Prepared for submission to JHEP

伪周期映射与具有八个超荷的理论的分类

arXiv:2304.13663v1 [hep-th] 26 Apr 2023

Dan Xie

中国北京市清华大学数学系，邮编 100084

Abstract:具有八个超荷的理论的一参数局部库仑分支解的分类，是通过假设其由亏格为 g 的黎曼曲面纤维化给出的。关键在于，映射类群中的某个共轭类（即所谓的负型伪周期映射）决定了退化的拓扑类型。共轭类的分类具有简单的组合描述。每个这样的共轭类都会产生一个对偶图，并可导出一个三维镜像夸克图规范理论，进而用于确定低能理论（假设一般形变）。利用退化的拓扑数据，可以给出一些整体的 Seiberg-Witten 几何。这一几何框架在单一的组合框架中统一了四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论（例如 T_n 理论和 Argyres-Douglas 理论）、五维 $\mathcal{N}=1$ 超共形场论、六维 (1, 0) 超共形场论、四维红外自由理论以及四维渐近自由理论。

目录

1 引言 1

2 伪周期映射 7
2.1 周期映射 102.2 加权图 11

3 对偶图 13
3.1 周期映射的对偶图 133.2 粘合 143.3 任意伪周期映射的对偶图 16

4 红外理论 18
4.1 对偶图和三维镜像 184.2 周期映射和四维超共形场论 234.3 其他四维超共形场论 264.4 红外自由理论 29

5 紫外理论 37
5.1 四维理论 415.2 五维理论 465.3 六维理论 46

6 结论 48

A $1 \leq g \leq 5$的周期映射 50

B 由周期映射得到的秩4和秩5四维超共形场论 51

1 引言

解决四维$\mathcal{N} = 2$理论库仑分支的最重要要素之一，是低能阿贝尔规范理论的电磁对偶性[1],；也就是说，当沿着特殊真空（其中存在额外的无质量粒子）移动时，有效光子耦合会通过电磁对偶群 [1]中的一个元素发生变化。通过结合各个特殊真空周围的对偶群元素（求解黎曼–希尔伯特问题），Seiberg-Witten（SW）通过找到一条SW曲线[1, 2]，即一族亏格一曲线F（x、y、u）$= 0$，成功求解了$\mathcal{N} = 2SU(2)$规范理论的库仑分支，

[1]在秩一情形下，该群为 $SL(2, Z)$。

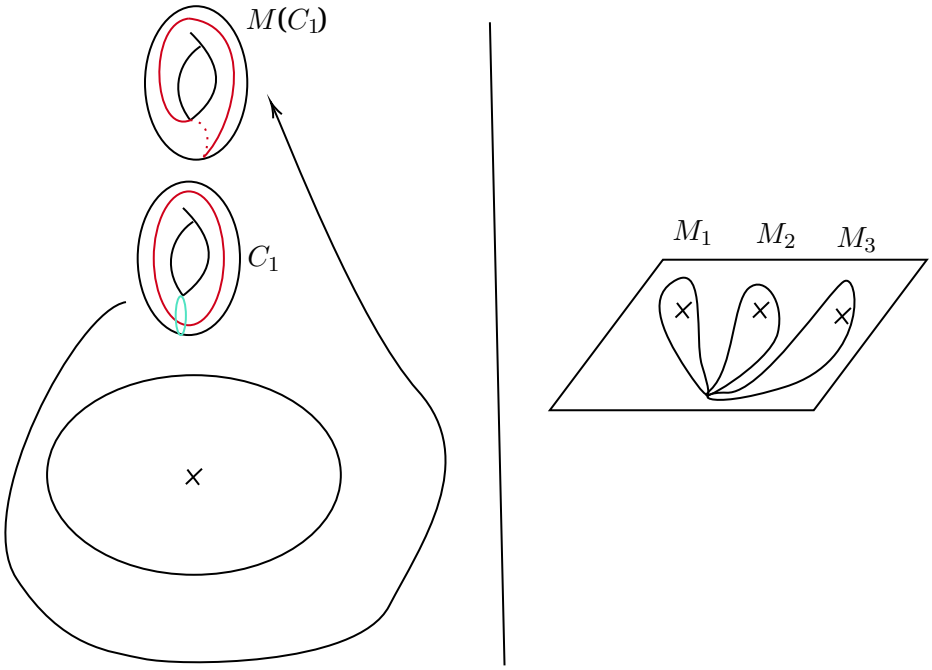


图1：左：电磁对偶群由作用在SW曲线同调群上的单值群 M给出；右：每个特殊真空周围都有一个单值群元素（包括库仑分支上的 ∞点），且全局约束为 $M_1M_2M_3 = I$。

这里 u 是库仑支参数。物理数据的提取方式如下：a)：低能光子耦合 $\tau(u)$由光滑曲线的复结构给出$F(x、\ y、\ u)$；b)：特殊真空由SW曲线的退化给出；c)：其周围的电磁对偶群由作用于SW曲线同调类上的单值群给出，见图。 1。

在实践中，通常通过寻找 SW 几何（通常利用弦理论构造）来求解库仑分支，然后尝试从 SW 几何分析红外物理。虽然可以利用周期积分计算一般真空处的光子耦合，但特殊真空处的红外物理要复杂得多，难以确定，因此通常需要借助混合霍奇结构等额外的数学结构 [3]。[3, 4] 中的一项发现是，特殊真空附近的电磁对偶性（单值化）群不足以确定红外理论。例如，在秩二情形 [5], 中，除了单值群之外，还需要指定另外两组数据（一项整数 m 和奇点处的退化类型），才能确定低能理论（假设存在一般形变）。

尽管已经发现了 [6–11], 一大类 SW 几何，但要完成分类，仍需遵循 SW 的原始方法：首先对特殊红外真空进行分类，然后尝试求解黎曼-希尔伯特问题，以获得全局解 [1, 2]。当然，首要且关键的一步是对以下情形周围的局部行为进行分类

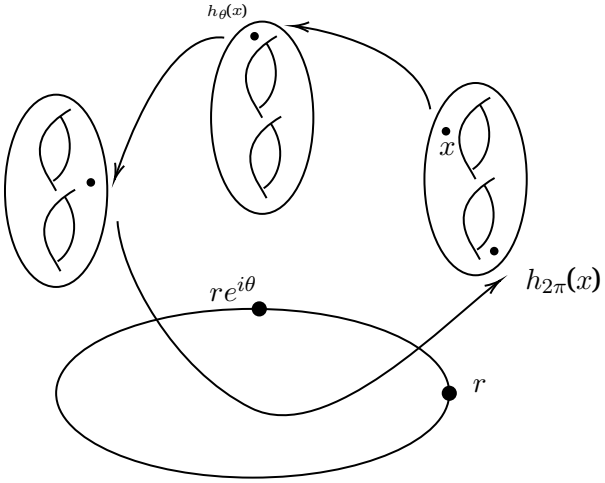


图2：与绕特殊真空的环相关联的同胚作用 h 。该作用施加于黎曼曲面上的任意一点，特别是，它会在同调群上诱导一个作用。

特殊真空；秩一情形已完成 [12–14] 以及秩二情形 [4]。

本文旨在分类任意秩 g理论的 SW 几何的局部行为。我们对 SW 几何作出若干假设：a)：局部解由主极化阿贝尔簇的纤维化 [15]描述，该纤维化可识别为亏格 g 黎曼曲面的雅可比簇，因此特殊真空由黎曼曲面的退化给出；b)：我们取库仑分支的一个一参数切片，因此存在一个黎曼曲面的一参数族；c) 该理论与该退化的一般形变相关联。因此，局部理论的分类问题归结为黎曼曲面一参数退化的分类问题。

鉴于退化类型的数量会随亏格急剧增加（秩二时有 140 种 [5], 1600 ，秩三时有 [16]），即便在秩二情形下，它们似乎也很难整理。所幸，Matsumoto-Montesinos[17] （MM）为此类分类提出了卓越的组合描述。其关键思想是利用绕行特殊真空时黎曼曲面上的映射类群作用的共轭类，见图2。映射类群作用当然决定了同调群上的作用，从而给出电磁对偶群，但它包含更多信息；特别是，一旦指定映射类群中的共轭类，就能完全确定退化 [17]!

在黎曼曲面退化的背景下，映射类群的共轭类具有特殊类型：它就是所谓的负型伪周期映射。这些映射由以下数据分类：

1. 一组可容许割曲线 $\mathcal{C} = \cup C_i$。可容许意味着 $B = \Sigma_g/\mathcal{C}$ 的不可约分支具有非负欧拉数 $\chi_i = 2 - 2g_i + n_i \geq 0$，此处

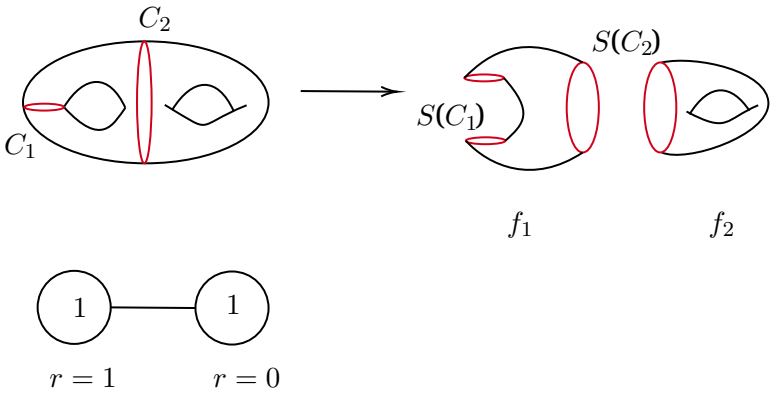


图 3：上：二亏格黎曼曲面的一个容许切割系统，切割后得到两个不可约分支；每条切割曲线都对应一个螺旋数，每个不可约分支上都有一个周期映射。下：上述切割系统的加权图：这里为每条分离曲线（它会将黎曼曲面切分为两个独立分支）画一条边，并在图的顶点处标注非分离切割曲线的数量。

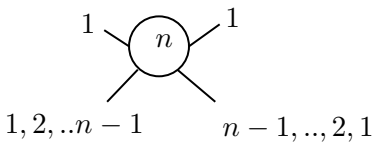
n_i 是不可约分支的边界曲线数量， B 的 g_i 是亏格。

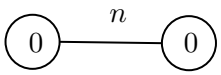
2. f 在有向图 $G_{\mathcal{C}}$ 上的作用由 $\mathcal{C}$诱导。3. f 绕每个环带 C_i的螺旋数。此处螺旋数必须为负数。4. 作用 f 在 B 的每个不可约分支上的限制都是一个周期映射，它又由所谓的价数数据确定：（n、 g'、 $\frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\sigma_s}{\lambda_s}$），其中$n$ 是映射的阶（$f^n = id$），而 g' 是由覆盖映射 f 所定义的底曲面的亏格： $\Sigma \to \Sigma'$，且 σ_i、 λ_i 是整数值，见第2.1节。

总之，前两个步骤会得到一个加权图，见图。3 中的示例。对于每个环带，还有一个整数 $K \geq -1$ （该整数由螺旋数以及环带上的边界数据决定）；最后，对于 B中的每个不可约分支，都有一个周期映射。因此，分类可以通过组合方式来完成!

完成退化分类后，下一个问题是寻找与之相关的低能理论，而这通常是一个相当困难的问题。事实证明，MM理论中的对偶图将帮助我们解决这一问题。关键观察在于，对偶图与低能理论的三维镜像之间存在联系 [4]。需要注意的是，我们并不总能从对偶图中找到三维镜像，这或许可以作为判断某种退化是否能够出现在SW几何中的标准。利用该退化的对偶图（以及相关的三维镜像），低能理论可以粗略描述如下：

(1) $\left(n, g^{'}=0,\ \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)$



(2) 

$f=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}+\mathbf{1}$ $f=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}+\mathbf{1}$

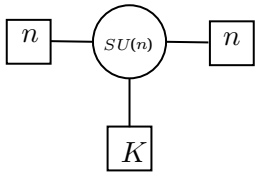


图 4: （1）：亏格为 $n-1$ 的黎曼曲面上周期映射的数据，以及退化对应的对偶图；该对偶图就是与 $2n$ 个基本物质耦合的 $SU(n)$ 理论的三维镜像；（2）：亏格为 $n-1$ 的曲线的加权图，此处为 $K \geq 1$；红外理论是与 $2n+K$ 个基本表示中的超多重态耦合的 $SU(n)$ 规范理论。

1. 对于周期映射，可以找到一个四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论，并且许多熟悉的理论，例如（A_{n-1}、A_{k-1}）理论 [7, 18]、T_n 理论 [6], 以及自由双基本物质都可以找到。参见表1 以了解更多示例。2. 加权图中不同分支的粘合被解释为对物质系统的味对称性进行规范化。

参见图。4，其中给出了几个例子。这种低能理论的描述方式与课堂上所用的非常相似 $\mathcal{S}$ 理论，参见图。24。在我们的情形中，Argyres-Douglas 理论、T_n 理论和红外自由规范理论都在统一的框架下进行了描述。

完成局部研究后，可以通过在物理库仑分支 [3]上添加一个点 ∞ 来研究全局 SW 几何。还将在 ∞ 处添加一个奇异纤维 F_∞，它与之前的局部研究相吻合。然而，F_∞ 的性质决定了紫外性质。我们对 F_∞ 给出简单的拓扑约束，使其能够定义一个紫外完备的四维、五维和六维理论。结果如下：a)：四维理论：对偶图是一棵有理曲线树；b)：五维理论：对偶图是一条仅含一个环的有理曲线链；c)：六维理论：对偶图是一条含有两个环的有理曲线链！值得注意的是，对偶图上的环数与其中的环数相匹配

进行紧化时。文中讨论了许多熟悉的四维、五维和六维理论对应的一些全局 SW 几何，更深入的研究将留待另行发表。

本文组织如下：第二节回顾伪周期映射；第三节讨论如何为伪周期映射附加一个对偶图；第四节讨论如何从对偶图及相关的三维镜像中寻找低能理论；第五节讨论关于紫外奇异纤维的拓扑约束，并给出四维、五维和六维理论的若干类全局 SW 几何；最后，第六节给出结论。

2 伪周期映射

我们首先回顾映射类群的定义，更多详细信息请参见[19]。假设 S 是去掉 $g \geq 0$ 个环面的连通和，其中去除了 $b \geq 0$ 个开圆盘，并从内部去除了 $n \geq 0$个点。令 $Homeo^{+}(S, \partial S)$表示 S 上的定向保持同胚群，且这些同胚将 ∂S限制为恒等映射。映射类群 S记为 $Mod(S)$，是群

$$Mod(S) = Hemeo^{+}(S, \partial S)/Homeo_{0}(S, \partial S)$$

这里， $Homeo_{0}(S, \partial S)$ 表示 $Hemeo^{+}(S, \partial S)$ 中的恒等元连通分支。例如，闭的一重亏格黎曼曲面的映射类群为 $SL(2, Z)$。映射类群还有其他等价的定义，即 $Hemeo^{+}(S, \partial S)$ 的同伦类。

我们还需要考虑上述映射类群的推广，即，同胚 f 可能只将边界 ∂S 保持为一个集合；更一般地， f 也可以置换 ∂S 中的元素。

如引言中所讨论的，特定类型的局部 SW 解 [2] 会产生一个亏格为 g 的纤维化一参数族。如果存在特殊真空，则可以关联一个映射类群中的元素，见图。2。实际上，通过改变环绕奇点的环的基点，可以关联一个共轭类。

我们不从已知的 SW 解出发，尝试计算退化附近的映射类群元素，而是采取相反的方向。我们首先尝试对亏格为 g 纤维化 [3],的一参数退化的所有可能拓扑类型进行分类，然后尝试确定每种退化对应的红外理论。

