arXiv:2304.13555v2 [math.AG] 7 Aug 2023

# 对称混合态两个量子比特的有理局部幺正不变量

LUCA CANDELORI*、VLADIMIR Y. CHERNYAK*、†、JOHN R. KLEIN*和 NICK REKUSKI*

Abstract. 我们计算了局部最大混合态和两个量子比特的对称混合态的有理局部幺正不变量域。在这两种情况下，我们证明了有理不变量域是纯超越的。我们还构造了显式的几何商，并证明它们始终具有有理性。所有结果均在实数域上，通过运用任意特征为零的域上的经典不变理论和几何不变式理论方法获得。

Contents

1. 引言 1
2. 商、截面与有理性 4
3. 混合态预备知识 8
4. 局部最大混合态 12
5. 对称混合态 16
参考文献 22

## 1. Introduction

1.1. 背景。 设 $X$ 是域 $k$ 上的一个仿射代数簇，并且该簇带有约化 $k$群 $G$的作用。于是可以考虑 $k[X]^G$，即坐标环 $X$的多项式不变量代数。遗憾的是，尽管近年来出现了强大的计算工具，通常仍然难以找到 $k[X]^G$ 关于生成元与关系的合理描述。相比之下，如果转而研究 有理不变量 域，情况通常会简单得多。例如，当 $X = \mathbb{A}^n$ 是特征零域 $n$上的仿射 $k$ 空间时， $k[\mathbb{A}^n]^G$ 可能特别复杂，但在许多情况下， $k(\mathbb{A}^n)^G$ 是 $k$ [Dol87， CTS07]的纯超越扩张。

量子力学以及量子计算中自然出现的一种情形是当

- $k = \mathbb{R}$,
- $X$ 是张量积 $V_1 \otimes V_2$ 上迹为 1 的厄米（即自伴）算子的实仿射空间，其中 $V_1$、$V_2$ 是二维复内积空间，并且

日期：2023年8月9日。2020年数学学科分类号：81P40、81P42、13A50、14L24。关键词和短语：纠缠、量子比特、不变量、混合态。

*Department of Mathematics, Wayne State University, 656 W. Kirby St, Detroit, MI, 48202 USA。
†Department of Chemistry, Wayne State University, 5101 Cass Ave, Detroit, MI, 48202 USA.

- $G = \mathrm{U}(V_1) \times \mathrm{U}(V_2)$ 是酉群的乘积，通过共轭作用于$X$。

不变量域 rationalinvariants $k(X)^G$ 中的元素在此情形下可用于衡量两个量子比特混合态的量子纠缠。

本文的主要目标是明确给出以下子空间的不变量有理函数域： 局部最大混合态和 对称混合态。从更宏观的角度看，我们的目标是通过引入代数几何和不变理论中的方法，为研究有理局部幺正不变量奠定基础。完整计算 $k(X)^G$ 将在即将发表的论文 [CCKR23] 中介绍，届时将运用本文所发展的工具。

为总结我们的研究结果以及该领域此前的工作，我们先确定一些记号和术语。设 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 是复二维内积空间。 $n$ 个量子比特的纯态是张量积 $V := \bigotimes_{i=1}^n V_i$ 中的一个单位向量（当 $n = 2$ 时，我们常把 2-qubits 称作两个量子比特）。给定一个纯态 $\psi$，我们有一个与之关联的投影算子

$$P_\psi \in \mathrm{End}(V)$$

由 $P_\psi(v) = \langle \psi, v \rangle \psi$ 定义；这是迹为一的厄米算子。此类投影的凸组合称为混合态。混合态的空间不是代数簇。为了得到一个代数簇，我们放宽凸性，转而考虑所有迹为一的此类投影的实线性组合。这得到刘维尔空间

$$\mathscr{L} \subset \mathrm{End}(V),$$

即 $V$ 上迹为一的厄米算子构成的实仿射空间。

令 $G = \prod_i \mathrm{U}(V_i)$；这是 $V$ 的局域酉群。注意， $G$ 通过共轭算子作用于 $\mathscr{L}$。于是， $\mathbb{R}[\mathscr{L}]^G$ 是 $n$ 量子比特混合态的局域酉多项式不变量环。注意， $G$-等变嵌入 $V \to \mathscr{L}$ 诱导出一个同态

$$\mathbb{R}[\mathscr{L}]^G \to \mathbb{R}[V]^G$$

从混合态的不变量环到纯态的不变量环。还可以考虑 $\mathbb{R}(\mathscr{L})^G$，即 $n$ 量子比特混合态的局域酉有理不变量域。

1.2. 历史概述。 两个量子比特的混合态用于模拟有缺陷的量子信道中发生的错误，因此这一情形在量子信息科学领域尤其受到关注 [NC00]。此外，计算局部酉不变量对于理解 纠缠混合态的 [HHHH09]非常重要。事实上，局部酉算子在物理上对应于可以独立作用于每个系统的量子演化 $V_i$。因此，在局部酉算子作用下处于同一轨道的两个状态，可以认为具有相同程度的纠缠。在局部酉算子作用下对这些轨道进行分类，因而等价于对复合量子系统中所有可能的纠缠程度进行分类。

鉴于这些应用的重要性，近年来，局部酉不变量构成的环在数学和物理学文献中都受到了广泛关注。我们简要回顾其历史概述：

- Brylinski 在 3 个和 4 个纯量子比特的情形下给出了部分结果 [Bry02],
- Meyer 和 Wallach 计算了纯量子比特情形下的希尔伯特级数，随后计算了三量子比特和四量子比特情形下的不变量 [MW02],

- Wallach 在其著作中回顾了纯量子比特情形下的若干早期结果（这些结果此前由 Wallach 及其合作者发现），随后对混合量子比特态进行了初步研究 [Wal17],
- King、Welsh 和 Jarvis 给出了两个混合量子比特的复局部幺正不变量的完整表示 [JKW07], 以及
- Gerdt、Khvedelidze 和 Palii 计算出了两个混合量子比特的“X态”子空间的完整表示——这是混合态的一个重要子类 [GKP16]。

然而，对于三个或更多混合态的情形，人们知之甚少。还值得注意的是，上述作者主要在复数的代数闭域上开展工作，而不是在实数域上。

原则上，存在用于计算局部幺正不变量代数的生成元与关系的通用算法 [DK15]。然而，随着问题复杂度的增加（例如，量子比特数量增加），直接应用这些算法并不可行。事实上，作者曾尝试使用 [JKW07]（两个量子比特的情形）中的计算方法，借助 `InvariantRing` 软件包 [FGG+20] 在 Macaulay2 [GS] 中进行复现，但我们的系统在运行数小时后耗尽了内存。此外，即使给出了完整表示，显式的生成元与关系也过于复杂，无法为纠缠分类提供有意义的信息。为此，本文提出了几种研究量子比特混合态的局部幺正不变量的新方法：我们考察有理局部幺正不变量，使用布洛赫矩阵，并且完全在 $\mathbb{R}$上进行研究。

1.3. 主要结果。 本文重点研究两个量子比特情形下有理局部幺正不变量域的有理性问题。据我们所知，本文是这一方向上的首次研究。为简化论述并使其更易理解，我们首先考察以下特殊的混合态族：局部最大混合态（第4节）和对称混合态（第5节）。这两类混合态本身都很有研究价值。总体而言，局部最大混合态是指每个量子比特都尽可能远离纯态的混合态（定义3.7）。类似地，对称混合态是指各量子比特彼此不可区分的混合态。在这两种情形下，我们证明实有理局部幺正不变量域是纯超越的，并给出了生成元集合的显式表达式。

为陈述我们的结果，设 $U_2$ 为复酉 $2 \times 2$ 矩阵群。在局部最大混合态情形下，情况相当简单。我们实际上可以计算多项式不变量环，并由此得到有理不变量域的如下完整描述（参见定理4.5 和推论4.7）：

定理 A（LMM态）。设 $\mathscr{L}_M$ 为两个量子比特的局部最大混合态仿射簇。则存在一个分次 $\mathbb{R}$-代数同构

$$\mathbb{R}[\mathscr{L}_M]^{\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}_2} \;\cong\; \mathbb{R}[t_2, t_3, t_4]\,,$$

其中 $t_i$ 的次数为 $i$。域 $\mathbb{R}(\mathscr{L}_M)^{\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}^2}$ 是 $\mathbb{R}[\mathscr{L}_M]^{\mathrm{U}_2 \times \mathrm{U}^2}$, 的分式域，因此是次数为 3 的纯超越域，由 $t_2$、$t_3$、$t_4$ 生成。

对于对称混合态，$V_1 = V_2$，群 $G$ 由 $\mathrm{U}_2$ 的一个副本给出。此情形比 LMM 情形更为复杂，我们证明了该不变量域的有理性，而无需计算多项式不变量环：

定理 B（对称混合态）。设 $\mathscr{L}_S$ 为两个量子比特的对称混合态的仿射簇。则域 $\mathbb{R}(\mathscr{L}_S)^{U_2}$ 是次数为 6 的纯超越扩张。

此外，我们在第 5.1 节使定理 B 具有可操作性，并说明如何明确计算出一组包含六个生成元的集合。

上述每项结果的证明都采用了两个量子比特混合态的 布洛赫矩阵 模型 [Gam 16], ，该模型由一阶和两点关联函数构成，用于测量沿三个不同轴进行自旋测量时的期望值。我们将在第 3.2节回顾这一构造。该模型是广受欢迎的布洛赫球 纯量子比特模型的推广，并且特别适合用于研究局部幺正不变量。尽管布洛赫模型在先前的工作中被隐含地使用（例如， [JKW07]），但我们认为，本文是第一篇明确采用该模型来获得有关局部幺正不变量结果的文章。特别是，利用布洛赫模型，我们在定理 5.6 中为局域酉群在两个量子比特对称混合态簇上的作用构造了明确的仿射几何商（在 [MFK94]的意义下）。此外，我们还说明（参见例 5.5），如何结合计算机辅助计算和[JKW07], 的图形演算，给出有理不变量（纯超越）域的明确生成元。

