arXiv:2304.13526v1 [math.AC] 26 Apr 2023

比 δ-主超理想更一般的框架

M. ANBARLOEI

Abstract. δ-主超理想这一概念将 n 元素素超理想与 n 元素主超理想统一于同一框架之下，其中 δ 是一个函数，它为 G 的每个超理想 Q 指派同一超环中具有特定性质的超理想 $\delta(Q)$。本文旨在针对具有数量单位元 1 的交换 Krasner (m,n)-超环 G，引入并研究 (t,n)-吸收 δ-半主超理想的概念；这一结构比 δ-主超理想更一般。我们称 G 的真超理想 Q 为 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，若当 $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$ 对于 $a_1^{tn-t+1} \in G$ 成立时，则存在 a 中的 $(t-1)n-t+2$，使得其 k-乘积属于 $\delta(Q)$。此外，我们将这一概念推广到弱 (t,n)-吸收δ-半主超理想。我们确定了这些超理想类的若干性质与刻画。特别地，在定义强弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想之后，我们给出了弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想成为强超理想的条件。此外，我们证明了 $k(Q^{(tn-t+1)}) = 0$，其中弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想 Q 并非 (t,n)-吸收 δ-半主超理想。我们还研究了这些概念在超理想的交、同态以及超环的笛卡尔积下的稳定性。

1. Introduction

2-吸收理想作为素理想的一种推广，最早由 Badawi 在 [3] 中提出。许多研究者对这一概念及其推广进行了广泛研究。Celikel 引入了交换环中 2-吸收 δ-半主理想的概念，这是 2-吸收理想的一种扩展。由 [4], 交换环 R 的真理想 I，如果 x、y、$z \in R$ 以及（$0 \neq xyz \in I$） $xyz \in I$蕴含 $xy \in \delta$（I）或 $yz \in \delta$（I）或 $xz \in \delta$（I），则称其为一个（弱）2-吸收 δ-半主理想，其中 δ 是一个函数，它将每个理想 I 映射为同一环的一个理想 δ（I）。

对 n元代数的研究可追溯至 Kasner 在 1904 年一次科学会议上的演讲 [9] 。1928 年，Dorente 撰写了第一篇关于 n元群理论的论文。 n元结构已在 [5],[7], [10],[11],[12], [13], [14] 和 [15]中得到研究。存在一种超环，其中加法是超运算，而乘法是普通的二元运算。Krasner 引入的超环称为 Krasner超环。作为 Krasner超环的推广以及 (m,n)-超环的子类，Krasner (m,n)-超环由 Mirvakili 和 Davvaz 于 [14] 引入。(G,h,k)，或简称为 G，是 Krasner (m,n)-超环，当且仅当：(1) (G,h) 是一个典范 m元超群；(2) (G,k) 是一个

2010 *Mathematics Subject Classification.* 16Y99.*Key words and phrases.* （t，n）-吸收 δ-半主超理想、弱（t，n）-吸收δ-半主超理想、 δ-（t，n）-零。

n元半群；(3) 运算 k 关于超运算 h 是可分配的，即对于任意 $g_1^{i-1}, g_{i+1}^n, x_1^m \in G$，以及 $1 \leq i \leq n$, $k(g_1^{i-1}, h(x_1^m)\ g_{i+1}^n) = h(k(g_1^{i-1}, x_1, g_{i+1}^n) \cdots, k(g_1^{i-1}, x_m, g_{i+1}^n))$；(4) 0 是 n 元运算 k的零元，即对于任意 $g_2^n \in R$, $k(0, g_2^n) = k(g_2, 0, g_3^n) = \cdots = k(g_2^n, 0) = 0$。$G$ 的非空子集 H 是 G 的子超环，如果 (H, h, k) 是 Krasner (m, n)-超环。G 的非空子集 I 是超理想，如果 (I, h) 是 (G, h) 的一个 m元子超群，并且对所有 $g_1^n \in G$ 和 $1 \leq i \leq n$, $k(g_1^{i-1}, I, g_{i+1}^n) \subseteq I$。记 g_i^j 为序列 $g_i, g_{i+1}, \cdots, g_j$；当 $j < i$时，它是空符号。于是有 $h(a_1, \cdots, a_i, b_{i+1}, \cdots, b_j, c_{j+1}, \cdots, c_n) = h(a_1^i, b_{i+1}^j, c_{j+1}^n)$，并记作 $h(a_1^i, b^{(j-i)}, c_{j+1}^n)$，其中 $b_{i+1} = \cdots = b_j = b$。定义 $h(G_1^n) = \bigcup\{h(g_1^n) \mid g_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$，其中 G_1^n 是 G的非空子集。根据 [1]，G 的真超理想 P 称为 n元素超理想，如果对于 R的超理想 G_1^n，$k(G_1^n) \subseteq P$ 蕴含存在某个 $1 \leq i \leq n$使 $G_i \subseteq P$。如果对于所有 $g_1^n \in G$，某个 G 的超理想 P满足 $k(g_1^n) \in P$，则存在某个 $1 \leq i \leq n$使 $g_i \in P$；根据 [1]中的引理 4.5，P是 G的 n元素超理想。设 G 中有一个带数量单位元 1 的超理想 I。用 $rad(I)$ 表示对所有包含 I的 n元素超理想 P取交。若包含 I的所有 n元素超理想的集合为空，则 $rad(I) = G$。已证明（ [1]中的定理 4.23），如果 $g \in rad(I)$，则存在 $s \in \mathbb{N}$，使得当 $s \leq n$ 时 $k(g^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in I$，或者对于 $s = l(n-1) + 1$，$k_{(l)}(g^{(s)}) \in I$。带数量单位元 1 的 G 的真超理想 I 称为 n元主超理想，如果 $k(g_1^n) \in I$ 且 $g_i \notin I$，则对某个 $1 \leq i \leq n$有 $k(g_1^{i-1}, 1, g_{i+1}^n) \in rad(I)$。[1] 中的定理 4.28 表明，$G$ 的 n元主超理想的根是 G的 n元素超理想。用 $\mathcal{HI}(G)$ 表示 G的所有超理想的集合。根据 [2]，从 $\mathcal{HI}(G)$ 到 $\mathcal{HI}(G)$ 的函数 δ 称为 G 的超理想扩张，如果 $I \subseteq \delta(I)$，并且对于 G的任意超理想 I, J，$\delta(I) \subseteq \delta(J)$。例如，映射 δ_0, δ_1 和 δ_R 分别定义为 $\delta_0(I) = I$，$\delta_1(I) = rad(I)$ 以及 $\delta_R(I) = R$，对 G的所有超理想 I 均成立，它们都是 G的超理想扩张。此外，对于包含超理想 J 的 G 的任意超理想 I，由 $\delta_q(I/J) = \delta(I)/J$ 定义的函数 δ_q 以及 G 的扩张函数 δ，是 G/J 的超理想扩张。按照 [8]，G 的真超理想 P 是 (t, n)-吸收超理想，如果对于某个 $g_1^{tn-t+1} \in G$有 $k(g_1^{tn-t+1}) \in P$，则存在 $(t-1)n-t+2$个 g_i，使其 k元乘积属于 P。根据该论文，G 的真 P称为 (t, n)-吸收主超理想，如果对于某个 $g_1^{tn-t+1} \in G$ 有 $k(g_1^{tn-t+1}) \in P$，则 $k(g_1^{(t-1)n-t+2}) \in P$，或者除 $k(g_1^{tn-t+2})$ 外的 g_i 中的 $(t-1)n-t+2$ 个元素的 k元乘积属于 $rad(P)$。n元 δ主超理想的概念于 [2]在 Krasner (m, n)-超环中引入。这个概念将 n元素超理想和 n元主超理想统一在同一框架下。G 的真超理想 Q 称为 δ主超理想，如果对于 $a_1^n \in G$有 $k(a_1^n) \in Q$，则 $a_i \in Q$，或者对某个 $1 \leq i \leq n$有 $k(a_1^{i-1}, 1, a_{i+1}^n) \in \delta(Q)$。此外，$G$ 的真超理想 Q 称为 (t, n)-吸收 δ主超理想，如果对于 $a_1^{tn-t+1} \in G$,$k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$，则 $k(a_1^{(t-1)n-t+2}) \in Q$，或者除 $k(a_1^{(t-1)n-t+2})$ 外的 a_i 中的 $(t-1)n-t+2$个元素的 k元乘积属于 $\delta(Q)$。