一参数退化可以描述如下。设 $\phi: S \to \Delta$ 是到单位圆盘 $\Delta = \{|t| < 1\}$ 的真满射全纯映射，使得对于任意 $t \in \Delta^{*} = \Delta - \{0\}$， $\phi^{-1}(t)$都是亏格为 $g \geq 2$ 的光滑黎曼曲面。我们称 ϕ 为亏格为 g的退化，并将 $F = \phi^{-1}(0)$称为奇异纤维。现在假设 ϕ 是正规极小的，即 F 的约化概形具有正规交叉，并且 -1 曲线在 F 中与其他分支的交点数至少为三个。对于两个退化 $\phi: S \to \Delta$ 和$\phi': S' \to \Delta$，如果存在满足$\phi' \cdot \psi = \phi$的保向同胚 $\psi: S \to S'$，则称 ϕ 和 ϕ' 拓扑等价。注意，对于局部理论的分类而言，只需要退化的拓扑类型即可。诸如低能耦合等其他物理量则由全纯数据给出。

将 $t_0 \in \Delta^{*}$ 固定为基点后，穿孔圆盘的基本群的典范生成元会自然地作用在黎曼曲面 $\phi^{-1}(t_0)$ 上，作用方式是在同伦意义下保持定向的同胚。由于基点的改变对应于映射类群中的共轭，因此可以从退化中得到一个共轭类。这个元素称为该退化的拓扑单值化。需要

[2]如果相关的阿贝尔簇由某个黎曼曲面的雅可比簇给出。[3]需要强调的是，与秩一情形不同，某些退化似乎无法出现在库仑分支解中。

注意，此处的单值化指的是映射类群的共轭类，而不是群 $Sp(2g, Z)$ 的共轭类。

现在陈述映射类群的共轭类与黎曼曲面的一参数退化之间最重要的事实[17, 20]。首先，作为曲线退化的拓扑单值化而实现的共轭类（亏格为 $g \geq 2$）由一个负型伪周期映射表示；其次，任何负型伪周期映射的共轭类都可作为某个曲线退化的拓扑单值化而实现。

光滑曲线的负型伪周期映射 $f: \Sigma_g \to \Sigma_g$ 的共轭类由以下数据决定： Σ_g

1.一组可容许割曲线系 $\mathcal{C} = \cup C_i$。可容许意味着 $B = \Sigma_g/\mathcal{C}$ 的不可约分支具有非负欧拉数 $\chi_i = 2 - 2g_i + n_i \geq 0$，此处$n_i$ 是 B的不可约分支的边界曲线数量。

2. f 在由 $\mathcal{C}$ 诱导的有向图 $G_{\mathcal{C}}$ 上的作用。

3. f 绕每个环带 C_i的螺旋数。这里要求螺旋数为负。4. 限制在 B 的每个分支上的作用 f 都是一个周期映射，而周期映射又由所谓的价数数据确定。

现在我们更详细地解释上述要素：

<escape>曲线切割系统：可容许割曲线系的分类 $\mathcal{C}$ 与 Deligne-Mumford 引入的稳定曲线的分类相同。这类切割系统可以用如下加权图表示：a) 顶点 v 表示一个不可约分支，以及两个整数（$g(v)$ $\rho(v)$）：$g(v)$ 表示 v的亏格，$\rho(v)$ 表示仅属于 v的切割曲线数量。b) 边 e及其重数 $\epsilon(e)$ 表示两个分支之间双重点的数量，见图。5 为一例。</escape>

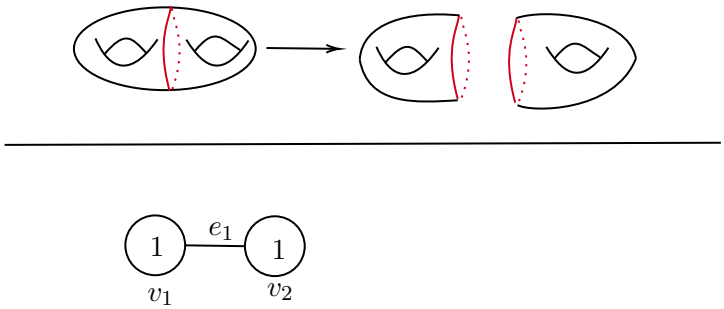


图 5：上：二亏格黎曼曲面只有一条切割曲线；切割后有两个分支；下：该切割系统对应的加权图。

自同构：给定一个切割系统，从而得到一个加权图 X。所谓自同构$\sigma: X \to X$，是指图的一个自同构，使得权重（$g(B_v)$ $\rho(v)$）

对于每个顶点 g（$B_{\sigma(v)}$） ρ（σ（v））相同 v 的 X。例如，对于 X 图中列出的5，存在一个 $\mathbb{Z}_2$ 交换 v_1 和 v_2并固定边 e_1的作用。

螺旋数：对于曲线 C_i of $\mathcal{C}$，存在最小整数 α_i ，使得$f^{\alpha_i}(\vec{C}_i) = \vec{C}_i$（它们作为集合相等）。还存在最小整数 L_i，使得 $f^{L_i}|_{C_i}$ 是 e_i 次 Dehn 扭转（e_i 可以是正整数或负整数）。螺旋数定义为

$$s(C_i) = e_i\alpha_i/L_i.$$

切割曲线分为两类。如果曲线 C_i 满足α_i为偶数且 $f^{\alpha_i/2}(\vec{C}_i) = -\vec{C}_i$，则称其为双向曲线，这意味着定向发生了改变。否则称其为非两侧对称。

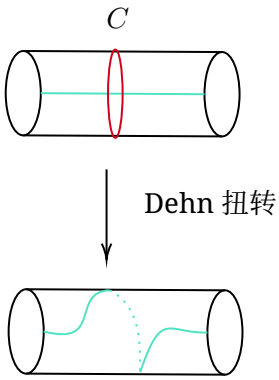


图 6：沿曲线 C进行 Dehn 扭转，并规定该作用在所示方向上为负。

价数数据：周期映射的价数数据定义起来更加复杂。设 Σ为一个黎曼曲面，且 $f : \Sigma \to \Sigma$ 为周期映射（即， f^n 为恒等映射）。对于 Σ上的任意点 P，存在一个整数 α（P），使得 P、f（P）.....、$f^{\alpha\ (P)\ -1}$（P）是互不相同的点，并且 $f^{\alpha\ (P)}$（P）$= P$。如果 α（P）$= n$，则称 P为简单点；如果 α（P）$< n$，则称 P 为多重点。

设 C 为一条定向简单闭曲线，并设 m 为满足条件 $f^m(\vec{C}) = \vec{C}$（作为集合），且 $n = m\lambda$ 的最小正整数。此时， f 在一条 $\vec{C}$ 上的限制是一个周期映射。设 Q 为 C 上的任意一点， Q 在作用 f^m 迭代下的轨道，且这些点按如下顺序排列：$(Q, f^{m\sigma}(Q)$ $f^{2m\sigma}(Q) \ldots, f^{(\lambda-1)m\sigma}(Q))$。这里 σ 是满足条件 $0 \le \sigma \le \lambda - 1$ 的整数，而 $gcd(\sigma, \lambda)$ $= 1$。最后，引入另一个满足条件的整数 δ 。

$$\sigma\delta = 1(mod\lambda), \quad 0 \le \delta \le \lambda - 1.$$

这意味着作用 f^m 在 $\vec{C}$ 上是旋转，旋转角为 $2\pi\delta\lambda$。数据 (m, λ, σ) 是与曲线 C 相关联的价数数据。多重点 P 的价数数据定义为围绕 P 的闭曲线的价数数据。

给定一个周期映射 f，存在一个 n 重循环覆盖映射 Π： $\Sigma \to \Sigma'$ 与 f相关联，而 Σ' 是关于 f （轨道空间）的商空间。 f的多重点

产生了 Π的分歧点。分歧点的价数数据定义为多重点的价数数据。因此，周期映射最终由 Σ' 的亏格以及分歧点的价数数据确定。

同调群上的诱导作用： $Mod(S_g)$ 的一个基本方面是其在 $H_1(S_g, Z)$ 上的作用，而表示 Ψ： $Mod(S_g) \to Aut(H_1(S_g, Z)$ 是对 $Mod(S_g)$ 的初步刻画。任意 $\phi \in Homeo^+(S_g)$ 都会诱导一个自同构 ϕ_* :$H_1(S_g, Z) \to H_1(S_g, Z)$，由此可知映射

$$\Psi_0 : Mod(S_g) \to Aut(H_1(S_g; Z))$$

具有如下性质:

$$\Psi_0(Mod(S_g)) \subset Sp(2g, Z)$$

现在来描述 Dehn 扭转在同调类上的作用。设 a 和 b 是 S_g 中定向简单闭曲线的同伦类。对于任意 $k \geq 0$，有

$$\Psi_0(T_b^k)([a]) = [a] + k\hat{i}(a, b)[b].$$

这里，$\hat{i}(a, b)$ 是 a、b 的交数。利用上述公式可以看出，Dehn 扭转对分离曲线的作用是平凡的，因为这些曲线的同调类为零。在同调群上作用平凡的映射类元素称为 Torelli 群。

2.1 周期映射

设 Σ_g 是一个亏格为 $g \geq 2$ 的闭黎曼曲面， Γ_g 是其映射类群。在 Σ_g 的某个周期映射同伦类中，可以选取一个代表元，使其在 Σ_g 上的某种复结构下成为解析自同构。现在设 f： $\Sigma_g \to \Sigma_g$ 是一个阶为 n 的循环解析自同构， Π： $\Sigma \to \Sigma'$ 是 n 重循环覆盖。设 g' 是 Σ' 的亏格， λ_1、.....、λ_l 是 Π 的分歧指标，而 $(n/\lambda_i,\ \lambda_i,\ \sigma_i)$ 是价数数据。价数数据满足以下条件:

1. The Hurwitz formula: $2g - 2 = n[2g' - 2 + \sum_{i=1}^{l}(1 - \frac{1}{\lambda_i})]$.

2. Nielsen 定理： $\sum \sigma_i/\lambda_i$ 是一个整数。

3. Wiman： $n \leq 4g + 2$。

4. Havey: 设 $M = lcm(\lambda_1,\ .....,\ \lambda_l)$ [4]。

   ^^ (a) $lcm(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_l) = M$对所有 i均成立，此处 λ_i表示省略了 λ_i。（b） M整除 n，且如果 $g' = 0$，则 $M = n$。（c） $l \neq 1$，且如果 $g' = 0$，则 $l \geq 3$。（d）如果 M 是偶数，并且因此 $M = 2^\delta M_1$ 是奇数，其中 M_1 为奇数，那么能被 2^δ 整除的 λ_i 的数量为偶数。

[4]此处 lcm 表示括号内各数字的最小公倍数。

通常，人们通过数据（n、g'、$\frac{\sigma_1}{\lambda_1}+\frac{\sigma_2}{\lambda_2}+\ldots+\frac{\sigma_l}{\lambda_l}$）来标记周期映射。另一方面，给定满足上述条件的数据，可以找到黎曼曲面 Σ_g的周期映射。

示例 1：周期映射由 $(n, g'=0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n-a}{n})$、 $a \geq 2$ 给出。如果$\underbrace{\quad}_{a}$

n 和 a 的最大公约数为 b， Σ_g 的亏格为

$$2g-2=(a-1)n-a-b \to g=\frac{(a-1)n-a-b+2}{2}.$$

特别地，如果 $b=(n,a)=1$，则亏格 $g=\frac{(a-1)(n-1)}{2}$。

例 2：周期映射由 $(n, g'=0, \frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n})$ 给出。$\underbrace{\quad\quad}_{n}$ 的亏格

Σ_g 是

$$2g-2=n(n-3) \to g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

周期映射的对偶性：给定一个周期映射，可以改变价数数据$\frac{\sigma_i}{\lambda_i} \to \frac{\lambda_i-\sigma_i}{\lambda_i}$来定义另一个周期映射。因此，以下两个周期映射互为对偶：

$$(n, g', \frac{\sigma_1}{\lambda_1}+\frac{\sigma_2}{\lambda_2}+\ldots+\frac{\sigma_l}{\lambda_l}) \to (n, g', \frac{\lambda_1-\sigma_1}{\lambda_1}+\ldots+\frac{\lambda_l-\sigma_l}{\lambda_l}).$$

带边界曲面的周期映射：对于一个亏格为 g、具有 k 个边界的曲面，其周期映射定义为通过在 k 个边界周围添加圆盘，将其与一个封闭的亏格为 g 的曲面相关联而得到的周期映射。通常需要明确边界曲线的变换性质。这里举一个例子，设 f 的阶为 4，且 f 将边界置换为 $(\partial_1, \ldots, \partial_4)$（因此这些点的 $m=4$），于是，在覆盖映射下，这些边界的中心被映射到 Σ'上的同一个点，相应的价数数据为 $(m, \lambda, \sigma)=(4,1,1)$，其中$\frac{\lambda}{\sigma}=1$。

2.2 加权图

给定一个切割系统 X 和一个自同构 G，可以按照以下方式从 X 定义加权图 Y。我们需要通过为每条边添加一个定向来扩展该作用。然后，自同构必须保持定向不变。

加权图 Y 按如下方式导出。设 $h: X \to Y$ 为一个映射，a)：设 $\bar{v}$为 Y的一个顶点，那么 $h^{-1}(\bar{v})$由有限个顶点组成，记为 $l(\bar{v})$，它们的权重（$g(v_i)$ $\rho(v_i)$）彼此相同；因此顶点 $\bar{v}$ 具有三元权重（$l(\bar{v})$ $g(\bar{v})$ $\rho(\bar{v})$）；b) 设 $\bar{e}$ 为 Y的一条边；那么 $h^{-1}(\bar{e})$由 X的有限条边 $\zeta(\bar{e})$组成，因此存在一个权重 $\zeta(\bar{e})$对应于 $\bar{e}$。注意，如果 X 中有一条边 e 连接v和 v'，并且满足 $h(v)=h(v')$，那么 Y中就会有一个环。

˜最后，需要定义消解图 Y 的 Y。假设存在一条边 X和一个正整数 m，使得 $\sigma^m(e)=e$， $\sigma^m(v)=v'$， $\sigma^m(v')=v$ [5]，以及 e

[5]该条件不包括边的定向。

连接 v 和 v'。上述条件意味着， σ^m 固定 e 并交换顶点 v和 v'。令 m 为满足上述条件的最小整数，则将边 $h(e)$ 替换为一条权重为 $2m$ 的线，其中上部又分支为两条权重为 m的线。

示例：考虑二亏格黎曼曲面的一个切割系统，它由一个具有两个亏格为 0 的顶点且两者之间有三条边的图给出。它具有以下自同构：

1. σ 的作用是平凡的。 2. σ 固定 v_1 和 v_2，并交换 e_1 和 e_2。 3. σ 固定 v_1 和 v_2，并对 e_1、 e_2、 e_3进行循环置换。 4. σ 交换 v_1 和 v_2，将 e_1、 e_2、 e_3 作为集合固定，但反转它们的定向。 5. σ 交换 v_1 和 v_2，并将 e_1 交换为 $-e_2$，将 e_2 交换为 $-e_1$，将 e_3 交换为 $-e_3$。 6. σ 交换 v_1 和 v_2，并将 e_1 交换为 $-e_2$，将 e_2 交换为 $-e_3$，将 e_3 交换为 $-e_2$。

