arXiv:2304.13560v1 [math.OA] 26 Apr 2023

双圆盘上的本质正规加权 Bergman 商模与特征簇

郭坤宇、王鹏辉、赵崇

2023年2月19日

摘要

我们为一类商希尔伯特模引入了 Grassmann 流形结构，并着手研究与 distinguished varieties 相关的 Arveson-Douglas 猜想的多圆盘版本。更有意思的是，我们根据商模的本质正规性，得到了双圆盘中特殊簇的算子论刻画。作为应用，我们研究了 distinguished variety 边界的 K-同调。

关键词：特殊簇、本质正规性、加权 Bergman 模、Grassmann 商模、K-同调、代数簇。

1 引言

代数零点簇是代数几何学中的主要研究对象之一。对于多项式环 $\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_d]$ 的理想 I，其代数零点簇定义为

$$Z(I)=\{(z_1,\ldots,z_d)\in\mathbb{C}^d : p(z_1,\ldots,z_d)=0,\ \forall p\in I\}.$$

如果存在多项式环的理想 I，使得 $V=Z(I)\cap\mathbb{D}^d$，则单位多圆盘 $\mathbb{D}^d$ 的子集 V 被称为 $\mathbb{D}^d$ 的代数子簇。Agler 和 McCarthy [AM1], 引入了一类特殊子簇，称为 distinguished variety，在 Ando 不等式、Pick 插值问题等方面发挥着重要作用。关于 distinguished variety 的结构和应用已有许多研究，请参阅 [AM1, AM2, BKS, DGH, DS, DSS, Kne1, Kne2, PS, Sch, Ve] 及其中的参考文献。

定义 1.1。 (Agler 和 McCarthy *[AM1]*）设 $\mathbb{T}$ 为单位圆。若子簇 V 位于 $\mathbb{D}^2$ 中，且 $\partial V\subset\mathbb{T}^2$.

Agler 和 McCarthy 用矩阵值内函数刻画了特征簇，其中，如果定义在 $\mathbb{D}$ 上的矩阵值函数在 $\mathbb{D}$ 上解析，并且在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处为酉矩阵，则称其为内函数。

定理 1.2。 （Agler 和 McCarthy *[AM1]*）设 V 是一个特征簇，则存在一个有理矩阵值内函数 Ψ使得

$$V=Z\big(\det(wI_m-\Psi(z))\big)\cap\mathbb{D}^2.$$

[0]2020 美国数学会数学主题分类：主 47A13；次 46H25。

最近，人们发现特殊簇与商希尔伯特模的本质正规性密切相关。回顾一下，给定希尔伯特空间 $\underline{T}=(T_1, \ldots\ldots, T_d$上的一组交换算子 H，可以自然地将 H 构造成一个希尔伯特模 [DP]，其上的多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$模作用为

$$p \cdot x = p(T_1, \ldots, T_d)x,\ p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d],\ x \in H.$$

例如，有界域上的大多数常见解析希尔伯特空间[CG] 自然地构成了 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$上的 Hilbert 模。受 BDF 理论[BDF], 的启发，希尔伯特模理论中的一个基本问题是研究由 C^*-代数$C^*(\underline{T})$生成的 $\{\mathrm{Id}_H$、T_1，……，$T_d\}$ 以及紧算子理想 $\mathcal{K}$ 的本质可交换性，其中 Id_H 是 H上的恒等算子；两个算子 A 和 B 本质可交换，是指它们的交换子$[A, B] = AB - BA$ 是紧算子。此时， H 称为本质正规。

称 $\mathcal{M}$ 为 H 的闭子空间，若其在模作用下不变。令 $\mathcal{N} = H \ominus \mathcal{M}$，并对 $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 记

$$S_p = P_{\mathcal{N}}\ p(T_1, \ldots, T_d)\ |_{\mathcal{N}},$$

在 $\mathcal{N}$ 上对 $p(T_1, \ldots, T_d)$ 进行压缩。然后， $\mathcal{N}$ 通过元组 $(S_{z_1}, \ldots, S_{z_d})$ 自然地具有 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$-模结构，并称为 H 的商模。

在 [Ar1], Arveson 猜想，单位球 $\mathbb{C}^d$ 上的 Drury-Arveson 模 H_d^2 的分次子模是本质正规模。沿着这一方向已经开展了大量工作，例如 [Ar2、Dou1、Dou2、DGW、DTY、DW、DWy、Guo、GWk1、GWk2、GWy、KS、Sha、WX1、WX2、WX3]。

然而，众所周知，Arveson 猜想对于多圆盘上的非零 Hardy 子模并不成立，因此我们将转而研究商模。照例， $\mathbb{D}^d$ 上的 Hardy 空间定义为

$$H^2(\mathbb{D}^d) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}\ (\mathbb{D}^d) : ||f||^2 = \sup_{r \in [0,1)} \int_{\mathbb{T}^d} |f(rz)|^2 \mathrm{d}m(z) < \infty \right\},$$

其中 $\mathrm{d}m$ 是环面 $\mathbb{T}^d$上的归一化 Haar 测度。在 [GWp1、GWp2、WZ1、WZ3], 中，（准）齐次商模的本质正规性得到了完整刻画。作为研究结果的一部分，证明了对于 $\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_d]$ 上的一个（准）齐次理想 I，若 $Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^d \subset \mathbb{T}^d$，则相应的商模 $[I]^\perp$ 在 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 中是本质正规的。

关于非齐次情形的初步了解，让我们回顾一下 [Cla、Wa]中的结果。设 η_1 和η_2 是 $\mathbb{D}$上的两个非常数内函数，则 $[\eta_1(z) - \eta_2(w)]^\perp$ 的商模 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 具有本质正规性，当且仅当 η_1 和 η_2 都是有限 Blaschke 乘积，这等价于 $Z(\eta_1 - \eta_2) \cap \mathbb{D}^2$ 是一个特殊簇这一条件。

在本文中，我们将研究加权 Bergman 模中商模的本质正规性。对于实数 $\alpha > -1$，加权 Bergman 空间定义为

$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^d) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}\ (\mathbb{D}^d) : ||f||_\alpha^2 = c_\alpha \int_{\mathbb{D}^d} |f(z)|^2 \prod_{i=1}^{d} (1 - |z_i|^2)^\alpha \mathrm{dV}_d(z) < \infty \right\},$$

其中 dV_d 是 $\mathbb{D}^d$ 上通常的 Lebesgue 测度，而 c_α 是将测度$d\prod(1 - |z_i|^2)^\alpha \mathrm{dV}_d$归一化的常数。已知加权 Bergman 空间是一个具有再生核的 Hilbert$_{i=1}$

空间，其再生核为

$$K_\lambda(z)=\prod_{i=1}^{d}(1-\bar{\lambda}_i z_i)^{-\alpha-2},\lambda,z\in\mathbb{D}^d. \tag{1.1}$$

注意，当 $\alpha=-1$时，（1.1）恰好是 Hardy 空间 H^2（$\mathbb{D}^d$）的再生核。在此意义下，我们也用 $\mathcal{A}_{-1}$（$\mathbb{D}^d$）来指代 H^2（$\mathbb{D}^d$）。

下文中，对于理想 $I\subset\mathbb{C}[z,w]$，如果 $Z(I)\cap\mathbb{D}^2$ 是一个特殊簇，我们称 I 为特征理想；由 I 生成的子模 $[I]_\alpha\subset\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$ 和相应的商模 $[I]_\alpha^\perp$ 都称为特征的。为简化记号，对于 $f\in\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^d)$，$[f]_\alpha$ 表示由 f生成的 $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^d)$ 的主子模。特别地，我们将简写为 $[f]=[f]_{-1}$，它是 Hardy 模 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 的子模。

在 [WZ2中，WZ3], 证明了，在准齐次性的假设下，$\mathcal{A}_\alpha$（$\mathbb{D}^d$）的所有特征商模都是本质正规。事实上，它们构成了本质正规商模的主要部分。一个自然的问题是：在没有准齐次性的条件下，所有特征商模是否仍然都是本质正规。

为陈述我们的主要结果，我们引入簇的秩和 Macaev 插值理想 $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ 的概念。对于给定的特殊簇 V，设

$$m_V=\max_{\lambda\in\mathbb{D}}\operatorname{card}\{w\in\mathbb{D}:(\lambda,w)\in V\},\ n_V=\max_{\lambda\in\mathbb{D}}\operatorname{card}\{z\in\mathbb{D}:(z,\lambda)\in V\}.$$

用 Agler 和 McCarthy 的术语来说，[AM1], $(m_V,\ n_V)$ 被称为簇 V 的秩。 V簇的秩在我们对加权 Bergman 模的研究中发挥着关键作用。

对于紧算子 $A\in B(H)$，我们将 $|A|=\sqrt{A^*A}$ 的特征值按降序列为 $\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots\}$，并计入重数。Macaev 理想 $\mathfrak{L}^{(1,\infty)}$ 由满足序列 $\left\{\frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\right\}$ 有界的紧算子组成。对于 Hilbert $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d]$-模 H，如果对所有多项式 p 均有 $[p(T)^*,\ q(T)]\in\mathfrak{L}^{(1,\infty)}$，则称 H 为 $(1,\infty)$-本质正规。有关 Macaev 理想的更多细节，请参阅 [Con]。

下面的定理是本文的主要结果，使我们能够从 Hilbert 模的角度研究特殊簇。

定理1.3. 设 V 是 $\mathbb{D}^2$ 的一个代数子簇，则当且仅当存在一个整数 $\alpha\geq\max\{m_V,n_V\}-2$，使得对于每个满足 $V=Z(I)\cap\mathbb{D}^2$ 的理想 I，V 是本质正规时，V 才是 distinguished。此外，设 $I\subset\mathbb{C}[z,w]$ 是一个特征理想，则对于每个整数

$$\alpha\geq\max\{m_{Z(I)},n_{Z(I)}\}-2,$$

商模 $[I]_\alpha^\perp$ of $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$ 是 $(1,\infty)$-本质正规的。

为简便起见，如果不引起混淆，我们将 S_p 简记为 $S_p^{\mathcal{N}}$。根据 BDF 理论[BDF], ，当 $[I]_\alpha^\perp$ 是本质正规时，我们有如下短正合列

$$0\to\mathcal{K}\to C^*([I]_\alpha^\perp)\to C(\sigma_e(S_z,S_w))\to 0, \tag{1.2}$$

其中 $C^*([I]_\alpha^\perp)$ 是由 C^* 生成的 S_z-代数，S_w 以及 $\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp}$，而 $\sigma_e(S_z,\ S_w)$ 是二元组（[Cur, Tay1] ）的 Taylor联合本质谱 $S_z,\ S_w$。将证明，对于特征理想 I，

$$\sigma_e(S_z,S_w)=\partial(Z(I)\cap\mathbb{D}^2).$$

在本文中，如果 $Z(I)\cap\mathbb{D}^2$ 是特征子簇，则证明短正合列（1.2）不分裂，这给出了 K-同调群 e_I 中的一个非平凡元素 $K\big(\partial(Z(I)\cap\mathbb{D}^2)\big)$。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们证明 S_z和 S_w的单射性，从而将 $[I]_\alpha^\perp$ 的本质正规性归结为 S_z 和S_w的本质余等距性。在第3节中，我们介绍 Grassmann 商模的构造，这是一种表示模作用值矩阵行列式的新工具。在第4节中，我们证明主要结果定理1.3。在第5节中，我们研究商模的本质泰勒谱及相关的 K-同调。在第6节中，我们根据具有较低权指标的商模，讨论本质正规商模的分解。在第7节中，我们给出一些本质正规商模的非特征例子。

2 本质等距性与本质余等距性

本节旨在将 distinguished 商模 $[I]_\alpha^\perp$ 在 $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$上的本质正规性的证明归结为 $\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp}-S_zS_z^*$ 和 $\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp}-S_wS_w^*$的紧性。首先，我们对所考虑的理想作如下约化。