本文旨在定义并研究 (t, n)-吸收δ-半主超理想的概念，该概念比 Krasner (m, n)-超环中的 δ-主超理想更一般。此外，我们还提出了一个扩展概念，称为弱 (t, n)-吸收 δ-半主超理想。本文的诸多结果之一（定理 2.30）表明，若 Q 是一个弱 (t, n)-吸收 δ-半主超理想，但不是 (t, n)-吸收 δ-半主超理想，

则 $k(Q^{(tn-t+1)}) = 0$。设 Q 是 G 的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，且对某个 G的超理想 Q_1^{tn-t+1}，有 $0 \neq k(Q_1^{tn-t+1}) \subseteq Q$。定理 2.25 表明，若 Q 是关于 $k(Q_1^{tn-t+1})$ 的一个自由 δ-(t,n)-零元，则 Q_i 的 $(t-1)n-t+2$ 的k-积是 $\delta(Q)$ 的子集。此外，我们还考察了这些概念在超环的交、同态和笛卡尔积运算下的稳定性。

2. (WEAKLY) (t,n)-ABSORBING δ-SEMIPRIMAY HYPERIDEALS

在本节中，G 是一个带有数量单位元 1 的交换 Krasner (m,n)-超环。首先，我们给出 G的 (t,n)-吸收 δ-半主超理想的定义。

定义 2.1. 设 δ 是 G 的一个超理想扩张，且 t 是一个正整数。称 G 的真超理想 Q 为 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，如果对于任意 $a_1^{tn-t+1} \in G$，只要 $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$，则存在 $(t-1)n-t+2$ 个来自 $a_{,i}$的元素，其 k-积属于 $\delta(Q)$。

例 2.2. 对于 G 的所有 n 元素素超理想，我们有

n 元素素超理想 $\Longrightarrow$ n 元素 δ 主超理想 $\Longrightarrow$ (t,n)-吸收 δ 主超理想$\Longrightarrow$ (t,n)-吸收 δ 半主超理想

下一个例子表明，例 2.2 中“ $\Longrightarrow$ ”的逆命题一般并不成立。

例 2.3. 在 Krasner (2, 2)-超环 $(G = [0,1], \boxplus, \circ)$ 中，“ $\circ$ ”是实数上的通常乘法，且二元超运算“ $\boxplus$”定义为

$$a \boxplus b = \begin{cases} \{max\{a,b\}\}, & \text{if } a \neq b \\ [0,\mathrm{a}], & \text{if } a = b, \end{cases}$$

超理想 $Q = [0, 0.5]$ 是 G 的一个 (2,2)-吸收 δ_1-半主超理想，但它不是 2 元素素超理想。

定理 2.4. 设 Q 是 G 的一个 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，且满足 $rad(\delta(Q)) \subseteq \delta(rad(Q))$。则 $rad(Q)$ 是 G 的一个 (t,n)-吸收 δ-半主超理想。

证明。设 $k(a_1^{tn-t+1}) \in rad(Q)$ 对于 $a_1^{tn-t+1} \in G$，使得除了 $k(a_1^{(t-1)n-t+2})$ 之外，$a_{,i}$s 的所有 $(t-1)n-t+2$ 次乘积都不属于 $\delta(rad(Q))$。根据假设，我们得出 $a_{,i}$s 的所有 k-次乘积都不属于 $rad(\delta(Q))$。由 $k(a_1^{tn-t+1}) \in rad(Q)$ 可知，存在 $s \in \mathbb{N}$，使得当 $s \leq n$ 时，$k(k(a_1^{tn-t+1})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in Q$；当 $s > n$ 时，$k_{(l)}(k(a_1^{tn-t+1})^{(s)}) \in Q$，且 $s = l(n-1)+1$。在第一种可能性下，我们得到 $k(k(a_1)^{(s)}, k(a_2)^{(s)}, \cdots, k(a_{tn-t+1})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in Q$。由于 Q 是 t,n-吸收 δ-半主超理想 G，我们得出

$$\begin{aligned} &k(k(a_1)^{(s)}, k(a_2)^{(s)}, \cdots, k(a_{(t-1)n-t+2})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \\ &= k(k(a_1^{(t-1)n-t+2})^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in \delta(Q) \end{aligned}$$

因为 $a_{,i}$s 的所有 k-乘积都不属于 $rad(\delta(Q))$。由于 $k(a_1^{(t-1)n-t+2}) \in rad(\delta(Q))$ 且 $rad(\delta(Q)) \subseteq \delta(rad(Q))$，于是我们有 $k(a_1^{(t-1)n-t+2}) \in \delta(rad(Q))$。若 $k_{(l)}(k(a_1^{tn-t+1})^{(s)}) \in Q$，对 $s > n$和 $s = l(n-1)+1$，则同理可得。因此，$rad(Q)$ 是 G 的一个 (t,n)-吸收型 δ-半素超理想。□

以下结果是前一定理的直接推论。

推论 2.5. 如果 Q 是 G 的 (t,n)-吸收 δ_1-半主超理想，那么 $rad(Q)$ 是 G 的 (t,n)-吸收超理想。

由 [1], 在 G 中由元素 g 生成的超理想定义为 $< g >=k(G,g,1^{(n-2)}) = \{k(r,g,1^{(n-2)}) \mid r \in G\}$.。下面的定理将给出 (t,n)-吸收 δ-半主超理想的一个刻画。

定理 2.6. G 的每个真超理想都是 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，当且仅当每个真主超理想都是 G 的 (t,n)-吸收δ-半主超理想。

证明。 $\Longrightarrow$显然。

$\Longleftarrow$ 设 G 是一个真超理想，并且 Q $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$ 对于 $a_1^{tn-t+1} \in G$ 成立。因此 $k(a_1^{tn-t+1}) \in < k(a_1^{tn-t+1}) >$。由于每个真主超理想都是 G 的 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，所以存在 $(t-1)n-t+2$，使得这些$a_{,i}$ 的 k-积属于 $\delta(< k(a_1^{tn-t+1}) >) \subseteq \delta(Q)$。因此， Q 是 G 的 (t,n)-吸收δ-半主超理想。□

回顾 [2]，超理想扩张 δ of G 称为交保持的，如果对 G 中任意超理想 P 和 Q，它满足 $\delta(P \cap Q) = \delta(P) \cap \delta(Q)$。例如，超理想扩张 δ_1 of G 是交保持的。

定理 2.7. 设超理想扩张 δ of G 是交保持的。若 Q_1^s 是 G 的 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，且对每个 $1 \leq i \leq s$ 都有 $\delta(Q_i) = P$，则 $Q = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ 是 G 的 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，且 $\delta(Q) = P$。

证明。假设对于满足 $k(a_1^{(t-1)n-t+2}) \notin \delta(Q)$ 的 $a_1^{tn-t+1} \in G$，有 $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$。由于 $\delta(Q) = \delta(\cap_{i=1}^{s} Q_i) = \cap_{i=1}^{s} \delta(Q_i) = P$，因此存在 $1 \leq u \leq s$ 使得 $k(a_1^{(t-1)n-t+2}) \notin \delta(Q_u)$。由于 Q_u 是 G 的 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，且 $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q_u$，因此存在一个 k-积 $(t-1)n-t+2$，其中 $a_{,i}$ 属于 $\delta(Q_u) = P = \delta(Q)$。因此， $Q = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ 是 G 的 (t,n)-吸收δ-半主超理想，且 $\delta(Q) = P$。□

设 (G_1,h_1,k_1) 和 (G_2,h_2,k_2) 是两个 Krasner (m,n)-超环，且 1_{G_1} 和 1_{G_2} 分别是 G_1 和 G_2 的标量单位元。那么 $(G_1 \times G_2, h = h_1 \times h_2, k = k_1 \times k_2)$ 是一个 Krasner (m,n)- 超环，其中

$h_1 \times h_2((a_1,b_1) \cdots, (a_m,b_m)) = \{(a,b) \mid a \in h_1(a_1^m)\ b \in h_2(b_1^m)\}$, $k_1 \times k_2((a_1, b_1) \cdots, (a_n,b_n)) = (k_1(a_1^n)\ k_2(b_1^n))$, 对所有 $a_i \in G_1$ 和 $b_i \in G_2$ [6] 成立。

定理 2.8. 设 δ_1 和 δ_2 分别是 Krasner (m,n)-超环 G_1 和 G_2 的两个超理想扩张，且对于 G_1 和 G_2 的超理想 Q_1 和 Q_2，有 $\delta(Q_1 \times Q_2) = \delta_1(Q_1) \times \delta_2(Q_2)$。如果 $Q = Q_1 \times Q_2$ 是 $G = G_1 \times G_2$ 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ-半初等超理想，则 Q_1 是 G_1 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ_1-半初等超理想且 $\delta_2(Q_2) = G_2$，或 Q_2 是 G_2 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ_2-半初等超理想且 $\delta_1(Q_1) = G_1$，或 Q_i 是 G_i 的一个 (t,n)-吸收 δ_i-半初等超理想，对每个 $i \in \{1,2\}$ 成立。