因此，加权图总共有六种类型，见图底部。7。感兴趣的读者可以尝试将这些加权图与上述自同构作用对应起来。

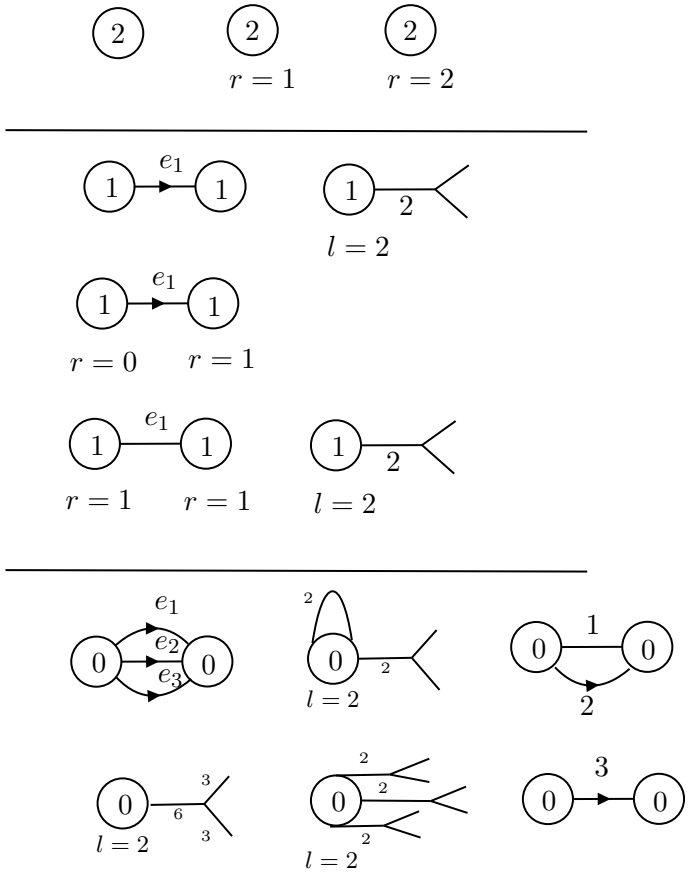


图 7：二亏格黎曼曲面的所有可能加权图。

3 对偶图

负型伪周期映射已在上一节中描述。可以为每个共轭类附加一个对偶图，这将在我们后续对物理理论的研究中发挥关键作用。

3.1 周期映射的对偶图

首先，可以如下定义周期映射的对偶图。周期映射表示为 $(n, g', \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\sigma_l}{\lambda_l})$，其对偶图按如下方式构造：

1. 首先，给定价数数据 $\frac{\sigma}{\lambda}$ $(m\lambda = n)$，附加一条球面线性链，其非零重数如下 $a_0 > a_1 > a_2 \ldots > a_s = 1$：

$$a_0 = \lambda, \quad a_1 = \sigma, \quad \frac{a_{i+1} + a_{i-1}}{a_i} = \lambda_i \in Z$$

给定 a_i 和 a_{i-1}，上述公式唯一确定整数 a_{i+1}。由于 $n = \lambda m$，价数数据 $\frac{\sigma}{\lambda}$ 对应的最终球面链为

$$ma_0 - ma_1 - ma_2 - \ldots - ma_{s-1} - m$$

例 1：如果数据为 $n = 7, \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{5}{7}$，则尾部为 $7 - 5 - 3 - 1$；另一方面，对于数据 $n = 6, \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{2}{3}$，尾部为 $6 - 4 - 2$。
示例 2：如果数据是 $\frac{n-1}{n}$，尾部将是

$$n - (n-1) - (n-2) - \ldots - (2) - 1$$

注意，这是对应于所谓完全正则 puncture 的夸克图尾部 A_{n-1} 类型 [21]。

示例 3：如果数据为 $\frac{1}{n}$，则尾部将为

$$n - 1$$

这是与所谓的 A_{n-1}type [21] 的简单正则 puncture 相对应的夸克图尾部。

2. 最终的图按如下方式构成：首先有一个亏格为 g'、重数为 n 的核心分支，然后从每个多重点连接出一条线性尾部。粘合过程很简单，因为每条尾部的第一个分支都具有相同的重数 n。最后，我们就得到一个星形图！

例 1：周期映射的数据为 $(n = 6, g' = 0, \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2})$，对偶图如图所示。 8。

示例 2：周期映射的数据为（$n = 3$、$g' = 0$、$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$），其图如图 8 所示。请注意，对偶图是 SU（3）规范理论（具有 $n_f = 6$）。

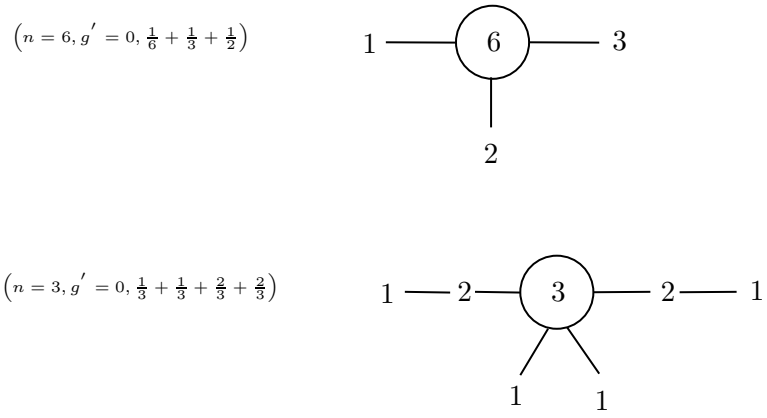


图8：周期映射的对偶图。

3.2 粘合

现在我们来构造一般伪周期映射的对偶图。第一项数据是一个加权图 X， X 中的不可约分支由亏格为 g、具有 k 条边界曲线的黎曼曲面组成（用 ∂_i 表示这些边界曲线），以及 r 条内部非分离切割曲线（用 C_i 表示这些曲线）。每个不可约分支上都有一个相应的周期映射。还需要进一步说明 f 在边界曲线上的作用（其中， n 是 f的阶）：

1. 首先，需要指定 f 在边界曲线 ∂_i 上的作用。例如， f 可以置换（∂_1、∂_2、∂_3），这意味着与三条边界曲线相关联的 Σ' 的分支点具有数据 $m=3$，因此 $\lambda=\frac{n}{3}$。

2. 其次，需要指定 f 在切割曲线 C_i 上的作用。根据该作用是否为双向曲线，有两种作用类型。以两条曲线为例：a)：如果 C_1、C_2 是非两侧对称的，且边界曲线为 C_1'、C_1''、C_2'、C_2''，那么 f 会置换 C_1'、C_2'，因此与它们相对应的分支点 P_1 具有 $m=2$；同样， f 也会置换 C_1''、C_2''（带有 $m=2$），分支点则为具有 $m=2$ 的 P_2。然后指定 P_1、 P_2 的价数数据，尤其是 $\lambda=\frac{n}{2}$。一般而言，如果 $\langle C_1$、.....、$C_s\rangle$ 被 f 置换，那么 Σ' 上有两个分支点，它们的阶为 $m=s$。

   如果对 C_1 的作用是双向曲线，则 f 会置换两条边界曲线 C_1', C_1''，因此 $m=2$。同样，如果对 C_1, C_2 的作用是双向曲线，即 $f(\vec{C}_1) = -\vec{C}_2, f^2(\vec{C}_1) = -\vec{C}_1$，那么边界曲线 $(C_1', C_1'', C_2', C_2'')$ 被 f 置换，则这些边界曲线的阶为 $m=4$。一般而言，如果 $\langle C_1, \ldots, C_s\rangle$ 在 f 作用下是双向曲线，那么 Σ' 上只有一个分支点，其阶为 $m=2s$。

备注：我们将使用粗体数字表示边界曲线的价数数据，并使用括号表示内部切割曲线的价数数据（对于非两侧对称作用使用两个，对于双向作用使用一个）。例如，如果 $g=0$、$k=4$、 $r=0$，我们有以下

可能性：a)： $f=id$；b)： $\langle\partial_1\rangle$、$f=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$；c)： $\langle\partial_1,\partial_2\rangle$、$\langle\partial_3,\partial_4\rangle$、$f=\mathbf{1}+\mathbf{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$；d)： $\langle\partial_1,\partial_2,\partial_3\rangle$、$f=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{2}}{3}$ *or* $\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{3}$；e)： $\langle\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4\rangle$、$f=\mathbf{1}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$。

在上一小节中，我们为每个周期映射关联了一个对偶图。现在，可以通过将周期映射对应的图粘合起来，为任意伪周期映射构造一个对偶图。设 A_i 是 C_i 的一个环带邻域（C_i 可能包含多条曲线，见上文讨论）。我们还用 $(m^{(1)},\lambda^{(1)},\sigma^{(1)})$ 和 $(m^{(2)},\lambda^{(2)},\sigma^{(2)})$ 表示边界曲线 C_i' 和 C_i'' 的价数。

首先假设 C_i 是非两侧对称的。则 $m^{(1)}=m^{(2)}=m$，并且可得到两个整数序列 $a_0>a_1>\ldots>a_u=1$ 和 $b_0>b_1>\ldots>b_v=1$。从图形上看，可由上面的整数序列得到两个夸克图尾部。定义一个整数

$$K=-s(C_i)-\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}-\delta^{(2)}/\lambda^{(2)} \tag{3.1}$$

其中 $\delta^{(j)}$ 是满足 $\sigma^{(j)}\delta^{(j)}=1(mod\lambda^{(j)})$、$0\leq\delta^{(j)}<\lambda^{(j)}-1$ 的整数。若 $\lambda^{(j)}=1$，则令 $\delta^{(j)}=0$。K 满足条件 $K\geq-1$，因为 $s(C_i)<0,0\leq\delta^{(j)}/\lambda^{(j)}<1$。两个夸克图尾部的粘合定义如下

1. 若 $K\geq1$，粘合尾部如下所示

$$(ma_0,ma_1,\ldots,ma_u,\underbrace{m,m,\ldots,m}_{K-1},mb_v,\ldots,mb_1,mb_0)$$

2. 若 $K=0$，粘合尾部如下所示

$$(ma_0,ma_1,\ldots,ma_{u-1},m,mb_{v-1},\ldots,mb_1,mb_0)$$

3. 最后，若 $K=-1$，则可以找到 $u_0<u$ 和 $v_0<v$，使得 $a_{u_0}=b_{v_0}$，且 $(a_{u_0-1}+b_{v_0-1})/a_{u_0}$ 是一个大于一的整数。此时箭图尾部如下所示

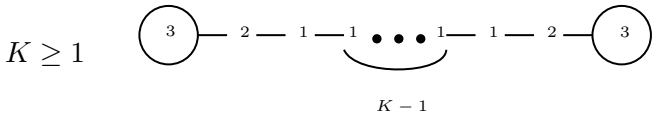
$$(ma_0,ma_1,\ldots,ma_{u_0},mb_{v_0-1},\ldots,mb_1,mb_0)$$

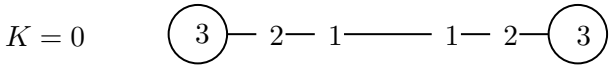
现在假设 C_i 是双向曲线，则 C_i',C_i'' 的价数数据为（$2m,\lambda,\sigma$）。类似地，可以得到一个整数序列 $a_0>a_1>\ldots>a_u=1$，据此可以构造一个箭图尾部。于是 $K=-s(C_i)/2-\delta/\lambda$ 是一个非负整数，其中 $\delta\sigma=1(mod\lambda)$。此时，粘合箭图尾部含有 $u+K+2$ 个球面，且是 D 型 Dynkin 图

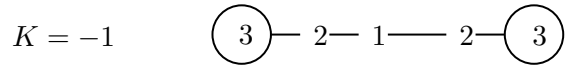
$$(2ma_0,2ma_1,\ldots,2ma_u,\underbrace{2m,\ldots,2m}_{K}(\text{the tree part}),\ m,m\ (\text{the terminal part}))$$

示例 1：设 C_i 为非两侧对称，且它们两者的价数数据为（m，λ，σ）$=(1,3,2)$，因此 $\delta^1=\delta^2=2$；整数 $K=-S(C_i)-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\geq-1$。粘合尾部如图所示。9。

例2：设 C_i 为双向曲线，且价数数据为 $(2,\ 2n,\ n-1)(\frac{\sigma}{\lambda}=\frac{n-1}{n},\ m=1)$，整数 $K=-S(C_i)-\frac{n-1}{n}\geq0$。粘合尾部如图所示。9。







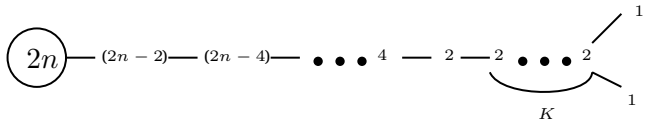


图9：上：具有相同价数数据 $(m, \lambda, \sigma) = (1, 3, 2)$ 和 $K = -S(C) - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \geq -1$ 的圆柱体的粘合尾部。下：两面体切割的粘合尾部，此处价数数据为 $(m, \lambda, \sigma) = (2, n, n-1)$。

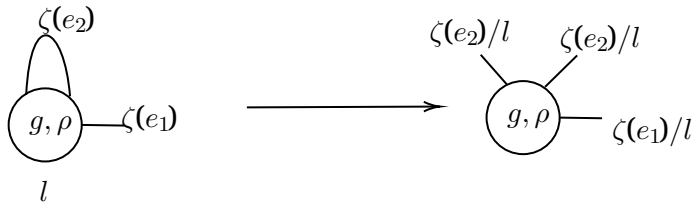


图10：对于加权图中的一个分支，可以得到与之对应的亏格为 g 、具有k 条边界的曲线，且边界边的重数除以 l。

3.3 任意伪周期映射的对偶图

如上一节所述，伪周期映射的共轭类由加权图分类。图中的每个顶点 v 都对应一个周期映射 $\sim Y$，而 e_1、……、e_s 是 v上的边，$e_{s+1} \cdots e_{s+s'}$ 是环。因此，Y的一个顶点具有数据 $(l(v)\ g(v)\ \rho(v))$，边 $1 \leq i \leq s+s'$ 的权重为 $\zeta(e_i)$，而边 e_i'' $(s+1 \leq i \leq s+s')$的权重为 $\zeta(e_i)$。为以下数据关联一条曲线：

$$g = g(v), \quad r = \rho(v), \quad k = \frac{\sum_{i=1}^{s+s'} \zeta(e_i') + \sum_{i=s+1}^{s+s'} \zeta(e_i'')}{l(v)}$$

也就是说，总共有 $s + 2s'$ 个尾部。具有数据 $(g(v)\ \rho(v)\ k(v))$ 的分支的对偶图写作如下：

$$S_f = \sum_j m_j E_j + \sum_i n_i \vec{F}_i$$

然后，将分支 $\sum m_j E_j$ 替换为 $\sum l(v) m_j E_j$，即可得到对偶图。本质上，需要将 l 乘到顶点 (g, r, k) 的对偶图中的每个分支上。

示例：考虑图中所示的加权图。11，关联曲线的数据包含 $g = 1$，$r = 0$，$k = 2$，并且 f 将 ∂_1，∂_2 分别保留（因此 $m = 1$ 也分别保留）。周期映射的数据取为 $\mathbf{\frac{3}{4}} + \mathbf{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$。参见图中的对偶图。11。

