arXiv:2304.13523v1 [math.QA] 26 Apr 2023

代数量子群与对偶性 III 模元与解析结构

A. Van Daele (*)

摘要

这是关于该主题的三篇论文系列的最后一篇。

在第一部分 [16] 我们研究了代数量子群的对偶性。在该论文中，我们将具有积分的正则乘子 Hopf 代数称为代数量子群。我们按照该理论中的研究方式处理对偶性。在第二部分 [17] 我们研究了具有正积分的乘子 Hopf *-代数的对偶性。该论文的主要目的是解释它如何按照 Kustermans 和 Vaes 的意义产生一个局部紧量子群。

在 [17] 的一个预备章节中，我们提到了这类 *-代数量子群的解析结构。除了为证明缩放常数是平凡的，以及证明正左积分与反 antipode 的复合给出一个同样为正的右积分所需的部分外，我们没有深入讨论细节。此外，我们还讨论了模元平方根的构造，并利用它获得与之关联的局部紧量子群上的两个 Haar 权重。

本文详细讨论了 *代数量子群的解析结构。解析结构与模结构密切相关。我们获得了一系列有趣的公式，将这两种结构联系起来。此外，我们还将这些结果与在一般局部紧量子群框架下得到的公式进行了比较。

与本系列的前两篇论文一样，本文也没有获得新的结果。另一方面，本文采用了不同的方法，更为直接且具有启发性。这或许有助于读者理解更一般的局部紧量子群理论。

日期：2023年4月26日

(*) 数学系，鲁汶大学，Celestijnenlaan 200B，B-3001 Heverlee（比利时）。
电子邮箱：alfons.vandaele@kuleuven.be

0. 引言

设 (A, Δ) 是一个带有正右积分 ψ 的乘子 Hopf *-代数。空间 A 带有一个标量积，由 $\langle a', a\rangle = \psi(a^* a')$ 定义，其中 a, a' 是 A 中的元素。利用积分自动是忠实的这一事实。关于此标量积的 A 完备化记为 $\mathcal{H}$，而 $a \mapsto \Lambda(a)$ 用于将 A 典范嵌入 $\mathcal{H}$。可以证明，存在一个非退化的 *-表示 π，通过有界算子 A 表示在 $\mathcal{H}$ 上，由 $\pi(a)\Lambda(a') = \Lambda(aa')$ 给出，对所有 $a, a' \in A$ 均成立。我们将其视为 ψ 的 GNS 表示。

存在一个酉算子 V 作用于 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$，满足 $V(\Lambda(a) \otimes \Lambda(a')) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Delta(a)(1 \otimes a'))$，其中$a$、$a' \in A$。这里利用了，对于乘子 Hopf 代数（$A, \Delta$），$\Delta(A)(1 \otimes A) = A \otimes A$，并且 ψ是右不变的。

现在我们得到以下结果。

0.1. 定理 令 M为冯·诺伊曼代数 $\pi(A)''$。定义 $\Delta_1(x) = V(x \otimes 1)V^*$，其中 $x \in M$。那么（M, Δ_1）是 Kustermans 和 Vaes 意义下的局部紧量子群。

M 上的余乘法是 A上给定余乘法的唯一延拓。利用标准左 Hilbert 代数技术，可以从 A 上的左积分和右积分得到 M 上的左 Haar 权和右 Haar 权。

这一结果已在文献中得到，并且在这三篇系列论文的第二篇中回顾了相关过程，参见 [17], ，其中采用了一些更简化、更完善的方法。
在本引言的后文中，我们将给出更多参考文献。

在 [17], 中，我们提到了一个 * 代数量子群的解析结构，并证明了一些结果，这些结果对于构造相应的局部紧量子群是必要的。在这一系列论文的第三篇中，我们将对解析结构进行新的、更全面的处理，重点关注不变积分的模性质。我们找到了这些性质与第一篇论文中回顾的对偶对象的公式之间的关系 [16]。此外，我们还将看到，这些公式如何转化为相应局部紧量子群的性质。

这三篇论文的系列，包括 [16, 17] 和本文，旨在通过局部紧量子群这一特殊情形来理解局部紧量子群的理论，即由一个乘子 Hopf
* 代数及其正积分所产生的局部紧量子群。这一理论具有纯代数性质，也更容易理解。本文没有得到新的结果，但处理方式有所不同，在某种意义上更加简单、独立，同时仍然是全面的。

本文内容

在介绍本文的内　　容之前，我们也简要提及前两篇论文的内容　　.
在第一篇论文中， [16] 我们首先回顾带有积分（代数量子群）的乘子Hopf代数（A、 Δ）的各种性质。我们回顾相关对象、左积分和右积分、模自同构、模元以及缩放常数的定义。我们汇总这些对象之间的关系。在这篇论文的第二节中，我们考察此类代数量子群的对偶性。主要问题之一是对偶的对象与原代数量子群的对象之间的关系。此外，这里还讨论了傅里叶变换。在第三节中，我们研究对偶性，并将其视为典范映射 $a \otimes b \mapsto \Delta（a）（1 \otimes b）$。这与海森堡代数的作用有关；该代数由代数 A 及其对偶 B生成，并满足海森堡交换关系。

在第二篇论文中， [17] 我们研究带有正积分的乘子Hopf *代数（*代数量子群）。主要结果是：存在正左积分，当且仅当存在正右积分。事实上，文中证明缩放常数必为平凡的，并且当 ψ 为正右积分时， $\psi \circ S$是正左积分。该论文的主要目的，是构造 *代数量子群的算子代数完备化。困难在于如何从积分构造Haar 权重，并证明这些权重仍然具有不变性。这里使用了相当多的左希尔伯特代数理论。本篇论文所需的该理论的大部分结果，都汇集在第二篇论文的两个附录中。

在本文的第一节中，我们讨论一个 *代数量子群的模结构。主要对象是典范对合 $\Lambda(a) \mapsto \Lambda(a^*)$ 和 $\Lambda(b) \mapsto \Lambda(b^*)$。这里， Λ 是 A 到右积分 ψ 在 A 上的 GNS 希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的典范 $\widehat{\ }$ 嵌入，而 Λ 则是与左积分 $\widehat{\varphi}$ 在 B上相关的对偶 B 在 $\mathcal{H}$ 中的典范嵌入。

在第二节中，我们讨论解析结构。主要性质是， A 由特征向量张成，这些特征向量对于映射 S^2、 σ'、 σ以及 δ的左乘和右乘是公共的。此外，所有特征值都严格为正。这使我们能够在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的 A 的冯 · 诺伊曼完备化上得到单参数群 τ_t、 σ'_t 和 σ_t 。 A 中的元素是解析的，并且我们得到预期的解析生成元 S^2、 σ' 和 σ。我们还得到乘子代数 $M(A)$ 中酉元的单参数群 δ^{it} ，并且 δ 是该群的解析生成元。回想一下，在 [17] 中我们已经有平方根 $\delta^{\frac{1}{2}}$。它不过是$t \mapsto \delta^{it}$ 在点 $-\frac{i}{2}$处的解析延拓。