引理 2.1. 设 $I\subset\mathbb{C}[z,w]$ 是一个理想，且 $\alpha\geq-1$，则存在唯一的理想 $I_0=[I]_\alpha\cap\mathbb{C}[z,w]$，使得 $[I]_\alpha=[I_0]_\alpha$，并且 $Z(I_0)$ 的每个代数分支都与 $\mathbb{D}^2$ 相交。若 I 是 distinguished，则 I_0 也是 distinguished。

证明. 如果 $Z(I)$ 的每个代数分支都与 $\mathbb{D}^2$ 相交，则 I_0 的存在性显然。因此，在剩下的情形中，我们假设至少有一个 $Z(I)$ 的代数分支不与 $\mathbb{D}^2$ 相交。

设 $I=\bigcap_{i=1}^k I_i$ 为主分解，并令 I_0 为那些其簇与 $\mathbb{D}^2$ 相交的 I_i 的交，则 $Z(I_0)$ 的每个代数分支都与 $\mathbb{D}^2$ 相交。若假设 I 是 distinguished，则 I_0 也是如此。由 $I\subset I_0$ 可知 $[I]_\alpha\subset[I_0]_\alpha$，因此我们只需证明反向包含关系。若某个 $Z(I_i)$ 不与 $\mathbb{D}^2$ 相交，则可以选取 $p_i\in\sqrt{I_i}$，使得 $Z(p_i)$ 不包含于 $Z(I_0)$，且 $Z(p_i)$ 不与 $\mathbb{D}^2$ 相交。设 $p_i^{d_i}\in I_i$，并令 $p=\prod_{Z(I_i)\cap\mathbb{D}^2=\emptyset}p_i^{d_i}$，则 $pI_0\subset I$，且 $Z(p)$ 不与 $\mathbb{D}^2$ 相交。由 [Ge1、Ge2] 或 [CG，定理 2.2.13]，$p\mathbb{C}[z,w]$ 在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 和 $L_a^2(\mathbb{D}^2)$ 中均稠密。经过仔细检查，可知加权 Bergman 空间中的证明仍然成立。因此

$$[I_0]_\alpha=\overline{I_0\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)}=\overline{I_0p\mathbb{C}[z,w]}=[pI_0]_\alpha\subset[I]_\alpha\subset[I_0]_\alpha,$$

由此得到 $[I_0]_\alpha=[I]_\alpha$。

的唯一性 I_0 源于[DP]。由于 $Z(I_0)$的每个不可约分支都与 $\mathbb{D}^2$相交，[DP]保证

$$I_0=[I_0]_\alpha\cap\mathbb{C}[z,w]=[I]_\alpha\cap\mathbb{C}[z,w].$$

∎

备注 2.2。根据 *[DP]*，理想 $I\subset\mathbb{C}[z,w]$ 被称为收缩的，当且仅当 $[I]_\alpha\cap\mathbb{C}[z,w]=I$。根据 *[CG、Ge1、Ge2]*，$I$ 是收缩的，当且仅当其簇的每个不可约分支都与 $\mathbb{D}^2$相交。根据引理 *2.1*，$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$ 的每个特征子模都由一个收缩的特征理想广义化。因此，除非另有特别说明，本文中提及的所有特征理想均假定为收缩的。

主定理的证明基于以下观察：特征商模 $[I]_\alpha^\perp$ 的本质正规性可归结为 $\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_z S_z^*$ 和 $\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w S_w^*$二者的紧性。为此，我们需要 S_z 和 S_w的 Fredholm 性。

引理 2.3. 设 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$ 是一个理想， $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ 使得 $Z(I) \cap (\{a\} \times \mathbb{T}) = \emptyset$，则 $\ker S_{z-a}$ 是有限维的。对称地，若 $Z(I) \cap (\mathbb{T} \times \{a\}) = \emptyset$，则 $\ker S_{w-a}$ 是有限维的。

证明。由对称性，我们只证明关于 S_{z-a} 的结论。对于 $|a| > 1$，结论显然，因此在证明的其余部分中我们假设 $|a| < 1$ 。

首先假设 I 是主理想，即对于某个多项式 p，有 $I = (p)$。记 $\tilde{p}(w) = p(a,w)$ 为 $p \in \mathbb{C}[z,w]$, 并记 $\tilde{f}(w) = f(a,w)$ 为 $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$。令 $M_{\tilde{p}}$ 表示作用在 $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ 上、符号为 $\tilde{p}$ 的乘法算子。

由于 $Z(I) \cap (\{a\} \times \mathbb{T}) = \emptyset$, 因此有 $\tilde{p}(w) \neq 0, \forall w \in \mathbb{T}$。将 $\tilde{p}$在 $\mathbb{D}$中的根列为 $\{w_1, \ldots, w_n\}$, ˜, 并计入重数。设 $B(w) = \prod_{i=1}^n \frac{w_i - w}{1 - \bar{w}_i w}$, 则 B是一个 Blaschke 乘积，且 $\frac{\tilde{p}}{B}$在 $\mathbb{T}$上是有理且可逆的。

对于 $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$，我们设

$$Af = f - M_p M_{\frac{B}{\tilde{p}}(w)} M_{B(w)}^* \tilde{f}.$$

˜对于 $f \in I = (p)$，假设 $f = pq$ ，则 $f = \tilde{p}\tilde{q}$。由此可得

$$\begin{aligned} Af(z,w) &= f(z,w) - p(z,w) \cdot \frac{B}{\tilde{p}}(w) \cdot \frac{\tilde{p}}{B}(w) \cdot \tilde{q}(w) \\ &= f(z,w) - p(z,w)\tilde{q}(w) \\ &= p(z,w)[q(z,w) - q(a,w)]. \end{aligned}$$

因此 $Af \in I$。对于 $w \in \mathbb{C}$，有

$$Af(a,w) = p(a,w)[q(a,w) - q(a,w)] = 0,$$

由此推出 $Af \in I \cap (z-a)$。根据

$$I \cap (z-a) = (z-a)I \subset [(z-a)I]_\alpha,$$

我们得到 $Af \in [(z-a)I]_\alpha$。因此 $A[I]_\alpha \subset [(z-a)I]_\alpha$。假设存在 $g \in [I]_\alpha^\perp$使得$S_{z-a}g = 0$。这意味着 $(z-a)g \in [I]_\alpha$，于是根据定义

$$A\big((z-a)g\big) = (z-a)g \in [(z-a)I]_\alpha.$$

由于 M_{z-a} 在 $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$ 上有正下界， $M_{z-a}[I]_\alpha$ 是闭的，因此 $M_{z-a}[I]_\alpha = [(z-a)I]_\alpha$。接着， M_{z-a} 的单射性保证了 $g \in [I]_\alpha$，这就证明了 S_{z-a}的单射性。

在一般情形下，令 $I = pL$ 为 Beurling 分解，其中 p 是 I中所有多项式的最大公因子，它在相差一个标量因子的意义下是唯一的，而 L 是一个有限余维理想。若 $g \in \ker S_{z-a}$，则 $(z-a)g \in [I]_\alpha \subset [p]_\alpha$。由已证明的$S_{z-a}^{[p]_\alpha^\perp}$ 的单射性可知 $g \in [p]_\alpha$，因此由

$$\ker S_{z-a} \subset [I]_\alpha^\perp \cap [p]_\alpha = [p]_\alpha \ominus [I]_\alpha$$

我们得到

$$\dim \ker S_{z-a} \leq \dim\ (p)/I = \dim\ \mathbb{C}[z,w]/L < \infty.$$

∎

下面的引理大致表明， $[I]_\alpha$ 本质上是主的。

引理 2.4. 设 I 是一个理想，并且 $p \in \mathbb{C}[z,w]$ 满足： $Z(p)$ 的每个不可约分支都与 $\mathbb{D}^2$ 相交，而 $Z(p) \cap Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2 = \emptyset$，则 $\ker S_p$ 是有限维的。若进一步假设 I 是主理想，则 S_p 是单射的。

证明。根据假设， $Z(p)$ 与 $Z(I)$ 没有公共的代数分支，因此 $Z(p) \cap Z(I)$ 是有限集。假设

$$Z(p) \cap Z(I) = \{(z_i, w_i) : i = 1, \dots, n\},$$

于是由 $Z(p) \cap Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2 = \emptyset$，对每个 i，我们有 $|z_i| \neq 1$ 和 $|w_i| \neq 1$。根据希尔伯特零点定理，存在一个非常数多项式 $q(z,w) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)^{n_i}(w - w_i)^{m_i}$ 属于理想 $(p) + I$，其中 n_i、m_i 是非负整数，使得当 $|z_i| = 1$ 时 $n_i = 0$，并且当 $|w_i| = 1$ 时 $m_i = 0$。

令 $I = p_0 L$ 为 Beurling 分解，则由引理 2.3， $S_q^{[p_0]_\alpha^\perp}$ 是单射的。由 $q \in (p) + I$，存在 $f \in \mathbb{C}[z,w]$ 和 $q_1 \in I$ 使得 $q = fp + q_1$。于是由此可得

$$S_q^{[p_0]_\alpha^\perp} = S_f^{[p_0]_\alpha^\perp} \cdot S_p^{[p_0]_\alpha^\perp}$$

我们得到 $S_p^{[p_0]_\alpha^\perp}$ 的单射性。当 I 是主理想时， $S_p = S_p^{[p_0]_\alpha^\perp}$ 的单射性已经得到证明。对于一般理想 I，如果 $g \in \ker S_p$，那么 $pg \in [I]_\alpha$，其属于 $[p_0]_\alpha$。由 $S_p^{[p_0]_\alpha^\perp}$ 的单射性可得 $g \in [p_0]_\alpha$，因此

$$\ker S_p \subset [I]_\alpha^\perp \cap [p_0]_\alpha = [p_0]_\alpha \ominus [I]_\alpha \tag{2.1}$$

是有限维的。 ∎

对于算子 $A \in B(H)$，如果 $\mathrm{Id}_H - A^*A$ 是紧的，则称 A 为本质等距性。对称地，如果 A^* 是本质等距的，则称 A 为本质余等距。此外，如果 $\mathrm{Id}_H - A^*A \in \mathfrak{L}^{(1,\infty)}$,$A$，则称其为 $(1,\infty)$-本质等距；如果 A^* 是 $(1,\infty)$-本质等距的，则 A 是 $(1,\infty)$-本质余等距的。如果 $\mathrm{Id}_H - A^*A$ 和 $\mathrm{Id}_H - AA^*$ 都属于 $\mathfrak{L}^{(1,\infty)}$，则称 A 为 $(1,\infty)$-本质酉。

采用上述术语，我们得到以下结果。

命题 2.5. 设 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$ 是一个 distinguished 理想，且 $\alpha \geq -1$。若 S_w 是 $(1,\infty)$-本质余等距的，则它是 $(1,\infty)$-本质酉的。因此， $P_{[I]_\alpha} M_w P_{[I]_\alpha^\perp} \in \mathfrak{L}^{(2,\infty)}$ 和 $[S_w^*, S_w] \in \mathfrak{L}^{(1,\infty)}$。

证明。 根据假设， $S_w S_w^*$ 是弗雷德霍姆算子。因此， $\ker S_w^* = \ker S_w S_w^*$ 是有限维的，且 ran S_w^* 是闭的。由引理 2.3， $\ker S_w$ 是有限维的，因此可保证 S_w^* 的 Fredholm 性。

设 $S_w = W|S_w|$ 是 S_w 的极分解，其中 $|S_w| = (S_w^* S_w)^{1/2}$，且 W 是一个部分等距算子，它将 $(\ker S_w)^\perp$ 酉地映 onto ran S_w。于是我们有

$$\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w^* S_w = W^*(\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w S_w^*)W + (\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - W^*W) \in \mathcal{L}^{(1,\infty)},$$