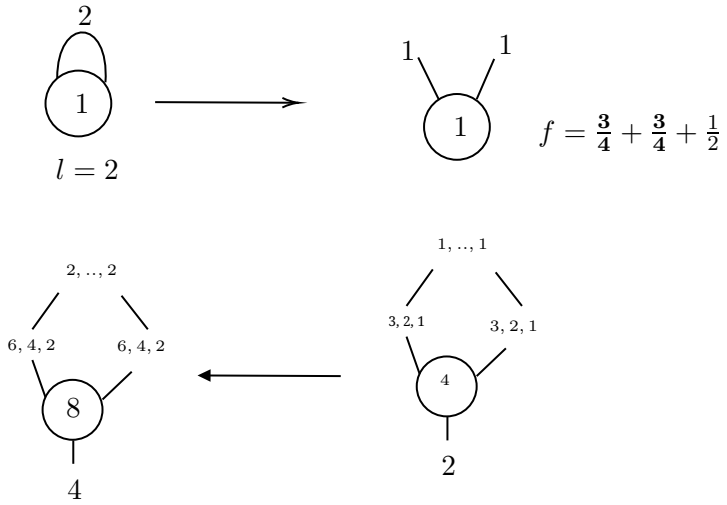


图 11：上：一个带有 $l = 2$ 和一个权重为 2 的环的加权图。右侧展示了具有关联边界的关联曲线，同时也给出了关联的周期映射；下：我们先写出该周期映射的对偶图，然后将所有节点的重数乘以 2，得到原理论的对偶图。

4 红外理论

让我们确定与伪周期映射的一个共轭类相关联的四维红外理论。仅指定共轭类不足以确定红外理论，因为同一种退化可能关联多个理论，秩一的示例见[12] 。如果进一步假设红外理论与奇点的一般形变相关联，就可以消除这种歧义。为了识别红外理论，需要利用上一节研究的红外理论的三维镜像与对偶图之间的有趣关系[4]。利用对偶图及其相关的三维镜像 [7, 21–23], ，便可以有效地确定红外理论。

4.1 对偶图和三维镜像

给定伪周期映射的一个共轭类，可以得到一个对偶图：

$$F = \sum n_i C_i;$$

其中， C_i 是不可约曲线， n_i 是重数。交数 $C_i \cdot C_j$和亏格 g_i 也已指定。通过满足以下条件，可以计算分支 C_i 的自交数：

$$C_i \cdot F = 0.$$

交数 $k_i = C_i \cdot K$ [6] 可以根据亏格 g_i 和自交数 C_i^2计算得出：

$$1 + \frac{1}{2}(C_i^2 + k_i) = g_i \to k_i = 2(g_i - 1) - C_i^2. \tag{4.1}$$

构型 F 的亏格可由数据 k_i 表示如下：

$$1 + \frac{1}{2}\sum n_i k_i = g.$$

有关曲线构型的更多详细信息，请参见 [24] 。

压缩 -1 曲线：上一节研究的对偶图称为正规极小模型，因为其中各分支的交点均为双重点。这些模型中可能存在 -1 条有理曲线（自交数为 -1）。为了获取低能理论的信息，需要压缩 -1曲线，从而得到所谓的相对极小模型（模型中不存在 -1 曲线）。压缩公式如下。假设一条 -1 曲线 C_n 被压缩，新的交数和亏格表示为

$$\begin{aligned} C_i' \cdot C_j' &= C_i \cdot C_j + (C_i \cdot C_n)(C_j \cdot C_n), \\ g(C_i') &= g(C_i) + \frac{1}{2}((C_i \cdot C_n)^2 - C_i \cdot C_n). \end{aligned} \tag{4.2}$$

[6]这里的 K 是曲面的典范类，在此仅起形式上的作用。

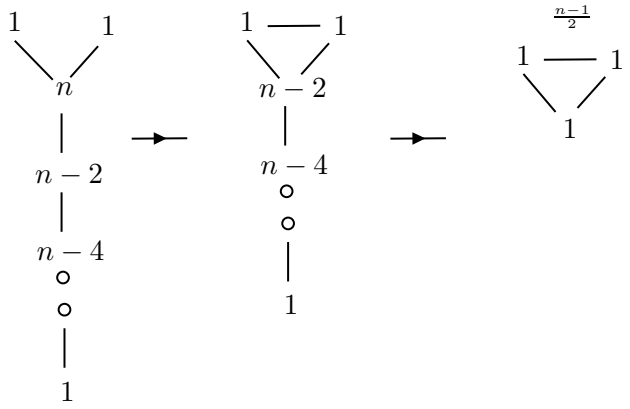


图12：左：具有数据（n、 $g' = 0$、 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n}$）的周期映射的对偶图，节点 n是一条−1曲线。中：压缩节点 n，连接节点 n的三个节点之间将有一条边；压缩后，重数为 $n-1$ 的节点变为一条 -1 曲线；右：继续收缩过程，最终得到一个不含任何 -1曲线的模型。

示例：让我们考虑一个数据为（n、 $g' = 0$、 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n}$）的周期映射，并且 n 为奇数。对偶图如图所示。12，且所有分支都是有理曲线。节点 n 的自交数计算如下：

$$C_i \cdot F = 0 \to C_i \cdot (nC_i + \delta) = 0 \to nC_i^2 + C_i \cdot \delta = 0 \to C_i^2 = -1.$$

这里 $\delta = F - nC_i$（它们是 F去掉中心节点后的分支），并使用 $C_i \cdot \delta = n$。因此，中心节点是一条 -1 曲线，可以将其压缩，从而得到一个连接重数为1的节点的三角形，1，$n-2$。压缩后，重数为$n-2$ 的节点变为一条 -1曲线；继续进行压缩，直到得到一个不含任何 -1 曲线的模型，见图12。出于后续用途，我们使用这些曲线绘制收缩过程，见图13。

来自相对极小模型的三维镜像：一旦找到相对极小模型 $F = \sum n_i C_i$，即可按如下方式构造一个三维 $\mathcal{N} = 4$ 夸克图规范理论 [4]：a)：为一个分支 C_i关联一个具有规范群 $U(n_i)$ 的夸克节点 Q_i；b)： Q_i 与 Q_j 之间的双基本场数量由 $n_{ij} = C_i \cdot C_j$ 给出；c)：为节点 Q_i 添加 g_i 个伴随超多重态。该夸克图规范理论的希格斯支维数为

$$\begin{aligned} r_H &= \sum_{i<j} n_i n_j C_i \cdot C_j + \sum g_i n_i^2 - \sum n_i^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}(\sum C_i n_i)^2 + \sum g_i n_i^2 - \frac{1}{2} C_i^2 n_i^2 - \sum n_i^2 + 1 \\ &= \sum n_i^2 (g_i - \frac{1}{2} C_i^2 - 1) + 1 \\ &= \boxed{\sum \frac{(n_i^2 - n_i)}{2} k_i} + g. \end{aligned} \tag{4.3}$$

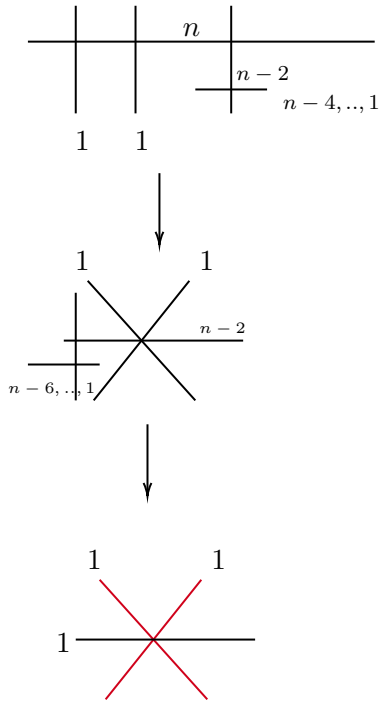


图13：收缩过程。最后，两条红线之间的交数为 $\frac{n-1}{2}$ 。红线与黑线的交数恰好为一。

这里使用了 $F^2 = (\sum n_i C_i)^2 = 0$，并且额外添加了 $+1$，因为整体的 $U(1)$ 规范群已解耦。

让我们从上述夸克规范理论中提取红外理论的三维镜像。基本匹配关系是，上述维数公式 r_H 应当等于 g （即四维红外理论的库仑分支维数），但一般而言，上述公式大于 g。文献 [4] 注意到，可以通过修改所提出的夸克规范理论，使其与已知的三维镜像相匹配；并且可以将 [4] 中的构造推广到任意秩的理论（同样是通过与四维理论的已知三维镜像进行匹配）。以下是修改过程的总结：

1. 如果一个夸克节点具有 $n_i = 1$ 或 $k_i = 0$ （这对于 -2 有理曲线而言是唯一可能的情况，见公式 4.1 ，通过使用 $C_i^2 < 0$），则无需进行修改，因为这些节点不会对希格斯分支维数公式中的额外项作出贡献。 4.3。

2. 对于其他节点，需要剥离后续夸克图尾部的数量为 k_i

$$n_i - (n_i - 1) - (n_i - 2) - \ldots - 2 - 1$$

每个这样的尾部对希格斯支维数的贡献为 $(n_i^2 - n_i)/2$ ，因此会抵消公式中第 i 个节点的贡献。 4.3。请注意，这并非总是可行的。

示例：考虑由数据（$n=4$、$g'=0$、$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$）给出的周期映射。由此导出的箭图规范理论是一个具有四个最大夸克尾的星形箭图。中心节点的自交数为 $C_i^2=-3$，且具有 $k_i=1$，因此需要剥离一个最大夸克尾。最终的夸克图是 T_4 理论[21]的三维镜像。稍后将给出更多支持这一对应关系的证据。

上面列出的规则基于已知超共形场论的三维镜像之间的匹配。若能找到其更深层的原因将会很有意义，也许那些不良情形不会作为SW几何的奇异纤维出现。事实上，如果不施加上述约束，就无法找到物理解释。下面通过一个有趣的例子来说明这一点。考虑一个二亏格的例子，其加权图为（$g=2$，$r=1$），且切口是双向曲线。价数数据为（$\frac{1}{2}$）$+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$（括号中的数值对应于切割曲线）（这是 $III^*-II_n^*$ 中的奇点）[4]。现在，共轭类含有一个整数参数 n，其物理解释应当是一个与自由超多重态耦合的规范理论（见第4.4节）。然而，根据我们的维数公式（见[4]中的表4），对于这种退化，只有两种可能的标度维数：（2，$_{3\,2}$）和（4，3）。标度维数（2，$_{3\,2}$）给出了纤维（$III-II_n^*$）的规范理论描述，因此，纤维 $III^*-II_n^*$ 的标度维数应当是（4，3），这意味着不存在规范理论（必须存在一个维数为二的库仑分支算子，才可能有规范理论描述）。这一看似矛盾的情况通过我们为寻找三维镜像而施加的约束得以解决。事实上，只有将 $n=0$设定为，才能得到一个良好三维镜像；有趣的是，从该三维镜像读出的标度维数确实是（4，3）。上述例子为我们的步骤提供了一定的依据，稍后还将给出更多证据，见第4.4节。

坏尾部：现在让我们分析由分数 $\frac{a}{n}$ 和阶 mn 确定的一般尾部，其中 $(a,n)=1$。我们假设 n 的如下分解：

$$n=(n-a)x+b,\quad 0<b\leq(n-a)$$

夸克图尾部具有以下形式（对于 $a\geq\frac{n}{2}$）：

$$n-(n-(n-a))-(n-2(n-a))-\ldots-(n-(x-1)(n-a))-\boxed{b}-\ldots$$

重数为 b 的节点是一个坏节点（其自交数不是 -2）。对于 $a<\frac{n}{2}$，夸克图尾部是

$$n-\boxed{a}-c-\ldots$$

这里重数为 a 的节点是一个坏节点。

现在让我们分析数据（a，n）上的约束，以便可以使用我们的修改过程定义一个好尾部。

- 对于 $m=1$：我们先假设 $a\geq\frac{n}{2}$：1)：尾部必须采用 $\ldots-(n-(x-1)(n-a))-b-(b-1)-\ldots-1$ 的形式。为了实施我们的修改过程，节点 b 的自交数必须为 -3：

$$3b=(b-1)+(n-(x-1)(n-a))\rightarrow b=n-a-1.$$

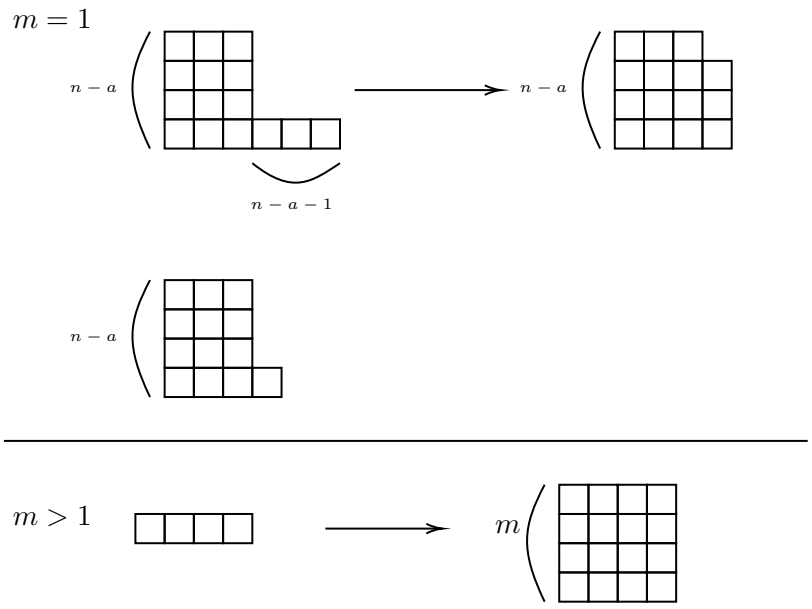


图14：上：对于 $m = 1$，能够给出好尾部的杨表，其味对称性为 $SU(x) \times U(1)$（修改箭图尾部后），此处为 $n = (n-a)x + (n-a-1)$ 或 $n = (n-a)x + 1$；下：对于 $m > 1$ 的杨表，其味对称性为 $SU(\lambda)$，其中 $\lambda m = n$。

2)：如果 $b = 1$，则不会出现问题。同样，如果 $a < \frac{n}{2}$，尾部必须采用 $n - a - (a-1) - \ldots$ 的形式，并且 a 的自交数应为 -3，由此得到 $a = \frac{n-1}{2}$。上述对 (n, a) 的约束可以统一表述如下：

$$\begin{aligned} n &= (n-a)x + (n-a-1) \quad or \\ n &= (n-a)x + 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

可以根据杨表构造一个夸克图尾部 [21]。上述情况的杨表见图 14。

- 对于 $m > 1$，无法通过修改过程来修复坏节点，因此所有节点都必须是好的。只有以下两种解：$a = n - 1$ 或 $n = 1$。对应的杨表列于图 14。

- 最后需要指出，如果对偶图以 -1 曲线为核心，就必须谨慎处理：应先压缩 -1 曲线，再判断对偶图是否良好。这需要逐个案例进行研究。

4.2 周期映射与四维超共形场论

自然可以为周期映射关联一个四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论，秩一情形见[12]，秩二情形见[4]。这里我们来讨论任意秩理论，见表格。1 关于许多有趣的例子类别，主要的检验是对偶图与三维镜像之间的关系。现在来指出几何数据与物理数据之间的一些有趣关系。

最大标度维数与周期映射的阶：库仑支谱中的周期映射的阶与最大标度维数之间存在关系：假设标度维数的最大公约数为 u，且最大标度维数的形式为 $u_{max}=\frac{n}{u}$，那么周期映射的阶为 n。这是因为标度维数与奇点谱之间存在关系[25]。特别地，最大标度维数表示为

$$u_{max}=\frac{1}{\alpha_0};$$

这里 $\lambda_0=\exp^{2\pi i\alpha_0}$，其中 λ_0 是单值群的特征值，其阶与周期映射的阶相同，即为 $\lambda_0^n=1$。这意味着 $\alpha_0 n=1\ (mod\ \mathbb{Z})$，从而得到所需的关系。

例：让我们考虑与（A_{n-1}，A_{k-1}）理论相关的可能周期映射。该理论的最大标度维数为 $\frac{nk}{n+k}$，因此周期映射的阶应为 nk，事实确实如此，见表。1 中的示例。

