对所有 i 都有 $\pi_r(\eta_i') = u_i S^{\frac{1}{2}}$。我们有 $S = S^{\frac{1}{2}}(u_1^*u_1 + u_2^*u_2)S^{\frac{1}{2}}$，而 $u_1^*u_1 + u_2^*u_2$ 将是 $S^{\frac{1}{2}}$ 的值域投影。于是我们令 $\eta'' = u_1^*\eta_1' + u_2^*\eta_2'$。这是一个右有界向量，并且我们有 $\pi_r(\eta'') = u_1^*u_1 + u_2^*u_2 S^{\frac{1}{2}}$。这将等于 $S^{\frac{1}{2}}$。

然后，运用与之前类似的论证可得，对于某些右有界元素 η，也有 $T = \pi_r(\eta)^*\pi_r(\eta)$。

ii) 综合起来，对于所有正的 x，我们得到一个右有界元素 η，其满足 $\|\pi_r(\eta)\| < 1$ 以及 $\langle x\eta_i、\eta_i\rangle \leq \langle x\eta、\eta\rangle$。 □

B.3. 命题 当 x、 y是冯·诺伊曼代数 M中的正元素时，则 $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$。

证明：i) 。为证明可加性，我们取 x_1、 $x_2 \in M_+$，并令 $x = x_1 + x_2$。显然有$\psi(x) \leq \psi(x_1) + \psi(x_2)$。

为证明另一个不等式，我们不妨假设对 $i = 1,2$， $\psi(x_i) < \infty$ 。事实上，若例如$\psi(x_1) = \infty$，则也有 $\psi(x) = \infty$，因为后者更大。

我们选取 $\varepsilon > 0$，以及具有如下性质的右有界向量 η_1 和 η_2

$$\langle x_i\eta_i, \eta_i\rangle > \psi(x_i) - \varepsilon \qquad \text{and} \qquad \|\pi_r(\eta_i)\| < 1.$$

根据引理，存在一个右有界向量 η，使得

$$\langle x\eta_i, \eta_i\rangle \leq \langle x\eta, \eta\rangle \qquad \text{and} \qquad \|\pi_r(\eta)\| \leq 1.$$

Then

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) \leq \langle (x_1 + x_2)\eta, \eta\rangle + 2\varepsilon \leq \psi(x_1 + x_2) + 2\varepsilon.$$

由此可得 $\psi(x_1) + \psi(x_2) \leq \psi(x_1 + x_2)$。 □

$\mathfrak{A}''$ 中 $\mathfrak{A}$ 的稠密性

设 $\mathfrak{A}$ 为左希尔伯特代数，并设其完备化为 $\mathfrak{A}''$，如附录 A 的记号 A.18 所述。接下来，我们将在本附录中证明以下定理。

B.4. 定理 i) 对于每个 $\xi \in \mathfrak{A}''$，存在 $\mathfrak{A}$ 中的一个序列 (ξ_n)，使得 $\xi_n \to \xi$ 且 $\xi_n^\sharp \to \xi^\sharp$，并且对于所有 n，都有 $\|\pi_\ell(\xi_n)\| \leq \|\pi_\ell(\xi)\|$ 。因此，在强-* 算子拓扑中， $\pi_\ell(\xi_n) \to \pi_\ell(\xi)$。

ii) 对于每个左有界元素 ξ，存在 $\mathfrak{A}$ 中的一个序列 (ξ_n)，使得 $\xi_n \to \xi$ 且对于所有 n，都有 $\|\pi_\ell(\xi_n)\| \leq \|\pi_\ell(\xi)\|$ 。因此，在强算子拓扑中， $\pi_\ell(\xi_n) \to \pi_\ell(\xi)$。

该结果见于 [13]，即关于左希尔伯特代数和右希尔伯特代数的章节中的定理 1.26。我们分几个步骤证明它。我们主要遵循 [13] 中给出的证明所采用的不同步骤。对于较为简单的步骤，我们仅作说明。对于其中一些步骤，我们给出了更简单、更直接的论证。

固定一个元素 $\xi \in \mathfrak{A}''$。选择 $\mathfrak{A}$ 中的一个序列（ζ_n），使得 $\zeta_n \to \xi$ 且 $\zeta_n^\sharp \to \xi^\sharp$。这是可能的，因为 $\xi \in \mathcal{D}^\sharp$，并且 $\sharp$-算子被定义为其在 $\mathfrak{A}$ 上的限制的闭包。
记 $x = \pi_\ell(\xi)$ 和 $x_n = \pi_\ell(\zeta_n)$。