这证明了 S_w 是本质酉的。

该命题的其余结论由此得出

$$P_{[I]_\alpha^\perp} M_w^* P_{[I]_\alpha} M_w P_{[I]_\alpha^\perp} = P_{[I]_\alpha^\perp}(\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w^* S_w) P_{[I]_\alpha^\perp}$$

and

$$[S_w^*, S_w] = (\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w S_w^*) - (\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w^* S_w).$$

∎

为了证明 $[I]_\alpha^\perp$ 的本质正规性，根据命题 2.5 ，只需证明 S_z 和 S_w 都是本质余等距的，这也是接下来两节的目标。

3 Grassmann 商模

设 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$ 是一个特征理想。回顾一下，对于特殊簇 $V = Z(I) \cap \mathbb{D}^2$,

$$m_V = \max_{\lambda \in \mathbb{D}} \mathrm{card}\,\{w \in \mathbb{D} : (\lambda, w) \in V\},\ n_V = \max_{\lambda \in \mathbb{D}} \mathrm{card}\,\{z \in \mathbb{D} : (z, \lambda) \in V\}.$$

根据 [AM1] ，存在一个有理 $m_V \times m_V$-矩阵内函数 $\Psi(z)$，使得

$$V = \left\{(z,w) \in \mathbb{D}^2 : \det\left(wI_{m_V} - \Psi(z)\right) = 0\right\}.$$

为了研究行列式 $\det\left(wI_{m_V} - \Psi(z)\right)$，我们引入 Grassmann 商模的构造。

首先，我们说明 Grassmann 商模构造的主要思想。众所周知，张量积 $\bigotimes_{i=1}^{m_V} H^2(\mathbb{D})$ 经由映射 $\bigotimes_{i=1}^{m_V} f_i \mapsto \prod_{i=1}^{m_V} f_i(z_i)$ 与 $H^2(\mathbb{D}^{m_V})$ 酉等价，因此为方便起见，我们将 $\bigotimes_{i=1}^{m_V} H^2(\mathbb{D})$ 与 $H^2(\mathbb{D}^{m_V})$ 视为相同。设 J_{m_V} 是由 $\{z_i - z_j\colon\ 1 \le i,j \le m_V\}$ 生成的 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_{m_V}]$ 的理想，那么 $[J_{m_V}]^\perp$ 与加权 Bergman 模 $\mathcal{A}_{m_V-2}(\mathbb{D})$ [Cla, FR1, FR2, WZ1] 酉等价，通过

$$f(z_1,\dots,z_{m_V}) \mapsto f(z,\dots,z),$$

$H^2(D^{m_V})$ 在对角线 $Z(J_{m_V})$ 上的限制。

因此 $\bigotimes_{i=1}^{m_V} p_i$ 在 $[J_{m_V}]^\perp$ 上的作用与乘法乘以 $\prod_{i=1}^{m_V} p_i(z)$ 在 $\mathcal{A}_{m_V-2}(\mathbb{D})$ 上酉等价。因此 $\mathcal{A}_{m_V-2}(\mathbb{D})$ 正是 $m_V - 1$ 阶张量积，其中 $H^2(\mathbb{D})$ 定义在环 $\mathbb{C}[z]$ 上。关于模的张量积，请参阅 [At] 。遵循这一思路，我们构造一般向量值 Hilbert 模的张量积，并将 Grassmann 商模定义为该张量积的最大反对称商模。

设 H 为一个希尔伯特空间， $\mathcal{A}$ 为一个交换含幺代数，且 ψ ： $\mathcal{A} \to B(H)$ 为一个代数同态。于是， ψ 在 H 上定义了一个模作用，使 H 成为希尔伯特 $\mathcal{A}$-模 [DP]。为简便起见，我们记

$$ah = \psi(a)h,\ a \in \mathcal{A},\ h \in H.$$

$_m$固定一个整数 $m>0$，记作 $H^m=\bigoplus H_i$，其中每个 H_i 都是 H的一个副本。我们通过以下映射将希尔伯特$_{i=1}$$_m$空间 $\bigotimes_{i=1}^m H_i^m$与 $\bigoplus_{\gamma\in\{1,\dots,m\}^m}\bigotimes_{i=1}^m H_{\gamma_i}$ 等同起来：

$$\bigotimes_{i=1}^m\begin{pmatrix}h_{i,1}\\ \vdots\\ h_{i,m}\end{pmatrix}\mapsto\bigoplus_{\gamma\in\{1,\dots,m\}^m}\bigotimes_{i=1}^m h_{i,\gamma_i}.$$

^{m} $_m$存在一个自然的 $(\bigotimes\mathcal{A})$-模结构，其在 $\bigotimes H_i^m$上由$_{i=1}$ $_{i=1}$定义

$$\left(\bigotimes_{i=1}^m a_i\right)\left(\bigotimes_{i=1}^m h_i\right)=\bigotimes_{i=1}^m(a_ih_i),\ a_i\in\mathcal{A},\ h_i\in H_i^m.$$

^{m} $_m$对于 $f\in\bigotimes H_i^m$和 $\gamma\in\{1,\dots,m\}^m$，我们将 f在 $\bigotimes H_{\gamma_i}$中的不可约分支记为 f_γ。 $_{i=1}$ $_{i=1}$对于矩阵 $A\in M_m$（$\mathcal{A}$）和 $i=1$，.....，m，令

$$M_A:H^m\to H^m,f\mapsto Af,$$

并令

$$M_{A,i}=\mathrm{Id}_{H_1^m}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Id}_{H_{i-1}^m}\otimes M_A\otimes\mathrm{Id}_{H_{i+1}^m}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Id}_{H_m^m}:\bigotimes_{i=1}^m H_i^m\to\bigotimes_{i=1}^m H_i^m.$$

对于 $a\in\mathcal{A}$，我们将 $M_{aI_m,i}$ 简写为 $M_{a,i}$。下面三个引理显然成立 .

引理 3.1。对于 $A\in M_m$（$\mathcal{A}$）和 $1\le i\le m$，有

$$M_{A,i}^*=\mathrm{Id}_{H_1^m}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Id}_{H_{i-1}^m}\otimes M_A^*\otimes\mathrm{Id}_{H_{i+1}^m}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Id}_{H_m^m}.$$

引理 3.2。对于 A、$B\in M_m$（$\mathcal{A}$）和 $i\neq j$，有

$$[M_{A,i},M_{B,j}]=[M_{A,i}^*,M_{B,j}]=0,$$

也就是说，$M_{A,\ i}$ 和 $M_{B,\ j}$ 是双交换的。

如果等距算子 S满足（SOT）$\lim_{n\to\infty}S^{*n}=0$，则称其为纯等距算子。

引理 3.3. 如果 $A\in M_m(\mathcal{A})$ 是一个（纯）等距算子，$1\le i\le m$，那么 $M_{A,\ i}$ 也是一个（纯）等距算子。

对于 $A\in M_m(\mathcal{A})$，令 $T_A=\prod_{i=1}^m M_{A,\ i}$。直接验证可得

$$(T_Af)_\gamma=\sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^m}\Big(\bigotimes_{i=1}^m a_{\gamma_i,\beta_i}\Big)f_\beta,\quad\gamma\in\{1,\dots,m\}^m.\tag{3.1}$$

反复应用引理 3.3 可得：

$_m$ $_m$推论 3.4. 如果 $A \in M_m(\mathcal{A})$ 是等距的，那么 T_A : $\bigotimes H_i^m \to \bigotimes H_i^m$也是等距的。$_{i=1}$ $_{i=1}$

对于 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \{1, \ldots, m\}^m$ 和 $\sigma \in \mathcal{S}_m$， m 阶对称群记为$_m$ $_m\sigma(\gamma) = (\gamma_{\sigma(1)}, \ldots, \gamma_{\sigma(m)})$。对于 $f \in \bigotimes_{i=1} H_i^m$，定义 $\sigma(f) \in \bigotimes_{i=1} H_i^m$为

$$\sigma(f)_\gamma = f_{\sigma(\gamma)}, \ \gamma \in \{1, \ldots, m\}^m.$$

为简便起见，我们将 $f_{\sigma(1,\ldots,m)}$ 简称为 f_σ。

$_m$在张量积 $\bigotimes H_i^m$上，对于标量 c 和 $1 \le i, j \le m$，有 $M_{c,i} = M_{c,j}$。为了表示$_{i=1}$$_m$行列式 $\det(wI_m - \Psi(z))$，我们需要找到 $\bigotimes H_i^m$ 的一个极大商模 $\mathcal{N}$，使其满足$_{i=1}$以下两个条件:

(a) $S_{a^*,i}^{\mathcal{N}} = S_{a^*,j}^{\mathcal{N}}$对于任意 $a \in \mathcal{A}$，其中 $S_{a^*,i}^{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} M_{a,i}|_{\mathcal{N}}$;

$_m$(b) 当 $f_1, \ldots, f_m \in H^m$ 时，$P_{\mathcal{N}}\big(\bigotimes_{i=1} f_i\big) = 0$，并且存在 $i \ne j$ 使得 $f_i = f_j$。

条件 (a) 要求

$$\text{(a')} \ (M_{a,i} - M_{a,j}) f \perp \mathcal{N}, \ \forall f \in \bigotimes_{i=1}^m H_i^m, \ a \in \mathcal{A}, \ 1 \le i, j \le m,$$

且条件 (b) 等价于

(b') 对于 f_1、$f_m \in H^m$ 和 $i < j$，成立

$$P_{\mathcal{N}}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m) = -P_{\mathcal{N}}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{i-1} \otimes f_j \otimes f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_{j-1} \otimes f_i \otimes f_{j+1} \otimes \cdots \otimes f_m).$$

这进一步等价于

$$\text{(b")} \ f - \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(f) \perp \mathcal{N}, \ \forall f \in \bigotimes_{i=1}^m H_i^m, \ \sigma \in \mathcal{S}_m.$$

$_m$根据条件 (a') 和 (b")，令 $\mathcal{M}_{Gr}(H, m)$ 表示由 $\bigotimes H_i^m$张成$_{i=1}$的闭子空间

$$\left\{ f - \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(f), \ (M_{a,i} - M_{a,j}) f : f \in \bigotimes_{i=1}^m H_i^m, \ \sigma \in \mathcal{S}_m, \ a \in \mathcal{A}, \ 1 \le i, j \le m \right\}.$$

$_m$ $_m$ $_m$注意到，$\bigotimes a_i = \prod M_{a_i}$, $_i$ 在$\bigotimes H_i^m$上的模作用是按不可约分支逐分量进行的，因此与 σ可交换。另一方面，对于$f \in \bigotimes H_i^m$，我们有$_{i=1}$

$$M_{a,j}\big(\bigotimes_{i=1}^m a_i\big) f = M_{a,j} \prod_{i=1}^m M_{a_i,i} f = \big(\prod_{i=1}^m M_{a_i,i}\big) M_{a,j} f = \big(\bigotimes_{i=1}^m a_i\big) M_{a,j} f,$$

$_m$因此$M_{a,\ j}$与$\bigotimes H_i^m$的模作用可交换。随后可以例行验证，$_{i=1}$$_m$$(H,m)$ 是$\bigotimes H_i^m$的子模。我们称$_{i=1}$

$$\mathcal{N}_{Gr}(H,m)=\left(\bigotimes_{i=1}^{m}H_i^m\right)\ominus\mathcal{M}_{Gr}(H,m)$$

与 H 相关联的第 m 个 Grassmann 商模。根据定义，显然有

$$S_{a,i}^{\mathcal{N}_{Gr}(H,m)}=S_{a,j}^{\mathcal{N}_{Gr}(H,m)},\ a\in\mathcal{A},\ 1\leq i,j\leq m, \tag{3.2}$$

and

$$f=\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(f),\ f\in\mathcal{N}_{Gr}(H,m),\ \sigma\in\mathcal{S}_m \tag{3.3}$$