与以往工作相比，本文完全在基域 $k = \mathbb{R}$上开展研究，并避免基变换到复数域。正如[MFK94] 和 [CTS07], 所示，许多关于复数域上不变理论的结果同样适用于任意特征为零的域，但需要将经典代数几何中的标准论证（[Sha94]）替换为一种更偏向概形论的方法（[CTS07]）。在实数域上开展研究，并用布洛赫矩阵表示有理不变量，使我们的工作能够立即应用于实验层面。

为简洁起见，本文省略了对两个混合量子比特全空间的有理不变量域的计算。该域可以通过类似方法计算（它同样是纯超越的），但所需的修改篇幅较长，足以另行专门论述；相关内容见 [CCKR23]。

我们认为，这种局部幺正不变量的新方法与实际应用密切相关。物理学家未必坚持使用多项式不变量：熵和concurrence等重要的局部幺正不变量并不是多项式。因此，对有理局部幺正不变量进行完整分类，很可能会在量子物理中带来有意义的应用。

致谢。作者得到美国能源部科学办公室基础能源科学部门奖项编号 DE-SC-SC0022134 的资助。最后一位作者还获得了韦恩州立大学的 OVPR 博士后奖的部分资助。

## 2. Quotients、 sections and rationality

我们首先汇集不变理论中的一些必要结果。特别是，除了显式计算有理不变量的计算方法（即相对截面方法）之外，我们还需要关于有理不变量域的有理性的结果。当基域的特征为零（但不一定代数闭）时，这些结果见[CTS07]。由于我们的应用场景中

$k=\mathbb{R}$，这一假设至关重要。对于代数闭的情形，Popov 和 Vinberg 的早期著作[Sha94]也可作为参考。

2.1. 代数商、有理商与几何商。设 $k$ 是一个特征为零的域。设 $X/k$ 是一个几何整仿射簇， $G/k$ 是作用于 $X$上的约化代数群（以代数方式作用）。我们将 $X$ 的坐标环记作$k[X]$。将 $X$ 上的多项式 $G$-不变函数环记作 $k[X]^G$，因此 $k[X]^G$是 $k[X]$的一个 $k$-子代数。类似地，我们将有理 $G$-不变函数域记作 $k(X)^G$。环 $k[X]^G$ 和 $k(X)^G$ 分别对应于商的不同变体上的函数。

定义 2.1. 我们将 $X$ 经由 $G$得到的代数商记为 $X//G$，并定义为仿射概形 Spec($k[X]^G$)。

根据构造，多项式不变量 $k[X]^G$ 是代数商 $X//G$上的多项式函数。此外，由于 $G$ 是约化群，根据 [DK15，定理 2.2。10]$k[X]^G$ 是有限生成的，因此 $X//G$是有限型的。换言之， $X//G$ 是一个整 $k$-簇。根据 [MFK94，定义 0。7], 仿射商是一个范畴商，因此 $X//G$ 在唯一同构意义下唯一。

人们可能希望 $k$（$X$）$^G$ 是 $X//G$的分式域 $X//G$，但一般情况下并非如此（参见注记2.14）。例如，若 $X=\mathbb{A}^2_k$ 且 $\mathbb{G}_m$ 按对角方式作用，则（$k[X]^G$）$_{(0)}=k$，而 $k$（$X$）$^G=k[t]$。因此， $k$（$X$）$^G$ 不能总是解释为 $X//G$上的有理函数。

由于 $k(X)^G$是 $k(X)$ 的子域， $k(X)^G$是有限生成的。因此，设 $y_1$、$y_2$、……、$y_n$是 $k(X)^G$作为 $k$-代数的生成元。于是， $Y=$Spec($k[y_1,\dots,y_n]$) 是 $k(X)^G$的一个模型，也就是说， $Y$ 是一个几何整的仿射代数 $k$-簇，使得$k(Y)=k(X)^G$。我们利用这一性质给出商的第二种变体。

定义 2.2。若存在一个同构 $k(Y)\cong k(X)^G$，则称 $k$-簇 $Y$ 是 $X$ 关于 $G$ 的有理商。

按照构造， $G$-不变有理函数是有理商 $Y$ 上的有理函数。然而，与代数商的情形不同，有理商 $Y$ 并不存在规范的选择，因为它只在双有理等价意义下确定。注意，单射 $k(Y)\cong k(X)^G\subseteq k(X)$ 诱导出一个主有理映射 $f\colon X\dashrightarrow Y$。

代数商（或有理商）的几何点不一定与 $G$-作用的轨道重合。然而，对于几何商，情况确实如此：

定义 2.3。[CTS07，定义 2。7]一个几何商是 $X$ 关于 $G$ 的一个 $k$-簇 $Y$，并带有一个 $k$-态射 $f\colon X\to Y$满足

(i) $f$ 是开集，在 $G$-轨道上为常值，并诱导出一个双射 $X(\bar{k})/G(\bar{k})\leftrightarrow Y(\bar{k})$；(ii) 对任意开集 $V\subseteq Y$，自然态射 $k[V]\to k[f^{-1}(V)]^G$ 是一个同构。这里， $\bar{k}$ 是一个包含 $k$ 的代数闭域。如果几何商存在，我们将其记为 $Y=X/G$。

几何商总是范畴商[MFK94，命题 0。1]因此 $X/G$在唯一同构意义下是唯一的。

即使在我们的情形下， $X$ 是仿射的且 $G$ 是约化的，几何商也未必存在（例如， $\mathbb{G}_m$在$\mathbb{A}^2_k$ 上的对角作用）。然而，根据Rosenlicht 定理，我们可以选取一个 $G$-不变量稠密开子集 $U\subseteq X$，使其存在几何商

$U \to U/G$ [Ros56]。有了这一选择， $k$-簇 $Y = U/G$ 也是 $X$ 关于 $G$的有理商，这是几何商的性质（ii）所表明的。换言之，我们总可以选取一个有理商 $Y$ ，它同时还是 $G$的一个稠密开 $X$-不变量子集的几何商。这一思想在我们的应用中将十分重要，因此我们作出如下定义：

定义 2.4. $X$ 关于 $G$ 的几何有理商，是形如 $Y = U/G$ 的几何商，其中 $U \subseteq X$ 是一个开稠密的 $G$-不变子集。

注 2.5。 当 $X$ 是仿射的时，几何商 $X/G$存在当且仅当 $G$-作用是 闭的，也就是说，几何 $G$-轨道在 $X(k)$ 上是闭的 [MFK94，第 I.2 节，补充说明 1。3]。在这种情况下，

$$X/G = X//G = \mathrm{Spec}(k[X]^G)$$

并且 $X/G$ 也是一个有理商。因此，在这个特殊情形下，三种商的概念彼此一致。

2.2. 有理性。 关于有理不变量域$k(X)^G$ 的一个基本问题是，它是否为 纯超越的。换言之， $k(X)^G$ 是否由有限个代数无关有理函数生成。从几何角度看，这等价于询问有理商 $X \dashrightarrow Y$ 是否 有理，即是否与某个射影空间 $\mathbb{P}^n_k$双有理等价，其中 $n$。专著 [CTS07] 详细介绍了这一问题的已有成果。对于我们的应用，只需用到 “ 无名引理 ” 的一个变体（据 Popov 和 Vinberg 所述 [Sha94]，这一结果的作者归属难以确定）。该引理给出了可约表示有理性的一个判据：当其某个直和项具有下文定义的 几乎自由的 作用时，

定义 2.6。若存在一个开稠密的$G$-不变量子集 $U \subseteq X$ ，使得对于每个几何点 $x \in U(k)$，其几何稳定子 $G_x \subseteq G(k)$ 都是平凡的，则 $G$ 在 $X$ 上的作用称为几乎自由。

以下版本的无名引理见于[Dol87] 和 [Sha94，2.13] 对于 $k = k$ 的情形，以及[CTS07] 对于 $k$ 特征为零的域的一般情形。

定理 2.7（[CTS07，第 3.8]号推论）。设 $k$ 是一个特征为零的域， $G$ 是一个约化 $k$-群，并且其在仿射 $k$-簇 $X$上的作用几乎自由。进一步假设 $\overline{X} = X \times_k \mathrm{Spec}(k)$ 是阶乘的（即，$k[\overline{X}]$ 是一个唯一分解整环）。设 $V$是一个有限维 $k$-向量空间，并带有一个线性 $G$-作用。那么，域 $k(X \times V)^G$是 $k(X)^G$上的纯超越扩域，其超越次数为 $\dim V$。特别地，如果$k(X)^G$ 是纯超越的，那么 $k(X \times V)^G$ 也是纯超越的。

推论 2.8. 设 $k$ 是一个特征为零的域，且 $G$ 是一个约化的 $k$ 群，在线性地作用于一个 $k$-向量空间 $W$ 上。假设 $W = V_1 \oplus V_2$ 可分解为 $G$ 不变量子空间 $V_1$、$V_2$ 的直和，使得 $G$ 在 $V_1$ 上的作用是几乎自由的，并且域 $k(V_1)^G$ 是纯超越的。那么，$k(W)^G$ 是纯超越的，其关于 $k(V_1)^G$ 的超越次数为 $\dim V_2$ 。

证明。 这是由定理 2.7 令 $X = V_1$ 且 $V = V_2$即可得到。事实上， $\overline{V}_1$ 是阶乘环，因为 $\overline{V}_1$ 的坐标环是有限多个变量上的多项式环，其系数域为 $k$，因此是唯一分解整环。 □

2.3. 截面。 通过寻找一个 相对截面 $S \subseteq X$ (也称为 切片)，可以简化有理不变量域的计算。当 $k$ 是代数闭的特征零域时，这一概念见 [Sha94，第 2]节。此处我们将其推广到 $k$ 为任意特征零域的情形；相关讨论见 [CTS07，第 3 节。1]。与上一节一样，设 $k$ 是一个特征零域， $X$ 是一个几何整仿射 $k$-簇，且 $G$ 是一个约化$k$-群，作用于 $X$。

定义 2.9。几何整的 $k$-子簇 $S \subseteq X$ 是 $G$-作用的相对截面（或切片），如果存在满足以下性质的 $G$-不变量稠密开子集 $X_0 \subseteq X$：