一般形变与 A_1 奇点的数量：让我们通过考察 T_n 理论来验证我们的提议。一个有趣的量是一般形变下 A_1 奇点的数量。这些数量可以按如下方式计算：首先，我们计算中心荷 c，然后使用以下公式 [26]:

$$c=\frac{R(B)}{3}+\frac{r}{6},\quad R(B)=\frac{\alpha_{max}\mu}{4},\quad\rightarrow\quad \mu=\frac{12c-2r}{\alpha_{max}}.$$

这里，μ 是 A_1 奇点的数量，α_{max} 是库仑支谱中的最大标度维数，r 是理论的秩。由于 $c=\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{4}-\frac{n}{12}+\frac{1}{6}, r=_{(n-1)(n-2)\ 2}$，对于 T_n 理论[27]，，可得：

$$\mu=2(n-1)^2.$$

现在，对于用于构造 T_n 理论的周期映射，它允许进行变形，使得所有奇点都是 A_1 奇点 [28]，，其数量为：

$$\#A_1=n_t+2g-1;$$

这里，n_t 是周期映射的对偶图中分支的数量，并且等于$n_t=n(n-1)+1$。由于 $g=_{(n-1)(n-2)\,2}$，最终 $\#A_1=2(n-1)^2$。~~这与使~~用中心荷进行的计算一致。对于通过孤立三维奇点构造的理论，A_1 奇点的数量等于 $2r+f$，其中 f 是

理论	$Data$
$SU(n)$ 与 $n_f = 2n$	$g = n-1, (n, g^{'} = 0, \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n})$
$SU(2)^k$ $linear\ quiver$	$g = k$、 $(n = 2$、 $g^{'} = 0$、 $(\frac{1}{2})^{2k+2})$
T_n	$g = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$, $(n, g^{'} = 0, \underbrace{\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}}_{n})$
(A_1, A_{n-1}) $n\ even$	$g = \frac{n-2}{2}$, $(n, g^{'} = 0, \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n})$
(A_1, A_{n-1}) $n\ odd$	$g = \frac{n-1}{2}$, $(n, g^{'} = 0, \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n})$
(A_1, D_{n+1}) $n\ even$	$g = \frac{n}{2}$, $(n, g^{'} = 0, \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n})$
(A_1, D_{n+1}) $n\ odd$	$g = \frac{n-1}{2}$, $(n, g^{'} = 0, \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n})$
(A_2, A_{3n-1})	$g = 3n-2, (3n, g^{'} = 0, \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{n-1}{n})$
(A_{k-1}, A_{nk-1})	$g = \frac{(k-1)(nk-2)}{2}$, $(nk, g^{'} = 0, \underbrace{\frac{1}{nk} + \ldots + \frac{1}{nk}}_{k} + \frac{n-1}{n})$
$(A_{n-1}, A_{k-1}), (n, k) = 1$	$g = \frac{(n-1)(k-1)}{2}$, $(nk, g^{'} = 0, \frac{1}{nk} + \frac{a}{n} + \frac{b}{k})$ $(n = 3, k = 3x+1 \to a = 2, b = x)$ $(n = 3, k = 3x+2 \to a = 1, b = 2x+1)$
$D_2 SU(2n+1)$	$g = n, (2n+1, g^{'} = 0, \frac{1}{2n+1} + \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{2n+1})$
$D_{n+k}(SU(n))$, $(n, k) = 1$	$g = \frac{(n-1)(n+k-1)}{2}$, $(n(n+k-1)\ g = 0, \frac{1}{n(n+k-1)} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n(n+k-1)})$ $n = 3, n+k = 3x+1 \to a = 2, b = n+k-2$, $n = 3, n+k = 3x+2 \to a = 1, b = 2(n+k) - 3$

表 1：周期映射及相关的超共形场论。

质量参数的数量。这个关系一般并不成立，如T_n 理论的例子所示。

逆向工程：对于一大类四维 $\mathcal{N} = 2$ 理论，其三维镜像已知 [7, 21, 23], ，因此可以尝试通过逆向工程求得周期映射。思路如下：a）如果三维镜像是一个带有中心节点的星形箭图 n，且箭图尾部受到约束，使其可以由一个比值导出 $\frac{a_i}{\lambda_i}\,(m_i\lambda_i = n)$，见第 3.1 节；那么就需要添加 x 个极大尾部，使新箭图能够由某个周期映射的对偶图描述。 x 由以下方程确定：

$$N = \frac{x(n-1) + \sum m_i a_i}{n} \in \mathbb{Z},$$
$$N - 2 = x.$$

第一个方程确保价数数据满足周期映射的整数方程，第二个方程则是剥离 x 额外极大尾部的条件。综上，解得 x为

$$x = \sum m_i a_i - 2n. \tag{4.5}$$

b)：Argyres-Douglas 的三维镜像更复杂，通常由一个夸克图核心给出（它由多个夸克节点组成，例如三角形，见 [7] for

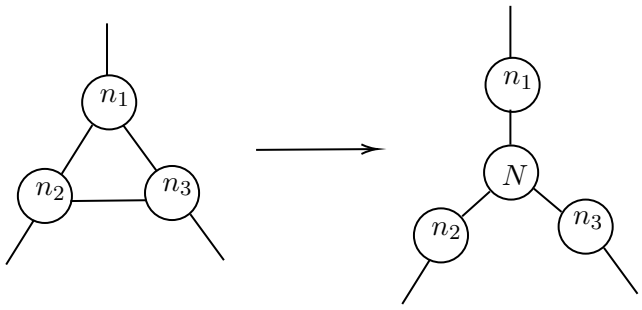


图 15：左：其核心有三个节点且由一条边连接的 AD 理论的三维镜像；右：添加一个秩为 $N = n_1 + n_2 + n_3$ 的节点后，它就变成了一个星形箭图。

详细信息），并且核心夸克图节点上还连接着尾部；要找到周期映射，需要对压缩执行逆操作，以得到一个星形箭图。

例 1：考虑 A_2 类 $\mathcal{S}$ 理论，它由一个带有a 个简单穿孔和 b 个完全穿孔的 [6]球面构造而成。其三维镜像是一个星形箭图，带有a 简单尾部 $3-1$和 b 极大尾部 $3-2-1$ [21]。根据公式4.5，$x = a + 2b - 6$，价数数据为

$$(\frac{1}{3})^a + (\frac{2}{3})^b + (\frac{2}{3})^{a+2b-6}.$$

一个简单的检验如下：该超共形场论的秩为 $2a + 3b - 8$。根据价数数据得到的亏格公式为

$$2g - 2 = 3(-2 + \frac{2}{3}(2a + 3b - 6)) \to g = 2a + 3b - 8,$$

这与结果一致。对于由一个带有 a 个简单穿孔和 b 个完全穿孔的球面定义的 A_{n-1} 理论，也可以进行类似的计算。

示例 2：考虑一个 AD 理论，其三维镜像具有一个秩为n_1、n_2、n_3的三角形核心。为了得到一个经过压缩后可生成该 AD 理论三维镜像的星形箭图，需要添加一个秩为 $N = n_1 + n_2 + n_3$的核心节点，见图 15。其价数数据为

$$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N}$$

n_1、n_2、n_3 可选定，使上述数据可以合法地定义一个周期映射；此外，它们还受到约束，从而可以使用修改过程得到一个三维镜像。一些解为 $n_1 = 1$、$n_2 = n$、$n_3 = n$（可为 $D_2SU(2n+1)$ 理论得到三维镜像），以及 $n_1 = n+1$、$n_2 = n$、$n_3 = n$（此处 $n \leq 4$）。

4.3 其他四维超共形场论

有人在 [4] 注意到，许多熟知的秩二四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论并不是由周期映射给出的。原因如下：我们的研究基于亏格 g 纤维化的一参数族，但对于许多超共形场论，无法找到一参数尺度不变几何，因此无法与之关联一个周期映射。然而，似乎可以找到与此类超共形场论相关联的非尺度不变的一参数亏格 g 族，并将其纳入我们的框架。因此，应该可以使用我们的方法发现这些超共形场论。更重要的是，总需要在 g 处放置一个亏格 ∞ [3]退化，因此确定这些超共形场论的共轭类非常重要。以下是一些可能性：

1. 首先，让我们考虑秩 l 版本的 E_n [29] 和 H_n [30] 型理论。相应的加权图如图 16 所示。人们可能会想知道，是否能够找到其他类似的秩 l 推广，即加权图类似于图 16所示的图，并将一属分量替换为亏格为 g 的分量。事实证明，这一搜索十分困难，因为原理论受到强约束：a) 无需对原对偶图进行修改；b) 所有价数数据都应具有 $\frac{n-1}{n}$ 的形式。最有可能只能考虑E_n 和 H_n 型理论。

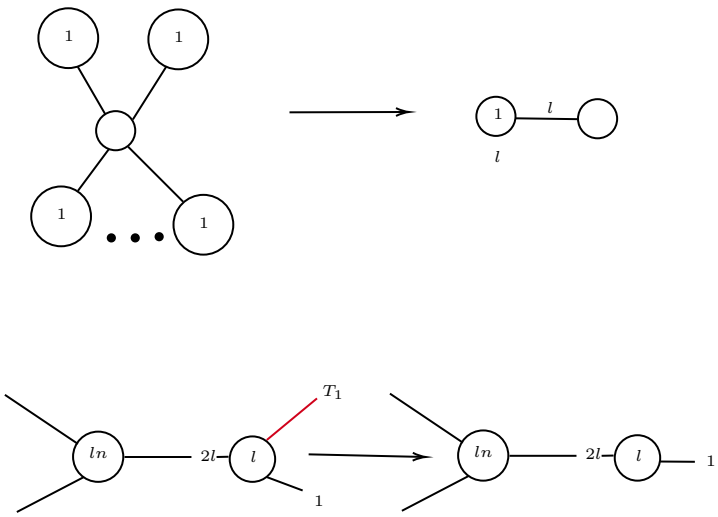
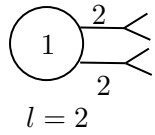


图16：上：对应于秩 l 版本的 H_n 和 E_n 型理论的加权图，自同构置换一属节点。亏格为零分量上的周期映射为 $\mathbf{1}+\frac{1}{l}+\frac{l-1}{l}$，一属分量上的周期映射为 $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$（我们以 E_7 为例，其他情况类似）。下：上述构型的对偶图，此处 K（与切割曲线相关联的整数）取为零；对坏节点进行修改后，可得到秩 l 理论的三维镜像。

2. 也可以从具有反周期切割曲线的几何体（g、$r=1$）得到超共形场论。切割曲线的价数数据 C_1、C_1' 为 $\frac{n-1}{n}$，阶为 $2n$。



$l = 2$

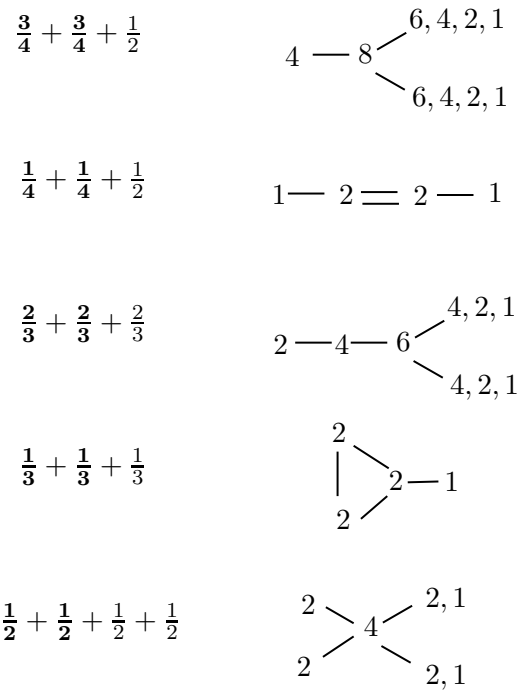


图 17：顶部：可能对应某个超共形场论的加权图。左侧给出了周期映射的价数数据，右侧则展示了由对偶图得到的三维镜像。

反周期曲线的尾部为

$$2n - (2n-2) - \ldots - 4 - 2 - (1,1)(terminal)$$

可以去掉一个秩一的末端节点，从而得到一个良好三维镜像。因此，价数数据是

$$(\frac{n-1}{n}) + \sum \frac{a_i}{2n}$$

这里选择 a_i，使其具有一个好尾部。这将为许多已知的超共形场论构造出三维镜像。

3. 还有一些其他可能性：加权图只有一个分支，且所有边均为 D 类型。详细分析留给感兴趣的读者。下面给出一类示例。

示例：加权图如图所示。17。它只有一个节点，其 $l = 2$，并且有两个 D 型尾部。相应的数据为（$g = 1$、 $r = 0$、 $k = 2$），且

周期映射分别固定每个边界映射。周期映射有以下几种选择。

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}+\frac{1}{2},\quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}+\frac{1}{2},\quad \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{2}{3},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{1}{3},\quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{1}{3}$$

相应的对偶图（经过修改后，三维镜像也随之得到）如图所示。17。很容易将它们识别为 [31] 表 10 中列出的秩三理论。

4. 最后，也可能出现粘合参数 K 取值为 $K\geq 0$ 的情况，此时只有 $K=0$ 才能一致地找到一个三维镜像（这种情况发生于 $m>1$）。这通常意味着可以为其关联一个超共形场论。

示例：让我们给出一系列示例，以说明这一类例子。加权图由两个分支组成（其亏格分别为 g_1 和 g_2），两者通过一条权重为 2 的边相连，见图 18。价数数据为

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{3n+4}}+\frac{1}{6n+8}+\frac{6n+5}{6n+8},\quad \mathbf{1}+(\frac{1}{2})^{2n+2}$$

若 $K=0$，则对偶图经过修改后会给出一个良好三维镜像。事实上，该三维镜像与 [7] 中发现的理论一致：它由球面上的一个不规则奇点（数据为 A_2）理论构造而成，球面上有一个数据为$\Phi=\frac{T_{2n+4}}{z^{2n+4}}+\ldots+\frac{T_2}{z^2}+\frac{T_1}{z}$的不规则奇点，其中 T_{2n+4}、...、T_2 为 $[2,1]$, 型，而 T_1 为 $[1,1,1]$, 型；此外还存在一个极大正规奇点。

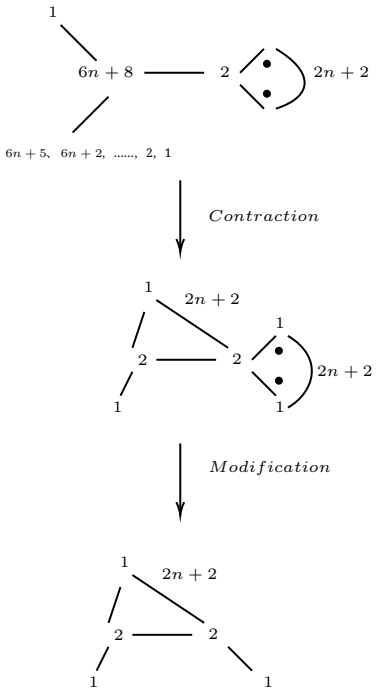


图18：上：伪周期映射的对偶图；该加权图含有一个亏格为 g_1 的分支，并通过一个亏格为零的分支与其相连。下：相应的三维镜像。

4.4 红外自由理论

现在我们来考虑与一般伪周期映射相关联的红外理论。预期该红外理论由规范理论与物质耦合而成。粗略地说，物质由切割系统中的不可约分支表示，而规范群由边表示（规范群的秩由边的权重给出）；边对应的数量K 则给出与规范群耦合的超多重态。