证明。设 $Q = Q_1 \times Q_2$ 是 $G = G_1 \times G_2$ 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ-半素超理想。假设 $\delta_1(Q_1) \neq G_1$ 且 $\delta_2(Q_2) = G_2$。我们假设

$k_1(a_1^{(t+1)n-t}) \in Q_1$，其中 $a_1^{(t+1)n-t} \in G_1$ 满足：除 $k_1(a_1^{tn-t+1})$ 外，$tn-t+1$ 个 a_i 的所有乘积都不属于 $\delta(Q_1)$。注意，$k((a_1,0)\cdots,(a_{(t+1)n-t},0)) \in Q$，且 $tn-t+1$ 个 $(a_i,0)$ 的所有乘积都不属于 $\delta(Q)$。由于 Q 是 G 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ-半素超理想，我们得到 $k((a_1,0)\cdots,(a_{tn-t+1},0)) \in \delta(Q) = \delta_1(Q_1)\times\delta_2(Q_2)$，这意味着 $k_1(a_1^{tn-t+1}) \in \delta(Q_1)$。因此，$Q_1$ 是 G_1 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ_1-半素超理想。第二个断言的证明类似。对于第三个断言，假设 $\delta_1(Q_1) \neq G_1$ 且 $\delta_2(Q_2) \neq G_2$。此外，假设 Q_1 不是 G_1 的一个 (t,n)-吸收 δ-半素超理想，且 $k_1(a_1^{tn-t+1}) \in Q_1$。我们定义 G 的以下元素：$x_1 = (a_1,1_{G_2})$ $x_2 = (a_2,1_{G_2})\cdots, x_{tn-t+1} = (a_{tn-t+1},1_{G_2})$ $x_{(t-1)n-t+2} = (1_{G_1},0)$。因此，我们有 $k(x_1^{(t-1)n-t+2}) = (k_1(a_1^{tn-t+1}),0) \in Q$，$k(x_1^{tn-t+1}) = (k_1(a_1^{tn-t+1})\ 1_{G_2}) \notin \delta(Q)$，且 $k(x_1,\cdots,\hat{x_i},\cdots,x_{(t-1)n-t+2}) = (k_1(a_1,\cdots,\hat{a_i},\cdots,a_{(t-1)n-t+2}),0) \notin \delta(Q)$，其中 $1 \leq i \leq tn-t+1$，这就导致矛盾。因此，Q_1 是 G_1 的一个 (t,n)-吸收 δ_1-半素超理想。类似地，我们可得 Q_2 是 G_2 的一个 (t,n)-吸收 δ_2-半素超理想。□

定理 2.9. 设 δ_1、$\cdots$、δ_{tn-t+1} 是 Krasner (m,n)-超环 G_1、$\cdots$、G_{tn-t+1} 的超理想扩张，使得对于 G_1、$\cdots$、G_{tn-t+1} 中的超理想 Q_1、$\cdots$、Q_{tn-t+1}，分别有 $\delta(Q_1\times\cdots\times Q_{tn-t+1}) = \delta_1(Q_1)\times\cdots\times\delta_{tn-t+1}(Q_{tn-t+1})$。若 $Q = Q_1\times\cdots\times Q_{tn-t+1}$ 是 $G = G_1\times\ldots\times G_{tn-t+1}$ 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ-半主超理想，则或者对于某个 $1 \leq u \leq tn-t+1$，Q_u 是 G_u 的一个 $(t+1,n)$-吸收 δ-半主超理想，并且对每个 $1 \leq i \leq tn-t+1$ 和 $i \neq u$ 都有 $\delta_i(Q_i) = G_i$；或者对于某些 u、$v \in \{1,\cdots,tn-t+1\}$，以及除 $i \neq u$、v 外的所有 $1 \leq i \leq tn-t+1$，有 $\delta_i(Q_i) = G_i$，且 Q_u 和 Q_v 分别是 G_u 和 G_v 的 (t,n)-吸收 δ_u、$_v$-半主超理想。

证明。可以看出，该结论与定理2.8的证明类似。□

现在，我们希望将（t，n）-吸收 δ-半主超理想的概念扩展到弱（t，n）-吸收 δ-半主超理想。尽管二者在许多方面有所不同，但也具有相当多的相似性质。

定义 2.10。设 G 的一个超理想扩张为 δ，且 t 为正整数。若 G 的一个真超理想 Q 满足：当 $a_1^{tn-t+1} \in G$ 和 $0 \neq k$（a_1^{tn-t+1}）$\in Q$ 时，则存在（$t-1$）$n-t+2$，使得 $a,\ i$ 个 k-积属于 δ（Q）。

例 2.11. 设 $\mathbb{Z}_{12}$ 是模 12 整数的所有同余类的集合，且 $H = \{1,5,7,11\}$ 是单位元 $\mathbb{Z}_{12}$ 的乘法子群。将 G 构造为 $\mathbb{Z}_{12}/H$。于是我们有 $G = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{6}\}$，其中 $\bar{0} = \{0\}$、$\bar{1} = \{1,5,7,11\}$、$\bar{2} = \bar{10} = \{2,10\}$、$\bar{3} = \bar{9} = \{3,9\}$、$\bar{4} = \bar{8} = \{4,8\}$、$\bar{6} = \{6\}$。考虑 Krasner $\bar{}$ $\bar{}$超环（G、$\oplus$、$\star$），对所有 $\bar{a}$、$b \in G$、$\bar{a}\star b = \overline{ab}$，二元超运算 $\oplus$ 定义如下：

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{2},\bar{4}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{0},\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2},\bar{6}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2},\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0},\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{2},\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{0},\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

容易看出， G 的超理想 $Q = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6}\}$ 是一个（2,2）-吸收δ_1-半主超理想。

定理 2.12. 如果 Q 是 G 的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想，那么对于所有 $v > n$, Q 都是（弱）(v,n)-吸收 δ-半主超理想。

证明。通过采用与 [8], 中定理 4.4 的证明类似的论证，可以完成证明。□

定理 2.13. 设 Q 是 G 的一个真超理想。如果 $\delta(Q)$ 是 G 的一个（弱）(t,n)-吸收超理想，那么 Q 是 G 的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想。

证明。设 $(0 \neq k(a_1^{tn-t+1}) \in Q)$ $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$，使得除 $k(a_1^{(t-1)n-t+2})$ 外， a_is 的所有 $(t-1)n-t+2$ 次乘积都不属于 $\delta(Q)$。由于 $\delta(Q)$ 是 G 的一个（弱）(t,n)-吸收超理想，并且 $Q \subseteq \delta(Q)$，我们得出 $k(a_1^{(t-1)n-t+2}) \in \delta(Q)$。这表明 Q 是 G 的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想。□

定理 2.14. 设 Q 是 G 的真超理想，且 $\delta(\delta(Q)) = \delta(Q)$。那么，$\delta(Q)$ 是 G 的（弱）(t,n)-吸收超理想，当且仅当 $\delta(Q)$ 是 G的（弱）(t,n)-吸收 δ-半素超理想。

证明. $\Longrightarrow$ 假设 $\delta(Q)$ 是 G的（弱）(t,n)-吸收超理想。由于 $\delta(\delta(Q)) = \delta(Q)$，由定理 2.13 即得结论。

$\Longleftarrow$ 设 $\delta(Q)$ 是 G的（弱）(t,n)-吸收 δ-半素超理想。假设 $(0 \neq k(a_1^{tn-n+1}) \in \delta(Q))$ $k(a_1^{tn-n+1}) \in \delta(Q)$。由于 $\delta(Q)$ 是 G 的（弱） (t,n)- 吸收 δ- 半素超理想，因此存在 $(t-1)n-t+2$ 个 a_i，其 k-积属于 $\delta(\delta(Q))$。由于 $\delta(\delta(Q)) = \delta(Q)$，因此这些 a_i 的 $(t-1)n-t+2$ 的 k-积属于 $\delta(Q)$，这意味着 $\delta(Q)$ 是 G的（弱）(t,n)-吸收超理想。□

定理 2.15. 设 Q 是G 的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想， P 是 G 的一个真超理想，且 $P \subseteq Q$。若 $\delta(Q) = \delta(P)$，则 P 是 G的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想。