(i) 轨道空间 $GS$ 的扎里斯基闭包是整个 $X$ （即 $\overline{GS} = X$）；(ii) 令 $N = N(S) = \{g \in G : gS \subseteq S\}$为 $S$的正规化子，并令 $S_0 = X_0 \cap S$. 那么， $gS_0(k) \cap S_0(k) \neq \emptyset$ 意味着 $g \in N(k)$。

如果 $S \subseteq X$ 是相对截面，则限制同态 $k[X]^G \to k[S]^N$ 定义良好且为单射：如果 $f \in k[X]^G$ 在 $S$上限制为零，那么根据定义 2.9的性质 (i)，它在整个 $X$ 上也必为零。因此，限制给出一个单射域同态 $k(X)^G \to k(S)^N$。相对截面的以下推论是，$k(X)^G \to k(S)^N$ 是一个同构。

定理 2.10 ([CTS07，定理 3.1])。 设 $S \subseteq X$ 是 $G$-作用的相对截面。限制映射 $k(X)^G \to k(S)^{N(S)}$ 是一个同构。

此外，如果相对截面 $S \subseteq X$ 满足 $\dim(S) = \dim(X) - \dim(G)$，那么正规化子 $N(S)$ 是有限的。在此情形下，计算 $k(S)^{N(S)}$ 会更加容易。

在特殊情况下，可以从相对截面 $k[X]^G$ 计算多项式不变量环，而不仅仅是有理不变量！在这种情况下，我们称该截面为“切瓦莱”型，因为它推广了复半单李群理论中的切瓦莱限制定理（参见 [Sha94，3.8]）。

定义 2.11。若相对截面 $S \subseteq X$ 的限制同态 $k[X]^G \to k[S]^{N(S)}$ 是一个同构，则称其为切瓦莱截面。

在实际计算中，如果 $N(S)$ 在 $S$ 上的作用不忠实，那么计算多项式不变量和有理不变量仍然很困难。为避免这种情况，我们总可以转而考虑魏尔群，因为它的作用总是忠实的。

定义 2.12. 假设 $S \subseteq X$ 是 $G$-作用的相对截面。

我们将 $S$ 的中心化子定义为

$$Z(S) = \{g \in G : gs = s \ \forall s \in S\}.$$

我们还将 $S$ 的魏尔群定义为 $W(S) = N(S)/Z(S)$。

根据构造， $W(S)$ 在 $S$ 上的作用是忠实的，并且存在同构 $k(S)^{N(S)} \cong k(S)^{W(S)}$ 以及 $k[S]^{N(S)} \cong k[S]^{W(S)}$。

2.4. 不变量与局部化。 如前所述，有理不变量域$k(X)^G$ 不一定与环 $k[X]^G$的分式域重合。不过，可以对群 $G$ 施加条件，以确保二者相同（[CTS07，引理 2.2]）。本节最后将这一结果推广到通过一个$G$-不变集合进行的任意局部化。

引理 2.13. 设 $A$ 是一个有限型整 $k$-代数，并带有一个线性代数 $k$-群 $G$的作用。设 $S \subseteq A$ 是一个不包含 0 的乘法封闭子集，并令 $S^G = S \cap A^G$。如果 $A$ 是唯一分解整环，且 $G$ 是连通的并且没有非平凡特征，那么 $(S^G)^{-1}(A^G) = (S^{-1}A)^G$。

证明。 当 $k$ <style id='6}>是代数闭的时，[CTS07，引理 2 中的相同论证2] 给出了所需结果。

因此，只需证明非代数闭的情形可归约为代数闭的情形。基于此，考虑短正合序列

$$0 \to (S^G)^{-1}A^G \to (S^{-1}A)^G \to C \to 0$$

其中 $C$ 只是自然嵌入的余核。对代数闭包进行基变换，得到如下 $\overline{k}$-模短正合序列

$$0 \to ((S^G)^{-1}A^G) \otimes_k \overline{k} \to (S^{-1}A)^G \otimes_k \overline{k} \to C \otimes_k \overline{k} \to 0.$$

另一方面，由于局部化和取 $G$-不变量都与$^-$ $^-$到 $k$ 的基变换可交换， $C \otimes k = 0$根据 [CTS07，引理 2，2]我们必有$C = 0$。这意味着□

正如 [CTS07中引理 2 后的注记所指出的，2], 假设 $G$ 具有平凡特征群是必要的。

注 2.14: 对于有限群 $G$ ，引理 2.13的证明是初等的，因此关于 $A$ 为唯一分解整环的假设可以去掉。

## 3. Preliminaries on Mixed States

本节回顾与 $n$ 个量子比特的混合态不变理论相关的定义。首先，正如引言中所述，混合态空间不是代数簇。因此，我们转而考虑刘维尔空间，它是包含所有混合态的最小代数 $\mathbb{R}$簇。我们还描述酉矩阵的作用，并指出刘维尔空间上存在相应的作用。其次，我们描述刘维尔空间的布洛赫矩阵表示。最后，我们描述局部最大混合态和对称混合态，它们分别对应于刘维尔空间的子簇。

3.1. 混合态与局部幺正不变量。 我们首先简要回顾纯量子态和混合态的数学形式化，这些量子态出现在量子信息科学的语境中（例如， [NC00]）。按照该领域的惯例，我们始终采用狄拉克符号。在这一符号中， $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ 表示一个复（厄米）内积空间， $|\psi\rangle \in V$ 表示一个向量，而 $\langle\psi|$ 表示其共轭对偶。

我们称 $|\psi\rangle$ 为纯态，如果 $|\psi\rangle$ 是 $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ 中的单位向量。当 $V = \bigotimes_{k=1}^n \mathbb{C}^2$时，我们称纯态 $|\psi\rangle \in V$ 为 $n$量子比特态，或称 $n$ 量子比特态。更一般地，纯态系综是由若干对 $\{(|\psi_i\rangle, p_i)\}$ 组成的有限集合，其中包含纯态 $|\psi_i\rangle$ 和满足 $\sum p_i = 1$的正实数 $0 \le p_i \le 1$ 。实数 $p_i$ 在物理上被解释为该系综处于状态 $|\psi_i\rangle$的概率。系综也可以表示为混合态

$$\rho = \sum p_i \, |\psi_i\rangle \, \langle\psi_i| \in \mathrm{End}(V),$$

它是一个迹为一的半正定厄米线性算子。在坐标表示中，这被称为混合态的密度矩阵。在这一形式体系中，纯态

$|\psi\rangle$ 是对应于仅由一个投影算子支撑的系综的混合态。此外，在这一形式体系中，纯态的密度矩阵是算子 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 的秩一投影矩阵。

我们希望直接研究混合态的空间，但混合态并不构成代数簇（见下文讨论）。因此，我们转而考虑刘维尔空间。

定义 3.1。令 $\mathrm{Herm}(V)$ 表示内积空间 $V$ 上所有厄米（即自伴）算子构成的 $\mathbb{R}$-向量空间。$V$ 的刘维尔空间是超平面

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(V) = \{\rho \in \mathrm{Herm}(V) : \mathrm{Tr}(\rho) = 1\}.$$

在不会引起混淆的情况下，我们将元素 $\rho \in \mathscr{L}$ 称为混合态。

我们可以将混合态空间视为实代数簇 $\mathscr{L}$ [Gam16] 的半代数子簇。混合态集合本身并不是 $\mathscr{L}$ 的代数子簇，这是因为混合态满足半正定条件。然而，$\mathscr{L}$ 及其 $G$-不变量子簇上的多项式不变量在量子信息科学中仍然具有研究价值。此外，之后总可以通过对不变量及其取值施加界限和不等式，重新引入正性条件（见下文备注4.6 ）。基于这些原因，我们研究 $\mathscr{L}$，而不是混合态空间。

混合态的一个重要性质是它们在偏迹下保持封闭，也就是说，混合态的偏迹仍是另一个混合态（但维数更低）。这与纯态的情形相反，纯态在取偏迹后并不保持为纯态。

定义 3.2. 设 $V$ 是一个二分系统（即 $V = V_1 \otimes V_2$）。对一个简单张量取关于 $V_2$ 的偏迹定义为

$$\mathrm{tr}_2\left(|v_1\rangle\langle v_1'| \otimes |v_2\rangle\langle v_2'|\right) = |v_1\rangle\langle v_1'| \cdot \langle v_2|v_2'\rangle \in \mathrm{End}(V_1),$$

这是 $V_1$ 的一个混合态。根据线性性，该定义可以扩展到所有纯态和混合态。

关于 $V_1$ 的偏迹定义类似，并且它是 $V_2$ 的一个混合态。令 $\mathbf{U}(V)$ 为 $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ 的酉群，即保持厄米内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的 $V$ 的同构组成的群。通过 $U \in \mathbf{U}(V)$ 进行的共轭作用保持刘维尔空间 $\mathscr{L}$ 以及 $\mathscr{L}$ 中的混合态集合不变。在物理上，共轭作用 $\rho \mapsto U\rho U^*$ 表示混合态 $\rho$ 在 $U$ 下的量子演化（此处 $U^*$ 表示 $\overline{U}^T$ 的共轭转置）。

定义 3.3。对于二分系统 $V = V_1 \otimes V_2$，子群 $\mathbf{U}(V_1) \times \mathbf{U}(V_2) \subseteq \mathbf{U}(V)$ 称为局部酉算子群。

在此情形下，$\mathbf{U}(V_1) \times \mathbf{U}(V_2)$ 通过 $(U_1, U_2)v = (U_1 \otimes \mathbf{U}_2)v$ 作用于 $V$，并且类似地通过共轭作用于混合态 $\rho$，即 $(U_1, U_2) \cdot \rho := (U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^* \otimes U_2^*)$。

本文通过局部酉不变量研究该作用的不变多项式和有理不变量。在量子物理中，这些不变量可以被视为“纠缠的度量”。[1] 记 $\mathbb{R}[\mathscr{L}]$ 为 $\mathscr{L}$ 上实值多项式函数的环，记其分式域为 $\mathbb{R}(\mathscr{L})$，该分式域由有理实值函数组成。