对偶 B也有类似的结果。

最后，在附录中，我们从另一种视角考察第 2 节的结果。A 与 B 的对偶性产生了希尔伯特空间张量积 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$上的右正则表示 V。$\widehat{\ }$当 T 和 T 是模对合，即映射 $\Lambda(a) \mapsto \Lambda(a^*)$和 $\widehat{\ }\Lambda(b) \mapsto \Lambda(b^*)$的闭包时，我们有如下关系： $V^*(T \otimes T)\widehat{\ } = (T \otimes T)V$。以此关系为基础进一步推导，我们以不同的方式重新得到前几节中的一些性质。

记号与约定

我们在不同情形下使用张量积符号。当有一个 *-代数 A （不带任何拓扑）时， $A \otimes A$ 表示代数张量积。它自然地仍是一个 *-代数。当有冯·诺伊曼代数 M时，我们考虑冯·诺伊曼代数张量积$M \otimes M$。最后，若 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间，则 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 表示希尔伯特空间张量积。根据上下文，所用张量积的类型应始终清楚。如有不清楚之处，我们会明确说明。

对于代数上的余乘法，我们使用 Sweedler 记号；对于乘子 Hopf 代数 (A, Δ)，也同样如此。此时并不假设 Δ 将 A 映射到张量积 $A \otimes A$ 中，而是假设其映射到乘子代数 $M(A \otimes A)$中。然而，由于我们假设对于所有 $a, a' \in A$， $\Delta(a)(1 \otimes a')$ 和 $(a \otimes 1)\Delta(a')$ 都属于 $A \otimes A$ ，因此使用 Sweedler 记号仍然是合理的。

不过请注意，Sweedler 记号本质上只是用来以更易读的方式书写公式和方程，而并非真正用作证明结果的工具。

最后，为了避免使用过多不同的记号、下标等，我们对不同的对象使用相同的符号。

我们认为这不会造成混淆。无论如何，只要存在任何可能的疑问，我们都会作出更明确的说明。

更多信息，关于 我们的符号和约定见引言中的相应条目 -

[16, 17] 的导出。

基本参考文献

关于 Hopf代数理论，我们参考 Abe [1] 和 Sweedler [10]所著的知名书籍。另请参阅 Radford [9]较近期的工作。关于乘子 Hopf 代数的原始研究见 [11]，而关于带积分的乘子 Hopf 代数的研究见 [12]。关于乘子 Hopf 代数中 Sweedler记号的使用，例如可参阅 [13]，以及较近期的 [18]。

乘子 Hopf 代数的配对最早在 [3] 中进行了研究。乘子Hopf代数的作用见 [4]。

局部紧量子群已由多位作者进行研究；正如我们在前面的论文中已经提到的，也存在不同的研究方法。这里我们的主要参考文献是 [6] 和 [7]。另请参阅 [14]，其中对该理论进行了略为简化的处理。我们也建议读者参阅较近期的综述论文 [15]。

对于由代数量子群产生的局部紧量子群，首先应考虑的论文是 [8]。与此相关的是代数量子群的解析结构，参见 [5]。较新的论述见 [2]。

致谢

我非常感谢我的合著者 M.B. Landstad，以及特隆赫姆大学和奥斯陆大学（这些笔记的一部分即是在奥斯陆大学完成的）的其他同事和朋友，感谢他们在我定期访问这些院系期间营造了良好而富有成效的氛围。

1. 代数量子群的模结构

设 (A, Δ) 是一个具有正积分的乘子 Hopf *-代数，即一个 * 代数量子群。固定一个正右积分 ψ。考虑其 GNS 空间。它是一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，带有一个单射线性映射 $\Lambda\colon\ A \to \mathcal{H}$，其值域稠密，并且对所有 a、$c \in A$ 满足 $\langle \Lambda(a)\ \Lambda(c)\rangle = \psi(c^*a)$。存在一个非退化的 *-表示 π，通过有界算子表示 A，并且对所有 a、$x \in A$ 满足 $\pi(a)\Lambda(x) = \Lambda(ax)$。

我们用 $(B, \hat{\Delta})$ 表示对偶 *代数量子群 (A, Δ)。因此，我们也用 Δ 表示对偶上的余乘法。同样地，对于 A 和 B，我们都用 S 表示反 antipode，用 ε 表示余单位。对偶上的其他对象将统一用带有 $\hat{}$ 符号的记号表示。

对于相应的配对，我们也使用 $(a, b) \mapsto \langle a, b\rangle$。根据上下文，总能明确我们何时使用这一记号表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的标量积，何时表示 A 与 B 之间的配对。

存在一个非退化的 *表示 γ，它作用于 B，同样由 $\mathcal{H}$ 上的有界算子给出，即 $\gamma(b)\Lambda(x) = \sum_{(x)} \langle x_{(2)}$；当 $b \in B$ 和 $x \in A$ 时，$b\rangle\Lambda(x_{(1)})$。

有关上述陈述的详细内容，请参阅 [17]。同时回顾以下定义。

1.1. 定义 在 B 上定义 $\hat{\varphi}\colon$ 当 $b = \psi(S(\cdot)a)$ 时，$\hat{\varphi}(b) = \varepsilon(a)$，其中 a 属于 A。我们将 b 视为 a 的傅里叶变换 $\hat{a}$。

$\hat{\varphi}$ 是 B 上的左积分，其中 B 是 A的对偶。对于所有 $a \in A$，我们都有 $\hat{\varphi}(\hat{a}^*\hat{a}) = \psi(a^*a)$。因此，$\hat{\varphi}$也是正的。该结果被称为 Plancherel 公式。它用于实现

B的 GNS 表示，该表示与此正线性泛函相关联，并且位于同一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$中。以下命题阐述了这一点。

1.2. 命题 设 b属于 B，定义 $\Lambda(b) = \Lambda(a)$，其中 $b = \psi(S(\cdot)a)$，对任意 $a \in A$均成立。则对所有 b、$d \in B$，有 $\langle\Lambda(b)\ \Lambda(d)\rangle = \widehat{\varphi}(d^*b)$；并且对所有属于 B的 b、y，有 $\gamma(b)\Lambda(y) = \Lambda(by)$。

所有这些结果都见于 [16, 17]。

与本文后文中的做法一样，我们将把 A 和 B 视为直接作用于 $\mathcal{H}$。因此，当 $a \in A$、$b \in B$ 和 $\xi \in \mathcal{H}$ 时，我们将 $\pi(a)\xi$ 和 $\gamma(b)\xi$ 分别记作 $a\xi$ 和 $b\xi$。

模算子

在 [17] 中，我们有以下结果。我们用 σ' 表示 ψ 的模自同构，用 $\widehat{\sigma}$ 表示 $\widehat{\varphi}$ 的模自同构。

1.3. 命题 i) 定义在 $\Lambda(A)$ 上的映射 $\Lambda(a) \mapsto \Lambda(a^*)$ 存在稠密定义的伴随。其闭包记作 T。对于所有 $a \in A$，向量 $\Lambda(a)$ 属于 T 的伴随 T^* 的定义域，并且有 $T^*(\Lambda(a)) = \Lambda(\sigma'(a^*))$。

ii) 定义在 $\Lambda(B)$ 上的映射 $\Lambda(b) \mapsto \Lambda(b^*)$ 具有稠密定义的伴随。其闭包记为 $\widehat{T}$by T。对于所有 $b \in B$，向量 $\Lambda(b)$ 属于 $T^*$of T 的伴随的定义域，并且有 $\widehat{T}^*\Lambda(b)) = \Lambda(\widehat{\sigma}(b^*))$。