首先，我们分析加权图仅含一个节点的情形，因此数据为（g， r），其中 r 表示非分离切割曲线。红外理论（任意 K）可如下得到：

1. 取 $r = 1$ 并切开非两侧对称的曲线，且令 f 为 Σ_g/C上的恒等映射，低能理论为 U（1）个含有 K 个基本超多重态和$g - 1$ 个自由矢量多重态的规范理论。这可以从如下对偶图（及三维镜像）看出：三维镜像由 $g - 1$ 个自由超多重态 [7] 组成，它给出原理论的 $g - 1$ 个自由矢量多重态；此外还有一个含 K U（1）个规范节点的循环箭图，其镜像仅为 U（1），含有 K 个超多重态， [32], 见图 19。

2. 再次，设 $r = 1$ 和切割曲线均为非两侧对称，但 f 现在是一般的周期映射。此时，低能理论可按如下方式求得：假设

[7] U(1) 节点上的伴随超多重态解耦。

边界曲线为 C_1 和 C_2，与 Σ_{g-1} 相关联的理论为 T，这给出一个秩为 $g-1$ 的理论。对偶图有尾部 T_1 和 T_2，分别对应边界曲线 C_1、C_2（它们的价数数据为 $m=1$）。低能理论可描述如下：对尾部 T_1 和 T_2 的 $U(1)$ 味对称性进行对角规范化，此外还有 K 个额外的自由超多重态，它们带有 $U(1)$ 规范群荷。由于修改过程不再适用（因为两个尾部必须粘合在一起），价数数据（n、a）需满足以下约束：$n=(n-a)x+1$，例如 $\frac{n-1}{n}$ 或 $\frac{1}{n}$。

3. 让我们考虑 $r=1$，但这次作用是双向曲线型的。边界曲线 C_1' 和C_1'' 现在通过周期映射相关联（它们的价数数据为 $m=2$）。而对偶图具有一个 D 型尾部。为了得到具有任意链接数的有效三维镜像K，周期映射的阶应为二，且切割曲线的价数数据为 1，见图。 19。我们将其解释为一个 $SU(2)$ 规范理论，并耦合了$K+2$ 基本味，以及一个由周期映射表示的理论 T，其定义在 Σ_{g-1}上。证据之一是，将 K 增加 1 后，三维镜像的库仑分支维数增加 2，因此原理论的希格斯支维数也增加 2。这与以下解释一致：K 是与 $SU(2)$ 规范群耦合的基本超多重态的数量。

4. 一般 r 的情况现已清楚：a)：如果作用是非两侧对称的，并且 f 的某个轨道为 $\langle C_1、\ldots\ldots、C_s\rangle$，切割后的边界曲线为（$C_1'$、……、$C_s'$）、（$C_1''$、……、$C_s''$），那么切割曲线（$C_1'$、……、$C_s'$）、（$C_1''$、……、$C_s''$）各有两个尾部：低能理论只是对 T_1 和 T_2 的 U(s) 味对称性进行对角规范化，它们的价数数据为 1；b)：如果作用是两侧对称的，并且 f 的轨道为 $\langle C_1、\ldots\ldots、C_s\rangle$，切割后的边界曲线为（$C_1'$、……、$C_s'$）、（$C_1''$、……、$C_s''$），那么（$C_1'$、……、$C_s'$、$C_1''$、……、$C_s''$）处于 f 的同一轨道下（价数数据为 1），且规范群被猜想为 Sp(2s)。图 19 展示了一个例子。

现在讨论加权图具有多个分支的情况。此时，每个分支都带有标签 (g_i, r_i, k_i)，其中 k_i 是连接其他分支的边界曲线。非分离曲线 r_i 的物理解释是规范化，这对于分离曲线同样成立。分离曲线的区别在于，其规范群为 $SU(m)$（而不是 $U(m)$）。这是因为重数为 m 的边对亏格的贡献为 $m-1$。此外，还有 K 个基本超多重态带有 $SU(m)$ 规范群的荷。特别地，如果 $m=1$，则存在解耦的无质量超多重态（因为规范群为 $SU(1)$）。

因此，一般伪周期映射的红外理论由对周期映射所表示的物质系统进行规范化得到。以下给出一些熟悉的物质系统：

1. 自由物质：一组自由物质由一个带有 n 条边界曲线的球面表示，这些曲线在 f 的作用下发生置换。周期映射由数据$1+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}$ 表示，由此产生双基本物质。

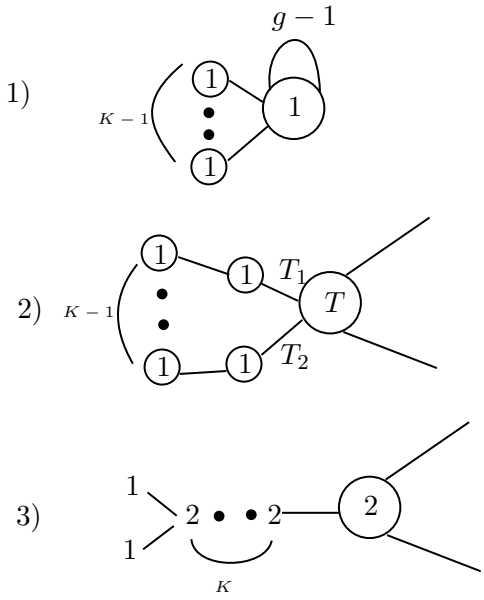


图19：(1)：$(g, r = 1)$ 的对偶图：切割曲线是非两侧对称的，相应的周期映射是平凡的；红外理论是与 K 个自由超多重态和 $g-1$ 个自由矢量多重态耦合的 $U(1)$；(2)：$(g, r = 1)$ 的对偶图：切割曲线是非两侧对称的，相应的周期映射是一般的；(3)：$(g, r = 1)$ 的对偶图，切割曲线是双向曲线，相应的周期映射的阶为二。红外理论是与 $K+2$ 个自由超多重态和一个相互作用理论耦合的 $SU(2)$ 规范理论。

更一般地，可以考虑一个带有 $2n$ 条边界曲线的球面，且 f 分别置换n 各分支。周期映射由数据 $\mathbf{1}+\mathbf{1}+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}$ 给出。对偶图如图所示 20。核心分支的自交数为 -3，因此需要去掉一个最大夸克尾；三维镜像如图所示 20。由此很容易看出，这对应于双基本物质。

2. T_n 物质：它由一个亏格为 $(n-1)(n-2)$ 2 、具有 $3n$ 个边界分支且每个边界分支有 f 个相互置换的 n 分支的曲线表示。周期映射由以下数据给出 $\mathbf{1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}$。对偶图及其对应的三维镜像$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}$如图所示。20。因此，将其识别为 T_n 物质，其中三个$SU(n)$ 味对称群被规范化，是自然的。

3. 一般物质：现在已经清楚如何得到一般物质系统。让我们从一个阶为 n 的周期映射开始，使其可以解释为超共形场论。现在假设三维镜像中仍然剩有极大尾部（其价数数据为 $\frac{n-1}{n}$ ），那么可以考虑以下构型：一条亏格为 g 、带有 n 条边界曲线的曲线，这些边界曲线在周期映射下相互置换。然后，周期映射的数据

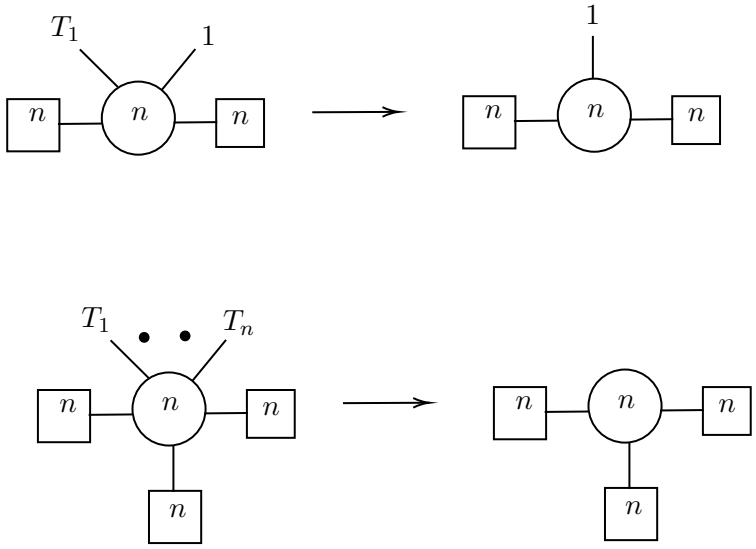


图 20：上：双基本物质的对偶图，经过修改后成为一个良好三维镜像（属于一个更大的夸克图的一部分）；下：T_n 物质的对偶图，经过修改后成为一个良好三维镜像。

这一构型的 $\mathbf{1}+\ldots$为 n 条边界曲线，其中 $\mathbf{1}$ 表示 n 边界曲线。要获得良好的对偶图，只需从修改后的对偶图中移除一个极大尾部，并将其替换为一个包含单个节点的尾部 n。这一物质系统与其他部分的粘合，在物理上可以解释为对原始物质系统的 $SU(n)$ 味对称性进行规范化。

4. 特殊情形：以下物质系统值得特别处理：周期映射由 $\sum \frac{\sigma_i}{\lambda_i}+\mathbf{1}$ 给出，此处 $\sum \frac{\sigma_i}{\lambda_i}=1$。阶为 n，并且存在 n 条由周期映射置换的边界曲线。该物质系统被解释为带有由 $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}$ 标记的正规亏格点以及一个完全正则 puncture 的 S 理论。粘合被解释为对 $SU(n)$ 味对称性进行规范化。

使用上述物质系统，可以轻松构造出熟悉的红外自由理论及其关联的伪周期映射，见图。21。此类红外自由理论的三维镜像已在[22]中找到。

粘合约束：关于粘合的一条重要规则是，对偶图可以解释为低能理论的三维镜像（可能需要作出修改）。这对可能的粘合模式提出了约束，后续将进行详细分析。

我们来看本节中的公式。3.2 关于对偶图的粘合，并可以作出如下观察。如果曲线 C_i 是非两侧对称的，那么

1. 如果 $m=1$，由于不再可能通过手术修改夸克图尾部，因此两个尾部 T_1、T_2 必须各自良好（尾部上的所有夸克节点的自交数为 -2，无需进行任何修改）。这施加了约束

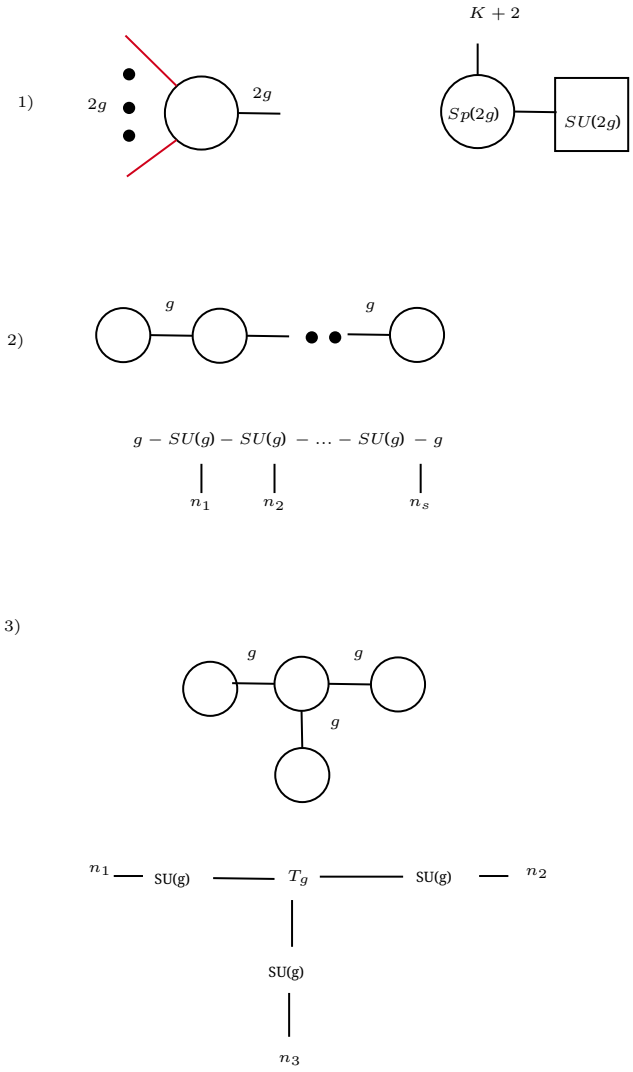


图 21：一些红外自由规范理论。

关于价数数据：它只能采用 $\frac{a}{n}$ 的形式，其中 $n = (n-a)x + 1$。粘合尾部将是

$$(n_1 - \ldots - 1 - \underbrace{1 - \ldots - 1}_{K-1} - 1 - \ldots - n_2), \quad K \geq 1$$
$$(n_1 - \ldots - 1 - 1 - \ldots - n_2), \quad K = 0$$

对于 $K = -1$，需要逐个案例验证该条件。

2. 如果 $m > 1$，唯一的解将是

$$(m - \underbrace{m - \ldots - m}_{K-1} - m)$$

那么就不会有坏分量；边界价数数据实际上是 (1, 1)，以及 $K \geq 1$；

若曲线 C_i 是双向曲线（切割曲线的价数数据为 $\frac{a}{\lambda}$，其中 $n = 2m\lambda$），通过观察粘合后的夸克图可知：

1. $2m = n$（n 周期映射的阶，且价数数据为 (1)），那么不会出现坏节点，因为尾部的形式为

$$2m - \underbrace{2m - \ldots - 2m}_{K} - (m, m)(\text{terminal node})$$

2. $m = 1$、$K = 0$和 $a_{u-1} = 2\ or\ 3$。由于尾部的形式为

$$\ldots - 2a_{u-1} - \mathbf{2} - (1, 1),$$

且坏节点 2 具有 $k = a_{u-1} - 1$，因此若 $a_{u-1} = 2$，3，则可以剥离一个或两个极大尾部，从而得到一个好尾部。

上述约束大幅减少了粘合的可能性：

• 若加权图中的两个分支由一条权重为 m的边相连，则在物理上，这可解释为对物质的 $SU(m)$ 味对称性进行规范化。此外，还有 K 个基本超多重态带有 $SU(m)$ 电荷。特别地，若 $m = 1$，则不存在规范化，红外理论是与各个分支相关联的理论的直和；此外还有 K 个不带电磁荷的自由超多重态。

• 对于与非分离曲线对应的切口，粘合可解释为一个$U(m)$规范群，或者一个 $Sp(2m)$规范群，具体取决于切口是否为双向曲线。对于 $m > 1$，利用周期映射定义的理论所对应的物质只有 $SU(m)$味对称性，但还存在一个额外的 $U(1)$规范理论，因此红外理论的总秩与黎曼曲面的亏格相同。

• 当一个分支的周期映射是特殊的（即价数数据之和为一）时，粘合需要格外谨慎，并且需要逐一分析各种情况。其物理解释更为复杂，许多与两个Argyres-Douglas物质耦合的规范理论都可以用这种方式描述。

• 如果顶点在加权图中构成一个环，那么规范群的形式为 $\sum SU(m_i) \oplus U(1)$。之所以需要额外的 $U(1)$，是因为环中各边对亏格的贡献为 $\sum(m_i - 1) + 1$。

例 1：让我们通过一个例子来验证上述猜想。该加权图仅含一个节点，其数据为（g, $r = g$），周期映射置换曲线$\langle C_1$、.....、$C_g\rangle$。价数数据为（1）+（1）+ $\frac{1}{g} + \frac{g-1}{g}$，其对偶图如图 22 所示。由此很容易看出，它是 U（g）规范理论（含一个伴随表示和 K 个基本 [33]（$K \geq 1$）超多重态的三维镜像。