定义 3.4. 设 $V = V_1 \otimes V_2$, $G = \mathbf{U}(V_1) \times \mathbf{U}(V_2)$，并令 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V)$ 为相应的刘维尔空间。若 $f(gx) = f$，则称 $f \in \mathbb{R}[\mathscr{L}]$ 为局部幺正不变量

[1] 有关该主题的大量文献综述，请参见[HHHH09]。

对所有 $g \in G$ 及所有 $x \in \mathscr{L}$均成立。我们将局部幺正不变量的 $\mathbb{R}$-代数记为$\mathbb{R}[\mathscr{L}]^G$。

类似地，我们称有理函数 $f \in \mathbb{R}(\mathscr{L})$ 为有理局部幺正不变量，若对所有 $g \in G$ 和 $x \in \mathscr{L}$，都有 $f(gx) = f(x)$。我们将有理局部幺正不变量域记作 $\mathbb{R}(\mathscr{L})^G$。

更一般地，若 $X \subseteq \mathscr{L}$ 是一个 $G$-不变不可约子簇，我们也可以定义其上的局部幺正不变量环 $\mathbb{R}[X]^G$，以及有理局部幺正不变量域 $\mathbb{R}(X)^G$。在本文余下部分，我们研究 $V = V_1 \otimes V_2$ 为由两个量子比特组成的二能级系统（即 $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$）时混合态的局部幺正不变量，并考察量子信息科学中若干值得关注的不同子簇 $X \subseteq \mathscr{L} = \mathscr{L}(V)$，其中包括 $X = \mathscr{L}$ 的情形。

3.2. 布洛赫矩阵表示。为了应用第2节的方法，我们需要回顾两个量子比特混合态的布洛赫矩阵表示（例如参见 [Gam16]）。首先假设 $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ 且 $V$配备了一个正交归一基；于是我们有一个识别 $V \cong \mathbb{C}^2$。令

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

为四个泡利矩阵。如果 $\rho \in \mathrm{End}(V)$ 是表示一个量子比特混合态的密度矩阵，那么 $\mathrm{tr}(\rho\sigma_i)$ 表示测量沿对应于 $\sigma_i$的轴方向的自旋时的期望值。众所周知，映射

$$B : \rho \longmapsto (\mathrm{tr}(\rho\sigma_1), \mathrm{tr}(\rho\sigma_2), \mathrm{tr}(\rho\sigma_3)) \tag{2}$$

是一个双射，将一个量子比特混合态空间映射到以原点为中心的$\mathbb{R}^3$ 单位球（称为布洛赫球）。在这种表示中，球的边界由纯态组成，因此该边界常称为一个量子比特纯态的布洛赫球面表示。另一方面，球的原点对应于最大混合态 $\rho = \frac{1}{2}I$。布洛赫球表示的关键性质是，混合态上的幺正演化相对于球的三维旋转，在 $B$ 下具有等变性。换言之，对于每个 $U \in \mathrm{U}(V)$ 和每个混合态 $\rho \in \mathrm{End}(V)$，$B(U(\rho)) = r_U(B(\rho))$，其中 $r_U \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 是标准同态 $r\colon \mathrm{U}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的像。由此，一个量子比特混合态的幺正演化可以被“可视化”为布洛赫球上相应点的旋转。

对于两个量子比特的混合态，可以将布洛赫球推广为一种便于研究局部幺正不变量的形式。为描述这种推广，我们首先根据关联函数推广映射 $B$。

定义 3.5。设 $V = V_1 \otimes V_2$ 是由两个量子比特构成的二分系统（即 $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = \dim_{\mathbb{C}} V_2 = 2$）。我们为每个 $V_i$ 配备一个正交归一基。对于任意一对指标 $(i, j)$，其中 $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$，刘维尔空间上的关联函数 $C_{ij}\colon \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ 由下式给出：

$$C_{ij}(\rho) = \mathrm{tr}(\rho \cdot \sigma_i \otimes \sigma_j).$$

When 由上下文可知 $\rho$，因此我们将其从记号中省略，直接写作 $C_{ij}$.

当 $i = 0$ 或 $j = 0$ 但并非两者同时成立时，我们称 $C_{ij}$ 为一点关联函数；如果 $i \neq 0 \neq j$，我们称 $C_{ij}$ 为两点关联函数。满足 $i \neq j$ 的两点关联函数 $C_{ij}$ 称为混合关联函数。

根据量子力学的公理，每个关联函数的值表示对于每个量子比特选择不同轴进行自旋测量时的期望值。如（2）中所示，对于每个混合态 $\rho \in \mathscr{L}$，我们可以将所有关联函数收集到一个 $4 \times 4$ 矩阵 $B(\rho) = (C_{ij})$，我们称之为布洛赫矩阵表示的 $\rho$。

重新组织这一表达式会很方便。首先，注意到 $C_{00} = \mathrm{tr}(\rho) = 1$。其次，我们将 $u = (C_{i0})_{1\le i\le 3}$、$v = (C_{0j})_{1\le j\le 3}$ 定义为一点关联函数，并将 $C = (C_{ij})_{1\le i,\ j\le 3}$ 定义为两点关联函数的 $3 \times 3$ 矩阵。

使用这一记号，$u$（分别为 $v$）是一个量子比特的混合态，对应于对 $\rho$ 关于 $V_2$（分别为 $V_1$）进行偏迹。换句话说，$u$ 和 $v$ 分别位于两个独立的布洛赫球上。描述包含 $C$ 的空间更为复杂，但可以证明它仍然是一个半代数簇 [Gam16]。利用 $u$、$v$以及 $C$，我们可以将 $\rho$ 的布洛赫矩阵重写为以下简洁形式

$$B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline u & C \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{15}.$$

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$在布洛赫矩阵 $B(\rho)$上有一个自然的作用。也就是说，如果（$R_1$，$R_2$）是 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 中的一对旋转，我们定义该作用为

$$(R_1, R_2)B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (R_2 v)^t \\ \hline R_1 u & R_1 C R_2^t \end{array}\right). \tag{3}$$

该作用相对于通过局部幺正算子对 $\rho$ 进行的幺正演化是等变的。换言之，如果（$U_1$，$U_2$）$\in \mathrm{U}(V_1) \times \mathrm{U}(V_2)$，那么

$$B\left((U_1 \otimes \mathrm{U}_2)\rho(U_1 \otimes \mathrm{U}_2)^{-1}\right) = (r(U_1), r(\mathrm{U}_2))B(\rho),$$

这里 $r$ 仍表示标准同态 $r : \mathrm{U}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$，与一个混合态的情形相同。

记号 3.6。设 $V = V_1 \otimes V_2$ 和 $X \subseteq \mathscr{L}(V)$。我们将 $X$ 在态射 $B : \mathscr{L} \to \mathbb{R}^{15}$ 下的像记为 $BX$。

特别地，$B\mathscr{L} = \mathbb{R}^{15}$，因为一点和二点关联函数分别构成 $2 \times 2$ 与 $4 \times 4$ 厄米矩阵空间对偶空间的正交归一基。

3.3. 混合态的子簇。在本小节中，我们定义局部最大混合态$\mathscr{L}_M \subseteq \mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_S \subseteq \mathscr{L}$ 对称混合态的子簇。

我们首先定义局部最大混合态。回顾第3.2 节，单个量子比特的最大混合态是密度矩阵为$\rho = \frac{1}{2}I$的量子比特。还需回顾的是，从两个量子比特的混合态 $\rho \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$到单个量子比特的混合态有两个不同的映射，分别由两个偏迹 $\mathrm{tr}_1$ 和 $\mathrm{tr}_2$给出。

定义 3.7。局部最大混合态的集合（缩写为LMM态）是混合态 $\rho \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2$的子集，其中 $\mathrm{tr}_1(\rho)$ 和 $\mathrm{tr}_2(\rho)$ 均为最大混合态（即等于 $\frac{1}{2}I$），其中 $\mathrm{tr}_i$ 是关于 $V_i$ 的偏迹（见定义3.2）。

注记 3.8。一类众所周知的局部最大混合态是 Bell态。这些是两个量子比特的纯态，其表达式例如

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

其中，按照量子信息科学中的惯例，$\{|0\rangle, |1\rangle\} \subseteq V = \mathbb{C}^2$ 表示由泡利矩阵 $\sigma_3$的特征向量组成的正交归一基。事实上，可以很容易验证，$|\psi\rangle$ 的两个偏迹$\frac{1}{2}I$均等于 [Gam16]。还可以验证，Bell态是唯一的最大混合

与混合态一样，局部最大混合态不构成刘维尔空间的子簇。相反，我们考虑 $\mathscr{L}$ 的“最大混合”元素，它们不必满足混合态的半正定性质。

定义 3.9。我们将 $\mathscr{L}_M \subseteq \mathscr{L}$ 定义为

$$\mathscr{L}_M = \left\{\rho \in \mathscr{L} \middle| \operatorname{tr}_1(\rho) = \tfrac{1}{2}I = \operatorname{tr}_2(\rho)\right\}.$$

如果不会引起混淆，我们通常将 $\rho \in \mathscr{L}_M$ 的元素称为局部最大混合态。

根据定义，$\mathscr{L}_M$ 是刘维尔空间中超平面的交，因此 $\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}$ 的实子簇。事实上，从抽象角度看，$\mathscr{L}_M = \mathbb{A}^9_{\mathbb{R}}$，因此 $\mathscr{L}_M$ 是几何不可约且为阶乘的。

现在我们定义对称混合态。设 $V_1 = V_2$。则 $V = V_1 \otimes V_1$ 具有一个对合 $\tau$，该对合交换张量因子。$V$ 的对合通过算子共轭在其刘维尔空间上诱导出一个对合。

定义 3.10。设 $V = V_1 = V_2$ 为二维希尔伯特空间。对称混合态的集合是混合态的子集，其对应的密度矩阵 $\rho \in \mathscr{L}$满足 $\tau\rho = \rho\tau$。