证明：i) 取 a、$c \in A$。于是

$$\langle\Lambda(a^*), \Lambda(c)\rangle = \psi(c^*a^*) = \psi(a^*\sigma'(c^*))$$

因此 $\langle\Lambda(a^*)\ \Lambda(c)\rangle = \langle\Lambda(\sigma'(c^*))\ \Lambda(a)\rangle$。这足以证明第一个陈述。

ii) 类似地，取 b、$d \in B$。于是

$$\langle\widehat{\Lambda}(b^*), \Lambda(d)\rangle = \widehat{\varphi}(d^*b^*) = \widehat{\varphi}(b^*\widehat{\sigma}(d^*))$$

因此 $\langle\Lambda(b^*)\ \Lambda(d)\rangle = \langle\Lambda(\sigma(d^*))\ \Lambda(b)\rangle$。这足以证明第二个陈述。 □

注意到这些映射是共轭线性的，因此有

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle\xi, T^*\eta\rangle^- = \langle T^*\eta, \xi\rangle$$

当 ξ 属于 T 的定义域且 η 属于 T^*的定义域时。我们使用 λ^- 作为复数 λ的复共轭 $\overline{\lambda}$ 的简写记号。

我们有 $\Lambda(B) = \Lambda(A)$，因此 T 和 T^* 也在 $\Lambda(A)$上有定义。算子 T 和 T^* 对向量 $\Lambda(a)$（其中 $a \in A$）的作用公式如下述命题所示。这里，δ 是 (A, Δ) 的模元。

1.4. 命题 对所有 $a \in A$，我们有

$$\widehat{T}\Lambda(a) = \Lambda(S(a^*)\delta^{-1}) \qquad \text{and} \qquad \widehat{T}^*\Lambda(a) = \Lambda(S(a)^*).$$

证明：i) 设 $b = \psi(S(\cdot)a)$，其中 $a \in A$。那么

$$\begin{aligned}\langle x, b^* \rangle &= \langle S(x)^*, b \rangle^- \\ &= \psi(S(S(x)^*)a)^- = \psi(x^*a)^- \\ &= \psi(a^*x) = \psi(\delta a^* x \delta^{-1}) \\ &= \psi(S(\delta a^* x)) = \psi(S(x)S(a^*)\delta^{-1}).\end{aligned}$$

我们利用了 $\sigma'(\delta) = \delta$，因为缩放常数为 1。我们还利用了 $\psi(S(a)) = \psi(a\delta^{-1})$，最后还利用了 $S(\delta) = \delta^{-1}$。于是得到 $b^* = \psi(S(\cdot)S(a^*)\delta^{-1})$。进而得到 $\widehat{T}\Lambda(a) = \Lambda(S(a^*)\delta^{-1})$。

ii) 现在我们计算该映射的伴随。我们有

$$\begin{aligned}\langle \Lambda(x), \Lambda(S(y^*)\delta^{-1}) \rangle &= \psi(\delta^{-1}S^{-1}(y)x)) \\ &= \psi(S(\delta^{-1}S^{-1}(y)x)\delta^{-1}) \\ &= \psi(S(x)y) = \langle \Lambda(y), \Lambda(S(x)^*) \rangle.\end{aligned}$$

这意味着

$$\langle \Lambda(x), \widehat{T}\Lambda(y) \rangle = \langle \Lambda(y), \Lambda(S(x)^*) \rangle$$

因此 $T^*\Lambda(x) = \Lambda(S(x)^*)$。 □

为完整起见，我们还计算 $T\Lambda(b)$ 和 $T^*\Lambda(b)$。

1.5. 命题 对于 $b \in B$，我们有 $T\Lambda(b) = \Lambda(S(b)^*\delta)$，以及 $T^*\Lambda(b) = \Lambda(S(b^*))$。

证明：i) 和之前一样，我们令 $b = \psi(S(\cdot)a)$。于是

$$T\widehat{\Lambda}(b) = T\Lambda(a) = \Lambda(a^*) = \widehat{\Lambda}(d)$$

其中 $d = \psi(S(\cdot)a^*)$。因此对所有 $x \in A$

$$\begin{aligned}\langle x, d \rangle &= \psi(S(x)a^*) = \psi(aS(x)^*)^- \\ &= \psi({\sigma'}^{-1}(S(x)^*)a)^- \\ &= \langle {\sigma'}^{-1}(S(x)^*), S^{-1}b \rangle^- \\ &= \langle S(x)^*, \widehat{\delta}S^2(S^{-1}(b)) \rangle^- \\ &= \langle S(x)^*, \widehat{\delta}S(b) \rangle^- \\ &= \langle x, S(b)^*\widehat{\delta} \rangle.\end{aligned}$$

我们使用了 [16] 中命题 2.5 的一个公式。我们看到 $d = S(b)^*\delta$。

ii) 同样地，取 $b = \psi(S(\cdot)a)$，我们得到

$$T^*\widehat{\Lambda}(b) = T^*\Lambda(a) = \Lambda(\sigma'(a^*)) = \widehat{\Lambda}(d)$$

其中现在 $d = \psi(S(\cdot)\sigma'(a^*))$。于是对所有 $x \in A$

$$\begin{aligned}\langle x, d \rangle &= \psi(S(x)\sigma'(a^*)) = \psi(a^*S(x)) \\ &= \psi(S(x)^*a)^- \\ &= \langle S(x)^*, S^{-1}(b) \rangle^- \\ &= \langle x, S(b^*) \rangle\end{aligned}$$

并且我们得到 $d = S(b^*)$。 □

1.6. 定义 我们考察这些映射的极分解

$$T = J\nabla^{\frac{1}{2}} \qquad \text{and} \qquad \widehat{T} = \widehat{J}\widehat{\nabla}^{\frac{1}{2}}.$$

我们有以下实现。

1.7. 命题

$$\nabla\Lambda(a)) = \Lambda(\sigma'(a)) \qquad \nabla\widehat{\Lambda}(b) = \widehat{\Lambda}(S^2(b)\widehat{\delta}^{-1})$$
$$\widehat{\nabla}\widehat{\Lambda}(b)) = \widehat{\Lambda}(\widehat{\sigma}(b)) \qquad \widehat{\nabla}\Lambda(a) = \Lambda(S^{-2}(a)\delta).$$

证明：i) 对于 $a \in A$，我们有

$$\nabla\Lambda(a) = T^*T\Lambda(a) = T^*\Lambda(a^*) = \Lambda(\sigma'(a)).$$

类似地，对于 $b \in B$，我们得到

$$\widehat{\nabla}\widehat{\Lambda}(b) = \widehat{T}^*\widehat{T}\widehat{\Lambda}(b) = \widehat{T}^*\widehat{\Lambda}(b^*) = \widehat{\Lambda}(\widehat{\sigma}(b)).$$

ii) 当 $a \in A$ 时，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}(\Lambda(a)) &= \widehat{T}^*\Lambda(S(a^*)\delta^{-1}) \\ &= \Lambda(S(S(a^*))^*S(\delta^{-1})^*) \\ &= \Lambda(S^{-2}(a)\delta).\end{aligned}$$

最后，我们计算 $b \in B$ 的 $\nabla\Lambda(b)$。给定 $b = \psi(S\,\cdot)a)$，我们有

$$\nabla\widehat{\Lambda}(b) = \nabla\Lambda(a) = \Lambda(\sigma'(a)) = \Lambda(d)$$