B.5. 引理 对所有右有界向量 η，我们有 $x_n\eta \to x\eta$ 和 $x_n^*\eta \to x_n\eta$ 。

证明：对于任意右有界向量 η，我们有

$$x_n\eta = \pi_\ell(\zeta_n)\eta = \pi_r(\eta)\zeta_n \to \pi_r(\eta)\xi = \pi_\ell(\xi)\eta = x\eta$$

类似地， $x_n^*\eta \to x^*\eta$，因为还有 $\zeta_n^\sharp \to \xi^\sharp$。 □

下一步是运用 2×2 矩阵技巧来得到自伴算子，这与 Takesaki 的证明相同。我们用 $\mathcal{H}_1$ 表示 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 与自身的希尔伯特空间直和 $\mathcal{H}$ 。

B.6. 引理 我们定义

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & x_n^* \\ x^n & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & x^* \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，我们在 $\mathcal{H}_1$ 上有自伴算子，使得对于由向量 $\eta \in \mathcal{H}_1$ 构成的稠密子空间 $\mathcal{B}_1$ ， $X_n\eta \to X\eta$ 。

证明显然。对于子空间 $\mathcal{B}_1$，我们可以取形如 (η_1, η_2) 的元素，其中 η_1、η_2 在 $\mathcal{H}$ 中是右有界的。

现在我们采取一条略有不同的途径，但仍然遵循 Takesaki 在 [13] 中证明的相同思路。我们有如下收敛性质。

B.7. 引理 我们有

$$\frac{1}{1+X_n^2} \to \frac{1}{1+X^2}$$

在强算子拓扑下。

证明：i) 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+iX_n} - \frac{1}{1+iX} &= \frac{1}{1+iX_n}((1+iX)-(1+iX_n))\frac{1}{1+iX} \\ &= i\frac{1}{1+iX_n}(X-X_n)\frac{1}{1+iX}. \end{aligned}$$

现在我们注意到 $\|\frac{1}{1+iX_n}\| \leq 1$。若此时 η 是 $\mathcal{H}_1$ 中的一个向量，且 $\frac{1}{1+iaX}\eta$ 属于 $\mathcal{B}_1$，则有

$$\frac{1}{1+iX_n}\eta \to \frac{1}{1+iX}\eta.$$

这类向量仍然是稠密的，并且由于所有这些算子的范数都不超过 1，我们得到

$$\frac{1}{1+iX_n}\eta \to \frac{1}{1+iX}\eta.$$

对所有向量 $\eta \in \mathcal{H}_1$，都有。

ii) 类似地，我们有 $\frac{1}{1+iX_n} \to \frac{1}{1+iX}$ 在强算子拓扑下成立。

iii) 最后，我们有

$$\frac{1}{1-iX} + \frac{1}{1+iX} = \frac{2}{1+X^2}$$

对于 X_n，也同样如此。我们可以得出结论：

$$\frac{1}{1+X_n^2} \to \frac{1}{1+X^2}$$

在强算子拓扑中。 □

接下来，我们使用以下结果，该结果在 [10] 中被列为命题 2.3.2。

B.8. 命题：每个满足 $g(0) = 0$ 且对于某个正 α 和 β 有 $|g(t)| \leq \alpha|t| + \beta$ 的连续函数 g on $\mathbb{R}$ 都是强连续的。

如果对于每个自伴有界算子网 (x_i)（其极限为 x），网 $(g(x_i))$ 强收敛到 $g(x)$，则称函数 g 强连续。我们将把这一点应用于定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 g，该函数为

$$g(s) = \begin{cases} 2s & \text{if} \quad 0 \le s < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

我们得到如下结果。

B.9. 引理 令 g 如上所述，并对 $0 \le t$ 定义 $f(t) = g(\frac{1}{1+t})$。则

$$f(x_n^* x_n) \to f(x^* x) = 1 \qquad \text{and} \qquad f(x_n x_n^*) \to f(x x^*) = 1$$