与混合态和局部最大混合态的情形一样，对称混合态不构成刘维尔空间 $\mathscr{L}$的子簇。为解决这一问题，我们引入对称刘维尔空间：

定义 3.11。我们将 $\mathscr{L}_S \subseteq \mathscr{L}$ 定义为

$$\mathscr{L}_S = \{\rho \in \mathscr{L} \mid \tau\rho = \rho\tau\}.$$

也就是说，$\mathscr{L}_S = \mathscr{L}^{\mathbb{Z}_2}$ 是典范对合的不动点集。

通过省略的直接计算可知，混合态 $\rho$ 是对称混合态，当且仅当其布洛赫矩阵表示具有如下形式

$$B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right),$$

其中 $A = A^T$ 是实对称的 $3 \times 3$ 矩阵。因此，$B\mathscr{L}_S$ 是 $B\mathscr{L}$的一个 9 维子空间，同构于 $\mathbb{R}^3$ 与 $3 \times 3$对称矩阵的向量空间的直和，而后者是 6 维的。

## 4. Locally maximally mixed states

本节的目标是确定子簇 $\mathscr{L}_M \subseteq \mathscr{L}$ 的局部最大混合态的完整多项式不变量环。回忆一下，$\mathscr{L}_M$ 是 $\mathscr{L}$ 的几何整、阶乘实子簇（参见定义 3.9）。

我们不直接处理 $\mathscr{L}_M$，而是考虑与之相关的布洛赫矩阵表示。由于对于所有 $\rho \in \mathscr{L}_M$，$\operatorname{tr}_1(\rho)$、$\operatorname{tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}I$，且 $\frac{1}{2}I$是

布洛赫球的原点，因此对于所有 $\rho \in \mathscr{L}_M$， $u(\rho)\ v(\rho) = 0$。换言之，

$$B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathbb{R}^9.$$

特别地，线性映射 $B(\rho) \mapsto C$ 是 $B\mathscr{L}_M$ 与由 $3\times 3$ 矩阵组成的实向量空间 $M_3(\mathbb{R})$ 之间的同构。

此外，局部酉算子 $(U_1, U_2) \in \mathsf{U}(V_1) \times \mathsf{U}(V_2)$ 对$B\mathscr{L}_M$ 的作用由下式给出

$$(R_1, R_2)B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_1 C R_2^t \end{array}\right)(\rho), \tag{4}$$

其中， $R_1 = r(U_1)$ $R_2 = r(U_2) \in \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ 是旋转矩阵，它们分别是酉算子 $U_1$、$U_2$ 在标准映射 $r : \mathsf{U}(2) \to \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ 下的像。每个 $R_i$ 的作用显然是线性的，因此我们得到一个线性表示

$$\varphi_M : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(B\mathscr{L}_M) \cong \mathrm{GL}_9(\mathbb{R}).$$

我们首先为该作用寻找一个相对截面。考虑由下式定义的 $B\mathscr{L}_M$的线性子空间

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in B\mathscr{L}_M : C \text{ is diagonal} \right\}.$$

特别地， $S$ 是一个不可约实代数簇。

接下来我们计算 $S$ 的正规化子 $N(S)$。如果且仅如果存在满足下式的对角矩阵 $C$、 $D$，则一对 $(R_1, R_2) \in \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ 属于 $N(S)$:

$$R_1 C R_2^t = D.$$

通过与转置矩阵相乘，旋转矩阵 $R_1$、 $R_2$ 必须满足 $R_1 C C^t R_1^t = D D^t$ 以及 $R_2^t C^t C R_2 = D^t D$。由于 $CC^t = C^t C = C^2$ 和 $DD^t = D^t D = D^2$ 再次是对角矩阵，因此 $R_1$ 和 $R_2$ 必须属于 $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ 中对角矩阵子群的正规化子。该正规化子等于行列式为 $+1$ 的带符号置换矩阵子群，这是一个阶为 24 的群，并且抽象同构于手性八面体群 $\mathsf{O} \subseteq \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$，即八面体的保向对称群。

$\mathsf{O}$ 的元素具有 $EP$ 的形式，其中 $E$ 是一个对角矩阵，其元素属于 $\{\pm 1\}$，而 $P$ 是一个置换矩阵。在此记号下，记作 $R_i = E_i P_i$。当且仅当 $P_1 = P_2$ 时，对 $(R_1, R_2) \in \mathsf{O} \times \mathsf{O}$ 属于 $N(S)$（即，对于每个对角矩阵 $C$， $R_1 C R_2^t$ 都是对角矩阵）。因此，

$$N(S) = \{(E_1 P, E_2 P) \in \mathrm{O} \times \mathrm{O}\}.$$

由于 $N$（$S$）对 $S$ 的作用并不忠实，因此还需要计算 $S$ 的魏尔群（见注 2.12）。根据对 $N$（$S$）的描述，我们得到

$$Z(S) = \{(E_1 P, E_2 P) \in \mathrm{O} \times \mathrm{O} : E_1 = E_2\}.$$

因此，我们得到 $W(S)$ 在抽象意义下同构于 $\mathsf{O}$。

现在证明 $S$ 是一个相对截面（定义 2.9）。

命题 4.1. $S \subseteq B\mathscr{L}_M$ 是 $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ 作用的相对截面。

证明。为简化记号，令 $G = \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$。

首先，我们声称轨道

$$GS = \{M \in B\mathscr{L}_M : M = R_1 C R_2^t \text{ for some } C \in S \text{ and } R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\}$$

是 $B\mathscr{L}_M$ 的全部。为此，根据矩阵 $M \in B\mathscr{L}_M$ 的奇异值分解，存在正交矩阵 $R_1$、$R_2 \in \mathsf{O}_3(\mathbb{R})$，使得 $M = R_1 \Sigma R_2^t$，其中 $\Sigma$ 是一个具有非负条目的对角矩阵（即 $M$ 的奇异值）。选取对角矩阵 $D_1$、$D_2$，其条目属于 $\{\pm 1\}$，并且满足 $\det D_i = \det R_i \in \{\pm 1\}$。于是

$$M = (R_1 D_1)(D_1^{-1} \Sigma D_2^{-1})(R_2 D_2)^t$$

因此，$M$ 与矩阵 $(D_1^{-1}\Sigma D_2^{-1})$ 处于同一个 $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$-轨道中。后一个矩阵是对角矩阵，因此属于 $S$。这表明 $GS = X$。接下来，令

$$X_0 = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) : CC^t \text{ has distinct eigenvalues} \right\}$$

这是 $X$ 的一个 $G$-不变量稠密开子集，即特征多项式 $CC^t$ 的判别式 $\Delta$ 的零点集的补集（注意，这是一个多项式 $G$-不变量）。令

$$S_0 = X_0 \cap S = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) : C \text{ diagonal}, C^2 \text{ has distinct eigenvalues} \right\}.$$

假设 $C_1$、$C_2$ 表示 $S_0(\mathbb{C})$ 的两个元素，且对于 $R_1$、$R_2 \in \mathsf{SO}_3(\mathbb{C})$，有 $R_1 C_1 R_2^t = C_2$。通过与转置相乘，我们看到 $R_1 C_1^2 R_1^t$ 和 $R_2 C_1^2 R_2^t$ 都等于 $C_2^2$，这是一个具有互异元素的对角矩阵，因此 $R_1$、$R_2$ 必须是属于 $N(S)(\mathbb{C})$ 的带符号置换矩阵。因此，$S$ 是一个相对截面。□

通过检查命题 4.1 的证明，我们能够为 2.4 上 $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 在 LMM态上的作用构造一个几何有理商：

定理 4.2. 设 $X = B\mathscr{L}_M$, $G = \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$，并设

$$X_0 = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) : CC^t \textit{ has distinct eigenvalues} \right\} \subseteq X.$$

设 $\Delta$ 为 $CC^t$ 的特征多项式的判别式。则代数商

$$X_0 /\!/ G = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X_0]^G) = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]^G[\Delta^{-1}])$$

是 $X_0$ 的几何商，因此也是 $G$ 在 $X$ 上的作用的几何有理商。

注记 4.3。 注意，在明确确定该商时，我们使用了如下事实：

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]^G[\Delta^{-1}]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X, \Delta^{-1}]^G),$$

这由引理 2.13 得出，因为 $G$ 连通、没有非平凡特征，并且$X$ 是平凡的。

为了证明该定理以及本文后续部分，我们需要复矩阵奇异值分解的一种变体：

引理 4.4. 设 $C$ 是一个复数域上的 $n \times n$ 矩阵，且 $CC^t$ 有互异特征值。那么：

(i) 存在正交矩阵 $P, Q \in \mathsf{O}_n(\mathbb{C})$，使得 $PCQ^t$ 是一个对角矩阵。(ii) 若 $M$是另一个这样的矩阵，且 $MM^t$与 $CC^t$共轭，则存在正交矩阵 $P, Q \in \mathsf{O}_n(\mathbb{C})$，使得 $PCQ^t = M$。

证明。由于 (ii) 的证明很直接，我们只证明 (i)。将矩阵 $A$ 的秩记为 rank($A$)。根据 [CH87，定理 2]（参见 [Cra69，定理 3]），只需证明 rank($CC^t$) = rank($C$)。由于 $CC^t$ 具有互异特征值，我们推知 rank($CC^t$)只能是 $n$ 或 $n-1$。若 rank($CC^t$) $= n$，则 $CC^t$ 可逆，因此 $C$也可逆，所以在此情形下 rank($CC^t$) = rank($C$)。

当 rank($CC^t$) $= n-1$ 时，可得 $(\det C)^2 = \det(CC^t) = 0$，因此 $\det C = 0$ 也成立。于是，

$$\operatorname{rank}(CC^t) = n-1 \le \operatorname{rank}(C)$$

（因为 rank($AB$) $\le$ min(rank($A$), rank($B$))。因此，rank($C$) 只能是 $n-1$ 或 $n$。但 rank($C$) $\neq n$，因为 $\det C = 0$。因此，rank($C$) $= n-1 =$ rank($CC^t$)。□