其中 $d = \psi(S(\,\cdot\,)\sigma'(a))$。我们得到

$$\begin{aligned}\langle x, d\rangle &= \psi(S(x)\sigma'(a)) = \psi({\sigma'}^{-1}(S(x))a) \\ &= \psi(S(\sigma(x))a) = \langle\sigma(x), b\rangle.\end{aligned}$$

现在我们有$\langle\sigma(x)\ b\rangle = \langle x,\ S^2(b)\widehat{\delta}^{-1}\rangle$。这是我们在 [16] 的命题 2.5 中所得到的一个公式的对偶形式。因此 $\nabla\widehat{\Lambda}(b) = \widehat{\Lambda}(S^2(b)\widehat{\delta}^{-1})$。 □

最后一个公式可以利用命题 1.5 中的公式加以验证。事实上

$$T^*T\widehat{\Lambda}(b) = T^*\widehat{\Lambda}(S(b)^*\widehat{\delta}) = \widehat{\Lambda}(S((S(b^*)\widehat{\delta})^*) = \widehat{\Lambda}(S^2(b)\widehat{\delta}^{-1})$$

显然可以验证以下实现。

1.8. 命题

$$\nabla a\nabla^{-1} = \sigma'(a) \qquad \nabla b\nabla^{-1} = S^2(b)$$
$$\widehat{\nabla}b\widehat{\nabla}^{-1} = \widehat{\sigma}(b) \qquad \widehat{\nabla}a\widehat{\nabla}^{-1} = S^{-2}(a)$$

在附录中，参见命题 A.6，我们得到这些公式的单参数形式。对于 δ 和 δ 的作用，我们得到以下公式。

1.9. 命题

$$\widehat{\delta}\Lambda(a) = \Lambda(S^2\sigma^{-1}(a)) \qquad \text{and} \qquad \delta\widehat{\Lambda}(b) = \widehat{\Lambda}(S^2\widehat{\sigma}'(b))$$

证明：i）对于 t 第一个公式，我们使用 B 在 $\Lambda(a)$ 上的作用定义。于是得到

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}\Lambda(a) &= \sum_{(a)} \langle a_{(2)}, \widehat{\delta}\rangle \Lambda(a_{(1)}) \\
&= \sum_{(a)} \varepsilon(\sigma^{-1}(a_{(2)}))\Lambda(a_{(2)}) \\
&= \sum_{(a)} \varepsilon(\sigma^{-1}(a_{(2)}))\Lambda(S^2S^{-2}(a_{(2)})) \\
&= \sum_{(\sigma^{-1}(a))} \varepsilon((\sigma^{-1}(a)_{(2)})\Lambda(S^2(\sigma^{-1}(a)_{(2)})) \\
&= \Lambda(S^2\sigma^{-1}(a)).
\end{aligned}$$

我们使用了：对于所有 a，有 $\Delta(\sigma(a)) = (S^2 \otimes \sigma)\Delta(a)$（ [16] 中的命题 1.13），以及 $\langle a, \widehat{\delta}\rangle = \varepsilon(\sigma^{-1}(a))$（ [16] 中的命题 2.3）。

ii）如前所述，令 $b = \psi(S(\cdot)a)$，其中 $a \in A$。于是 $\delta\Lambda(b) = \delta\Lambda(a) = \Lambda(\delta a)$，从而 $\delta\Lambda(b) = \Lambda(d)$，其中 $d = \psi(S(\cdot)\delta a)$。对于所有 $x \in A$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle x, d\rangle &= \psi(S(x)\delta a) = \langle S(x)\delta, S^{-1}(b)\rangle \\
&= \langle S^{-2}(S^3(x))\delta, S^{-1}(b)\rangle = \langle S^3(x), \widehat{\sigma}^{-1}S^{-1}(b)\rangle \\
&= \langle x, S^3\widehat{\sigma}^{-1}S^{-1}(b)\rangle = \langle x, S^2\widehat{\sigma}'(b)\langle.
\end{aligned}$$

这里我们使用了：对于所有 a，有 $\langle a, \widehat{\sigma}(b)\rangle = \langle S^2(a)\delta^{-1}(a)\ b\rangle$，以及对于所有 a，有 $S\widehat{\sigma}^{-1}(a) = \widehat{\sigma}'(S(a))$（ [16] 中的命题 2.5，以及 [16] 中的命题 1.10）。 □

我们以如下备注结束本节。

1.10. 备注 如我们所提到的，将上述公式与局部紧量子群理论中的公式进行比较时会遇到一个问题。其原因有两个方面。一方面，对偶上的余乘法采用了不同的约定。另一方面，我们从右积分而不是左积分出发。考虑后者，我们可以将 Δ 替换为 A。其结果是，将 S 替换为 S^{-1}，将 σ'替换为 σ，并将 δ 替换为 δ^{-1}。这进一步导致乘法以及 B上的余乘法发生替换。

2. 代数量子群的解析结构

如同上一节，我们有一个 *-代数量子群（A，Δ），其具有一个正右积分ψ。A 上的左积分由 $\varphi = \psi \circ S$给出。ψ 和 φ 的模自同构分别记为 σ' 和 σ。

在 [17] 中，我们已证明以下结果，参见 [17]中的命题 1.6。

2.1. 命题 对于所有 a in A，存在包含所有元素 $\delta^n a$and $a\delta^n$ 的有限维子空间，且对所有整数 n均成立。

由关联各种对象的公式可轻易推出，映射 S^2、σ、σ' 彼此可交换（见 [16]中的命题 1.10）。将 $S^{-2}\sigma$ 记为 κ，将 $S^2\sigma'$ 记为 ρ。它们仍然是同构（但一般不是 *-同构）。

在 [16] 的命题 1.12 中，我们有公式

$$\Delta(S^2(a)) = (S^2 \otimes S^2)\Delta(a) \qquad \text{and} \qquad \Delta(S^2(a)) = (\sigma \otimes \sigma'^{-1})\Delta(a)$$

对所有 a均成立。于是可得，对所有 a，$(\kappa \otimes \rho^{-1})\Delta(a) = \Delta(a)$。我们用此证明以下结果，参见 [2]中的命题 2.3。

2.2. 命题 对所有 $a \in A$， A 中都存在一个有限维子空间，其中包含所有形如 $\kappa^n(a)$ 和 $\rho^n(a)$ 的元素，对所有整数 n均如此。

证明：i) 取 A中的 a、b、c，并写作 $a \otimes b = \sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$。应用 $\kappa^n \otimes \rho^{-n}$ 并乘以 c，得到

$$\kappa^n(a) \otimes c\rho^{-n}(b) = \sum_i (1 \otimes c)\Delta(p_i)(1 \otimes \rho^{-n}(q_i).$$

利用 $(1\otimes c)\Delta(p_i)$ 属于 $A\otimes A$这一点，我们有 A的一个有限维子空间 L，使得对所有 i，$(1 \otimes c)\Delta(p_i) \in L \otimes A$。我们看到 $\kappa^n(a)$ 属于 L。

同样，如果我们从 $a \otimes b = \sum_i \Delta(p_i)(q_i \otimes 1)$ 出发，就能得到一个有限维子空间 A，其中包含所有元素 $\rho^n(a)$。 □