如所需。

对于不同的 $i,j\in\{1,\ldots,m\}$，记 $\sigma_{i,j}\in\mathcal{S}_m$ 为交换第 i 个和第 j 个元素的置换。若 $\gamma\in\{1,\ldots,m\}^m$ 使得对某个 $i\neq j$ 有 $\gamma_i=\gamma_j$，则有 $\sigma_{i,j}(\gamma)=\gamma$。由 (3.3)，对于 $f\in\mathcal{N}_{Gr}(H,m)$，有 $f=-\sigma_{i,j}(f)$，由此得到 $f_\gamma=-f_\gamma$，进而有 $f_\gamma=0$。因此， f 的唯一重要分量是那些 f_σ, $\sigma\in\mathcal{S}_m$。令 $f_0=f_{(1,2,\ldots,m)}$，则

$$f_\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)f_0,\ \forall\sigma\in\mathcal{S}_m.$$

$_m$对于模$\bigotimes H_i$，其中每个 $H_i=H$，且 $a\in\mathcal{A}$, $1\leq i\leq m$，我们设$_{i=1}$

$$M_{a,i}=\mathrm{Id}_{H_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Id}_{H_{i-1}}\otimes a\otimes\mathrm{Id}_{H_{i+1}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{Id}_{H_m}.$$

写出由 $\mathcal{M}_0$ 生成的子模

$$\{(M_{a,i}-M_{a,j})f:f\in\bigotimes_{i=1}^{m}H_i,a\in\mathcal{A},1\leq i,j\leq m\},$$

$_m$和 $\mathcal{N}_0=\left(\bigotimes H_i\right)\ominus\mathcal{M}_0$。根据 $\mathcal{N}_{Gr}(H,m)$ 的定义，对于 $f\in\mathcal{N}_{Gr}(H,m)$，我们有 $f_0\in\mathcal{N}_0$。$_{i=1}$$_m$反之，对于每个 $f_0\in\mathcal{N}_0$，由 $f_\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)f_0$定义的元素 $f\in\bigotimes H_i^m$ $\sigma\in\mathcal{S}_m$ 属于 $\mathcal{N}_{Gr}(H,m)$。因此， $\mathcal{N}_{Gr}(H,m)$ 通过该映射与 $\mathcal{N}_0$酉同构

$$\Theta:\mathcal{N}_{Gr}(H,m)\to\mathcal{N}_0,f\mapsto\sqrt{m!}f_0,$$

从而

$$M_{a,i}^*\Theta=\Theta M_{a,i}^*,\ \forall a\in\mathcal{A},\ 1\leq i\leq m. \tag{3.4}$$

引理 3.5。给定 $\sigma\in\mathcal{S}_m$，令 A 为满足对于所有向量 $x\in\mathbb{C}^m$均有 $Ax=(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})^T$ 的 $m\times m$-矩阵，则

$$(T_Af)_\gamma=f_{(\sigma(\gamma_1),\ldots,\ \sigma(\gamma_m))}$$

$_m$对所有 $f\in\bigotimes H_i^m$和 $\gamma\in\{1,\ldots,m\}^m$。$_{i=1}$

证明。 显然， A 是由下式定义的矩阵: $a_{i,\ j} = \delta_{\sigma(i)}(j)$ ，其中 δ 是克罗内克符号。由（3.1）可得

$$\begin{aligned}(T_A f)_\gamma &= \sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^m} \Big(\prod_{i=1}^m a_{\gamma_i,\gamma_i}\Big) f_\beta \\ &= \prod_{i=1}^m a_{\gamma_i,\sigma(\gamma_i)} f_{(\sigma(\gamma_1),\dots,\sigma(\gamma_m))} \\ &= f_{(\sigma(\gamma_1),\dots,\sigma(\gamma_m))}.\end{aligned}$$

∎

记

$$S_A^{\mathcal{N}_{Gr}(H,m)} = P_{\mathcal{N}_{Gr}(H,m)} T_A \mid_{\mathcal{N}_{Gr}(H,m)},\ A \in M_m(\mathcal{A}),$$

and

$$S_{a,i}^{\mathcal{N}_0} = P_{\mathcal{N}_0} M_{a,i} \mid_{\mathcal{N}_0},\ a \in \mathcal{A},\ 1 \le i \le m.$$

根据 $\mathcal{N}_0$ 的定义，对于 $a \in \mathcal{A}$ 和任意 i 及 j，我们有

$$M_{a,i}^* \mid_{\mathcal{N}_0} = M_{a,j}^* \mid_{\mathcal{N}_0}, \tag{3.5}$$

这反过来给出 $S_{a,\ i}^{\mathcal{N}_0} = S_{a,\ j}^{\mathcal{N}_0}$。对于 $S_{a,\ i}^{\mathcal{N}_0}$、 $a \in \mathcal{A}$、 $1 \le i \le m$，我们记作 $S_a^{\mathcal{N}_0}$。于是，映射 $a \mapsto S_a^{\mathcal{N}_0}$ 在 $\mathcal{N}_0$ 上定义了一个 $\mathcal{A}$-模结构。

Grassmiannian 商模具有以下自然且内在的性质。

定理 3.6。 $\mathcal{N}_{Gr}(H,m)$ 对于 T_A^* 是不变的， $\forall A \in M_m(\mathcal{A})$，并且 $\Theta T_A^*\ f = \big(S^{\mathcal{N}_0}{}_{\det A}\big)^* \Theta\ f$ 对于 $f \in \mathcal{N}_{Gr}(H,m)$。

证明。若 $f \in \mathcal{N}_{Gr}(H,m)$，记 $f_0 = f_{(1,\dots,m)} \in \mathcal{N}_0$，则当 γ 不是 $(1, 2, \dots, m)$ 的一个置换时，$f_\gamma = 0$；若 $\sigma \in \mathcal{S}_m$，则 $f_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) f_0$。根据 $\mathcal{N}_0$ 的定义，对于 $f \in \mathcal{N}_{Gr}(H,m)$，我们有

$$\big(S_a^{\mathcal{N}_0}\big)^* f_\sigma = M_{a,i}^* f_\sigma = M_{a,j}^* f_\sigma,\ \forall a \in \mathcal{A},\ \sigma \in \mathcal{S}_m,\ 1 \le i,j \le m.$$

由引理3.2 显然可得

$$(M_{a,i}^* - M_{a,j}^*) T_A^* f = (M_{a,i}^* - M_{a,j}^*) \prod_{k=1}^m M_{A,k}^* f = \prod_{k=1}^m M_{A,k}^* (M_{a,i}^* - M_{a,j}^*) f = 0. \tag{3.6}$$

$_m$对于 $f \in \mathcal{N}_{Gr}(H,\ m)$ $g \in \bigotimes H_i^m$以及 $\sigma \in \mathcal{S}_m$，由（3.1）和（3.5）可得$_{i=1}$

$$\begin{aligned}
\langle f, T_A\sigma(g)\rangle &= \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\left\langle f_\rho, \left(T_A\sigma(g)\right)_\rho\right\rangle \\
&= \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\left\langle f_\rho, \sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^m}(\bigotimes_{j=1}^m a_{\rho(j),\beta_j})\sigma(g)_\beta\right\rangle \\
&= \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^m}\left\langle f_\rho, \prod_{j=1}^m M_{a_{\rho(j),\beta_j},j} g_{\sigma(\beta)}\right\rangle \\
&= \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\sum_{\beta\in\{1,\dots,m\}^m}\left\langle f_\rho, \prod_{j=1}^m M_{a_{\rho\sigma(j),\sigma(\beta)_j},j} g_{\sigma(\beta)}\right\rangle \\
&= \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\langle \mathrm{sgn}(\sigma) f_{\rho\sigma}, (T_A g)_{\rho\sigma}\rangle \\
&= \langle f, \mathrm{sgn}(\sigma) T_A g\rangle ,
\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\langle T_A^* f, g - \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(g)\rangle &= \langle f, T_A g - \mathrm{sgn}(\sigma) T_A\sigma(g)\rangle \\
&= \langle f, T_A g - T_A g\rangle \\
&= 0. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

由（3.6）和（3.7）可得 $T_A^* f \in \mathcal{N}_{Gr}$（$H$，$m$），即 $\mathcal{N}_{Gr}$（H，m）是 T_A^*的不变的。对于 f，$g \in \mathcal{N}_{Gr}$（H，m），由（3.4）可得

$$\begin{aligned}
\langle \Theta T_A^* f, \Theta g\rangle &= \langle f, T_A g\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m}\left\langle f_\sigma, \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}(\bigotimes_{j=1}^m a_{\sigma(j),\rho(j)}) g_\rho\right\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m}\left\langle f_0, \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\mathrm{sgn}(\sigma\rho)\prod_{j=1}^m M_{a_{\sigma(j),\rho(j)},j} g_0\right\rangle \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m}\left\langle f_0, \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\mathrm{sgn}(\sigma\rho)\prod_{j=1}^m S^{\mathcal{N}_0}_{a_{\sigma(j),\rho(j)}} g_0\right\rangle \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m}\left\langle \sum_{\rho\in\mathcal{S}_m}\mathrm{sgn}(\rho\sigma^{-1})\prod_{j=1}^m (S^{\mathcal{N}_0}_{a_{j,\rho\sigma^{-1}(j)}})^*\Theta f, \Theta g\right\rangle \\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m}\left\langle (S^{\mathcal{N}_0}_{\det A})^*\Theta f, \Theta g\right\rangle \\
&= \left\langle (S^{\mathcal{N}_0}_{\det A})^*\Theta f, \Theta g\right\rangle ,
\end{aligned}$$

从而完成了定理的证明。 ∎

4 商模的本质正规性 $[I]_\alpha^\perp$

现在我们将注意力转回双圆盘上的各个模。令 $\mathcal{A}=\mathbb{C}[z,w]$ 和 $H=H^2(\mathbb{D}^2)$。根据前一节的内容，我们定义 Grassmann 商模 $\mathcal{N}_{Gr}(H^2(\mathbb{D}^2)\ m)$。在此$m$情形下，$\mathcal{M}_0$ 是由$_{i=1}$生成的 $\bigotimes H^2(\mathbb{D}^2)$ $=H^2(\mathbb{D}^{2m})$ 的子模

$$\{z_i-z_j,\ w_i-w_j:1\le i,j\le m\}.$$

令 J_m 为由 $\{z_i-z_j$ 生成的 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_m]$ 理想：$1\le i$、$j\le m\}$，并令 $[J_m]^\perp$ 为 $H^2(\mathbb{D}^m)$ 中相应的商模。如第3节第二段所述，$[J_m]^\perp$ 通过 $f(z_1,\ \dots,\ z_m)\mapsto f(z,\ \dots,\ z)$ 与 $\mathcal{A}^2_{m-2}(\mathbb{D})$ 等距同构。根据 $\mathcal{N}_0$ 的定义，我们有 $\mathcal{N}_0=[J_m]^\perp\otimes[J_m]^\perp$，它与 $\mathcal{A}^2_{m-2}(\mathbb{D}^2)=\mathcal{A}^2_{m-2}(\mathbb{D})\otimes\mathcal{A}^2_{m-2}(\mathbb{D})$ 同构。因此我们可以重新定义

$$\begin{aligned}\Theta:\mathcal{N}_{Gr}(H^2(\mathbb{D}^2),m)&\to\mathcal{A}^2_{m-2}(\mathbb{D}^2)\\ f(z_1,\dots,z_m,w_1,\dots,w_m)&\mapsto\sqrt{m!}\mathrm{sgn}(\sigma)f_\sigma(z,\dots,z,w,\dots,w).\end{aligned}$$