强收敛。

证明：i) 若应用命题 B.8，则可得 $f(X_n^2) \to f(X^2)$ 强收敛。由于

$$X^2 = \begin{pmatrix} xx^* & 0 \\ 0 & x^*x \end{pmatrix}$$

类似地，对 X_n^2 我们得到

$$f(x_n^* x_n) \to f(x^* x) \qquad \text{and} \qquad f(x_n x_n^*) \to f(x x^*).$$

又由于 $\|x\| \le 1$，有 $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+X^2} \le 1$，从而 $f(X) = 1$。 □

接下来的步骤中，我们再次遵循 Takesaki 的论证。

现在我们定义 $\xi_n = f(x_n x_n^*)\zeta_n$。

B.10. 引理 元素 ξ_n 属于 $\mathfrak{A}''$ 且 $\xi_n^\sharp = f(x_n^\sharp x_n)\zeta_n^\sharp$。此外，$\xi_n \to \xi$，而现在$\|\pi_\ell(\xi_n)\| \le 1$ 对所有 n均成立。

证明：i) 我们得到

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi\| &\le \|f(x_n x_n^*)(\zeta_n - \xi_n)\| + \|f(x_n x_n^*)\xi - \xi\| \\ &\le \|\zeta_n - \xi\| + \|f(x_n x_n^*)\xi - f(xx^*)\xi\| \to 0. \end{aligned}$$

ii) 类似地，我们得到

$$\|\xi_n^\sharp - \xi^\sharp\| \to 0.$$

iii) 并且还因为

$$\begin{aligned} f(t^2)|t| &< 1 \text{ if } 0 \le |t| \le 1 \\ f(t)|t| &= \frac{2|t|}{1+t^2} \le 1 \text{ if } 1 \le |t| \end{aligned}$$

我们得到 $\|\pi_\ell(\xi_n)\| = \|f(x_n x_n^*)x_n\| \le 1$。 □

不再要求逼近 ξ_n ζ 的元素按照我们的期望属于 $\mathfrak{A}$。通过以一种精心选择的方式用多项式逼近函数 f，我们最终可以完成定理 B.4 的 i) 项证明。

B.11. 命题 存在 $\mathfrak{A}$ 中的一个序列 (ξ'_n)，使得 $\xi'_n \to \xi$ 且 $\zeta_n^\sharp \to \xi^\sharp$，并且对所有 n 都有 $\|\pi_\ell(\xi'_n)\| \leq \|\pi_\ell(\xi)\|$。因此，在强-* 算子拓扑中，$\pi_\ell(\xi'_n) \to \pi_\ell(\xi)$。

证明：现在，我们为每个 n p_n f $\xi'_n =$ 选择一个逼近 $p_n\ x_n x_n^*\ \zeta_n$ $\xi'_n \in \mathfrak{A}$ $\xi_n'^{\,\sharp} = p_n\ x_n^* x_n\ \zeta_n^\sharp$ 它的多项式。然后我们令 ( )。再次有 ( ) ( )。现在我们有

$$\|\xi'_n - \xi_n\| \leq \|p_n(x_n x_n^*) - f(x_n x_n^*)\|\,\|\zeta_n\|$$
$$\|(\xi'_n)^\sharp - \xi_n^\sharp\| \leq \|p_n(x_n^* x_n) - f(x_n^* x_n)\|\,\|\zeta_n^\sharp\|$$

我们可以选择 p_n，使得

$$\|\xi'_n - \xi_n\| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{and} \qquad \|(\xi'_n)^\sharp - \xi_n^\sharp\| \leq \frac{1}{n}.$$

此外，我们得到

$$\begin{aligned}\|\pi_\ell(\xi'_n\| &= \|p_n(x_n x_n^*)x_n^*\| \\ &\leq \|p_n(x_n x_n^*) - f(x_n x_n^*)\|\|x_n\| + \|f(x_n x_n^*)x_n\|\end{aligned}$$

我们还可以选择 p_n，使得

$$\|p_n(x_n x_n^*) - f(x_n x_n^*)\|\|x_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

于是我们得到 $\|\pi_\ell(\xi'_n\| \leq 1 + \frac{1}{n}$。最后，我们只需将 ξ'_n 乘以因子 $1 + \frac{1}{n}$。 □