我们也可以给出如下论证。利用

$$\Delta(\sigma(a)) = (S^2 \otimes \sigma)\Delta(a) \qquad \text{and} \qquad \Delta(S^2(a)) = (S^2 \otimes S^2)\Delta(a)$$

我们得到 $\Delta(\kappa) = (\iota \otimes \kappa)\Delta(a)$。接着令 $\Delta(a)(1 \otimes c) = \sum_i p_i \otimes q_i$，应用 $\iota \otimes \kappa^n$ 和 ε，得到

$$\kappa^n(a)\varepsilon(\kappa^n(c)) = \sum_i p_i \varepsilon(\kappa^n(q_i).$$

现在我们有 $\varepsilon((\kappa^n(b)) = \langle b, \widehat{\delta}^{-1}\rangle$，选取 $c = \widehat{\varphi}(\cdot\, b^*b)$ 后便得到

$$\langle b, \widehat{\delta}^{-1}\rangle = \widehat{\varphi}(\widehat{\delta}^n b^* b).$$

只要 b 非零，这个值就非零。最终我们得到，$\kappa^n(a)$ 属于由元素 p_i 张成的空间。对 ρ 也可以作类似论证。

现在我们把所有这些结果结合起来。

2.3. 命题 对于所有 a，存在一个有限维子空间 A，包含所有元素 $S^n(a)$、$\sigma^n(a)$ 以及 $\sigma'^n(a)$，其中 n 取遍所有整数。

证明：我们有 $\sigma\sigma' = \kappa\rho$，因为 $\kappa = S^{-2}\sigma$ 和 $\rho = S^2\sigma'$。这将表明 $\sigma^n\sigma'^n(a)$ 属于一个有限维空间。进一步地，我们有 $\sigma\sigma'(a) = \delta\sigma^2(a)\delta^{-1}$。结合命题 2.1，这将表明 $\sigma^n(a)$ 属于一个有限维空间。然后，综合所有这些性质即可完成该命题的证明。 □

这些有限维空间上定义了这些映射。下面将证明它们具有正特征值。

2.4. 命题 对所有 a，我们有

$$\psi(a^*S^2(a)) \geq 0, \qquad \psi(a^*\sigma(a)) \geq 0, \qquad \psi(a^*\sigma'(a)) \geq 0.$$

证明：i) 对所有 a，我们有

$$\psi(a^*S^2(a)) = \varphi(S(a)S^{-1}(a^*)) = \varphi(S(a)S(a)^*).$$

因为 φ 也是正的，参见 [17], 中的定理 1.7，我们得出 $\psi(a^*S^2(a)) \geq 0$。

ii) 对所有 a，我们有

$$\psi(a^*\sigma'(a)) = \psi(aa^*) \geq 0.$$

iii) 最后，同样对所有 a，我们有，因为 $\sigma(\delta) = \delta$,

$$\psi(a^*\sigma(a)) = \varphi(a^*\sigma(a)\delta) = \varphi(a\delta a^*) \geq 0.$$

□

现在我们可以得到主要结果，该结果最终将给出解析结构以及关于完备化的结果。参见 [2] 中的定理 3.5。

2.5. 命题 空间 A 由映射 S^2、 σ 和 σ' 的公共特征向量张成。

证明：i) 设 $a \in A$，并考虑由元素 $S^2(a)$ 张成的空间 L。它是有限维的，并且在 S^2 作用下不变。对于由 ψ 诱导的标量积，映射 S^2 是自伴随且正的。因此， L 由 S^* 的特征向量张成，并且这些特征向量全都严格为正。由于这对所有 a 都成立，我们得到 A 由 S^2 的特征向量张成。类似地， A 由 σ 的特征向量和 σ' 的特征向量张成。

ii) 由于这些映射彼此交换，我们可以找到一组基，其中的向量同时是三个映射 S^2 σ 和 σ' 的特征向量。 □

我们已经看到， A 也由关于 δ 的左乘和右乘的特征向量张成。这一点已在 [17] 的命题 1.7 中证明。由于我们有 $\psi(a^*\delta a) = \psi((\delta^{\frac{1}{2}}a)^*\delta^{\frac{1}{2}}a)$，可知 $\psi(a^*\delta a) \geq 0$。另一方面， $\varphi(a^*a\delta)) = \psi(a^*a) \geq 0$。因此，乘以 δ 的特征值也严格为正。由于这些映射还与映射 S^2、 σ 和 σ 以及 σ' 交换，我们甚至可以得到以下结果。

2.6. 命题 空间 A 由映射 S^2、 σ 和 σ' 的公共特征向量，以及对 δ 的左乘和右乘的公共特征向量张成。所有特征值都严格为正的。

根据对偶性，我们对对偶也有这一结果。

2.7. 命题 空间 B 由映射 S^2、 $\widehat{\sigma}$ 、 $\widehat{\sigma'}$ 和 $\widehat{\ }$ 的公共特征向量，以及对 δ 的左乘和右乘的公共特征向量张成。所有特征值都严格为正的。

再次参见 [2] 的定理 3.5。

单参数扩张

We 现在可以定义各种单参数群。首先，我们有 δ 的幂。

2.8. 命题 我们可以对所有 $t \in \mathbb{R}$ 定义乘子 δ^{it}，其定义为

$$\delta^{it} a = \lambda^{it} a \qquad \text{and} \qquad c\delta^{it} = \mu^{it} c$$

其中， a 和 c 是 A 中的元素，满足 $\delta a = \lambda a$ 和 $c\delta = \mu c$，其中 λ 和 μ为某些严格正数。

证明：我们采用与 [17]中命题 1.11 的证明相同的方法。
设 $t \in \mathbb{R}$。取 A 中的 a，并将其写成和式 $\sum_i a_i$，其中 $\delta a_i = \lambda_i a_i$。我们假设所有$\lambda_i$ 彼此不同。由于不同的元素 a_i 现在满足$\psi(a_i^* a_j) = 0$（当 $i \neq j$时），因此该分解是唯一的。事实上，

$$\psi(a_i^* \delta a_j) = \lambda_j \psi(a_i^* a_j) \qquad \text{and} \qquad \psi((\delta a_i)^* a_j) = \lambda_i \psi(a_i^* a_j)$$

并且 $\psi(a_i^* \delta a_j) = \psi((\delta a_i)^* a_j)$。于是我们可以定义 $\delta^{it} a := \sum_i \lambda^{it} a_i$。

类似地，我们可以定义 $a\delta^{it}$。事实上，$(\delta^{it} a)\delta^{it} = \delta^{it}(a\delta^{it})$，因此我们确实得到了 A的良定义乘子。 □

它们是酉算子，并且可以定义在整个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上。
我们有解析延拓，并且当 $z = -in$ 时 $\delta^n = \delta^{iz}$。

2.9. 命题 我们还有 $\Delta(\delta^{it}) = \delta^{it} \otimes \delta^{it}$ 对所有 t。

证明：取满足 $\delta a = \lambda a$ 和 $\delta c = \mu c$ 的元素 a、c。写作 $a \otimes c = \sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$。然后从左侧乘以 $\delta \otimes \delta$，并利用 $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$。我们得到 $\lambda\mu(a \otimes c) = \sum_i \Delta(\delta p_i)(1 \otimes q_i)$。这意味着对所有 i，都有 $\delta p_i = \lambda\mu p_i$。然后

$$\begin{aligned}(\delta^{it} \otimes \delta^{it})(a \otimes c) &= \lambda^{it}\mu^{it}(a \otimes c) \\ &= \sum_i \Delta((\lambda\mu)^{it} p_i)(1 \otimes q_i) \\ &= \sum_i \Delta(\delta^{it} p_i)(1 \otimes q_i) \\ &= \Delta(\delta^{it}) \sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i).\end{aligned}$$

□

对于 模自同构的单参数群，我们将采用另一种方法 h.