引理 4.1. 对于有理内函数 $\Psi(z)\in M_m(H^\infty(\mathbb{D}))$，子空间

$$\bigcap_{i=1}^m\left(\ker M^*_{\Psi(z),i}\bigcap\ker M^*_{wI_m,i}\right)$$

是有限维的。

证明。由引理 3.2 和引理 3.3，$\{M_{\Psi(z),i},M_{wI_m,i}:\ i=1,\dots,m\}$ 是一个双交换的等距算子族。对于每个 i，$\ker M^*_{\Psi(z)}\cap\ker M^*_{wI_m}$ 由属于 span $\{z^n$ 中的向量值函数 f 组成：$n=0,1,\overline{\dots}\}\otimes\mathbb{C}^m$，满足 $M^*_{\Psi(z)}f=0$。由于 $\Psi(z)$ 是有理的，$\ker M^*_{\Psi(z)}\cap\ker M^*_{wI_m}$ 是有限维的。因此

$$\bigcap_{i=1}^m\left(\ker M^*_{\Psi(z),i}\bigcap\ker M^*_{wI_m,i}\right)=\bigotimes_{i=1}^m\left(\ker M^*_{\Psi(z)}\bigcap\ker M^*_{wI_m}\right)$$

是有限维的。∎

下面的命题是本文的关键所在。

命题 4.2. 设 $I\subset\mathbb{C}[z,w]$ 是一个特征理想，并且假设 $\Psi(z)\in M_m(H^\infty(\mathbb{D}))$ 是纯有理内函数，使得

$$Z(I)\subset Z\big(\det\left(wI_m-\Psi(z)\right)\big).$$

那么，在加权伯格曼商模上，$[I]^\perp_{m-2}$、S_w 是 $(1,\infty)$-本质酉的，并且$[S^*_w,S_w]\in\mathfrak{L}^{(1,\infty)}$。

证明。设 $p(z,w)$ 为有理函数 $\det\left(wI_m-\Psi(z)\right)$ 的分子，则由希尔伯特零点定理，存在一个自然数 N，使得 $p(z,w)^N\in I$，由此可得

$$\det\left(wI_m-\Psi(z)\right)^N\in[I]_{m-2}.$$

Set

$$K=\bigcap_{i=1}^{m}\big(\ker M_{\Psi(z),i}^{*}\bigcap\ker M_{wI_m,i}^{*}\big),$$

于是由引理 4.1 可得 $\dim K<\infty$。由引理 3.2 和引理 3.3,

$$\{M_{\Psi(z),i},M_{wI_m,i}:i=1,\ldots,m\}$$

是一个由纯等距算子组成的双交换族。应用 Wold 分解，我们得到

$$\bigotimes_{i=1}^{m}H_i^m=\bigoplus_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m}\prod_{i=1}^{m}M_{wI_m,i}^{\alpha_i}M_{\Psi(z),i}^{\beta_i}K.$$

For

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m}\prod_{i=1}^{m}M_{wI_m,i}^{\alpha_i}M_{\Psi(z),i}^{\beta_i}f_{\alpha,\beta}\in\bigotimes_{i=1}^{m}H_i^m,$$

其中每个 $f_{\alpha,\beta}\in K$ 和 $\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m}\|f_{\alpha,\beta}\|^2<\infty$，定义

$$U\big(\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m}\prod_{i=1}^{m}M_{wI_m,i}^{\alpha_i}M_{\Psi(z),i}^{\beta_i}f_{\alpha,\beta}\big)=\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^m}\big(\prod_{i=1}^{m}w_i^{\alpha_i}z_i^{\beta_i}\big)\otimes f_{\alpha,\beta},$$

m那么 $U:\bigotimes H_i^m\to H^2(\mathbb{D}^{2m})\otimes K$ 是一个酉算子，使得$_{i=1}$

$$\begin{aligned}M_{wI_m,i}&=U^*(M_{w_i}\otimes\mathrm{Id}_K)U,\\ M_{\Psi(z),i}&=U^*(M_{z_i}\otimes\mathrm{Id}_K)U.\end{aligned}\tag{4.1}$$

令 $\mathcal{M}_1\subset H^2(\mathbb{D}^{2m})$ 为由下列元素生成的齐次子模

$$\{w_i-w_j,z_i-z_j,\prod_{k=1}^{m}(w_k-z_k)^N:1\le i,j\le m\},$$

以及 $\mathcal{N}_1=\mathcal{M}_1^{\perp}$相应的商模。回顾一下，对于由 $\{z_i-z_j\colon 1\le i,j\le m\}$生成的理想 $J_m\subset\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_m]$，商 Hardy 模 $[J_m]^{\perp}\subset H^2(\mathbb{D}^m)$ 与 $\mathcal{A}_{m-2}^2(\mathbb{D})$ 等距同构，其对应关系为 $f(z_1,\ldots,z_m)\mapsto f(z,\ldots,z)$。因此，由下式定义的酉同构

$$\begin{aligned}[J_m]^{\perp}\otimes[J_m]^{\perp}&\to\mathcal{A}_{m-2}(\mathbb{D}^2),\\ f(z_1,\ldots,z_m)\otimes g(w_1,\ldots,w_d)&\mapsto f(z,\ldots,z)g(w,\ldots,w)\end{aligned}$$

映射到 $\mathcal{N}_1$ 商模 $[(z-w)^{mN}]_{m-2}^{\perp}\subset\mathcal{A}_{m-2}^2(\mathbb{D})$ 。关于 [WZ1，推论 2。7] 对商 Hardy 模的证明同样适用于 $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^d)(\alpha>-1)$的商模，因此我们有

$$\mathrm{Id}_{[(z-w)^{mN}]_{m-2}^{\perp}}-\big(S_w^{[(z-w)^{mN}]_{m-2}^{\perp}}\big)\big(S_w^{[(z-w)^{mN}]_{m-2}^{\perp}}\big)^*\in\mathfrak{L}^{(1,\infty)},$$

从而得到

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{N}_1}-\big(S_{w_i}^{\mathcal{N}_1}\big)\big(S_{w_i}^{\mathcal{N}_1}\big)^*\in\mathfrak{L}^{(1,\infty)},1\le i\le m.\tag{4.2}$$

令 $\mathcal{M}_2 = U^*(\mathcal{M}_1 \otimes K)$，并令 $\mathcal{N}_2 = U^*(\mathcal{N}_1 \otimes K)$，由于 U 是酉的，根据（4.1）和（4.2），我们得到

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{N}_2} - \left(S^{\mathcal{N}_2}_{wI_m,i}\right)\left(S^{\mathcal{N}_2}_{wI_m,i}\right)^* \in \mathfrak{L}^{(1,\infty)}. \tag{4.3}$$

$_m$写出由$_{i=1}$生成的$\bigotimes H_i^m$ $\mathcal{M}_3$。

$$\{(M_{wI_m,i} - M_{wI_m,j})f, (M_{\Psi(z),i} - M_{\Psi(z),j})f, T^N_{wI_m-\Psi(z)}f : f \in \bigotimes_{i=1}^{m} H_i^m, 1 \le i,j \le m\}$$

以及 $\mathcal{N}_3 = \mathcal{M}_3^{\perp}$。显然，$\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$，这意味着 $\mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_2$。另一方面，由 $\det\left(wI_m - \Psi(z)\right)^N \in [I]_{m-2}$ 可得

$$[I]^{\perp}_{m-2} \subset \ker M^{*N}_{\det(wI_m-\Psi(z))},$$

从而定理 3.6 意味着

$$\Theta^{-1}[I]^{\perp}_{m-2} \subset \left(\mathcal{N}_{Gr}(H,m) \cap \ker T^{*N}_{wI_m-\Psi(z)}\right) \subset \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_2.$$

因此（4.3）保证了

$$\mathrm{Id}_{\Theta^{-1}[I]^{\perp}_{m-2}} - \left(S^{\Theta^{-1}[I]^{\perp}_{m-2}}_{wI_m,i}\right)\left(S^{\Theta^{-1}[I]^{\perp}_{m-2}}_{wI_m,i}\right)^* \in \mathfrak{L}^{(1,\infty)},$$

这与（3.4）结合可得

$$\mathrm{Id}_{[I]^{\perp}_{m-2}} - \left(S^{[I]^{\perp}_{m-2}}_{w}\right)\left(S^{[I]^{\perp}_{m-2}}_{w}\right)^* \in \mathfrak{L}^{(1,\infty)}.$$

现在所需结论由命题 2.5得到。 ∎

定理 4.3. 设 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$ 是一个特征理想，且 V 是特殊簇 $Z(I)\cap\mathbb{D}^2$。则对于每个整数

$$\alpha \ge \max\{m_V, n_V\} - 2,$$

商模 $[I]^{\perp}_{\alpha}$ 是 $(1,\infty)$-本质正规模。此外，$[I]^{\perp}_{\alpha}$ 上的 S_z 和 S_w 都是 $(1,\infty)$-本质酉的。

证明。由 [AM1] 存在一个纯有理内矩阵 $\Psi \in M_{m_V}(H^\infty(\mathbb{D}))$，使得 $Z(I)$ 是 $\det\left(wI_{m_V} - \Psi(z)\right)$ 的零点集。令

$$\Psi_1(z) = \begin{pmatrix} \Psi(z) & O \\ O & zI_{\alpha-m_V} \end{pmatrix},$$

则 Ψ_1 是一个纯有理内 $\alpha\times\alpha$-矩阵，且有

$$Z(I) \subset Z\left(\det\left(wI_\alpha - \Psi_1(z)\right)\right).$$

类似地，存在一个纯有理内 $\alpha\times\alpha$-矩阵 Ψ_2，且有

$$Z(I) \subset Z\left(\det\left(zI_\alpha - \Psi_2(w)\right)\right).$$

于是，所需结论由命题4.2得出。 ∎

实际上，定理4.3 给出了一个簇为 distinguished 的充要条件。

定理 4.4. 设 V 是 $\mathbb{D}^2$ 的一个代数子簇。若存在 $\alpha \geq -1$，使得所有满足 $Z(I)\cap\mathbb{D}^2 = V$ 的商模 $[I]_\alpha^\perp$ 都是本质正规，那么 V 是一个特殊簇。

证明。假设 V 不是 distinguished，则根据定义， V 存在一个聚点 (z_0, w_0)，该聚点位于 $\partial(\mathbb{D}^2)\setminus\mathbb{T}^2$ 中。不妨设 $|z_0| < 1$ 且 $|w_0| = 1$。

Let

$$I_V = \{p \in \mathbb{C}[z, w] : p\,|_V = 0\},$$

与 V 相关联的根理想，并取 $I = I_V^2$。显然， $V = Z(I) \cap \mathbb{D}^2$。我们将否定 S_z 在 $[I]_\alpha^\perp$ 上的本质正规性。

对于每个 $\lambda \in V$，显然再生核

$$K_\lambda(z, w) = \frac{1}{(1-\bar\lambda_1 z)^{\alpha+2}(1-\bar\lambda_2 w)^{\alpha+2}},\ (z, w) \in \mathbb{D}^2$$

属于 $[I]_\alpha^\perp$。

对于 $\mu \in \mathbb{D}^2$，我们有

$$\begin{aligned}\langle K_\mu, z\partial_z K_\lambda\rangle &= \left\langle K_\mu, \frac{(\alpha+2)\bar\lambda_1 z}{(1-\bar\lambda_1 z)^{\alpha+3}(1-\bar\lambda_2 w)^{\alpha+2}}\right\rangle \\ &= \frac{(\alpha+2)\bar\mu_1\lambda_1}{(1-\bar\mu_1\lambda_1)^{\alpha+3}(1-\bar\mu_2\lambda_2)^{\alpha+2}} \\ &= (z\partial_z K_\mu)(\lambda), \end{aligned} \tag{4.4}$$