这就证明了定理的第 i) 项。第 ii) 项是由此得到的标准推论。

B.12. 命题 对每个左有界元素 ξ，存在一个 $\mathfrak{A}$ 中的序列 (ξ_n)，使得 $\xi_n \to \xi$，并且对所有 n，$\|\pi_\ell(\xi_n)\| \leq \|\pi_\ell(\xi)\|$。因此，$\pi_\ell(\xi_n)$ 在强算子拓扑下收敛于 $\to \pi_\ell(\xi)$。

证明：假设 ξ 左有界，且 $\|\pi_\ell(\xi)\| \leq 1$。我们可以用形如 $\pi_\ell(\xi_1)\xi$ 的元素逼近 ξ，其中 $\xi_1 \in \mathfrak{A}$，且 $\|\pi_\ell(\xi_1)\| \leq 1$。这些元素属于 $\mathfrak{A}''$。我们可以用元素 $\xi_n \in \mathfrak{A}$ 对它们进行逼近，并且对所有 n，$\|\pi_\ell(\xi_n)\| \leq 1$。 □

参考文献

[1] E. Abe: *Hopf algebras*。《剑桥数学论丛》，第74卷，剑桥大学出版社，剑桥、纽约（1977年）。[2] K. De Commer与A. VanDaele: *Multiplier Hopf algebras embedded in C*-algebraic quantum groups*。《落基山数学杂志》40（4）（2010年），1149-1182。[3] B. Drabant与A. Van Daele, *Paring and quantum double of multiplier Hopf algebras*, 《代数与表示理论》4（2001年），109-132。[4] B. Drabant、A. Van Daele与Y. Zhang, *Actions of multiplier Hopf algebra*, 《代数通讯》27（1999年），4117-4172。[5] J. Kustermans, *The analytic structure of algebraic quantum groups*, 《代数杂志》259（2003年），415–450。[6] Kustermans J.、Vaes S., 《局部紧量子群的一个简单定义》，*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328**（1999年），871–876。[7] Kustermans J.、Vaes S., 《局部紧量子群》，*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33**（2000年），837–934。[8] Kustermans J.、Vaes S., 《von Neumann代数框架中的局部紧量子群》，*Math. Scand.* **92**（2003年），68–92。

[9] J. Kustermans与A. Van Daele： *C^*-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups*。《国际数学杂志》bf 8（1997年），1067-1139。[10] Pedersen G.，《C*-代数及其自同构群》。学术出版社，伦敦数学学会专著14，伦敦、纽约（1979年）。[11] D.E. Radford， *Hopf algebras*。《纽结与万物丛书》，第49卷，世界科学出版社，新加坡（2012年）。[12] M. Sweedler： *Hopf algebras*。Benjamin出版社，纽约（1969年）。[13] M. Takesaki， *Theory of Operator Algebras II*。施普普林格出版社，纽约（2001年）。[14] A. Van Daele， *A new approach to the Tomita- Takesaki theory of generalized Hilbert Algebras*，《泛函分析杂志》15（1974年），378-393。[15] A. Van Daele： *The Haar measure on finite quantum groups*。《美国数学会公报》125（1997年），3489–3500。[16] A. Van Daele： *Multiplier Hopf algebras*。《美国数学会汇刊》342（2）（1994年），917-932。[17] A. Van Daele： *An algebraic framework for group duality*。《数学进展》140（1998年），323-366。[18] A. Van Daele： *Tools for working with multiplier Hopf algebras*。鲁汶天主教大学预印本。arXiv math.QA/0806.2089。ASJE（《阿拉伯科学与工程杂志》）C辑——专题刊第33卷（2008年），505–528。[19] Van Daele A.， *Locally compact quantum groups. A von Neumann algebra approach*。SIGMA 10（2014年），082，共41页。https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.082[20] A. Van Daele： *Notes on locally compact quantum groups*。鲁汶大学预印本。准备中。[21] A. Van Daele： *From Hopf algebras to topological quantum groups. A short history, various aspects and some problems* 120 2020 179 220 ，

《巴拿赫中心出版物》（）-。https://doi.org/10.4064/bc120-14[22] A. Van Daele： *Algebraic quantum groups and duality I*，鲁汶大学预印本（2023年）。[23] A. Van Daele： *Algebraic quantum groups and duality III. The analytic structure on the operator algebras*，鲁汶大学预印本（2023年）。[24] A. Van Daele与S. Wang： *A note on the Sweedler notation for (weak) multiplier Hopf algebras*。鲁汶大学与南京东南大学预印本。准备中。