证明。假设对于 $a_1^{tn-t+1} \in G$, $(0 \neq k(a_1^{tn-t+1}) \in P)$ $k(a_1^{tn-t+1}) \in P$。根据假设，我们得到 $(0 \neq k(a_1^{tn-t+1}) \in Q)$ $k(a_1^{tn-t+1}) \in Q$，这意味着存在 a 个 i，其 k-积属于 $\delta(Q)$，因为 Q 是 G 的一个（弱） (t,n)- 吸收 δ- 半主超理想。由 $\delta(Q) = \delta(P)$ 可知，$(t-1)n-t+2$ 个 a 的 k-积属于 $\delta(P)$，这意味着 P 是 G 的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想。□

定义 2.16。设 Q 是 G 的一个真超理想。若对于 G 的某些超理想 Q_1^{tn-t+1}，当 $(0 \neq k(Q_1^{tn-t+1}) \subseteq Q)$ $k(Q_1^{tn-t+1}) \subseteq Q$ 时，存在 $(t-1)n-t+2$ 个 Q_is，使其 k-积是 $\delta(Q)$ 的子集，则 Q 称为强（弱）(t,n)- 吸收 δ- 半主超理想。

定义 2.17. 假设 G 是一个交换 Krasner $(m, 2)$-超环，且 Q 是 G 的弱 (2, 2)-吸收 δ-半首项超理想。那么，对于某些 x、y、$z \in G$，若 $k(x,y,z) = 0$，$k(x,y) \notin \delta(Q)$，$k(y,z) \notin \delta(Q)$ 且 $k(x,z) \notin \delta(Q)$，则称 (x,y,z) 是 Q 的一个 δ-(2, 2)-零点。

定理 2.18. 设 G 是一个交换 Krasner $(m, 2)$-超环，Q 是 G 的弱 (2, 2)-吸收 δ-半首项超理想，且对于某些 x、$y \in$、G，$k(Q_1,x,y) \subseteq Q$，其中 Q_1 是 G 的一个超理想。若对于所有 $q \in Q_1$，(q,x,y) 都不是 Q 的 δ-(2, 2)-零点，且 $k(x,y) \notin \delta(Q)$，则 $k(Q_1,x) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(Q_1,y) \subseteq \delta(Q)$。

证明。设 $k(Q_1,x,y) \subseteq Q$，其中 x、$y \in G$ 是 G 的超理想 Q_1，但 $k(x,y) \notin \delta(Q)$、$k(Q_1,x) \nsubseteq \delta(Q)$ 且 $k(Q_1,y) \nsubseteq \delta(Q)$。于是，对于某些 q_1、$q_2 \in Q_1$，有 $k(q_1,x) \nsubseteq \delta(Q)$ 且 $k(q_2,y) \nsubseteq \delta(Q)$。由于 (q_1,x,y) 不是 Q 的 δ-(2, 2)-零元，且 $k(q_1,x,y) \in Q$，我们得到 $k(q_1,y) \in \delta(Q)$。同理，有 $k(q_2,x) \in \delta(Q)$。注意到 $k(h(q_1,q_2,0^{(m-2)})\ x,y) = h(k(q_1,x,y)\ k(q_2,x,y)\ 0^{(m-2)}) \subseteq Q$。于是得到 $k(h(q_1,q_2,0^{(m-2)})\ x) = h(k(q_1,x)\ k(q_2,x)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(h(q_1,q_2,0^{(m-2)})\ y) = h(k(q_1,y)\ k(q_2,y)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$。由此可知，$k(q_1,x) \in h(-k(q_2,x)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(q_2,y) \in h(-k(q_1,y)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，二者均导致矛盾。因此，$k(Q_1,x) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(Q_1,y) \subseteq \delta(Q)$。□

定理 2.19. 设 G 是一个交换 Krasner $(m, 2)$-超环，Q 是 δ的一个弱 (2, 2)-吸收 G-半主超理想，且 $k(Q_1,Q_2,x) \subseteq Q$，其中 $x \in G$，Q_1、Q_2 是 G的两个超理想。若对于所有$q_1 \in Q_1$ 和 $q_2 \in Q_2$，(q_1,q_2,x) 不是 Q 的 δ-(2, 2)-零点，则 $k(Q_1,x) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(Q_2,x) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(Q_1,Q_2) \subseteq \delta(Q)$。

证明. 设 $k(Q_1,Q_2,x) \subseteq Q$，$k(Q_1,x) \nsubseteq \delta(Q)$，$k(Q_2,x) \nsubseteq \delta(Q)$，且 $k(Q_1,Q_2) \nsubseteq \delta(Q)$。于是，对于某些 $q, q_1 \in Q_1$，我们得到 $k(q,x) \notin \delta(Q)$ 以及 $k(q_1,Q_2) \nsubseteq \delta(Q)$。根据定理 2.18，我们得出 $k(q,Q_2) \subseteq \delta(Q)$，因为 $k(q,Q_2,x) \subseteq Q$，$k(q,x) \notin \delta(Q)$，且 $k(Q_2,x) \nsubseteq \delta(Q)$。此外，由定理 2.18，我们得到 $k(q_1,x) \in \delta(Q)$。注意，$k(h(q,q_1,0^{(m-2)})\ Q_2,x) = h(k(q,Q_2,x)\ k(q_1,Q_2,x)\ 0^{(m-2)}) \subseteq Q$。于是我们有 $k(h(q,q_1,0^{(m-2)})\ Q_2) = h(k(q,Q_2)\ k(q_1,Q_2)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$，这意味着 $k(q_1,Q_2) \subseteq h(-k(q,Q_2)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(h(q,q_1,0^{(m-2)})\ x) = h(k(q,x)\ k(q_1,x)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$，从而推出 $k(q,x) \in h(-k(q_1,x)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$。这是一个矛盾。因此，$k(Q_1,x) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(Q_2,x) \subseteq \delta(Q)$，或$k(Q_1,Q_2) \subseteq \delta(Q)$。□

定义 2.20. 设 G 是一个交换 Krasner $(m, 2)$-超环，且 Q_1^3、Q 是 G 的一些真超理想，使得 Q 是 G 的弱 (2, 2)-吸收 δ-半素超理想。如果对于任意 $q_1 \in Q_1$、$q_2 \in Q_2$ 和 $q_3 \in Q_3$，(q_1,q_2,q_3) 都不是 Q 的 δ-(2, 2)-零，则称 Q 是关于 $k(Q_1^3)$ 的自由 δ-(2,2)-零。

定理 2.21. 设 G 是一个交换 Krasner $(m, 2)$-超环，Q 是 G的弱 (2, 2)-吸收 δ-半主超理想，并且 $0 \neq k(Q_1,Q_2,Q_3) \subseteq Q$ 对于

某些超理想 Q_1^3 属于 G。如果 Q 关于 $k(Q_1^3)$ 是一个自由 δ-(2,2)-零元，那么 $k(Q_1^2) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(Q_2^3) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(Q_1, Q_3) \subseteq \delta(Q)$。

证明。假设 $k(Q_1^3) \subseteq Q$ 但 $k(Q_1^2) \nsubseteq \delta(Q)$ 或 $k(Q_2^3) \nsubseteq \delta(Q)$ 或 $k(Q_1, Q_3) \nsubseteq \delta(Q)$。这意味着，对于某些 $q, q_1 \in Q_1$，有 $k(q, Q_2) \nsubseteq \delta(Q)$ 且 $k(q_1, Q_3) \nsubseteq \delta(Q)$。根据定理 2.19，我们得到 $k(q, Q_3) \subseteq \delta(Q)$，因为 $k(q, Q_2^3) \subseteq Q$, $k(Q_2^3) \nsubseteq \delta(Q)$ 且 $k(q, Q_2) \nsubseteq \delta(Q)$。此外，根据定理 2.19，我们得到 $k(q_1, Q_2) \nsubseteq \delta(Q)$，因为 $k(q_1, Q_2^3) \subseteq Q$, $k(Q_2^3) \nsubseteq \delta(Q)$ 且 $k(q_1, Q_2) \nsubseteq \delta(Q)$。由于 $k(h(q, q_1)\ Q_2^3) \subseteq Q$ 且 $k(Q_2^3) \nsubseteq \delta(Q)$，我们有 $k(h(q, q_1, 0^{(m-2)})\ Q_2) = h(k(q, Q_2)\ k(q_1, Q_2)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(h(q, q_1, 0^{(m-2)})\ Q_3) = h(k(q, Q_3)\ k(q_1, Q_3)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$。在第一种情况下，我们得出 $k(q, Q_2) \in h(-k(q_1, Q_2)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，这与矛盾相冲突。此外，第二种情况也导致矛盾，因为 $k(q_1, Q_3) \in h(-k(q, Q_3)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$。因此，$k(Q_1^2) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(Q_2^3) \subseteq \delta(Q)$ 或 $k(Q_1, Q_3) \subseteq \delta(Q)$。□