回顾一下，我们在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有自伴算子 ∇ 和 ∇。它们分别生成单参数酉群 ∇^{it} 和 $\widehat{\nabla}^{it}$。空间 $\mathcal{H}$ 是特征向量的闭线性张成空间，这些特征向量都包含在 $\Lambda(A)$ 中。对于满足 $\sigma'(a) = \lambda a$ 的元素 a，我们有 $\nabla^{it}\Lambda(a) = \lambda^{it}\Lambda(a)$；对于满足 $\widehat{\sigma}(b) = \mu b$ 的元素 b，我们有 $\widehat{\nabla}^{it}\widehat{\Lambda}(b) = \mu^{it} b$。

2.10. 命题

$$\nabla^{it} A \nabla^{-it} \subseteq A \qquad \text{and} \qquad \widehat{\nabla}^{it} B \widehat{\nabla}^{-it} \subseteq B.$$

证明：我们使用命题 1.7 中得到的公式。

i）假设 a、$c \in A$，并且 $\sigma'(a) = \lambda a$，以及 $\sigma'(c) = \mu c$。那么 $\sigma'(ac) = \lambda\mu ac$，从而我们得到

$$\begin{aligned}\nabla^{it} a\Lambda(c) &= \nabla^{it}\Lambda(ac)\\ &= \Lambda(\lambda^{it}\mu^{it}(ac))\\ &= \lambda^{it}\nabla^{it}\Lambda(c).\end{aligned}$$

这对所有此类元素 c 都成立，因此对所有 $c \in A$ 也成立。由此可得 $\nabla^{it} a \nabla^{-it} = \lambda^{it} a$。由于 A 由特征向量张成，我们得到 $\nabla^{it} A \nabla^{-it} \subseteq A$。

ii）类似地，我们得到 $\widehat{\nabla}^{it} B \widehat{\nabla}^{-it} \subseteq B$。 □

于是我们有以下定义。

2.11. 定义 我们可以对所有 t 在 A 上定义 σ'_t，令 $\sigma'_t(a) = \nabla^{it} a \nabla^{-it}$；并且对所有 t 在 B 上定义 $\widehat{\sigma}_t$，令 $\widehat{\sigma}_t(b) = \widehat{\nabla}^{it} b \widehat{\nabla}^{-it}$。

以下结论也显然成立。

2.12. 命题 A 中的元素对于单参数群 σ'_t 是解析的，并且对于 $a \in A$，有 $\sigma'_{-i}(a) = \sigma'(a)$。同样，$B$ 中的元素对于单参数群 $\widehat{\sigma}_t$ 是解析的，并且对于 $b \in B$，有 $\widehat{\sigma}_{-i}(b) = \widehat{\sigma}(b)$。

同样，我们有如下结论。

2.13. 命题

$$\widehat{\nabla}^{it} A \widehat{\nabla}^{-it} \subseteq A \qquad \text{and} \qquad \nabla^{it} B \nabla^{-it} \subseteq B.$$

证明：我们使用命题 1.7 中得到的公式。

i) 设 a 是 A 中的一个元素，使得 $S^{-2}(a) = \lambda a$，进一步设 $c \in A$ 满足 $S^{-2}(c)\delta = \mu c$。于是我们得到

$$\widehat{\nabla}(\Lambda(ac)) = \Lambda(S^{-2}(ac)\delta) = \lambda\mu\Lambda(ac).$$

由此可得

$$\widehat{\nabla}^{it}(\Lambda(ac)) = \lambda^{it}\mu^{it} a\Lambda(c) = \lambda^{it}\Lambda(S^{-2}(c)\delta) = \lambda^{it}\widehat{\nabla}^{it}\Lambda(c).$$

于是这对所有 $c \in A$ 均成立，并且我们得到

$$\widehat{\nabla}^{it} a \widehat{\nabla}^{-it} = \lambda^{it} a.$$

然后，由于 A 由这样的特征向量张成，结论得证。

ii) 另一条陈述以类似方式由公式 $\nabla\widehat{\Lambda}(b) = \widehat{\Lambda}(S^2(b)\delta^{-1})$ 得出。

□

2.14. 定义 现在我们对所有 t 通过 $\tau_t(a) = \widehat{\nabla}^{it} a \widehat{\nabla}^{-it}$ 在 A 上定义 τ_t，并对所有 t通过 $\widehat{\tau}_t(b) = \nabla^{it} b \nabla^{-it}$在 B 上定义 $\widehat{\tau}_t$。

同样，我们有 A 和 B 的元素都是解析的，并且 $\tau_{-i}(a) = S^{-2}(a)$，而 $\widehat{\tau}_{-i}(b) = S^2(b)$。备注：所采用的约定有所不同，关于这一问题请参见 [15] 中的讨论。

2.15. 命题 ⌒命题 对于这些单参数群，对所有 $x \in M$ 和 $y \in M$，我们都有 ，

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma'_t(x)) &= (\sigma'_t \otimes \tau_t)\Delta(x) & \Delta(\widehat{\sigma}_t(y)) &= (\widehat{\tau}_t \otimes \widehat{\sigma}_t)\Delta(y)\\ \Delta(\tau_t(x)) &= (\tau_t \otimes \tau_t)\Delta(x) & \Delta(\widehat{\tau}_t(y)) &= (\widehat{\tau}_t \otimes \widehat{\tau}_t)\Delta(y)\end{aligned}$$

3. 结论与进一步备注

在由三篇论文组成的系列中， [16],[17] 以及本文概述了代数量子群理论及其对偶性。

在第一篇论文中，我们汇集并讨论了乘子 Hopf 代数 (A,Δ) $\widehat{}$ $\widehat{}$及其对偶 (A,Δ) 的公式。在第二篇论文中，我们研究了具有正积分的乘子 Hopf *-代数，并展示了如何将其完备化为局部紧量子群。最后，在本文中，我们着重讨论了 A 和 B上的积分的模性质，以及其解析性质。

我们没有得到新的结果，但论述方式更新了，有时与以往大不相同，也更加独立，同时仍然完整。

撰写这些论文的目的是让那些想要了解局部紧量子群一般理论的人，能够从由一个 *-代数量子群得到的局部紧量子群这一较简单的情形入手。

A. 附录. 乘法酉方法

我们有一个乘子 Hopf *-代数 (A,Δ)，并带有一个正右积分 ψ。我们考虑对偶 (B,Δ) 上与之相关的左积分 $\widehat{\varphi}$，其定义为：当 $b=\psi(S(\cdot)a)$ 时，对 $a\in A$ 有 $\widehat{\omega}(b)=\varepsilon(a)$。 ψ 的 GNS 空间为 $\mathcal{H}$，典范嵌入 Λ 满足 $\langle\Lambda(a)\ \Lambda(c)\rangle=\psi(c^*a)$。此外， $\widehat{\varphi}$ 的 GNS 空间 $\widehat{}$ $\widehat{}$为 $\mathcal{H}$，而 B 到 $\mathcal{H}$ 的典范嵌入 Λ 定义为：当 $b=\psi(S(\cdot)a)$ 时，对 $a\in A$ 有 $\Lambda(b)=\Lambda(a)$。这之所以可行，是因为 Plancherel 公式指出，当$b=\psi(S(\cdot)a)$时，有 $\widehat{\varphi}(b^*b)=\psi(a^*a)$。