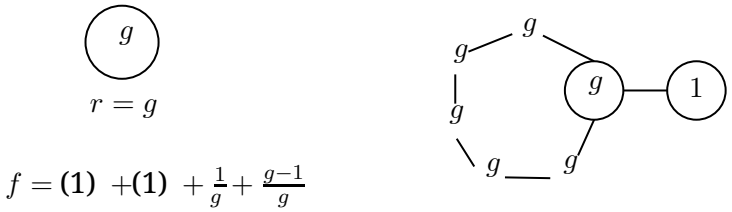


图22：左：加权图只有一个顶点，数据为（$g, r = g$），并且也给出了周期映射数据。右：伪周期映射的对偶图。

例 2：该加权图由两条亏格一曲线通过一条权重为二的边连接而成，因此亏格为三。每个分支上的价数数据为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，而 $K = -S(C) - 1/2 - 1/2 \geq 0$。对偶图绘于图 23 中。可以看出，它是如下规范理论的三维镜像： SU（2）规范理论耦合两个 D_2（SU（3）个物质和 $K+2$ 个基本超多重态。请注意，极限 $K=-1$ 实际上是一个超共形场论，由数据为（$n=4$， $g^{'}=0$， $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$）的周期映射表示。

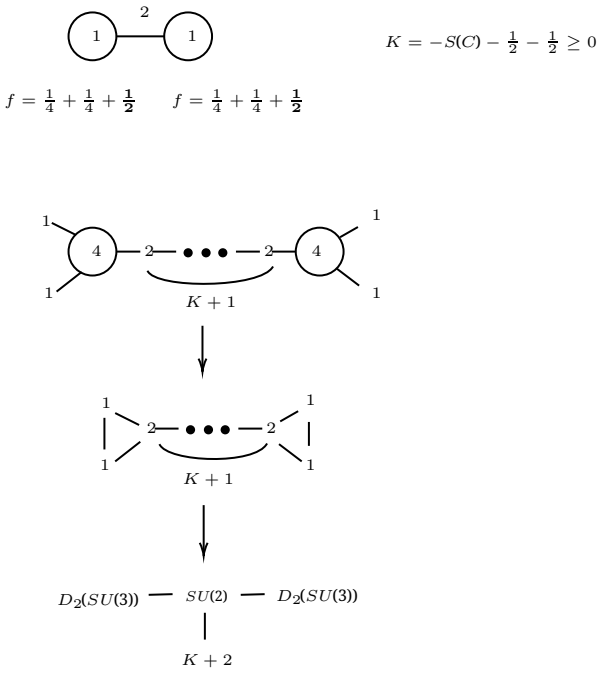


图23：上：将给出与AD物质耦合的规范理论的伪周期映射数据；中：对偶图及相应的三维镜像；下：相应的四维规范理论，该理论由与AD物质耦合的 SU(2)规范群给出。

与 $\mathcal{S}$ 理论的关系：让我们回顾一下 $\mathcal{S}$ 理论 [6, 7]的几何表示。该理论可以是超共形场论，也可以是渐近自由规范理论。该理论由一个黎曼曲面 Σ 及其上的正规亏格点和

不规则穿孔表示，而规范理论则通过对Σ进行裤子分解得到。请注意，AD物质由一个带有一个不规则奇点和一个正则奇点的球面表示，而 AD 理论的分支位于裤子分解的边界 [7]；T_n 物质由一个带孔的三维球面表示，见图。24。上面得到的红外理论图像与 $\mathcal{S}$ 理论非常相似：加权图类似于黎曼曲面的裤子分解 Σ_g，区别在于：a)：我们得到超共形场论和红外自由规范理论；b)：物质由切割系统中某个不可约分支上的周期映射表示；c)：规范群也由边表示，但还会多出一个整数 K，从而产生与规范群耦合的自由超多重态。在下一节中，我们将展示如何利用我们的结果描述紫外完备理论。

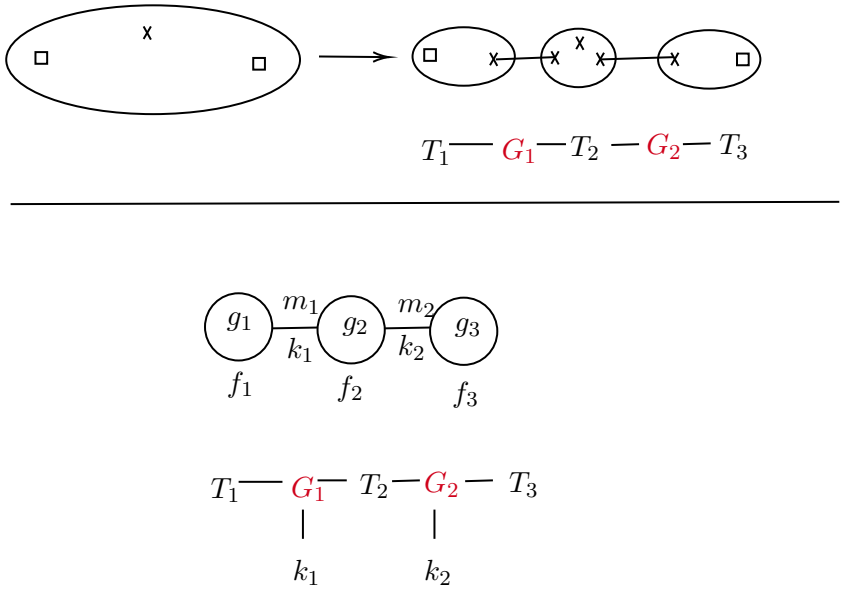


图24：上： $\mathcal{S}$ 类紫外完备理论的表示：它由一个具有正则奇点和不规则奇点的黎曼曲面给出；规范理论由带穿孔黎曼曲面的裤子分解给出，而不规则奇点位于边界处；下：通过伪周期映射表示红外自由理论，此处需要指定一个加权图及其对应的周期映射；加权图的边上还有一个额外的整数。

5 紫外理论

<escape>在前面几个章节中，研究了与退化相关的红外理论。本节将研究全局 SW 几何（即整个库仑分支上的一个单参数切片）。在 ∞处添加一个点，使库仑分支紧致化，即 $\mathbb{P}^1$。因此， UV 理论的性质反映在 ∞ [3]处的奇异纤维上，见图。25。</escape>

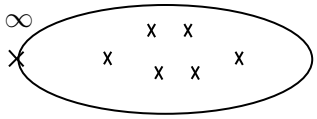


图25：库仑分支上SW几何的全局结构。

从几何上看，我们现在有一个以 $\mathbb{P}^1$ 为底空间的紧曲面 S 纤维化： f： $S \to \mathbb{P}^1$，并且在 ∞ 和体区处存在奇异纤维。关于这种纤维化，我们还作出了两个进一步的假设：a) 首先，曲面 S 是一个有理曲面；b) 体奇异性是原子的，这意味着它们不再能够发生形变。在我们的情形中，原子奇异纤维被分为以下几类：

1. 存在一条非分离曲线。其加权图只有一个节点，带有 $r = 1$ （非两侧对称且 $K = 1$），且周期映射是平凡的。低能理论为与一个无质量超多重态耦合的 $U(1)$ 规范理论，以及 $g - 1$ 自由矢量多重态。这被记为 A_1 奇点。

2. 存在一条分离曲线，它将一个亏格 g 曲线分为一个亏格 h和一个亏格 $g - h$ 曲线，见图。 26 以供示例说明。链接数也是$K = 1$，并且该奇点记作 A_1^h 奇点。低能理论为 g 个自由矢量多重态，以及一个自由超多重态（其不带有任何 $U(1)$ 规范群的电荷）。

下文中，我们主要考虑体奇异性均为A_1 型的情形，而一般原子奇异性的研究将留待其他论文讨论。

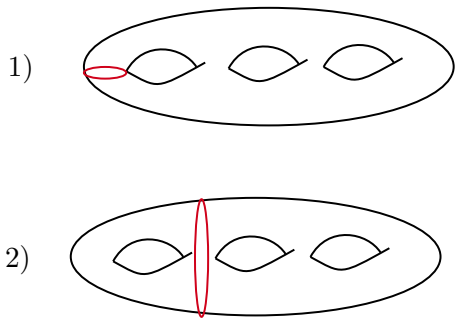


图26：上：对应于非分离曲线的原子奇点；下：对应于分离曲线的原子奇点。

拓扑不变量：我们希望研究四维 ∞ 紫外理论中奇异纤维的全局拓扑约束。关键的是，我们可以为一个奇异纤维定义两个不变量 d_x和δ_x 。 d_x 由全纯数据定义，而 δ_x 是拓扑不变量。 d_x 对一重亏格和二亏格的情形[34], 有定义，并且可能也能推广到任意亏格。然而，d_x 通常不易计算，相关细节将在别处讨论。相反，拓扑不变量 δ_x 可以由对偶图（正规极小模型）计算得到。一般而言， d_x 不等于 δ_x （尽管对一大类奇异纤维而言二者相等）。给定一个奇异纤维 F 及其正规极小模型，首先可以得到一条约化曲线 F_{red}，其拓扑欧拉数δ_x 按如下方式由 F_{red} 计算得出 [35]:

$$\delta_x = 2(g - p_a(F_{red})) + \#intersections \tag{5.1}$$

这里， p_a表示几何亏格，其定义为 $p_a(F_{red}) = 1 + \frac{1}{2}(F_{red}^2 + F_{red} \cdot K)$。现在来考察 $p_a(F_{red})$ 的行为，这将对紫外奇异纤维产生有趣的影响。给定 $F_{red} = \sum_{i=1}^{k} C_i$，那么

$$p_a(F_{red}) = 1 + \frac{1}{2}(F_{red}^2 + F_{red} \cdot K) = \sum_i [1 + \frac{1}{2}(C_i^2 + K_i)] + \sum_{i<j} C_i \cdot C_j - k + 1$$
$$= \sum_i (p_a(C_i)) + \sum_{i<j} C_i \cdot C_j - k + 1.$$

由于 $p_a(C_i) \geq 0$ 和 $\sum_{i<j} C_i \cdot C_j \geq k - 1$，且等号成立的条件是：a) 所有曲线$C_i$ 都是有理曲线；b) 所有曲线都横截相交，并构成一棵树！

实际上，需要计算相对极小模型（不含 -1 有理曲线）的拓扑欧拉数。计算方法如下：首先计算正规模型的 δ_x ，每次压缩 -1 曲线都会使欧拉数减少 1。关于欧拉数 δ_x，有以下几点说明：

1. 如果对偶图仅由球面组成，且有 k 个环，那么拓扑欧拉数为

$$\delta_x = n_t + 2g - 1 - k;$$

这里 n_t 是对偶图中分支的数量。压缩 -1 曲线后，该关系仍然成立。

2. 如果对偶图可以视为某个四维理论的三维镜像（图为树且无需修改），则欧拉数与物理数据的关系如下所示

$$\delta_x = f + 2g;$$

这里 f 是味对称性的秩。如果需要对对偶图进行修改，则味对称性的秩小于数值 $\delta_x - 2g$。

现在让我们考虑纤维曲面的全局拓扑约束。给定一个亏格为g 的纤维化 $f : S \to \mathbb{P}^1$, 可以定义以下相对不变量

$$\begin{aligned} K_f^2 &= c_1^2(S) + 8(g-1), \\ e_f &= c_2(S) + 4(g-1), \\ \chi_f &= \chi(\mathcal{O}_S) + (g-1), \\ q_f &= q(S). \end{aligned}$$

这里 $c_1(S)$（$c_2(S)$）分别是第一（第二）陈类， $\mathcal{O}$ 是结构层，而 $q(S)$ 是 S的不规则性。相对不变量可以用奇异纤维的局部数据[36]表示:

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \kappa(f) + \sum_i c_1^2(F_i), \\ e_f &= \delta(f) + \sum_i c_2(F_i), \\ \chi_f &= \lambda(f) + \sum_i \chi(F_i). \end{aligned}$$

这里， $c_2(F)$ 和 $c_1(F)$ 是局部陈数，而 $\kappa(f)$ $\delta(f)$ $\lambda(f)$ 是模不变量，对于等平凡族其值为零。我们关注具有 $q = p_g = 0$ 的有理曲面，因此根据诺特定理： $c_2(S) + c_1^2(S) = 12$。局部数据满足以下方程:

$$K_f^2 + e_f = 12g \to \kappa(f) + \delta(f) + \sum_i (c_1^2(F_i) + c_2(F_i)) = 12g. \tag{5.2}$$

奇异纤维的关键数据是 $\chi(F) = \frac{1}{12}(c_1^2(F_i) + c_2(F_i))$，可利用正规极小模型 $F = \sum n_i C_i$ 计算:

$$\begin{aligned} \chi(F) &= \frac{1}{2}(g - p_a(F_{red})) + \sum_{i<j} \chi(n_i, n_j) C_i \cdot C_j, \\ \chi(n_i, n_j) &= 3 - \frac{(n_i, n_j)^2}{n_i n_j} - \frac{n_j}{n_i} - \frac{n_i}{n_j} \end{aligned} \tag{5.3}$$

这里，括号 (n_i, n_j) 表示 n_i, n_j 的最大公约数。注意，这个不变量不会因爆破或压缩而改变，因此对于相对极小模型也相同。

上述公式 5.2 对我们的用途有限，原因如下：a)：它涉及全局模不变量 $\kappa(f)$ $\delta(f)$ $\lambda(f)$, 这些不变量不易计算；b)：数据 $\chi(F)$ 在变形过程中并不守恒。为了实现我们的目的，我们需要一种在奇点分裂过程中保持不变的不变量。事实上，这样的不变量确实存在，称为局部符号[37]:

$$\sigma(F) = \frac{1}{2g+1}(gh_x - (g+1)\delta_x)$$

h_x [8] 是一个不变量，用于衡量变形过程中 A_1^h 型奇点的数量。$h_x = 0$，$\delta_x = 1$ 对于一个 A_1 奇点成立，因此 $\sigma(F) = -\frac{g+1}{2g+1}$。在奇点分裂过程中，符号保持不变，即如果 F 分裂为多个奇点 F_1、……、F_s，那么

$$\sigma(F) = \sum_i \sigma(F_i).$$

特别是，若 $h_x = 0$ 对于一个奇异纤维 F 成立，则一般分裂下的 A_1 个奇点数等于 δ_x! 另一方面，若一个奇异纤维 F 仅分裂为 A_1 个奇点，则 $h_x = 0$。

此外，若该纤维化是超椭圆的，也就是说一般纤维是超椭圆曲面，则曲面 S 的符号等于局部奇异纤维[37]的符号之和：

$$\sigma(S) = \sum_i \sigma(F_i).$$

对于有理曲面，霍奇指标定理给出曲面的符号为 $(1, \rho - 1)$，其中 ρ 是皮卡德数，因此 $\sigma(S) = 2 - \rho$。由此可得以下方程：

$$\boxed{2 - \rho(S) = \sum_i \sigma(F_i)}. \tag{5.4}$$

有理曲面的皮卡德数与相对不变量的关系如下（利用诺特定理）：

$$\rho(S) = 8g + 2 - K_f^2.$$

并且 K_f^2 有一个下界 $4g - 4$，这意味着 $\rho(S) \leq 4g + 6$ 有一个上界 .