定义 2.22. 设 Q 是 G 的一个弱 k, n-吸收 δ-半主超理想。若 $(a_1, \cdots, a_{tn-t+1})$ 是 Q 的 δ-(t, n)-零点，即 $k(a_1^{tn-t+1}) = 0$，且 $(t-1)n - t + 2$ 中各项的任意 k-乘积 a_is 均属于 $\delta(Q)$，则称 $(a_1, \cdots, a_{tn-t+1})$ 为 Q 的 δ-(t, n)-零点。

定理 2.23. 设 Q 是 G 的一个弱 t, n-吸收 δ-半主超理想，且对于某个 $a_1^{tn-t+1} \in G$ 以及 G 的某些超理想 $Q_1, \cdots Q_s$，有 $k(a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_2}, \cdots, \hat{a}_{i_s}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1^s) \subseteq Q$，其中 $1 \leq i_1, \cdots, i_s \leq tn-t+1$ 且 $1 \leq s \leq (t-1)n-t+2$。若对于所有 $q_i \in Q_i$，$(a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_2}, \cdots, \hat{a}_{i_s} \cdots, a_{tn-t+1}, q_1^s)$ 都不是 Q 的 δ-(t, n)-零点，则 $(t-1)n - t + 2$ 中 $a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_2}, \cdots, \hat{a}_{i_s}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1^s$ 的 k-乘积，只要包含至少一个 Q_is，就属于 $\delta(Q)$。

证明。我们对 s 使用归纳法进行证明。考虑 $s = 1$。在这种情况下，我们证明，包含 Q_1 的 $a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1$ 的 $(t-1)\ n-t+2$ 的 k-积属于 $\delta(Q)$。假设 $(t-1)\ n-t+2$ 的 $a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1$ 的所有积均不属于 $\delta(Q)$。我们考虑 $k(a_2^{(t-1)n-t+2}, Q_1) \notin \delta(Q)$。由于对于所有 $q_1 \in Q_1$，(a_2^{tn-t+1}, q_1) 都不是 Q 的 δ-(t, n)-零元，因此我们得到，a_is 与 q_1 的 $(t-1)\ n-t+2$ 的 k-积属于 $\delta(Q)$。通过类似于定理 2.18 证明中的论证，我们有 $k(a_3^{tn-t+1}, h(a_1, q_1, 0^{(m-2)})) = h(k(a_3^{tn-t+1}, a_1)\ k(a_3^{tn-t+1}, q_1)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$，这意味着 $k(a_3^{tn-t+1}, a_1) \in h(-k(a_3^{tn-t+1}, q_1)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，矛盾。这意味着，包含 Q_1 的 $a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1$ 的 $(t-1)\ n-t+2$ 的 k-积属于 $\delta(Q)$。现在，我们假设该断言对所有小于 s 的正整数都成立。令 $k(a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_2}, \cdots, \hat{a}_{i_s}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1^s) \subseteq Q$，但包含至少一个 Q_is 的 $a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_2}, \cdots, \hat{a}_{i_s}, \cdots, a_{tn-t+1}, Q_1^s$ 的 $(t-1)\ n-t+2$ 的所有积均不属于 $\delta(Q)$。不妨设 $k(a_{s+1}^{tn-t+1}, Q_1^s) \notin \delta(Q)$。注意，对于所有 $q_1^s \in Q$，$(a_{s+1}^{tn-t+1}, q_1^s)$ 都不是 Q 的 δ-(t, n)-零元。根据归纳假设和定理 2.19，我们得到 $k(a_{s+1}^{tn-t+1}, h(a_1, q_1, 0^{(m-2)}) \cdots, h(a_s, q_s, 0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$。于是我们得到

$$k(a_{s+1}^{tn-t+1}, h(a_1, q_1, 0^{(m-2)}), \cdots, h(a_1, \hat{q}_1, 0^{(m-2)})_{i_1}, \cdots, h(a_2, \hat{q}_2, 0^{(m-2)})_{i_2}, \cdots, h(a_{n-1}, \hat{q}_{n-1}, 0^{(m-2)})_{i_{n-1}}, \cdots, h(a_s, q_s, 0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$$

or

$$k(a_{s+1}, \cdots, \hat{a}_{i_{s+1}}, \cdots, \hat{a}_{i_{s+2}}, \cdots, \hat{a}_{i_{s+n-1}}, \cdots, a_{tn-t+1}, h(a_1, q_1, 0^{(m-2)}), \cdots, h(a_s, q_s, 0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$$

对于某些 $i \in \{1, \cdots, s\}$。这意味着 $k\ a_{s+1}, (\cdots, a_{tn-t+1}, \cdots, a_n, \cdots, a_s) \in \delta(Q)$ 或 $k(a_{s+n}, \cdots, a_{tn-t+1}, \cdots, a_1^s) \in \delta(Q)$，矛盾。于是我们得出

k-$(t-1)n-t+2$的 a_1、$\cdots$、$\hat{a}_{i_1}$、$\cdots$、$\hat{a}_{i_2}$、$\cdots$、$\hat{a}_{i_s}$、$\cdots$、a_{tn-t+1}、Q_1^s的乘积，其中至少包含一个 Q, $_i$s，属于 $\delta(Q)$。□

定义 2.24. 假设 Q_1^n, Q 是 G 的一些真超理想，且 Q 是 G 的弱 (t,n)-吸收 δ-半素初超理想，并且 $k(Q_1^{tn-t+1}) \subseteq Q$。若对于每个满足 $1 \leq i \leq tn-t+1$ 的 $q_i \in Q_i$，$(q_1, \cdots, q_{tn-t+1})$ 都不是 Q 的 δ-(t,n)-零元，则称 Q 是相对于 $k(Q_1^{tn-t+1})$ 的自由 δ-(t,n)-零元。

定理 2.25. 假设 Q 是 G 的弱 (t,n)-吸收 δ-半素初超理想，且对于某些 G 的超理想 Q_1^{tn-t+1}，有 $0 \neq k(Q_1^{tn-t+1}) \subseteq Q$。若 Q 是相对于 $k(Q_1^{tn-t+1})$ 的自由 δ-(t,n)-零元，则这些 Q_i 中 $(t-1)n-t+2$ 的 k-乘积是 $\delta(Q)$ 的子集。

证明。根据定理 2.23，采用与证明定理 2.21 非常相似的方法即可证明。□

定理 2.26. 设 G 是一个交换 Krasner $(m,2)$-超环，且 Q 是 G的一个弱 (2, 2)-吸收 δ-半素超理想。若对于某些 $x, y, z \in G$，(x, y, z)是 Q 的一个 δ-(2, 2)-零元，则

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad k(x,y,Q) = k(y,z,Q) = k(x,z,Q) = 0 \\ &\text{(ii)} \quad k(x,Q^{(2)}) = k(y,Q^{(2)}) = k(z,Q^{(2)}) = 0 \end{aligned}$$

证明。(i) 设 Q 是 G 的一个弱 (2, 2)-吸收 δ-半素超理想，且(x, y, z)是 Q的一个 δ-(2, 2)-零元。假设 $k(x, y, Q) \neq 0$。这意味着对于某个 $q \in Q$，有 $k(x, y, q) \neq 0$。因此，我们有 $0 \neq k(x, h(z, q, 0^{(m-2)})\ y) = h(k(x, z, y)\ k(x, q, y)\ 0^{(m-2)}) \subseteq Q$。由于 Q 是弱 (2, 2)-吸收 δ-半素超理想，且 $k(x, y) \notin \delta(Q)$，我们得到 $k(x, h(z, q, 0^{(m-2)})) = h(k(x, z)\ k(x, q)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$，或者 $k(h(z, q, 0^{(m-2)})\ y) = h(k(z, y)\ k(q, y)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$。在第一种情况下，我们有 $k(x, z) \in h(-k(x, q)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，这与假设矛盾。第二种情况也会导致矛盾，因为 $k(z, y) \in h(-k(q, y)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$。因此，$k(x, y, Q) = 0$。其他情形同理。