回顾以下结果。

A.1. 命题 存在一个酉算子 V，其定义在 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ 上，定义如下

$$V(\Lambda(x)\otimes\xi)=\sum_{(x)}\Lambda(x_{(1)})\otimes x_{(2)}\xi.$$

当 $x\in A$ 且 $\xi\in\Lambda$（A）时。它满足

$$V^*(\xi\otimes\widehat{\Lambda}(y)=\sum_{(y)}y_{(1)}\xi\otimes\widehat{\Lambda}(y_{(2)})$$

$\widehat{}$当 $y\in B$ 且 $\xi\in\Lambda$（B）时。

第一个结果见 [17] 中的命题 2.5，而第二个结果见该文中的命题 4.7。

$\widehat{}$备注： V 属于 M（$A\otimes A$）。右腿生成 A 和冯·诺伊曼代数 $M\widehat{}$ $\widehat{}$，而左腿生成 A 和冯·诺伊曼代数 M。于是， V 位于冯·诺伊曼张量 $\widehat{}$ 积 $M\otimes M$ 中。

$\widehat{}$ $\widehat{}$我们将 T 和 T 定义为映射 $\Lambda(a)\to\Lambda(a^*)$ 和 $\Lambda(b)\mapsto\Lambda(b^*)$ 的闭包，其中 $a\in A$和 $b\in B$。我们使用了 $T=J\nabla^{\frac{1}{2}}$ and $\widehat{J}\widehat{\nabla}^{\frac{1}{2}}$ 这些映射的极分解。

在 [17] 的命题 3.1 中，我们证明了以下结果。

A.2. 命题 对于所有 a，我们都有 $\Lambda(a)$ 属于 T^* 的定义域，且 $T^*(\Lambda(a) = \Lambda(\sigma'(a^*))$ 对所有 $a \in A$..

在 [17] 的命题 4.9 中，我们也考虑了其对偶形式，但现在得到以下性质。

A.3. 命题 对于所有 $a \in A$，有 $\widehat{T}(\Lambda(a)) = \Lambda(S(a^*)\delta^{-1}))$。此外， $\Lambda(a)$ 属于 T^* 的定义域 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，并且 $T^*\Lambda(a) = \Lambda(S(a)^*)$。

利用这两个公式，我们得到这些算子与 V 的以下关系 .

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$A.4. 命题 我们有 $V^*(T \otimes T) = (T \otimes T)V$。

证明：对于所有 x、$y \in A$，我们得到

$$\begin{aligned}
V^*(T \otimes \widehat{T})(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) &= V^*(\Lambda(x^*) \otimes \Lambda(S(y^*)\delta^{-1}) \\
&= \sum_{(x)} \Lambda(x^*_{(1)}) \otimes S(x^*_{(2)})\Lambda(S(y^*)\delta^{-1}) \\
&= \sum_{(x)} \Lambda(x^*_{(1)}) \otimes \Lambda(S(x^*_{(2)})S(y^*)\delta^{-1}) \\
&= \sum_{(x)} \Lambda(x^*_{(1)}) \otimes \Lambda(S((x_{(2)}y)^*)\delta^{-1}) \\
&= \sum_{(x)} (T \otimes \widehat{T})(\Lambda(x_{(1)}) \otimes \Lambda(x_{(2)}y)) \\
&= (T \otimes \widehat{T})V(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)).
\end{aligned}$$

□

$\widehat{\ }$A.5. 备注 在早期的工作中，我们使用映射 $\Lambda(a) \mapsto \Lambda(S(a^*))$，而不是 T。这同样实现了 $\backsim a \mapsto S(a^*)$，而这正是我们对该公式的需要。借助 T，我们可以作出更好的选择。

由极分解的唯一性，我们得到：

A.6. 命题 我们有

$$(J \otimes \widehat{J})V = V^*(J \otimes \widehat{J}) \qquad \text{and} \qquad (\nabla^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it})V = V(\nabla^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it}). \tag{A.1}$$

$\widehat{\ }$首先，我们有模数据。对于 $x \in M$ 和 $y \in M$，我们有

$$\begin{aligned}
\sigma'_t(x) = \nabla^{it} x \nabla^{-it} \in M \qquad &\text{and} \qquad x \mapsto Jx^*J \in M' \\
\widehat{\sigma}_t(y) = \widehat{\nabla}^{it} y \widehat{\nabla}^{-it} \in \widehat{M} \qquad &\text{and} \qquad y \mapsto \widehat{J}y^*\widehat{J} \in \widehat{M}.
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$A.7. 命题 对于 $x \in M$ 和 $y \in M$，我们定义

$$\begin{aligned}
\tau_t(x) = \widehat{\nabla}^{-it} x \widehat{\nabla}^{it} \in M \qquad &\text{and} \qquad R(x) = \widehat{J}x^*\widehat{J} \in M \\
\widehat{\tau}_t(y) = \nabla^{it} y \nabla^{-it} \in \widehat{M} \qquad &\text{and} \qquad \widehat{R}(y) = Jy^*J \in \widehat{M}.
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$于是， R 是 M 的对合反同构，而 R 是 M的对合反同构。 τ-映射是 *-自同构的单参数群。

证明：由于 V 的右腿在 M 中稠密，根据命题 A.6 中的第一个公式可知，R 将 M 映射到自身。同理，由于 V 的左腿在 M 中稠密，R 也具有相同性质。 □

我们分别称 R 和 R 为 M 和 M 上的酉反粒子。自同构 τ 和 $\widehat{\tau}$ 是缩放群。

这些映射的性质

首先，我们利用 V 实现了余乘法。由此得到以下结果。 需按约定调整!

A.8. 命题 对于 $x \in M$ 和 $y \in M$，我们有

$$\Delta(\sigma'_t(x)) = (\sigma'_t \otimes \tau_{-t})\Delta(x)$$
$$\Delta(\widehat{\sigma}_t(y)) = (\widehat{\tau}_t \otimes \widehat{\sigma}_t)\Delta(y).$$

证明：i) 对于 $x \in M$，我们有 $\Delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$，于是

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma'_t(x)) &= V(\nabla^{it} x \nabla^{-it} \otimes 1)V^* \\ &= V(\nabla^{it} x \nabla^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{it}\widehat{\nabla}^{-it})V^* \\ &= (\nabla^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it})V(x \otimes 1)V^*(\nabla^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{-it}) \\ &= (\sigma'_t \otimes \tau_{-t})\Delta(x).\end{aligned}$$

ii) 类似地，对于 $y \in M$，我们有 $\Delta(y) = V^*(1 \otimes y)V$，因此

$$\begin{aligned}\Delta(\widehat{\sigma}_t(y)) &= V^*(1 \otimes \widehat{\nabla}^{it} y \widehat{\nabla}^{-it})V \\ &= V^*(\nabla^{it}\nabla^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{it} y \widehat{\nabla}^{-it})V \\ &= (\nabla^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it})V^*(1 \otimes y)V(\nabla^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{-it}) \\ &= (\widehat{\tau}_t \otimes \widehat{\sigma}_t)\Delta(y).\end{aligned}$$