定理 4.2 的证明。由于 $X_0$ 是仿射的，只需证明 $G(\mathbb{C}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ 在 $X_0(\mathbb{C})$ 上的轨道是闭的（参见 MFK94，I.1.3]）。若 $C \in X_0(\mathbb{C})$ 表示一个几何点，我们通过证明它对应于 $CC^t$ 的特征多项式的零点集，来证明其轨道是闭的。事实上，该轨道由形如 $M = R_1 C R_2^t$ 的元素组成，其中 $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$。对于任意这样的 $M$，矩阵 $MM^t$ 与 $CC^t$ 共轭，因此被 $CC^t$ 的特征多项式消去。反过来，假设矩阵 $M$ 具有这样的性质： $MM^t$ 有互异特征值，且被 $CC^t$ 的特征多项式消去。那么 $MM^t$ 的最小多项式等于其特征多项式，并且整除 $CC^t$ 的特征多项式，因此 $MM^t$ 的特征多项式必定等于 $CC^t$ 的特征多项式。由于这些矩阵具有互异特征值，这意味着 $CC^t$ 与 $MM^t$ 共轭。根据引理 4.4，存在 $P, Q \in \mathrm{O}_3(\mathbb{C})$，使得 $PCQ^t = M$；此外，按照命题 4.1 的证明，我们可以假设 $\det P = \det Q = 1$。因此， $C$ 和 $M$ 属于同一个 $G$-轨道，由此证明 $G$ 对 $C$ 的轨道对应于 $CC^t$ 的特征多项式的零点集，而它是 $X_0(\mathbb{C})$ 的一个闭子集。□

接下来，我们计算多项式不变量环。为显式构造这些不变量，回顾一下，LMM态的布洛赫矩阵表示具有如下形式

$$B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)(\rho) \in \mathbb{R}^9.$$

其中， $C$ 是由两点关联函数组成的 3×3 矩阵。令

$$t_2 = \operatorname{tr} CC^t, \quad t_3 = \det C, \quad t_4 = \operatorname{tr}\left(CC^t\right)^2. \tag{5}$$

容易验证，这些是关于 $\mathbb{R}[\mathscr{L}_M]$ 的多项式函数，在 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的作用下保持不变，其次数分别为 2、3 和 4。

定理 4.5。LMM态的不变量环是多项式环 $\mathbb{R}[t_2, t_3, t_4]$，其中每个 $t_i$ 的次数分别按 $i$、 $i = 2$、3、4 分次。

证明。 我们通过证明 $S$ 是作用 2.11（定义 $G = \mathrm{SO}_3$（$\mathbb{R}$） $\times \mathrm{SO}_3$（$\mathbb{R}$）于 $X = B\mathscr{L}_M$上的切瓦莱截面来证明该定理。由于我们已经在命题 $S$ 4.1中证明了 $S$ 是一个相对截面，因此只需证明不变量的限制同态

$$\mathrm{res}_S : \mathbb{R}[X]^G \longrightarrow \mathbb{R}[S]^{W(S)}$$

是一个同构。为证明单射性，注意如果多项式不变量 $f \in \mathbb{R}[V]^G$满足 res$_S$($f$) $= 0$，那么该不变量在$GS$的每个元素上的取值都必须为零，因为 $f$ 在轨道上是常数。但正如命题证明中所示，

$GS = X$

4.1)，因此 $f=0$ 在所有 $X$ 上，并且 $\mathrm{res}_S$ 是单射。接下来，我们必须证明 $\mathrm{res}_S$也是满射。这可以利用我们对魏尔群 $W(S)$ 的了解，并直接计算不变量环 $\mathbb{R}[S]^{W(S)}$。考虑不变量

$$s_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad s_2 = x_1x_2x_3, \quad s_3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[S]^{W(S)}$$

次数分别为 2、3 和 4。通过简单计算，

$$\det(\partial s_i/\partial x_j)_{i,j=1,2,3} = 8(x_1^2x_3^4 - x_1^2x_2^4 - x_2^2x_3^4 + x_1^4x_2^2 + x_3^2x_2^4 - x_1^4x_3^2) \neq 0$$

且 $\deg s_1 \cdot \deg s_2 \cdot \deg s_3 = 24 = |W(S)|$，因此

$$\mathbb{R}[S]^{W(S)} = \mathbb{R}[s_1, s_2, s_3]$$

是由以下元素生成的多项式环：$s_1$、$s_2$、$s_3$ [DK15，定理 3.9。4]。这三个不变量分别对应于 $G$-不变量 $t_1 = \mathrm{tr}\, CC^t$、$t_2 = \det CC^t$ 和$t_3 = \mathrm{tr}(CC^t)^2$在限制下的像。由此可知，限制同态 $\mathrm{res}_S$ 也是满射的（并且保持次数），因此它是分次 $\mathbb{R}$-代数的同构。□

注 4.6。定理 4.5是关于多项式不变量的结果，但没有考虑混合态的正性条件。正性条件限制了三个不变量 $t_1$、$t_2$、$t_3$的取值。特别地，利用 [Gam16] 中的不等式，我们可以推得界 $0 \leq t_2 \leq 3$、$t_3 \leq (1-t_2)/2$、$0 \leq t_4 \leq -2t_3 + (1-t_2)^2/4$。

我们还可以证明，不变量有理函数域是超越次数为 3 的有理域，并给出显式生成元：

推论 4.7. LMM态的有理不变量域同构于 $\mathbb{R}(t_1, t_2, t_3)$。

证明。令 $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 和 $X = B\mathscr{L}_M$，并令 $S \subseteq X$ 为定理 4.5 的证明中得到的 Chevalley 截面。对不变量作限制得到同构$\mathbb{R}[X]^G \cong \mathbb{R}[S]^{W(S)}$，后者是一个由三个变量构成的多项式环。由于$W(S)$是有限的，有理函数域 $\mathbb{R}(S)^{W(S)}$ 是 $\mathbb{R}[S]^{W(S)}$ 的分式域（注记 2.14），因此它是纯超越的，且超越次数为 3。由定理 2.10 可知，$\mathbb{R}(X)^G$ 也必定是由三个生成元构成的纯超越域。这些生成元可取为 $t_1$、$t_2$、$t_3$，因为这些多项式代数独立。□

## 5. Symmetrically mixed states

现在我们来考察子簇 $X = \mathscr{L}_S \subseteq \mathscr{L}$，它由对称混合态组成；为方便起见，我们有时将其称为对称态。回顾定义3.11，这类混合态的特征是其密度矩阵与扭转映射 $\tau$ 对易：$V \otimes V \to V \otimes V$。

经过简单计算（此处略去），混合态 $\rho$ 属于 $\mathscr{L}_S$ 当且仅当其布洛赫矩阵表示具有如下形式

$$B(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right),$$

其中 $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ 是对称矩阵，即 $A = A^T$。由此可知，$B\mathscr{L}_S$ 是 $B\mathscr{L}$的一个 9 维子空间，同构于 $\mathbb{R}^3$ 与对称矩阵向量空间的直和；后者的维数为 6。

任意的局部幺正算子都不会保持对称态不变。等价地，子空间 $B\mathscr{L}_S$ 在 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 作用 $\varphi$ 下不是不变量。相反，我们

得到 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的作用，该群以对角方式嵌入乘积 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 中。更准确地说，对称态上的表示 $\varphi_S : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow GL(B\mathscr{L}_S)$ 由下式给出

$$R \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (Rv)^t \\ \hline Rv & RAR^t \end{array}\right).$$

现在，我们为 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 在对称混合态上的作用构造一个相对截面（定义 2.9）。

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right) \in B\mathscr{L}_S : A \text{ is diagonal} \right\}.$$

这是 $B\mathscr{L}_S$ 的一个六维子空间，其魏尔群 $W(S)$ 是 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 内对角矩阵的正规化子。与第 4节一样，该群可以标识为由 $3\times 3$ 个行列式为 1 的带符号置换矩阵组成的手性八面体群 O。我们首先证明不变量上的限制映射是单射：

命题 5.1。限制同态 $\mathrm{res}_S : \mathbb{R}[B\mathscr{L}_S]^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})} \to \mathbb{R}[S]^{W(S)}$ 是单射。

证明。设 $A$ 为一个对称矩阵。根据谱定理，存在一个正交矩阵 $U$，使得 $UAU^T = D$为对角矩阵。与命题 4.1的证明一样，我们可以将 $U$ 与一个仅由 $\pm 1$ 组成的对角矩阵 $D_0$ 相乘，使得 $\det(D_0U) = 1$，从而 $D_0DD_0^T = D = (D_0U)A(D_0U)^T$。因此可以假设 $U = R$ 属于 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$，这样 $B\mathscr{L}_S$ 中的每个 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-轨道都至少与 $S$ 相交于一点。现在假设 $f \in \mathbb{R}[B\mathscr{L}_S]^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$ 是一个多项式不变量，且 $\mathrm{res}_S(f) = 0$。那么$f = 0$，因为每个 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-轨道都包含 $S$中的一点，而 $f$ 的值在 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-轨道上保持不变。□

注5.2。限制同态 $\mathrm{res}_S$ 在此情形下并非满射，这与 LMM态的类似情形相反。为说明这一点，注意到若我们将$v = (v_1, v_2, v_3)^T$写成，则显然多项式函数

$$f\left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right) = (v_1v_2v_3)^2$$

给出了 $\mathbb{R}[S]^{W(S)}$ 中的一个不变量，而它并非来自$\mathbb{R}[B\mathscr{L}_S]^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$中任何不变量的限制。因此， $S$ 并不是切瓦莱截面，因为 $\mathrm{res}_S$ 不是同构。多项式不变量环 $\mathbb{R}[S]^{W(S)}$ 可以在 Macaulay2 上于合理时间内计算出来，但其表示相当复杂。这一计算以及对希尔伯特–莫利恩级数的快速考察表明，不变量环 $\mathbb{R}[B\mathscr{L}_S]^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$ 本身也相当复杂；对于实际应用而言，直接确定其在 $\mathbb{R}[S]^{W(S)}$ 中的像似乎并无益处。

因此，我们转而关注计算有理不变量域 $\mathbb{R}(B\mathscr{L}_S)^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$的问题，这似乎更容易处理。首先注意到， $S$ 是一个相对截面：

定理 5.3。子簇 $S$ 是 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 在 $B\mathscr{L}_S$ 上作用的一个相对截面。因此，存在一个同构

$$\mathbb{R}(B\mathscr{L}_S)^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}(S)^{W(S)}$$