(ii) 令 $k(x, Q^{(2)}) \neq 0$。这意味着，对于某些 q_1、$q_2 \in Q$，$k(x, q_1^2) \neq 0$。因此

$$\begin{aligned} 0 &\neq k(x, h(y, q_1, 0^{(m-2)}), h(z, q_2, 0^{(m-2)})) \\ &= h(k(x, y, z), k(x, y, q_2), k(x, q_1, z), k(x, q_1^2), 0^{(m-4)}) \\ &\subseteq Q. \end{aligned}$$

由于 Q 是 G 的弱 (2, 2)-吸收 δ-半素超理想，我们得到以下情形：

情形 1。$k(x, h(y, q_1, 0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$，这意味着 $h(k(x, y)\ k(x, q_1)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$。于是有 $k(x, y) \in h(-k(x, q_1)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，矛盾。情形 2。$k(x, h(z, q_2, 0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$，这意味着 $h(k(x, z)\ k(x, q_2)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$。由此可得 $k(x, z) \in h(-k(x, q_2)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，矛盾。情形 3。$k(h(y, q_1, 0^{(m-2)})\ h(z, q_2, 0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$，因此 $h(k(y, z)\ k(q_1, z)\ k(y, q_2)\ k(q_1^2)\ 0^{(m-4)}) \subseteq \delta(Q)$。这意味着 $k(y, z) \in h(-k(q_1, z)\ -k(y, q_2)\ -k(q_1^2)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$，这与矛盾相矛盾。

因此 $k(x, Q^{(2)}) = 0$。其他情况类似。□

定理 2.27. 设 G 是一个交换 Krasner $(m,2)$-超环，Q 是 G 的弱 (2,2)-吸收 δ-半初等超理想，但不是 (2,2)-吸收的 δ-半初等超理想。那么 $k(Q^{(3)}) = 0$。

证明。设 Q 是 G 的一个弱（2, 2）-吸收 δ-半主超理想，但不是（2, 2）-吸收 δ-半主超理想。这意味着，对于某些 x、y、$z \in G$，我们有一个 Q 的 δ-(2, 2)-零点。假设 $k(Q^{(3)}) \neq 0$。则对于某个 $q_1^3 \in Q$，有 $k(q_1^3) \neq 0$。因此，我们有

$$\begin{aligned} &k(h(x,q_1,0^{(m-2)}),h(y,q_2,0^{(m-2)}),h(z,q_3,0^{(m-2)}))\\ &= h(h(h(k(x,y,z),k(q_1,y,z),0^{(m-2)}),h(k(x,y,q_3),k(q_1,y,q_3),0^{(m-2)})),\\ &\quad h(h(k(q_2,x,z),h(q_1^2,z),0^{(m-2)})),h(h(k(q_1^3),k(x,q_2^3)),0). \end{aligned}$$

由 q $k($ $_1^3$列得，0 $\in$ δ (Q)。 a th t

$$0 \neq k(h(x,q_1,0^{(m-2)}),h(y,q_2,0^{(m-2)}),h(z,q_3,0^{(m-2)})) \subseteq Q$$

根据定理 2.26。由于 Q 是弱 2, 2-吸收 δ-(半主)超理想，我们有 $k(h(x,q_1,0^{(m-2)})\ h(y,q_2,0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(h(x,q_1,0^{(m-2)})\ h(z,q_3,0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$，或 $k(h(x,q_1,0^{(m-2)})\ h(z,q_3,0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q)$。在第一种可能性中，我们得到 $h(k(x,y)\ k(x,q_2)\ k(q_1,y)\ k(q_1^2)\ 0^{(m-4)}) \subseteq \delta(Q)$，这意味着 $k(x,y) \in h(-k(x,q_2)\ -k(q_1,y)\ -k(q_1^2)\ 0^{(m-3)}) \subseteq \delta(Q)$，这与假设矛盾。此外，其他可能性也会导致矛盾。因此，$k(Q^{(3)}) = 0$。□

定义 2.28. 假设 Q 是 G 的一个弱 (k,n)-吸收 δ-半主超理想。那么，如果 $k(a_1^{tn-t+1}) = 0$ 且 $(t-1)n-t+2$ 中的项的任意 k-乘积均不属于 $\delta(Q)$，则 $(a_1,\cdots,a_{tn-t+1})$ 称为 Q 的 δ-(t,n)-零，$_i$ s。

定理 2.29. 如果 Q 是 G 的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，且 $(a_1,\cdots,a_{tn-t+1})$ 是 Q 的 δ-(t,n)-零，那么对于 $1 \leq i_1,\cdots,i_s \leq tn-t+1$ 和 $1 \leq s \leq (t-1)n-t+2$，

$$k(a_1,\cdots,\hat{a}_{i_1},\cdots,\hat{a}_{i_2},\cdots,\hat{a}_{i_s},\cdots,a_{tn-t+1},Q^{(s)}) = 0.$$

证明. 我们对 s 使用归纳法。假设 $s = 1$。设 $k(a_1,\cdots,\hat{a}_{i_1},\cdots,a_{tn-t+1},Q) \neq 0$。不妨设 $k(a_2^{tn-t+1},Q) \neq 0$。因此，对于某个 $q \in Q$，有 $k(a_2^{tn-t+1},q) \neq 0$。于是，包含 q 的 a_is 的 $(t-1)n-t+2$ 的每个 k- 乘积都属于 $\delta(Q)$。由定理 2.26 中给出的相同论证，我们有 $k(a_3^{tn-t+1},h(a_1,q,0^{(m-2)})) = h(k(a_3^{tn-t+1},a_1)\ k(a_3^{tn-t+1},q)\ 0^{(m-2)}) \subseteq \delta(Q)$，这意味着 $k(a_3^{tn-t+1},a_1) \in h(-k(a_3^{tn-t+1},q)\ 0^{(m-1)}) \subseteq \delta(Q)$，矛盾。这意味着 $k(a_1,\cdots,\hat{a}_{i_1},\cdots,a_{tn-t+1},Q) = 0$。现在，设 $k(a_1,\cdots,\hat{a}_{i_1},\cdots,\hat{a}_{i_2},\cdots,\hat{a}_{i_s},\cdots,a_{tn-t+1},Q^{(s)}) \neq 0$。不妨设 $k(a_{s+1}^{tn-t+1},Q^{(s)}) \neq 0$。因此，对于某个 $q_1^s \in Q$，有 $0 \neq k(a_{s+1}^{tn-t+1},q_1^s) \in Q$。由定理 2.26 和归纳假设可得 $0 \neq k(a_{s+1}^{tn-t+1},h(a_1,q_1,0^{(m-2)})\ \cdots,h(a_s,q_s,0^{(m-2)})) \subseteq Q$。于是我们得到

$$\begin{aligned} &k(a_{s+1}^{tn-t+1},h(a_1,q_1,0^{(m-2)}),\cdots,h(a_1,\hat{q}_1,0^{(m-2)})_{i_1},\cdots,h(a_2,\hat{q}_2,0^{(m-2)})_{i_2},\\ &\quad\cdots,h(a_{n-1},\hat{q}_{n-1},0^{(m-2)})_{i_{n-1}},\cdots,h(a_s,q_s,0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} &k(a_{s+1},\cdots,\hat{a}_{i_{s+1}},\cdots,\hat{a}_{i_{s+2}},\cdots,\hat{a}_{i_{s+n-1}},\cdots,a_{tn-t+1},h(a_1,q_1,0^{(m-2)}),\\ &\quad\cdots,h(a_s,q_s,0^{(m-2)})) \subseteq \delta(Q) \end{aligned}$$

对于某些 $i \in \{1,\cdots,s\}$ s mpl s t at $a_{i+1},\cdots,a_{tn-t+1},\cdots,a_n,\cdots,a_s) \in \delta(Q)$ 或 $k(a_{s+n},\cdots,a_{tn-t+1},\cdots,a_1^s) \in \delta(Q)$，这与矛盾相悖。因此，我们得出 $k(a_1,\cdots,\hat{a}_{i_1},\cdots,\hat{a}_{i_2},\cdots,\hat{a}_{i_s},\cdots,a_{tn-t+1},Q^{(s)}) = 0$。□

定理 2.30。设 Q 是 G 的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半素超理想，但它不是 (t,n)-吸收 δ-半素超理想。那么 $k(Q^{(tn-t+1)}) = 0$。

证明。假设 Q 是 δ-半主超理想中的一个弱（t， n）-吸收 δ-半主超理想，但不是（t， n）-吸收的 δ-半主超理想。那么，存在一个 δ-（t， n）-零（a_1， $\cdots$， a_{tn-t+1}）属于 Q。现在，利用定理 2.29，并以与定理 2.27 的证明方式非常相似的方法，即可得到该结论。□