这由线性性表明

$$\langle f, z\partial_z K_\lambda\rangle = (z\partial_z f)(\lambda),\ \forall f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2). \tag{4.5}$$

于是，对于每个 f、$g \in I_V$，我们有

$$\langle fg, z\partial_z K_\lambda\rangle = [z\partial_z(fg)](\lambda) = [z(f\partial_z g + g\partial_z f)](\lambda) = 0,$$

这给出 $z\partial_z K_\lambda \perp I_V^2$，从而得到 $z\partial_z K_\lambda \in [I]_\alpha^\perp$。

由（4.5）可得

$$\begin{aligned}\|z\partial_z K_\lambda\|^2 &= z\partial_z(z\partial_z K_\lambda)(\lambda) \\ &= (z\partial_z K_\lambda + z^2\partial_z^2 K_\lambda)(\lambda) \\ &= \frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+3}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}} + \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)|\lambda_1|^4}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+4}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}} \\ &= \frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2[1+(\alpha+2)|\lambda_1|^2]}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+4}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

设 $k_\lambda = \frac{K_\lambda}{\|K_\lambda\|}$ 为归一化再生核。于是（4.4）可推出

$$\begin{aligned}|\langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle|^2 &= \frac{1}{\|K_\lambda\|^2}|\langle z\partial_z K_\lambda, K_\lambda\rangle|^2 \\ &= (1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+2}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}\cdot\left|\frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+3}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}}\right|^2 \\ &= \frac{(\alpha+2)^2|\lambda_1|^4}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+4}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Set

$$f_\lambda = \frac{z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda}{\|z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\|},$$

那么在 $\|z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\|$ 非零的情况下， f_λ 是 $[I]_\alpha^\perp$ 中的单位向量，且与 K_λ 正交。

由（4.6）和（4.7可得

$$\begin{aligned}
\|z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\|^2 &= \|z\partial_z K_\lambda\|^2 - |\langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle|^2 \\
&= \frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2[1+(\alpha+2)|\lambda_1|^2]}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+4}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}} - \frac{(\alpha+2)^2|\lambda_1|^4}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+4}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}} \\
&= \frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2}{(1-|\lambda_1|^2)^{\alpha+4}(1-|\lambda_2|^2)^{\alpha+2}} \\
&= \frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2}{(1-|\lambda_1|^2)^2}\|K_\lambda\|^2, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

由（4.4）可得

$$\begin{aligned}
\langle zk_\lambda, z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\rangle &= \langle zk_\lambda, z\partial_z K_\lambda\rangle - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle\langle zk_\lambda, k_\lambda\rangle \\
&= \frac{1}{\|K_\lambda\|}\big(\langle zK_\lambda, z\partial_z K_\lambda\rangle - \lambda_1\langle z\partial_z K_\lambda, K_\lambda\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\|K_\lambda\|}\big(z\partial_z(zK_\lambda) - \lambda_1 z\partial_z K_\lambda\big)(\lambda) \\
&= \frac{1}{\|K_\lambda\|}\big(zK_\lambda + z^2\partial_z K_\lambda - \lambda_1 z\partial_z K_\lambda\big)(\lambda) \\
&= \frac{\lambda_1 K_\lambda(\lambda)}{\|K_\lambda\|} \\
&= \lambda_1\|K_\lambda\|. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

当 $\lambda_1 \neq 0$ 时， （4.8）和（4.9给出

$$\begin{aligned}
\|S_z k_\lambda\|^2 - \|S_z^* k_\lambda\|^2 &\geq |\langle S_z k_\lambda, f_\lambda\rangle|^2 + |\langle S_z k_\lambda, k_\lambda\rangle|^2 - \|S_z^* k_\lambda\|^2 \\
&= \Big|\Big\langle zk_\lambda, \frac{z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda}{\|z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\|}\Big\rangle\Big|^2 + |\lambda_1|^2 - |\lambda_1|^2 \\
&= \frac{|\langle zk_\lambda, z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\rangle|^2}{\|z\partial_z K_\lambda - \langle z\partial_z K_\lambda, k_\lambda\rangle k_\lambda\|^2} \\
&= \frac{|\lambda_1|^2\|K_\lambda\|^2}{\frac{(\alpha+2)|\lambda_1|^2}{(1-|\lambda_1|^2)^2}\|K_\lambda\|^2} \\
&= \frac{(1-|\lambda_1|^2)^2}{\alpha+2}.
\end{aligned}$$

若存在一个序列 $\{\lambda^{(n)}\} \subset V$， 使得 $\lambda_1^{(n)} \neq 0$ 趋于（z_0, w_0） ， 则

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\|S_z k_{\lambda^{(n)}}\|^2 - \|S_z^* k_{\lambda^{(n)}}\|^2\right) \geq \frac{(1-|z_0|^2)^2}{\alpha+2} > 0,$$

由于 $k_{\lambda^{(n)}}$ 弱收敛于 0， 从而归结为 $[S_z^*, S_z]$的紧性。

如果不存在这样的序列 $\{\lambda^{(n)}\}$，那么存在 (z_0, w_0) 的一个邻域 $\mathcal{O}$，使得 $\lambda_1 = 0$ 对每个 $\lambda \in V \cap \mathcal{O}$都成立。这意味着 $z_0 = 0$ 和 $\{0\} \times \mathbb{D} \subset V$。因此，$I_V \subset (z)$ 且 $I \subset (z^2)$。于是 $w^n \in [I]_\alpha^\perp$，并且不难验证

$$[S_z^*, S_z]w^n = \frac{w^n}{\alpha + 2}, \ n = 0, 1, \ldots,$$

这再次归结为 S_z 的本质正规性。 ∎

结合定理 4.3 和定理 4.4，我们得到主定理 1.3。

5 特征商模的 K-同调

设 I 是一个 distinguished 理想，则定理 4.3 保证了当 α充分大时 $[I]_\alpha^\perp$ 的本质正规性。按照惯例，我们用 $\sigma_e([I]_\alpha^\perp)$ 表示交换对 (S_z, S_w) 的 Taylor 联合本质谱。类似于 [Ar2，命题 2.5]，可以验证 $C^*([I]_\alpha^\perp) = C^*\{Id_{[I]_\alpha^\perp}, S_z, S_w\}$ 是不可约的，因此包含由所有紧算子构成的理想 $\mathcal{K}([I]_\alpha^\perp)$。类似于 [WZ1，WZ2]，我们有以下引理。

命题 5.1。设 I 是 $\mathbb{C}[z, w]$ 的一个理想，且 $\alpha \geq -1$，使得 $[I]_\alpha^\perp$ 是本质正规，则

$$\sigma_e([I]_\alpha^\perp) \subset Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2.$$

此外，如果 I 是 distinguished，那么 $\sigma_e([I]_\alpha^\perp) = Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2$.

证明。根据谱映射定理 [Cur，Tay2]，对于 $p \in I$ 我们有

$$p(\sigma_e(S_z, S_w)) = \sigma_e(p(S_z, S_w)) = \sigma_e(S_p) = \{0\},$$

因此 $\sigma_e([I]_\alpha^\perp) \subset Z(I)$。

为证明 $\sigma_e([I]_\alpha^\perp) \subset \partial\mathbb{D}^2$，首先注意到

$$\begin{aligned} & Id_{[I]_\alpha^\perp} - S_z S_z^* - S_w S_w^* + S_{zw} S_{zw}^* \\ = \ & P_{[I]_\alpha^\perp}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_z M_z^* - M_w M_w^* + M_{zw} M_{zw}^*) P_{[I]_\alpha^\perp}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

不难看出，$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$ 具有标准正交基

$$\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \sqrt{\frac{\Gamma(m + \alpha + 2)}{\Gamma(m + 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{\Gamma(n + 1)}} z^m w^n : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

在 $\alpha > -1$ 的情况下，很容易验证

$$M_z^*(z^m w^n) = \frac{m}{m + \alpha + 1} z^{m-1} w^n,$$

and

$$M_w^*(z^m w^n) = \frac{n}{n + \alpha + 1} z^m w^{n-1}.$$

然后通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_z M_z^* - M_w M_w^* + M_{zw} M_{zw}^*) z^m w^n \\
= &\left(1 - \frac{m}{m+\alpha+1} - \frac{n}{n+\alpha+1} + \frac{mn}{(m+\alpha+1)(n+\alpha+1)}\right) z^m w^n \\
= &\frac{(\alpha+1)^2}{(m+\alpha+1)(n+\alpha+1)} z^m w^n
\end{aligned}$$

对于 $m, n > 0$。

在 $\alpha = -1$ 的情况下，显然

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_z M_z^* - M_w M_w^* + M_{zw} M_{zw}^* = 1 \otimes 1.$$

在这两种情况下，我们都得到了.....的紧性

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_z M_z^* - M_w M_w^* + M_{zw} M_{zw}^*.$$

那么，由于 $C^*([I]_\alpha^\perp)$ 是本质交换的，由 (5.1) 可知 $\sigma_e([I]_\alpha^\perp) \subset \partial\mathbb{D}^2$。

在 I 是 distinguished 的情况下，由 [Kne2，命题 4.3] 可知

$$Z(I) \cap \mathbb{T}^2 \subset \partial[Z(I) \cap \mathbb{D}^2].$$

那么，类似于 [WZ2，引理 5.1] 的证明，可以验证

$$Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2 \subset \sigma_e([I]_\alpha^\perp),$$

因此命题得证。 ∎

设 I 是多项式环 $\mathbb{C}[z, w]$ 的 distinguished ideal。取 $\alpha \geq -1$ 使商模 $[I]_\alpha^\perp$ 本质正规，我们得到一个扩张

$$0 \to \mathcal{K} \hookrightarrow C^*([I]_\alpha^\perp) \to C(Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2) \to 0,$$

由此在 $K_1(Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2)$ 中得到一个 K-同调元素。

现在，设 $p_1, \ldots, p_n$ 是 distinguished polynomials，使得

$$Z(p_i) \cap Z(p_j) \cap \mathbb{T}^2 = \emptyset, \ i \neq j.$$

令 $p = \prod_{i=1}^n p_i$。取 $\alpha \geq -1$ 使得 $[p]_\alpha^\perp$ 本质正规，由命题 2.5 不难看出所有 $[p_i]_\alpha^\perp$ 都是本质正规的。由下一节证明的引理 6.3 ，$[p_i]_\alpha^\perp$ 和 $[p_j]_\alpha^\perp$ 对于 $i \neq j$ 是渐近正交的，因此根据 [GWp1，定理 3，3], 子空间 $[p_1]_\alpha^\perp + \cdots + [p_n]_\alpha^\perp$ 是闭的。此外，我们有

$$[p]_\alpha^\perp = [p_1]_\alpha^\perp + \cdots + [p_n]_\alpha^\perp.$$

现在，令 e_p 为由 $[p]_\alpha^\perp$ 定义的 K-同调元素，并类似地令 e_{p_i} 为由 $[p_i]_\alpha^\perp$、$i = 1$、$\cdots$、n 定义的 K-同调元素。由于 $[p_i]_\alpha^\perp$ 与 $[p_j]_\alpha^\perp$、$i \neq j$ 渐近正交，不难看出

$$e_p = e_{p_1} \oplus \cdots \oplus e_{p_n}.$$

接下来，我们将证明，如果 p 是一个特征多项式，并且 $\alpha \geq -1$ 满足 $[p]_\alpha^\perp$ 是本质正规，那么 K-同调元素 e_p 是非平凡的。根据 [GWk1], ，只需证明以下结果。

定理 5.2. 设 I 是一个特征理想，并且 $\alpha \geq -1$ 满足 $[I]_\alpha^\perp$ 是本质正规，则短正合列

$$0 \to \mathcal{K} \hookrightarrow C^*([I]_\alpha^\perp) \to C(Z(I) \cap \partial\mathbb{D}^2) \to 0$$