由限制映射给出。

证明。为便于记号，设 $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 以及 $X = B\mathscr{L}_S$。与命题 5.1 的证明一样，我们有 $GS = X$，因此相对截面的性质 (i) 显然成立（定义 2.9）。对于第二个性质，设 $X_0 \subseteq X$ 为由以下元素组成的稠密开子集：其二点相关矩阵 $A$ 具有互异特征值（这是特征多项式 $A$ 的判别式 $\Delta$ 的零点集的补集，因此在 $X$ 中是扎里斯基开集）。设 $S_0 = S \cap X_0$ 为由这样的对称态组成的开子集：其二点相关矩阵 $A$ 不仅是对角矩阵，而且其对角元素互异（即具有互异特征值）。现在，对于任意域 $K \supseteq \mathbb{R}$，$gS_0(K) \cap S_0(K)$ 非空的唯一可能性是 $g \in G$ 为带符号置换矩阵，因为 $A$ 的三个元素两两互异。但此时 $g \in W(S)(K)$，性质 (ii) 得以满足。因此，$S$ 是一个相对截面，并且根据定理 2.10 中给出的一般性结论，函数域同构随之成立。□

定理 5.3的一个有用推广可以通过仔细检查其证明得到。沿用证明中的记号，$G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 和 $X = B\mathscr{L}_S$，令

$$S_0 = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array} \right) \in B\mathscr{L}_S : A \text{ is diagonal with distinct entries} \right\}.$$

这是 $S$ 的一个仿射开子簇，它由以下零点集的补集构成：$\Delta$，即 $A$的特征多项式的判别式。由于 $\Delta$ 是一个多项式$G$-不变量（因而也是 $W(S)$-不变量），我们可以将坐标环$\mathbb{R}[S]^{W(S)}$ 和 $\mathbb{R}[X]^G$ 在 $\Delta$ (应用引理 2.13) 处局部化，并得到一个限制映射

$$\mathrm{res} : \mathbb{R}[X]^G[\Delta^{-1}] \longrightarrow \mathbb{R}[S]^{W(S)}[\Delta^{-1}] \tag{6}$$

这是局部化环之间的映射。我们断言它是一个同构：

定理 5.4。 映射 (6) 是一个同构。

证明。设 $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]^G[\Delta^{-1}])$，并令 $Z = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[S]^{W(S)}[\Delta^{-1}])$。映射 (6) 定义了仿射簇之间的一个态射 $f\colon Z \to Y$。我们首先断言此态射是满射。为此，只需证明相应的几何点映射 $f\colon Z(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$ 是满射。为此，首先注意到 $Y$ 是 $G$作用在 $X[\Delta^{-1}]$上的一个几何商。事实上，在复数域上，此作用的轨道是二点相关矩阵 $A$ 的共轭类。由于 $\Delta \neq 0$，$A$ 的所有特征值互不相同，因此两个矩阵共轭当且仅当它们的特征多项式相等。此外，$A$ 的特征多项式等于其最小多项式，因此 $A$ 的共轭类对应于 $A$的特征多项式的零点集，故为一个闭子集。因此，$G$作用的轨道都是闭的，而代数商 $Y$是一个几何商 [MFK94, I.1.3]。对于 $Z$，情况也相同，因为此时作用在仿射簇 $S_0$ 上的群 $W(S)$ 是有限的，故其轨道都是闭的。因此，一个几何点 $y \in Y(\mathbb{C})$ 对应于一个 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$-轨道，该轨道由以下形式的点组成

$$y = \left( \begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array} \right)$$

使得矩阵 $A$ 是对称的且具有互异特征值。由于 $A$ 具有互异特征值，我们可以用 $\mathbb{C}$ 上的一个矩阵 $Q$ 将其对角化，该矩阵的列是对应于互异特征值的特征向量，因此彼此正交。由此可知，$Q$是一个正交矩阵，而且我们可以假设其行列式为一，正如命题5.1的证明中所示。这样我们得到一个对角矩阵 $A_0 = QAQ^t$和一个几何点

$$z = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (Qv)^t \\ \hline Qv & A_0 \end{array}\right)$$

属于 $S_0$，其 $W(S)$-轨道是 $Z(\mathbb{C})$中的一个几何点，且满足 $f(z) = y$。因此， $f$在几何点上是满射，因而是满射。

现在令 $y \in Y$，并令 $\mathcal{O}_{Y,y}$ 为 $Y$ 在点 $y$处的局部环。令 $z \in Z$ 满足 $f(z) = y$，并考虑局部环的映射 $f_y\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{Z,z}$，该映射由 $f$诱导。由于它是环同态 $\mathbb{R}[X]^G \to \mathbb{R}[S]^{W(S)}$的局部化，而后者由命题 5.1知是单射，因此同态 $f_y$ 也是单射。此外，由 $S$ 为相对截面的性质 (iii) 可知，态射 $f\colon Z \to Y$是根态射（泛单射）。根据 [Gro60], I.3.5.8，由映射 $f_y$ 诱导的剩余域扩张 $k(y) \to k(z)$ 是根态射（纯不可分）。由于我们在特征零的情形下工作，因此 $f_y$ 诱导同构 $k(y) \cong k(z)$。由中山引理，局部环的同态 $f_y$ 因而是满射。现在我们已经证明，对于所有 $y \in Y$，由 $f$ 诱导的局部环同态 $f_y\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{Z,z}$ 是同构。因此， $f$ 诱导层 $\mathcal{O}_Y \cong f_*\mathcal{O}_Z$的同构，定理由取整体截面即得。□

例 5.5。 为说明定理 5.4，再次考虑 $W(S)$-不变量

$$f\left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right) = (v_1 v_2 v_3)^2$$

备注 5.2中的不变量。尽管这个不变量并非由任何多项式 $G$-不变量的限制得到，但定理 5.4 表明，必然存在一个有理 $G$-不变量$g$，其分母中只含有 $\Delta$ 的幂，使得 $f$ 是 $g$的限制。具体而言，令

$$g(v, A) := \sum_{i,j,k,\ell,m,n} \epsilon_{ijk} A_{j\ell} A_{km} A_{mn} v_i v_\ell v_n \,,$$

其中 $i$、 $j$、 $k$ 两两不同。如果 $A$ 是一个对角矩阵，其对角线元素为 $A_{ii} = \lambda_i$，那么直接计算可得

$$g(v, A) = v_1 v_2 v_3 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)\,,$$

因此

$$r = \frac{g(v, A)^2}{\Delta} \in \mathbb{R}[B\mathscr{L}_S]^G[\Delta^{-1}]\,.$$

限制为 $W(S)$-不变量 $f$。 $g$的表达式是通过一种图形演算得到的，该演算类似于 [JKW07]中的演算。

注意，在定理 5.4的证明中，我们使用了如下关于 $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ 作用于对称态的几何有理商构造，现记录如下：

定理 5.6. 设 $X = B\mathscr{L}_S$、 $G = \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$，并设

$$X_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline v & A \end{array}\right) : A \text{ has distinct eigenvalues} \right\} \subseteq X.$$

设 $\Delta$ 为 $A$ 的特征多项式的判别式。那么代数商

$$X_0 /\!/ G = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X_0]^G) = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]^G[\Delta^{-1}])$$

是 $X_0$ 的几何商，因此也是 $G$ 在 $X$ 上作用的几何有理商。

最后，我们现在可以证明，有理不变量域是纯超越的：

定理 5.7. 有理不变量域 $\mathbb{R}(B\mathscr{L}_S)^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$ 是六维纯超越的。

证明。 我们使用推论 2.8中给出的无名引理版本，并将其应用于定理 $S$ 的相对截面 5.3。下文中，设 $V:=S$；则 $\dim_{\mathbb{R}} V=6$。令$H:=W(S)=\mathsf{O}$ 为带符号 $3\times 3$ 置换矩阵构成的手性八面体群。于是我们有分解 $V=V_1\oplus V_2$，其中

$$V_1=\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right\},\quad V_2=\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{array}\right)\right\}$$

是 $H$-不变子空间，对应于 $S$ 的 1 点和 2 点关联函数子空间。 $H$ 在 $V_1$ 上的作用是标准作用，并且几乎自由，因为它在几何点上在由 $U$ 给出的开子集上自由

$$\prod_{i<j}(v_i-v_j)\neq 0\,.$$

容易证明，有理不变量域 $\mathbb{R}\left(V_1\right)^H$ 是次数为三的纯超越域（证明见下文引理 5.9 ）。由推论2.8 可知， $\mathbb{R}(V)^H$ 本身是次数为六的纯超越域，因此根据定理 $\mathbb{R}\left(B\mathscr{L}_S\right)^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$ ， 2.10同样如此。 □

备注 5.8。 如同直接推论一样，我们可以推出，定理 5.6 中的几何有理商与 $\mathbb{P}^6_{\mathbb{R}}$双有理等价。

5.1.有效有理性。 根据定理 5.7，两个量子比特的对称混合态的不变量域由六个代数独立的有理不变量生成。现在我们说明如何使这一结果具有效性，即根据刘维尔空间的一组坐标，推导出六个生成不变量的显式表达式。

Let

$$G=\mathrm{O}:=\{g\in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}), ge_i=\pm e_j, \det(g)=1\}$$

为手性八面体群，该群在第4节中介绍。令 $V=\mathbb{C}^3$，并赋予 $G$标准作用。多项式不变量环 $\mathbb{C}[V]^G$ 具有如下简单表示。记 $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)^t\in V$，并考虑多项式

$$p(x)=\prod_{i=1}^{3}(x-v_i^2)=x^3-p_1x^2+p_2x-p_3,$$

使得

$$\begin{aligned} p_1(v)&=v_1^2+v_2^2+v_3^2\\ p_2(v)&=(v_1v_2)^2+(v_1v_3)^2+(v_2v_3)^2\\ p_3(v)&=(v_1v_2v_3)^2 \end{aligned}$$

是 $v$ 的坐标平方的初等对称多项式。令

$$p_4(v)=v_1v_2v_3\,\mathrm{disc}(p)=v_1v_2v_3(v_1^2-v_2^2)(v_1^2-v_3^2)(v_2^2-v_3^2)$$