作为上述定理的一个直接推论，我们得到以下明确结果。

推论 2.31. 设 Q 是 δ-半主超理想中的一个弱（t， n）-吸收 δ-半主超理想，但不是（t， n）-吸收的 δ-半主超理想。则 $Q \subseteq rad(0)$。

推论 2.32. 假设交换 Krasner (m,n)-超环 G 没有非零幂零元。如果 Q 是 G的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半素超理想，那么 Q 是 G的一个 (t,n)-吸收 δ-半素超理想。

下一个定理说明了如何判定弱 (t,n)-吸收δ-半素超理想为 (t,n)-吸收 δ-半素超理想。

定理 2.33. 设 Q 是 G的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半素超理想，且 $\delta(Q) = \delta(0)$。那么，当且仅当存在一个 δ-(t,n)-零点时， Q 不是 (t,n)-吸收 δ-半素超理想。

证明. $\Longrightarrow$ 假设 Q 不是G的一个 (t,n)-吸收 δ-半素超理想。这意味着 $k(a_1^{tn-t+1}) = 0$，并且对于某个 $a_1^{tn-t+1} \in G$， $(t-1)n-t+2$的各项中没有任何一个 k-乘积属于 $\delta(Q)$, $_i$ s。由 $\delta(Q) = \delta(0)$ 可知，(a_1^{tn-t+1}) 是 0 的一个 δ-(t,n)-零点。

$\Longleftarrow$ 直接的　　□

设 (G_1,h_1,k_1) 和 (G_2,h_2,k_2) 是两个交换 Krasner (m,n)-超环。回顾 [14]，映射 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 称为同态，如果对于所有 $a_1^m \in G_1$ 和 $b_1^n \in G_1$，有 $f(h_1(a_1^m)) = h_2(f(a_1) \cdots, f(a_m))$，以及 $f(k_1(b_1^n)) = k_2(f(b_1) ..., f(b_n))$。令 δ 和 δ' 分别为 G_1 和 G_2 的超理想扩张。回顾 [2]，如果对于 G_2 的超理想 Q_2， $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 满足 $\delta(f^{-1}(Q_2)) = f^{-1}(\delta'(Q_2))$，则称其为 $\delta\delta'$-同态。注意，对于 f-满同态 $\delta\delta'$ 以及满足 $Ker(f) \subseteq Q_1$的 G_1 的超理想 Q_1，有 $\delta'(h(Q_1) = h(\delta(Q_1)$。

定理 2.34. 设 (G_1,h_1,k_1) 和 (G_2,h_2,k_2) 是两个 Krasner (m,n)-超环，且 $f: G_1 \longrightarrow G_2$ 是一个 $\delta\delta'$-同态。则有：

(i) 若 Q_2 是 G_2的一个 (t,n)-吸收 δ'-半主超理想，则 $f^{-1}(Q_2)$ 是 G_1的一个 (t,n)-吸收 δ-半主超理想。(ii) 若 Q_2 是 G_2 的一个弱 (t,n)-吸收 δ'-半主超理想，且 $Kerf$ 是 G_1的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想，则 $f^{-1}(Q_2)$ 是 G_1的一个弱 (t,n)-吸收 δ-半主超理想。(iii) 设 f 是一个满同态，且 Q_1 是包含 $Kerf$ 的 G_1 的一个真超理想。若 Q_1 是 G_1的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半主超理想，则 $f(Q_1)$ 是 G_2的一个（弱） δ'-半主超理想。

证明。(*i*) 令 $k_1(a_1^{tn-t+1}) \in f^{-1}(Q_2)$，其中 $a_1^{kn-k+1} \in G_1$。于是得到 $f(k_1(a_1^{tn-t+1}))$ $=k_2(f(a_1) ..., f(a_{tn-t+1})) \in Q_2$。由于 Q_2 是 G_2 的一个 (t,n)-吸收 δ'-半主超理想，因此存在 $(t-1)n-t+2$ 个 $f(a_i)$，其 k_2-乘积是一个

属于 $\delta'(Q_2)$ 的元素。由此可知，$(t-1)n-t+2$ 的像 f 属于 $a,_i$，其 k_2-乘积属于 $\delta'(Q_2)$，这意味着存在 $(t-1)n-t+2$ 个 $a,_i$，其 k_1-乘积属于 $f^{-1}(\delta'(Q_2)) = \delta(f^{-1}(Q_2))$。因此，$f^{-1}(Q_2)$ 是 G_1 的一个 (t,n)-吸收 δ-半主超理想。

(ii) 假设对 $a_1^{kn-k+1} \in G_1$，有 $k_1(a_1^{tn-t+1}) \in f^{-1}(Q_2)$。因此，$f(k_1(a_1^{tn-t+1})) = k_2(f(a_1)\ldots, f(a_{tn-t+1})) \in Q_2$。若 $0 \neq f(k_1(a_1^{tn-t+1}))$，则可用与第 (i) 部分证明中类似的论证予以证明。设 $f(k_1(a_1^{tn-t+1})) = 0$。于是得到 $k_1(a_1^{tn-t+1}) \in Kerf$。由于 $Kerf$ 是 G_1 的弱 (t,n)-吸收 δ-半素超理想，因此存在 a 的 $(t-1)n-t+2$ 个 $_i$，其 k_1-乘积是 $\delta(Kerf)$ 中的一个元素。由 $\delta(Kerf) = \delta(f^{-1}(0)) \subseteq \delta(f^{-1}(Q_2))$，可知 $f^{-1}(Q_2)$ 是 G_1 的弱 (t,n)-吸收 δ-半素超理想。

(iii) 设 $(0 \neq k_2(b_1^{tn-t+1}) \in f(Q_1))$ $k_2(b_1^{tn-t+1}) \in f(Q_1)$ 对某个 $b_1^{tn-t+1} \in G_2$ 成立。由于 f 是一个满同态，因此对于每个 $1 \leq i \leq tn-t+1$，存在 $a_i \in G_1$ 使得 $f(a_i) = b_i$。于是 $k_2(b_1^{tn-t+1}) = k_2(f(a_1) \cdots, f(a_{tn-t+1})) = f(k_1(a_1^{tn-t+1})) \in f(Q_1)$。由于 Q_1 包含 $Kerf$，我们得出 $(0 \neq k_1(a_1^{tn-t+1}) \in Q_1)$ $k_1(a_1^{tn-t+1}) \in Q_1$。由于 Q_1 是 G_1 的一个（弱）(t,n)-吸收 δ-半素超理想，因此存在 $(t-1)n-t+2$ 个 $a,_i$，使得它们的 k_1-乘积属于 $\delta(Q_1)$。现在，由于 f 是一个同态且 $f(\delta(Q_1)) = \delta'(f(Q_1))$，证明完成。□

设 P 是 (G,h,k) 的一个超理想。则集合 $G/P = \{h(g_1^{i-1}, P, g_{i+1}^m) \mid g_1^{i-1}, g_{i+1}^m \in G\}$，其中 h 和 k 由

$$\begin{aligned} &h(h(g_{11}^{1(i-1)}, P, g_{1(i+1)}^{1m}), \ldots, h(g_{m1}^{m(i-1)}, P, g_{m(i+1)}^{mm})) \\ &\quad = h(h(g_{11}^{m1}), \ldots, h(g_{1(i-1)}^{m(i-1)}), P, h(g_{1(i+1)}^{m(i+1)}), \ldots, h(g_{1m}^{mm})) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &k(h(g_{11}^{1(i-1)}, P, g_{1(i+1)}^{1m}), \ldots, h(g_{n1}^{n(i-1)}, P, g_{n(i+1)}^{nm})) \\ &\quad = h(k(g_{11}^{n1}), \ldots, k(g_{1(i-1)}^{n(i-1)}), P, k(g_{1(i+1)}^{n(i+1)}), \ldots, k(g_{1m}^{nm})) \end{aligned}$$

对所有 $g_{11}^{1m}, \ldots, g_{m1}^{mm} \in G$ 和 $g_{11}^{1m}, \ldots, g_{n1}^{nm} \in G$，构造一个 Krasner (m,n)-超环[1]。

定理 2.35. 设 P 和 Q 是 G 的两个真超理想，且满足 $P \subseteq Q$。若 Q 是 G 的一个 (t,n)- 吸收 δ- 半初等超理想，则 Q/P 是 G/P 的一个 (t,n)- 吸收 δ_q- 半初等超理想。