不是分裂的。

证明。 根据 [GWk1，引理 5。5], 只需在 $C^*([I]_\alpha^\perp)$ 中找到一个指标非零的弗雷德霍姆算子。令 $I = pL$ 为 Beurling 分解。记 $s = \dim \mathbb{C}[z,w]/L$，并取互异点 $z_1, \ldots, z_{s+1} \in \mathbb{D}$。对每个 z_k 选取 w_k 使其满足 $(z_k, w_k) \in Z(I) \cap \mathbb{D}^2$，并令

$$q(z,w) = \prod_{j=1}^{s+1} (z - z_k).$$

由命题 5.1 和谱映射定理， $\sigma_e(S_q) \subset q(\mathbb{T}^2)$ 不包含点 0，因此 S_q 是弗雷德霍姆的。不等式 (2.1) 给出

$$\dim \ker S_q \leq s < \infty.$$

另一方面，每个再生核 $K_{(z_k,w_k)} \in \ker S_q^*$，因此

$$\dim \ker S_q^* \geq s + 1 > \dim \ker S_q,$$

由此完成证明。 ∎

6 特征商模的求和

对于一个非主的特征理想 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$，我们希望降低权指标$\alpha$ 定理 4.3 中的权指标。设 $I = \bigcap_{i=1}^k I_i$ 为主分解，则每个 I_i 都是 distinguished。将定理 4.3 应用于每个 I_i，我们得到 $[I_i]_\alpha^\perp$ 的本质正规性（对于）

$$\alpha \geq \max_{1 \leq i \leq k} \max\{m_{I_i}, n_{I_i}\} - 2.$$

我们将在假设 $Z(I_i)$'s 不在 $\mathbb{T}^2$ 处彼此相交的条件下，通过将这些 $[I_i]_\alpha^\perp$'s 相加，证明 $[I]_\alpha^\perp$ 对这些 α 的本质正规性。

根据 [GWp1],，如果 H_1， H_2 是希尔伯特空间 H 的子空间，且 $P_{H_1}P_{H_2}$ 是紧的，那么H_1 和 H_2 被称为彼此渐近正交。下面来自 [GWp1 的定理 3。3] 给出了一种对本质正规商模进行求和的方法。

定理 6.1。（郭和王，2007年）设 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 是两个本质正规的商模，若它们渐近正交，则 $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$ 是闭的且本质正规。

要在我们的语境中应用此定理，我们需要关于 $P_{[I]_\alpha^\perp}$ 与乘法算子本质可交换性的以下观察。

引理 6.2. 设 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$ 为一个 distinguished 理想， $\alpha \geq -1$，且 $[I]_\alpha^\perp$ 是本质正规的，那么对于每个 $p \in \mathbb{C}[z,w]$， $[M_p^*, P_{[I]_\alpha^\perp}]$ 都是紧的。

证明。 由命题 5.1 和谱映射定理,

$$\sigma_e(\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w S_w^*) = \sigma_e(\mathrm{Id}_{[I]_\alpha^\perp} - S_w^* S_w) = \{0\},$$

因此 S_w 是本质酉的。

根据假设，我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_{[I]_\alpha^\perp}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_w^* M_w) P_{[I]_\alpha^\perp} \\ &\leq P_{[I]_\alpha^\perp} - P_{[I]_\alpha^\perp} M_w^* P_{[I]_\alpha^\perp} M_w P_{[I]_\alpha^\perp} \\ &= P_{[I]_\alpha^\perp} - S_w^* S_w \\ &\in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

由此得到

$$P_{[I]_\alpha^\perp}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_w^* M_w) P_{[I]_\alpha^\perp} \in \mathcal{K}.$$

因此，由

$$\begin{aligned} & P_{[I]_\alpha^\perp} M_w^* P_{[I]_\alpha} M_w P_{[I]_\alpha^\perp} \\ = \; & P_{[I]_\alpha^\perp} M_w^* (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - P_{[I]_\alpha^\perp}) M_w P_{[I]_\alpha^\perp} \\ = \; & P_{[I]_\alpha^\perp} - S_w^* S_w - P_{[I]_\alpha^\perp}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)} - M_w^* M_w) P_{[I]_\alpha^\perp} \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

我们得到

$$[M_w^*, P_{[I]_\alpha^\perp}] = P_{[I]_\alpha^\perp} M_w^* P_{[I]_\alpha} \in \mathcal{K}.$$

同样地， $[M_z^*, P_{[I]_\alpha^\perp}] \in \mathcal{K}$，且根据 $\mathcal{K}$ 是闭子代数这一事实，引理的结论得证。 ∎

引理 6.3. 设 I_1 和 I_2 是 $\mathbb{C}[z,w]$ 的理想，其中 I_1 是 distinguished，且 $\alpha \geq 1$。令 $\mathcal{N}_1 = [I_1]_\alpha^\perp$ 和 $\mathcal{N}_2 = [I_2]_\alpha^\perp$。如果 $\mathcal{N}_1$ 是本质正规且

$$Z(I_1) \cap Z(I_2) \cap \partial\mathbb{D}^2 = \emptyset,$$

那么 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 是渐近正交的。

证明。记

$$\pi : B(\mathcal{N}_1) \to Q(\mathcal{N}_1)$$

到科尔金代数的自然同态 $Q(\mathcal{N}_1) = B(\mathcal{N}_1)/\mathcal{K}$。根据命题 5.1,

$$\sigma_e(S_z^{\mathcal{N}_1}, S_w^{\mathcal{N}_1}) = Z(I_1) \cap \mathbb{T}^2.$$

设 $p \in I_2$ 是一个多项式，使得 $Z(p) = Z(I_2)$，则根据假设，对于所有 $(z,w) \in \sigma_e(S_z^{\mathcal{N}_1}, S_w^{\mathcal{N}_1})$, $p(z,w) \neq 0$。因此， $S_p^{\mathcal{N}_1}$ 在 $\mathcal{N}_1$ 上是弗雷德霍姆的。所以，当且仅当 $(S_p^{\mathcal{N}_1})^* P_{\mathcal{N}_2}$ 是紧的，即 $\pi\left((S_p^{\mathcal{N}_1})^* P_{\mathcal{N}_2}\right) = 0$ 时， $P_{\mathcal{N}_1} P_{\mathcal{N}_2}$ 是紧的。根据引理 6.2， $[M_p^*, P_{\mathcal{N}_1}]$ 是紧的，因此

$$\pi\left((S_p^{\mathcal{N}_1})^* P_{\mathcal{N}_2}\right) = \pi(P_{\mathcal{N}_1} M_p^* P_{\mathcal{N}_1} P_{\mathcal{N}_2}) = \pi(P_{\mathcal{N}_1} M_p^* P_{\mathcal{N}_2}) = 0,$$

从而完成引理的证明。 ∎

推论 6.4。设 I_1 和 $I_2 \subset \mathbb{C}[z,w]$ 是 distinguished ideals，且 $Z(I_1+I_2)\cap\mathbb{T}^2=\emptyset$。设 $\alpha \geq -1$，使得 $[I_1]_\alpha^\perp$ 和 $[I_2]_\alpha^\perp$ 都是本质正规，则 $[I_1\cap I_2]_\alpha^\perp$ 也是本质正规。

证明。令 $I_1 = p_1L_1$、$I_1 = p_2L_2$ 为它们的 Beurling 分解，则 $Z(p_1) \subset Z(I_1)$ 且 $Z(p_2) \subset Z(I_2)$。由于 $[I_1]_\alpha^\perp$ 是本质正规，且

$$[I_1]_\alpha^\perp \ominus [p_1]_\alpha^\perp = [p_1]_\alpha \ominus [p_1L_1]_\alpha$$

是有限维的，$[p_1]_\alpha^\perp$ 是本质正规的。同样，$[p_2]_\alpha^\perp$ 是本质正规的。由引理6.3，$[p_1]_\alpha^\perp$ 和 $[p_2]_\alpha^\perp$ 渐近正交。于是由定理6.1，$[p_1]_\alpha^\perp+[p_2]_\alpha^\perp$ 是本质正规的。接下来我们证明 $[p_1p_2]_\alpha^\perp = [p_1]_\alpha^\perp + [p_2]_\alpha^\perp$。

根据假设，$Z(p_1) \cap Z(p_2) \cap \partial\mathbb{D}^2 = \emptyset$，因此 Taylor 本质谱 [Cur] 满足

$$\sigma_e(M_{p_1}, M_{p_2}) \subset \{(p_1(z,w), p_2(z,w)) : z,w \in \mathbb{T}^2\} \subset \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\},$$

这给出了 $M_{p_1}M_{p_1}^* + M_{p_2}M_{p_2}^*$ 的 Fredholm 性。显然，

$$\ker(M_{p_1}M_{p_1}^* + M_{p_2}M_{p_2}^*) = \ker M_{p_1}^* \cap \ker M_{p_2}^* = [(p_1)+(p_2)]_\alpha^\perp.$$

对于 $f \in [p_1]_\alpha \cap [p_2]_\alpha$，由

$$[(p_1)+(p_2)]_\alpha = (\ker M_{p_1}M_{p_1}^* + M_{p_2}M_{p_2}^*)^\perp = \text{ran }(M_{p_1}M_{p_1}^* + M_{p_2}M_{p_2}^*),$$

可得

$$f \in \text{ran }(M_{p_1}M_{p_1}^* + M_{p_2}M_{p_2}^*).$$

因此，存在 $g \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}^2)$，使得

$$(M_{p_1}M_{p_1}^* + M_{p_2}M_{p_2}^*)g = f \in [p_2]_\alpha.$$

因此 $M_{p_1}M_{p_1}^*g \in [p_2]_\alpha$。令 $h = P_{[p_2]_\alpha^\perp}M_{p_1}^*g$，则有

$$\begin{aligned} S_{p_1}^{[p_2]_\alpha^\perp}h &= P_{[p_2]_\alpha^\perp}M_{p_1}P_{[p_2]_\alpha^\perp}M_{p_1}^*g \\ &= P_{[p_2]_\alpha^\perp}M_{p_1}(P_{[p_2]_\alpha^\perp} + P_{[p_2]_\alpha})M_{p_1}^*g \\ &= P_{[p_2]_\alpha^\perp}M_{p_1}M_{p_1}^*g \\ &= 0, \end{aligned}$$

由此可得 $h=0$根据推论2.4。因此 $M_{p_1}^*g \in [p_2]_\alpha$并由此可得 $M_{p_1}M_{p_1}^*g \in [p_1p_2]_\alpha$。类似地 $M_{p_2}M_{p_2}^*g \in [p_1p_2]_\alpha$，从而得到 $f \in [p_1p_2]_\alpha$。现在我们已经证明

$$[p_1]_\alpha \cap [p_2]_\alpha \subset [p_1p_2]_\alpha,$$

由于反向包含关系显然成立，我们得到

$$[p_1]_\alpha \cap [p_2]_\alpha = [p_1p_2]_\alpha,$$

这等价于

$$[p_1p_2]_\alpha^\perp = [p_1]_\alpha^\perp + [p_2]_\alpha^\perp.$$

因此， $[p_1p_2]_\alpha^\perp$的本质正规性可由 $[p_1]_\alpha^\perp + [p_2]_\alpha^\perp$的本质正规性推出。最后，由

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} p_1p_2\mathbb{C}[z,w]/(I_1 \cap I_2) &\leq \dim_{\mathbb{C}} p_1p_2\mathbb{C}[z,w]/(p_1p_2L_1L_2)\\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z,w]/(L_1L_2)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} [I_1 \cap I_2]_\alpha^\perp \ominus [p_1p_2]_\alpha^\perp = \dim_{\mathbb{C}} [p_1p_2]_\alpha \ominus [I_1 \cap I_2]_\alpha < \infty.$$

于是， $[I_1 \cap I_2]_\alpha^\perp$的本质正规性由 $[p_1p_2]_\alpha^\perp$的本质正规性推出。 ∎

结合定理 4.3 和推论 6.4，立即可得以下结果。

定理 6.5. 设 $I \subset \mathbb{C}[z,w]$ 为一个特征多项式， $I = \bigcap_{i=1}^k I_i$ 为主分解。设 $V_i = Z(I_i) \cap \mathbb{D}^2$, $1 \leq i \leq k$。假设

$$Z(I_i) \cap Z(I_j) \cap \mathbb{T}^2 = \emptyset,\ 1 \leq i < j \leq k.$$

那么，对于所有整数， $[I]_\alpha^\perp$ 都是本质正规

$$\alpha \geq \max_{1\leq i\leq k} \max\{m_{V_i}, n_{V_i}\} - 2.$$

7 非特征例子

在本节 中，我们给出一些本质正规商模的非特征例子 es.