□

接下来我们使用以下公式。

A.9. 命题

$$(\iota \otimes \Delta)V = V_{12}V_{13} \qquad \text{and} \qquad (\widehat{\Delta} \otimes 1)V^* = V^*_{13}V^*_{23}.$$

证明：i) 对于 $a \in A$ 和 $\xi,\ \xi' \in \mathcal{H}$ 我们有

$$\begin{aligned}((\iota \otimes \Delta)U)(\Lambda(a) \otimes \xi \otimes \xi') &= \sum_{(a)} \Lambda(a_{(1)}) \otimes \Delta(a_{(2)}(\xi \otimes \xi') \\ &= \sum_{(a)} \Lambda(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}\xi \otimes a_{(3)}\xi' \\ &= \sum_{(a)} U_{12}(\Lambda(a_{(1)}) \otimes \xi \otimes a_{(2)}\xi') \\ &= U_{12}U_{13}(\Lambda(a) \otimes \xi \otimes \xi').\end{aligned}$$

ii）同样地，利用 $V^*(\xi \otimes \Lambda(b)) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes \Lambda(b_{(2)})$，我们得到另一个方程。

□

于是我们得到以下公式。

A.10. 命题 对于 $x \in M$ 和 $y \in M$，我们有

$$\Delta(\tau_t(x)) = (\tau_t \otimes \tau_t)\Delta(x) \qquad \text{and} \qquad \widehat{\Delta}(\widehat{\tau}_t(y)) = (\widehat{\tau}_t \otimes \widehat{\tau}_t)\Delta(y)$$

证明：i) 将 $(\iota \otimes \Delta)V = V_{12}V_{13}$ 左乘 $\nabla^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it}$，并在右侧乘以其逆元。对于左侧，我们得到

$$(\iota \otimes \tau_t \otimes \tau_t)(\iota \otimes \Delta)(V)$$

而在右侧我们得到

$$\begin{aligned}
&(1 \otimes \widehat{\nabla}^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it})(V_{12}V_{13})(1 \otimes \widehat{\nabla}^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{-it}) \\
&\quad = (1 \otimes \widehat{\nabla}^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it})V_{12}(1 \otimes \widehat{\nabla}^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{-it}) \\
&\qquad\quad (1 \otimes \widehat{\nabla}^{it} \otimes \widehat{\nabla}^{it})V_{13}(1 \otimes \widehat{\nabla}^{-it} \otimes \widehat{\nabla}^{-it}) \\
&\quad = (\nabla^{-it} \otimes 1 \otimes 1)V_{12}(\nabla^{it} \otimes 1 \otimes 1)(\nabla^{-it} \otimes 1 \otimes 1)V_{13}(\nabla^{it} \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = (\nabla^{-it} \otimes 1 \otimes 1)V_{12}V_{13}(\nabla^{it} \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = (\nabla^{-it} \otimes 1 \otimes 1)((\iota \otimes \Delta)V)(\nabla^{it} \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad = (\iota \otimes \Delta)(\nabla^{-it} \otimes 1)V(\nabla^{it} \otimes 1)) \\
&\quad = (\iota \otimes \Delta)(1 \otimes \widehat{\nabla}^{it})V(1 \otimes \widehat{\nabla}^{-it})).
\end{aligned}$$

结合这两个结果，我们得到

$$(\iota \otimes \tau_t \otimes \tau_t)(\iota \otimes \Delta)(V) = (\iota \otimes \Delta)((\iota \otimes \tau_t)V)$$

因此，对于所有 x，有 $(\tau_t \otimes \tau_t)\Delta(x) = \Delta(\tau_t(x))$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$完全类似地，由 $(\Delta \otimes 1)V^* = V_{13}^* V_{23}^*$ 可得，对于所有 $y \in M$，$\Delta(\widehat{\tau}_t(y)) = (\widehat{\tau}_t \otimes \widehat{\tau}_t)\Delta(y)$。 □

A.11. 命题 对所有 $x \in M$，我们有 $\Delta(R(x)) = \zeta(R \otimes R)\Delta(x)$。

证明：对等式 $(\iota \otimes \Delta(V) = V_{12}V_{13}$ 取伴随后，由上述命题中的第一个公式可容易得出，R 翻转了余乘法。 □

我们已经看到，这些映射保持 A 不变（见命题 2.13）。因此，它们也保持 C*-代数完备化不变。

参考文献

[1] E. Abe: *Hopf algebras*。《剑桥数学专著》第74卷，剑桥大学出版社，剑桥-纽约（1977年）。[2] K. De Commer & A. VanDaele: *Multiplier Hopf algebras embedded in C*-algebraic quantum groups*。《洛基山数学杂志》40（4）（2010），1149-1182。[3] B. Drabant & A. Van Daele, 《代数与表示理论》4（2001），109-132。[4] B. Drabant、A. Van Daele & Y. Zhang, 《代数通信》27（1999），4117-4172。

[5] J. Kustermans, *The analytic structure of algebraic quantum groups*, 《代数杂志》259（2003），415–450。[6] Kustermans J., Vaes S.，局部紧量子群，http://dx.doi.org/10.1016/S0012-9593(00)01055-7 *Ann Sci. École Norm. Sup. (4)* **33**(2000), 837–934.[7] Kustermans J., Vaes S.，冯·诺伊曼代数框架中的局部紧量子群，*Math. Scand.* **92** (2003), 68–92.[8] J. Kustermans & A. Van Daele：*C*-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups*。《国际数学杂志》bf 8 (1997), 1067-1139.[9] D.E. Radford, *Hopf algebras*。《纽结与万物》丛书，第49卷，World Scientific，新加坡（2012）。[10] M. S weedler：*Hopf algebras*。Benjamin，纽约（1969）。[11] A. Van Daele：*Multiplier Hopf algebras*。《美国数学学会会刊》342(2) (1994), 917-932.[12] A. Van Daele：*An algebraic framework for group duality*。《数学进展》140 (1998), 323-366.[13] A. Van Daele：*Tools for working with multiplier Hopf algebras*。鲁汶天主教大学预印本。ArXiv math.QA/0806.2089。《阿拉伯科学与工程杂志》C辑专题特刊33 (2008), 505–528.[14] Van Daele A., *Locally compact quantum groups. A von Neumann algebra approach*。《巴拿赫中心出版物》120 (2020), SIGMA 10 (2014), 082, 41页。https://doi.org/10.3842/SIGMA.2012.082[15] A. Van Daele：*From Hopf algebras to topological quantum groups. A short history, various aspects and some problems* 120 2020 179 220 ，

《巴拿赫中心出版物》（）-。https://doi.org/10.4064/bc120-14[16] A. Van Daele: *Algebraic quantum groups and duality I*，鲁汶大学预印本（2023）。[17] A. Van Daele: *Algebraic quantum groups and duality II. Multiplier Hopf *-algebras with positive integrals*，鲁汶大学预印本（2023）。[18] A. Van Daele and S. Wang：*A note on the Sweedler notation for (weak) multiplier Hopf algebras*。鲁汶大学与南京东南大学预印本。编写中。