证明。考虑自然同态 $\pi : G \longrightarrow G/P$，其定义为 $\pi(a) = f(a,P,0^{(m-2)})$，并利用定理 2.34，即得。□

定理 2.36. 设 Q 是 G 的一个 (t,n)-吸收 δ-半素初超理想。若 G' 是 G 的子超环，且满足 $G' \nsubseteq Q$，则 $Q \cap G'$ 是 G' 的一个 (t,n)-吸收 δ-半素初超理想。

证明. 由定理 2.34 可得。 □

定理 2.37. 设 δ_1 和 δ_2 分别是 Krasner m、n-超环 G_1 和 G_2 的两个超理想扩张，使得对于 G_1 和 G_2 中的超理想 Q_1 和 Q_2，有 $\delta(Q_1 \times Q_2) = \delta_1(Q_1) \times \delta_2(Q_2)$。如果 $Q = Q_1 \times G_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的弱 $(t$、$n)$-吸收 δ-半主超理想，那么它就是 $G_1 \times G_2$ 的 $(t$、$n)$-吸收δ-半主超理想。

证明. 假设 $Q_1 \times G_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的弱 $(t、 n)$-吸收 δ-半主超理想。由于 $k(Q^{(tn-t+1)}) \neq 0$, 根据定理 2.30，我们得出 $Q = Q_1 \times G_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的 $(t、 n)$-吸收 δ-半主超理想。□

如果 δ 满足以下条件，则称其具有（$\mathfrak{P}$）性质：对于 G 的所有超理想 Q， δ（Q） $= G$ 当且仅当 $Q = G$。

定理 2.38。设 $\delta_1、 \cdots、 \delta_{tn-t+1}$ 是 Krasner（m， n）-超环 $G_1、 \cdots、 G_{tn-t+1}$ 的超理想扩张，且每个 δ_i 都具有（$\mathfrak{P}$）性质，并且对于 $G_1、 \cdots、 G_{tn-t+1}$ 中的超理想 $Q_1、 \cdots、 Q_{tn-t+1}$，分别有 $\delta（Q_1 \times \cdots \times Q_{tn-t+1}） = \delta_1（Q_1） \times \cdots \times \delta_{tn-t+1}（Q_{tn-t+1}）$。如果 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{tn-t+1}$ 是 $G = G_1 \times ... \times G_{tn-t+1}$ 的一个弱（t， n）-吸收 δ-半主超理想，则 Q 是 $G = G_1 \times ... \times G_{tn-t+1}$ 的一个（t， n）-吸收 δ-半主超理想。

证明。设 Q 是 G 的弱 (t, n)-吸收 δ-半素超理想。考虑 G 中如下元素：对于所有 $1 \leq i \leq tn - t + 1$， $x_i = (1_{G_1}. \cdots, 1_{G_{i-1}}, a_i, 1_{G_{i+1}}, \cdots, 1_{G_{tn-t+1}})$。于是有 $0 \neq k(x_1^{tn-t+1}) \in Q$。由于 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{tn-t+1}$ 是 $G = G_1 \times ... \times G_{tn-t+1}$ 的弱 (t, n)-吸收 δ-半素超理想，因此在 $x,_i$ 中存在 $(t - 1)n - t + 2$ 个元素，其 k-乘积属于 $\delta(Q) = \delta_1(Q_1) \times \cdots \times \delta_{tn-t+1}(Q_{tn-t+1})$。这意味着存在某个 $1 \leq j \leq tn - t + 1$，使得 $1_{G_j} \in \delta_j(Q_j)$，即 $\delta_j(Q_j) = G_j$。由于 δ_j 具有 $(\mathfrak{P})$ 性质，因此 $Q_j = G_j$。所以我们得出 $k(Q^{(tn-t+1)}) \neq 0$，这意味着根据定理 2.30， Q 是 G 的 (t, n)-吸收 δ-半素超理想。□

定理 2.39. 设 $\delta_1、 \cdots、 \delta_{tn-t+1}$ 是 Krasner $(m、 n)$-超环 $G_1、 \cdots、 G_{tn-t+1}$ 的超理想扩张，使得每个 δ_i 都具有 $(\mathfrak{P})$ 性质，并且对于超理想 $Q_1、 \cdots、 Q_{tn-t+1}$，分别有 $\delta(Q_1 \times \cdots \times Q_{tn-t+1}) = \delta_1(Q_1) \times \cdots \times \delta_{tn-t+1}(Q_{tn-t+1})$。如果 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{tn-t+1}$ 是 $G = G_1 \times ... \times G_{tn-t+1}$ 的弱 $(t + 1、 n)$-吸收 δ-半主超理想，那么以下两种情况之一成立：存在 $1 \leq u \leq tn - t + 1$，使得 Q_u 是 G_u 的 $(t + 1、 n)$-吸收 δ-半主超理想，并且对每个 $1 \leq i \leq tn - t + 1$ 都有 $Q_i = G_i$ 和 $i \neq u$；或者对于某些 $u、 v \in \{1, \cdots, tn - t + 1\}$ 和 $Q_i = G_i$，对除 $i \neq u、 v$ 之外的所有 $1 \leq i \leq tn - t + 1$， Q_u 和 Q_v 分别是 G_u 和 G_v 的 $(t 、 n)$- 吸收 $\delta_u 、 v$- 半主超理想。

证明。设 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{tn-t+1}$ 是 $G = G_1 \times ... \times G_{tn-t+1}$ 的弱 $(t + 1, n)$-吸收 δ-半主超理想。因此，根据定理 2.38，我们得出 Q 是 G 的 $(t+1, n)$-吸收 δ-半主超理想。现在，利用定理 2.9，即得所证。□

3. CONCLUSION

本文旨在研究 (t, n)-吸收 δ-半主超理想的结构，这比 δ-主超理想更为一般。此外，我们将这一概念推广到弱 (t, n)-吸收 δ-半主超理想，并给出了许多说明其结构的特殊结果。事实上，本文为 Krasner (m, n)-超环中超理想的分类作出了重要贡献。

利益冲突
作者声明不存在利益冲突。

References

[1] R. Ameri、M. Norouzi，Krasner（

m n *European*，）-超环

Journal Of Combinatorics 2013 379 390
中的素超理想与主超理想，，（）-。[2] M. Anbarloei，在Krasner（m,n）-超环中以一个框架统一素超理想与主超理想， *Communications in Algebra*，2021年 DOI: 10.1080/00927872.2021.1897988。[3] A. Badawi，关于交换环的2-吸收理想， *Bull. Austral. Math. Soc.*，75（2007年）417-429。[4] E.Y. Celikel，交换环的

2 δ *KYUNGPOOK Math.*-吸收-半

J. **61** 2021 711 725
主理想，，（）-。[5] B. Davvaz、T. Vougiouklis，n元超群， *Iran. J. Sci. Technol.*，30（A2）（2006）165-174。[6] B. Davvaz，模糊Krasner（m,n）-超环， *Computers and Mathematics with Applications*，59 2010 3879 3891（）-。[7] W. Dorente，关于一个推广的群概念的研究， *Math. Z.*，29（1928）1-19。[8] K. Hila、K. Naka、B. Davvaz，关于Krasner（m,n）-超环中的（k,n）-吸收超理想， *Quarterly Journal of Mathematics*，69（2018）1035-1046。[9] E. Kasner，群概念的扩展（由L.G. Weld报告），

Bull. Amer. Math.，（）-。

Soc. **10** 1904 290 291
[10] V. Leoreanu，典范n元超群， *Ital. J. Pure Appl. Math.*，24（2008）。[11] V. Leoreanu-Fotea、B. Davvaz，n-超群与二元关系， *European J. Combin.*，29 2008 1027 1218（）-。[12] V. Leoreanu-Fotea、B. Davvaz，n元超群中的粗糙性， *Inform. Sci.*，178（2008）4114-4124。[13] X. Ma、J. Zhan、B. Davvaz，粗糙软集在Krasner（m,n）-超环中的应用及相应的决策方法， *Filomat*，32（2018）6599-6614。[14] S. Mirvakili、B. Davvaz，Krasner（m,n）-超环上的关系， *European J. Combin.*，31 2010 790 802（）-。[15] S. Ostadhadi-Dehkordi、B. Davvaz，关于Krasner（m,n）-超环同构定理的一则注记， *Arabian Journal of Mathematics*，5（2016）103-115。[16] M.M. Zahedi、R. Ameri，关于素超模、主超模和极大子超模，

Ital. J. Pure，（）-。

Appl. Math. **5** 1999 61 80

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.*Email address*: m.anbarloei@sci.ikiu.ac.ir