例 7.1. 对于 $|a| < 2$，考虑商 Hardy 模 $[z-w+a]^\perp$。显然可见$S_z = S_w - a\ \mathrm{Id}$，因此

$$[S_z^*, S_z] = [S_z^*, S_w - a\ \mathrm{Id}] = [S_z^*, S_w],$$

其由 *[Ya]*给出，是紧的。关于 $[S_w, S_w^*]$ 的紧性可用同样的方法得到。因此$[z-w+a]^\perp$ 是本质正规。

我们对这个例子作一些说明。记 $q = z - w + a$。首先，如果 $a = 0$，那么 $[z-w]^\perp$与单位圆盘上的 Bergman 模同构；如果 $|a| \geq 2$，那么 $[z-w-a]^\perp = \{0\}$。其次，对于 $0 < |a| < 2$，我们有

$$Z(q) \cap \mathbb{T}^2 \neq \emptyset, \quad Z(q) \cap (\mathbb{T} \times \mathbb{D}) \neq \emptyset, \quad \textit{and} \quad Z(q) \cap (\mathbb{D} \times \mathbb{T}) \neq \emptyset.$$

最后，在 $[q]^\perp$ 中不存在多项式，因此很难通过直接计算研究其本质正规性。

已知，对于拟齐次本质正规商模[WZ3]，，簇的每个不可约分支至多与 $\mathbb{T}^2$、 $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$ 或 $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$ 相交。前述例子表明，对于非齐次商模，情况并非总是如此。

推论 7.2。对于 $|a| < 2$，令 $q = z + w - a$，并设 p 是一个特征多项式，使得 $Z(q) \cap Z(p) \cap \mathbb{T}^2 = \emptyset$，则商 Hardy 模 $[pq]^\perp$ 是本质正规的。

证明。由于 $Z(q) \cap Z(p) \cap \partial\mathbb{D}^2 = \emptyset$，根据引理 6.3， $[q]^{\perp}$ 与 $[I]^{\perp}$渐近正交。根据[GWp1，引理 2。6]，

$$[pq]^{\perp} = [q]^{\perp} + [q]^{\perp},$$

它是本质正规算子的。 ∎

致谢。本文得到国家自然科学基金委员会（编号：12271298、12231005、11871308、12071253）和上海市自然科学基金（编号：21ZR1404200）的资助。第三作者还得到山东大学青年学者计划的部分资助。我们感谢 L. Chen（山东大学）提出了许多建议，使本文更易于阅读。我们还感谢 D. Zheng 和 R. Yang 就这一主题进行了宝贵的讨论。

参考文献

[AM1] J. Agler 和 J. McCarthy，特征簇。《数学学报》194（2005年），第2期，133-153。[AM2] J. Agler 和 J. McCarthy，特征簇的参数化。《当代数学》393（2006年），29。[Ar1] W. Arveson，交换 d 元组的狄拉克算子。《函数分析杂志》189（2002年），第1期，53-79。[Ar2] W. Arveson，标准希尔伯特模的商。《美国数学会汇刊》359（2007年），第12期，6027-6055。[At] M. Atiyah，交换代数导论。CRC 出版社，2018。[BDF] L. Brown、R. Douglas 和 P. Fillmore， C^*-代数的扩张与 K-同调。《数学年刊》105（1977年），第2期，265-324。[BKS] T. Bhattacharyya、P. Kumar 和 H. Sau，通过 Berger-Coburn-Lebow 定理研究特征簇，《分析与偏微分方程》15（2022年），第2期，477-506。[Con] A. Connes，非交换几何。Academic Press，1994。[CG] X. Chen 和 K. Guo，《解析希尔伯特模》。CRC 研究笔记，413（2003年）。[Cla] D. Clark，多圆盘中的 H^p 函数的限制。《美国数学杂志》110（1988年），第6期，1119-1152。[Cur] R. Curto，算子弗雷德霍姆 n 元组与可逆 n 元组：变形问题。《美国数学会汇刊》266（1981年），第1期，129-159。[DSS] B. Das、J. Sarkar 和 S. Sarkar，压缩算子的分解。Adv. Math. 322（2017年），186-200。[DGH] H. Dan、K. Guo 和 H. Huang，解析 Toeplitz 算子、特征簇与符号的边界行为。《积分方程与算子理论》91（2019），1-15。

[DGW] R. Douglas、K. Guo、Y. Wang，强伪凸域上 Bergman 模主子模的 p-本质正规性。Adv. Math. 407（2022年），论文编号 108546，共41页。[DM] R. Douglas 和 G. Misra，希尔伯特模的一些计算。《奥里萨数学学会杂志》12-15（1993年），1-11。[Dou1] R. Douglas，本质约化希尔伯特模。《算子理论杂志》55（2006年），第1期，117-133。[Dou2] R. Douglas，本质约化希尔伯特模 II。《算子理论热点》，79-87，Theta 数学进展丛书 9，Theta，布加勒斯特，2008。[DP] R. Douglas 和 V. Paulsen，函数代数上的希尔伯特模。朗文研究笔记，217，1989年。[DS] B. Das、J. Sarkar，安藤膨胀、冯·诺依曼不等式与特征簇。《函数分析杂志》272（2017年），第5期，2114-2131。[DTY] R. Douglas、X. Tang 和 G. Yu，《解析格罗滕迪克–黎曼–罗赫定理》。Adv. Math. 294（2016年），307-331。[DW] R. Douglas 和 K. Wang，一种研究主子模本质正规性的调和分析方法。《函数分析杂志》261（2011年），第11期，3155-3180。[DWy] R. Douglas 和 Y. Wang，几何 Arveson-Douglas 猜想与全纯延拓。《印第安纳大学数学杂志》66（2017年），第5期，1499-1535。[FR1] S. Ferguson 和 R. Rochberg，高阶希尔伯特–施密特汉克尔型与解析核张量。《斯堪的纳维亚数学杂志》96（2005年），第1期，117-146。[FR2] S. Ferguson 和 R. Rochberg，某些商希尔伯特模的描述。《算子理论》20（2006年），93-109，Theta 数学进展丛书 6。[Ge1] R. Gelca，由函数空间诱导拓扑的环。《休斯敦数学杂志》21（1995年），第2期，395-405。[Ge2] R. Gelca，Bergman 空间上的拓扑希尔伯特零点定理。《积分方程与算子理论》28（1997年），第2期，191-195。[Guo] K. Guo，H^2_d的子模的缺陷算子。《纯粹与应用数学杂志》573（2004年），181-209。[GWk1] K. Guo 和 K. Wang，本质正规希尔伯特模与 K-同调。《数学年刊》340（2008年），第4期，907-934。[GWk2] K. Guo 和 K. Wang，本质正规希尔伯特模与 K-同调。II：二维单位球上的准齐次希尔伯特模。《拉马努金数学学会杂志》22（2007年），第3期，259-281。

[GWp1] K. Guo 和 P. Wang，《本质正规希尔伯特模与 K-同调》III：双圆盘上 Hardy 模的齐次商模。《中国科学：数学》50（2007年），第 3 期，387-411。[GWp2] K. Guo 和 P. Wang，《本质正规希尔伯特模与 K-同调》IV：多圆盘上 Hardy 模的准齐次商模。《中国科学：数学》55（2012），第 8 期，1613-1626。[GWZ] K. Guo、K. Wang 和 G. Zhang，双圆盘上商模的迹公式与 p-本质正规性质。《算子理论杂志》67（2012），第 2 期，511-535。[GWy] K. Guo 和 Y. Wang，关于 Arveson-Douglas 猜想的综述。（第 13 章，《算子理论、算子代数及其与几何学和拓扑学的相互作用：Ronald G. Douglas 纪念文集》），《算子理论及其应用进展》，Birkhauser，第 278 卷（2020）。[JKM] M. Jury、G. Knese 和 S. McCullough，双圆盘中特征簇上的 Nevanlinna-Pick 插值。《函数分析杂志》262（2012），第 9 期，3812-3838。[Kne1] G. Knese，Neil 抛物线上的函数论。《密歇根数学杂志》55（2007年），第 1 期，139-154。[Kne2] G. Knese，定义特征簇的多项式。《美国数学学会汇刊》362（2010），第 11 期，5635-5655。[KS] M. Kennedy 和 O. Shalit，本质正规性、本质范数与超刚性。《函数分析杂志》268（2015），第 10 期，2990-3016。[PS] S. Pal 和 O. Shalit，对称化双圆盘上的谱集与特征簇。《函数分析杂志》266（2014），第 9 期，5779-5800。[Ru] W. Rudin，多圆盘中的函数论。W. A. Benjamin 公司，1969年。[Sch] D. Scheinker，多圆盘上的希尔伯特函数空间与 Nevanlinna-Pick 问题。《函数分析杂志》161（2011），第 8 期，2238-2249。[Sha] O. Shalit，分次希尔伯特模的稳定多项式除法与本质正规性。《伦敦数学学会杂志》83（2011），第 2 期，273-289。[Tay1] J. Taylor，多个交换算子的联合谱。《函数分析杂志》6（1970），第 2 期，172-191。[Tay2] J. Taylor，多个交换算子的解析函数演算。《数学学报》125（1970），1-38。[Wa] P. Wang，多圆盘上 Hardy 模的 N_η-型商模的本质正规性。《美国数学学会会刊》142（2014），第 1 期，151-156。[WZ1] P. Wang 和 C. Zhao，多圆盘上的齐次商模的本质正规性：特征簇情形。《积分方程与算子理论》90（2018），1-24。

[WZ2] P. Wang 和 C. Zhao，多圆盘上的本质正规齐次商模。《Adv. Math.》339（2018），404-425。[WZ3] P. Wang 和 C. Zhao，多圆盘上准齐次商模的本质正规性。《中国科学：数学》62（2019），第 4 期，663-678。[WX1] Y. Wang 和 J.Xia，商模的本质正规性与复维数。《函数分析杂志》276（2019），第 4 期，1061-1096。[WX2] Y. Wang 和 J. Xia，强伪凸域上 Hardy 模主子模的本质正规性。《算子理论杂志》83（2020），第 2 期，333-352。[WX3] Y. Wang 和 J. Xia，Hardy 空间的几何 Arveson-Douglas 猜想及相关的紧性判据。《Adv. Math.》388（2021），论文编号 107890，54 页。[Ve] P. Vegulla，特征簇的几何学。博士论文，圣路易斯华盛顿大学，2007年。[Ya] R. Yang，关于二变量 Jordan 块（II）。《积分方程与算子理论》56（2006年），第 3 期，431-449。

郭坤宇，复旦大学数学科学学院，上海，200433，中华人民共和国，电子邮箱：kyguo@fudan.edu.cn 王鹏辉，山东大学数学学院，济南 250100，山东，中华人民共和国，电子邮箱：phwang@sdu.edu.cn 赵崇，山东大学数学学院，济南 250100，山东，中华人民共和国，电子邮箱：chong.zhao@sdu.edu.cn