那么， $p_1$、$p_2$、$p_3$、$p_4$ 生成 $\mathbb{C}[V]^G$，这可通过使用 Macaulay2 进行算法验证。$p_1$、$p_2$、$p_3$ 这组不变量是 $\mathbb{C}[V]^G$ 的初等不变量，而 $p_4$ 是一个满足如下形式关系的次不变量

$$p_4^2 = P_9(p_1, p_2, p_3) \tag{7}$$

其中， $P_9$ 是一个拟齐次多项式，其系数为有理数，总次数为 9，权重分别为 1、2、3。

引理 5.9。有理不变量域 $\mathbb{C}(V)^G$ 是次数为三的纯超越域，由三个有理不变量生成：

$$X = p_2/p_1^2, \quad Y = p_3/p_1^3, \quad Z = p_4/p_1^4.$$

证明。 $\mathbb{C}(V)^G$ 是 $\mathbb{C}(\mathbb{P}V)^G \subseteq \mathbb{C}(\mathbb{P}V)$的纯超越扩张，而后者是超越次数为 2 的单有理域，因此根据 Castelnuovo 定理，它是纯超越的。为了求出 $\mathbb{C}(V)^G$的生成元，令 $X$， $Y$， $Z$如引理陈述中所示。由（7）可得

$$\frac{p_4^2}{p_1^9} = P_9(1, X, Y),$$

一个关于有理不变量 $X, Y \in \mathbb{C}(V)^G$的多项式。注意， $p_1 = Z^2/P_9(1, X, Y)$属于 $\mathbb{C}(X, Y, Z)$，因此每个不变量 $p_1, p_2, p_3, p_4$都可以表示为关于 $X, Y, Z$的有理函数。因此 $\mathbb{C}[V]^G \subseteq \mathbb{C}(X, Y, Z)$，于是

$$\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[V]^G) = \mathbb{C}(V)^G \subseteq \mathbb{C}(X, Y, Z)$$

这表明 $\mathbb{C}(X, Y, Z) = \mathbb{C}(V)^G$。 □

注 5.10。由于 $X$、$Y$、$Z$具有 $\mathbb{Q}$-系数，我们同样有

$$\mathbb{R}(V)^G = \mathbb{R}(X, Y, Z)$$

现在令 $S$ 为上文给出的对称态相对截面，其中两点关联函数的矩阵 $A$ 为对角矩阵。魏尔群 $W(S)$ 是手性八面体群 $G$，通过标准表示 $V$ 作用在一点关联函数子空间上。回顾可知，限制给出一个同构

$$\mathbb{R}(S)^{W(S)} \simeq \mathbb{R}(B\mathcal{L}_{\mathrm{sym}})^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$$

在有理不变量层面上。特别地，生成八面体群的有理不变量域的三个不变量 $X$、$Y$、$Z$ 可提升为三个有理不变量

$$p_X, p_Y, p_Z \in \mathbb{R}(B\mathscr{L}_{\mathrm{sym}})^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}.$$

这些不变量可以按照例 5.5 中的方法显式计算。它们全都是有理不变量，分母中只需判别式 $\Delta$ 的 $A$ 次幂。随后可以将这组不变量扩展为一组生成不变量，如下所示：

定理 5.11。这六个不变量

$$p_X, p_Y, p_Z, \mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}\left(A^2\right), \det(A)$$

生成域 $\mathbb{R}(B\mathscr{L}_{\mathrm{sym}})^{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$。

证明。 只需证明这六个不变量能够分离一般位置的几何轨道。这由 [Sha94，引理 2。1] 在 $k = \mathbb{C}$的情形下给出，但通过调用 [Gro60],I.3.5.8，可以很容易地将论证扩展到任意特征为零的域。令 $U = X_0$ 为 $B\mathscr{L}_{\mathrm{sym}}(\mathbb{C})$ 的开子集，其中 $\Delta \neq 0$，并令 $s = (v, A)$、$s' = (v', A')$ 为两个对称态，使得上面的六个不变量在以下对象上取值相等：

在 $s$、$s'$ 上计算。我们需要证明这两个态属于同一个 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$-轨道。为此，不妨设 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 和 $A' = \mathrm{diag}(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$，因为 $A$、$A'$ 的所有特征值均不相同，因此 $s$、$s'$ 属于截面 $S$。回忆一下，不变量 $p_X$、$p_Y$、$p_Z$ 按构造限制为不变量 $X$、$Y$、$Z$；后者能够分离魏尔群 $W(S)$ 的标准表示在一般位置的轨道。因此，在将 $U$ 替换为可能更小的开子集后，我们可以假设 $v = \gamma v'$，其中某个 $\gamma \in W(S)$。注意，魏尔群 $W(S)$ 保持截面 $S$ 不变，因此 $A$、$A'$ 在经过 $\gamma$ 的共轭作用后仍保持对角形式。因此，不妨设 $v = v'$，且 $A$、$A'$ 均为对角矩阵。但这样一来，由于 $\mathrm{tr}(A)$、$\mathrm{tr}(A^2)$、$\det(A)$ 在 $A$ 和 $A'$ 上取值相同，$A$ 的各个条目必定与 $A'$ 的各个条目相同，至多相差一个置换。这说明 $s$、$s'$ 属于同一个轨道。

□

注记 5.12。 第 4 节和第5 节的思想可以结合起来，证明两个量子比特的混合态全空间具有有理性。特别地，可以证明，当$X = \mathscr{L}$ 是两个混合量子比特的全刘维尔空间时，子空间

$$S = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} 1 & v^t \\ \hline u & C \end{array} \right) \in B\mathscr{L} : C \text{ is diagonal} \right\} \subseteq B\mathscr{L}$$

是一个相对截面，其魏尔群是一个阶为 96 的非阿贝尔群。在 $CC^t$ 的特征多项式的判别式不为零的不变开子集上，可以用它来构造显式的几何商。经过一些工作，这种方法可以证明有理性，并为有理不变量域提供显式生成元，尽管这些表达式极其复杂，实际用途不大。

在即将发表的工作 [CCKR23], 中，我们转而提供另一个相对截面$S' \subseteq \mathscr{L}$，其魏尔群为阿贝尔群。这个相对截面无法用于构造几何商，但它可以导出更简单的有理性证明以及不变量域的更简单生成元。此外，它还适用于推广到更多量子比特的情形。因此，我们选择单独处理这一情形，同时引用本文中的方法。

## References

[Bry02] Jean-Luc Brylinski。《纠缠的代数度量》。载于《量子计算数学》，Comput. Math. Ser.，第3–23页。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，2002年。[CCKR23]Luca Candelori、Vladimir Chernyak、John Klein、Nick Rekuski。《混合态双量子比特的局部幺正不变量的有效有理性》。预印本，https://arxiv.org/abs/2305.16178。[CH87] Dipa Choudhury 和 Roger A. Horn。复正交等价的奇异值分解类比。《线性与多重线性代数》21(2):149–162，1987年。[Cra69] B. D. Craven。《复对称矩阵》。《澳大利亚数学会杂志》10:341–354，1969年。[CTS07] Jean-Louis Colliot-Th´el`ene 和 Jean-Jacques Sansuc。线性代数群作用下不变量域的有理性问题（特别涉及布劳尔群）。载于《代数群与齐性空间》，Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.丛书第19卷，第113–186页。Tata Inst. Fund. Res.，孟买，2007年。[DK15] Harm Derksen 和 Gregor Kemper。《计算不变理论》，《数学科学百科全书》第130卷。施普林格，海德堡，扩充版，2015年。附有 Vladimir L. Popov 撰写的两个附录，以及 Norbert A'Campo 和 Popov 撰写的增补，《不变理论与代数变换群》，VIII。[Dol87] Igor V. Dolgachev。不变量域的有理性。载于《代数几何》，鲍登，1985年（缅因州布伦瑞克，1985年），《纯粹数学研讨会论文集》第46卷，第3–16页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1987年。

[FGG+20]Luigi Ferraro、Federico Galetto、Francesca Gandini、Hang Huang、Matthew Mastroeni 和 Xianglong Ni。用于 Macaulay2 的 InvariantRing软件包。https://arxiv.org/abs/2010.15331，2020年。[Gam16] Omar Gamel。纠缠布洛赫球：布洛赫矩阵与双量子比特态空间。《物理评论A》93(6):062320，第18页，2016年。[GKP16] V. Gerdt、A. Khvedelidze 和 Yu. Palii。关于混合$X$态双量子比特的局域幺正不变量环。《圣彼得堡数学研究所科学札记》（POMI）448（表示论、动力系统、组合方法XXVII）：107–123，2016年。[Gro60] A. Grothendieck。《代数几何要素》。I. 图式的语言。法国高等科学研究院数学出版物，（4）：228，1960年。´GS[Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可访问 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。] HHHH[Ryszard Horodecki、Pawel Horodecki、Michal Horodecki 和 Karol Horodecki。量子纠缠。《现代物理评论》81(2):865–942，2009年。09] JKW[P.D. Jarvis、R.C. King 和 T.A. Welsh。混合双量子比特系统及其局部不变量环的结构。《物理学杂志A》40(33):10083–10108，2007年。07] MFK[D. Mumford、J. Fogarty 和 F. Kirwan。《几何不变式理论》，《数学及其边缘领域成果》第34卷。施普林格出版社，柏林，第三版，1994年。94] MW /David A. Meyer 和 Noland Wallach。多量子比特不变量：3个量子比特的情形。载于《量子计算数学》，Comput. Math. Ser.，第77–97页。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，2002年。/NC[Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。02] Ros[Maxwell Rosenlicht。关于代数群的一些基本定理。《美国数学杂志》78:401–443，1956年。00] Sha[I. R. Shafarevich，编。《代数几何》。IV，《数学科学百科全书》第55卷。施普林格出版社，柏林，1994年。线性代数群。不变理论；《代数几何》第4卷（俄语版）的译本，苏联科学院全苏科学技术信息研究所，莫斯科，56] MR1100483 (91k:14001)[译者为 A. N. Parshin 和 I. R. Shafarevich。94] Wal 1989 [ Nolan R. Wallach。《几何不变式理论》。Universitext丛书。施普林格，查姆，2017年。关于实数与复数。