味对称性与 Mordell-Weil 格：给定一个代数曲面的高亏格纤维化，可以定义一个 Mordell-Weil 格 [38]。这个格与物理理论的味对称性密切相关，相关研究涉及秩一情形 [39, 40] 和秩二情形 [4]。这里我们总结该格的一些重要性质。首先，其秩等于 [38]：

$$r = \rho - 2 - \sum(n_t - 1). \tag{5.5}$$

这里，ρ 是 S 的皮卡德数。对于有理纤维曲面 S，其为超椭圆[41], 时，皮卡德数为 $K_f^2 = 4g - 4$ 对应的 $\rho = 4g + 6$，而 MW 秩为

$$r_{MW} = 4g + 4 - \sum(n_t - 1). \tag{5.6}$$

最大 MW 秩为 $4g + 4$，如果所有奇异纤维都具有 $n_t = 1$，相应的曲面构造见 [41], 图 27，其中给出了该格的对偶图。

[8] 对于秩一和秩二情形，这个数等于 $d_x - \delta_x$，我们猜想一般情形下也成立。

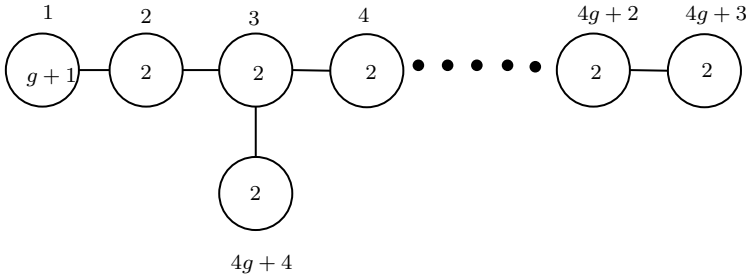


图27：具有亏格 g 纤维化的有理曲面的最大Mordell-Weil格。第一个节点的自交数为 $g+1$，另一个节点的自交数为2。

5.1 四维理论

我们对四维理论的一般形变作如下假设：a)：在 $z=\infty$ 处有一个特殊奇异纤维；b) 体区只有 A_1 个奇点。我们希望确定 ∞ 处纤维所受的拓扑约束，使其能够定义一个合理的四维紫外理论。

首先假设纤维化是超椭圆的，且皮卡德数为 $\rho(S)=4g+6$。按照[4], 使 F_∞ 定义一个四维理论的拓扑约束的相同论证，可得

$$\boxed{\delta_\infty - n_\infty = 2g-1}. \tag{5.7}$$

回顾一下导出上述方程的论证。基本假设是，每个体区 A_1 奇点都对应一个BPS粒子，且它们生成整个电荷晶格[9]，因此

$$f+2g = \#A_1; \tag{5.8}$$

这里 f 是质量参数的数量。现在，质量参数的数量由Mordell-Weil格的秩给出（见公式。5.5）：

$$f = r_{MW} = \rho - 2 - (n_\infty - 1).$$

最后，体区 A_1 奇点的数量和拓扑不变量 δ_∞ （假设$h_\infty=0$）满足以下方程（见公式。5.4）：

$$\frac{g+1}{2g+1}(\#A_1 + \delta_\infty) = \rho - 2.$$

将 f 和 $\#A_1$ 的表达式代入方程 5.8，得到（$\rho = 4g+6$）：

$$4g+4-(n_\infty-1)+2g = 8g+4-\delta_\infty \to \delta_\infty - n_\infty = 2g-1.$$

在一般情况下，f 并非物理味对称性的秩，而是由 MW 群的秩给出，参见公式 5.5。于是，位于 ∞处的纤维也满足相同的约束。由此可知，F_∞ 的对偶图必须是由 有理曲线构成的树！

[9]请注意，一般而言，只需其中一部分 BPS粒子即可生成完整的电荷晶格。

受上述关于超椭圆纤维化的结果启发，我们猜想，∞ 四维理论的奇异纤维必须满足条件5.7。

注：我们利用对偶图与三维镜像之间的对应关系来约束可能的红外理论。在紫外情形下，这一约束仍然可以施加到 F_∞ 的对偶纤维上！对偶纤维是为周期映射定义的，也可以通过取映射的周期部分的对偶，为一般纤维定义对偶纤维。

超共形场论：考虑由带有奇异纤维 F 的周期映射给出的四维超共形场论。在 ∞ 处，纤维有一个自然候选者：对偶周期映射 F'。我们首先考虑仅有两个奇异纤维 F和 F' 的纤维曲面，其拓扑约束会自动满足，见方程 5.2。然后可以将纤维 F 变形为 A_1 个奇点，从而得到全局 SW 几何。

例：考虑 (A_1, A_{n-1}) 理论，其中 n 为偶数；相应的纤维 F 的周期映射为 $(n, g' = 0, \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n})$ $g = \frac{n-2}{2}$（欧拉数为 $\delta_x = n - 1$），对偶纤维由数据 $(n, g' = 0, \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n})$ 给出（欧拉数为 $\delta_x = 3n - 3$）。总欧拉数满足条件 $\delta_x(F) + \delta_x(F') = 4n - 4 = 8g + 4$。这意味着：a)：全局曲线可以由超椭圆曲线的纤维化给出；b)：$d_x = \delta_x$ 对于 F 和 F'；c)：理论的一般形变只有 A_1 个奇点，这与使用奇点理论得到的结果一致（可以通过孤立超曲面奇点 [10]，构造该超共形场论，并且奇点的一般形变只有 A_1 个奇点）。

类似地，对于本节讨论的其他超共形场论，我们可以找到位于 ∞ 处的奇异纤维。4.3：只需在 F的分解中选择对偶周期映射即可。示例见图28 。

全局曲线：对于许多类别的理论，各种超共形场论的全局曲线已经被找到，它们有助于验证我们分类理论的一般策略。这里我们给出 $D_2(SU(n+1)$ 理论的全局曲线：当 n为奇数时，它就是与 $n+1$ 个基本味耦合的 $SU(\frac{n+1}{2})$；当 n 为偶数时，它是一个具有味对称群 $SU(n+1)$ [7, 42]的相互作用 AD 理论。全局曲线具有以下简单形式

$$y^2 = x^{n+1} + p_2 x^{n-1} + \ldots + p_n x + p_{n+1} + t^2.$$

这里，t 是库仑分支算子（标度维数为 $[t] = \frac{n+1}{2}$）。Mordell-Weil 格为 $A_n(A_n \oplus U(1))$，其中 n为偶数（n为奇数） [38],，这与物理理论的味对称性一致。

渐近自由理论：现在我们来介绍一些渐近自由理论的全局 SW 几何。

$SU(n)$与以下内容耦合的规范理论：n_f味：位于 ∞处的奇异纤维由图 29. 所示数据给出 $SU(n)$ 规范理论与 $n_f = 2n - K,\ K \geq 1$ 个基本表示的超多重态耦合时的 SW几何。一个简单的检验方法是计算拓扑欧拉数 δ_x（据猜测，它与全纯不变量 d_x相同），结果为

$$d_x = \delta_x = 2n + K + 2(n-1) = 4n + K - 2.$$

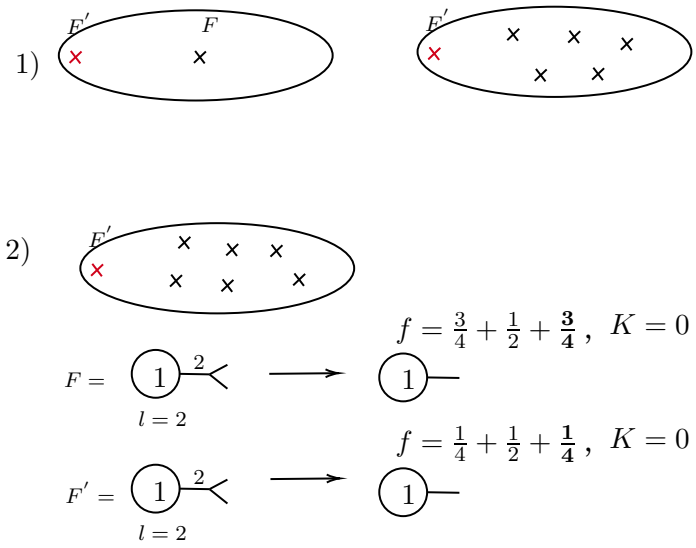


图28：（1）：左：由周期映射 F 定义的超共形场论的全局几何，以及F' 是其对偶映射；它们可以组合在一起形成等平凡族；右： F 可以变形为若干个 A_1 奇点，从而得到该理论F的全局 SW 几何。（2）：一个超共形场论由纤维 F 表示，而无穷远处的纤维由其对偶F'给出。

因此，体区中的 A_1 个奇点数量如下（因为全局曲线是超椭圆的）：

$$8(n-1)+4-(4n+K-2)=2(n-1)+2n-K=2r+f.$$

对于 $Sp(2n)$ 规范理论耦合 $n_f=2n+2-K$ 个处于基本表示的超多重态，其奇异纤维也显示在图 29中。

纯 $SU(n)$ 规范理论：让我们更详细地考察纯 $SU(n)$ 规范理论，体区中总共有 $2n-2$ A_1 个奇点。我们希望通过简单的拓扑约束确定其他特殊真空：a）欧拉数小于 $2n-2$；b）不存在味对称性，因此对偶图只有一个节点。以下是一些显而易见的可能性：

1. 该退化由加权图（$g=n-1$， $r=g$）给出，即有 $n-1$ 条非分离切割曲线，见图。30。分支 Σ/C 上的周期映射是平凡的。为使味对称性消失，链接数 $K=1$，因此红外理论是以下内容的直和： U带有一个超多重态的 (1)：（$U(1)\oplus 1$）$^{n-1}$。该真空的欧拉数为 $n-1$。这个特定的真空很重要，因为它给出了相应 $\mathcal{N}=1$ 理论的禁闭真空。

2. 该退化给出 AD 理论和自由矢量多重态。根据 n，AD 理论可能具有会被规范化的 U (1) 整体对称性。

$\mathcal{N}=2^*$ $SU(n)$规范理论：尽管我们主要关注体奇异性仅为 A_1 奇异性的情形。实际上，通过考虑更一般的不可变形奇点，也可以得到其他理论的SW解，

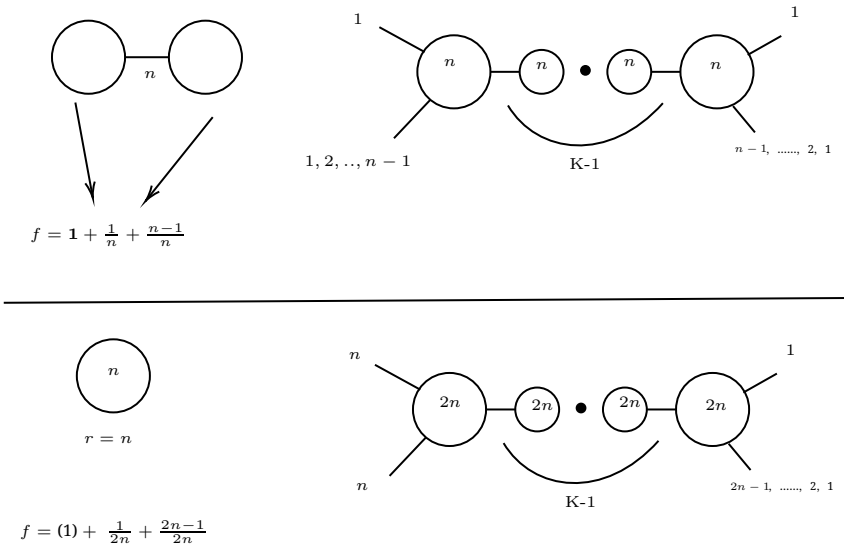


图29：上：对于具有 $2n-K$ 个味的 $SU(n)$规范理论，在 ∞ 处的奇异纤维；加权图由两条亏格为零的曲线通过一条重数为n的边连接而成。每个亏格为零的分量上的周期映射为 $\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}+\mathbf{1}$。下：对于具有 $2n+2-K$ 个味的 $Sp(2n)$规范理论，在 ∞ 处的奇异纤维；加权图由单个分支和 $r=n$ 条切割曲线构成，这些曲线是双向曲线。不可约分支上的周期映射为 $(1)+\frac{1}{2n}+\frac{n-1}{2n}$。

即通过考虑更一般的不可变形奇点来研究其他理论。注意，奇点的局部结构仍由本文的结果分类：只是不能将这些奇点变形为 A_1 型。我们将一般性讨论留待另一篇文章，在此给出 $\mathcal{N}=2^*$ $SU(n)$规范理论的结果。 ∞处的纤维应给出一个周期映射，该映射给出标度维数2、3、.....、n [3]。自然的候选是带有 $n_f=2n$的 $SU(n)$情形，即由具有数据$(n, g'=0, \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n})$的周期映射给出。对于体奇异性，存在以下两个约束 a)：拓扑约束，即 $\sum_{bulk}\delta_x = 4n-2$；b)：狄拉克量子化 [12]；c)：电荷晶格的秩为 $2n-1$，因此至少应有$2n-1$ 个奇点。利用上述约束，可以得出恰好存在$2n-1$ A_2 个奇点。注意，A_2 奇点由一个亏格为 $n-1$ 的曲线和一个单切口描述（其余部分上的周期映射是平凡的），且沿切口的整数为 $K=2$。

$\mathcal{N}=2^*$ $Sp(2n)$规范理论： ∞ 处的纤维由带有数据（n， $g'=0$，$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2n-1}{2n}$）的周期映射给出，其拓扑欧拉数为 $4n+2$。同样，我们猜想体奇异性属于不可变形的 A_2 奇异性，数量为 $2n+1$。这与电荷晶格的维数完全一致（只有一个质量参数）。

线性夸克图：我们来考虑紫外完备的线性夸克图 $n_1-SU(n)-SU(n)-n_2$，其中 n_1，$n_2<n$。自然可以认为， ∞ 处的退化应当是图中所示的那一种。

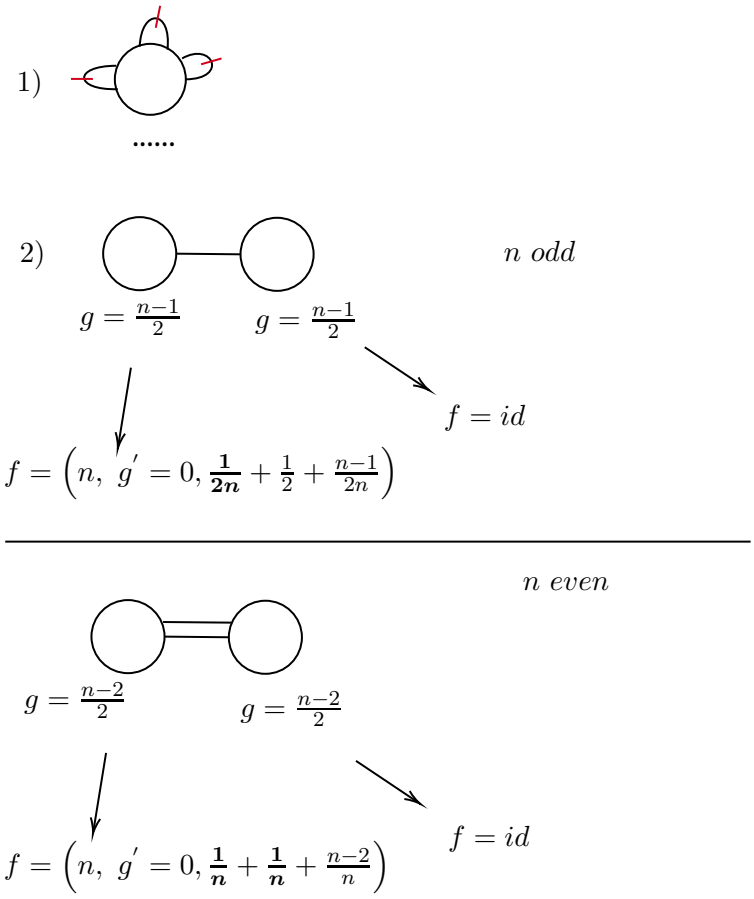


图30：（1）：纯 $SU(n)$ 理论的特殊真空，切割系统中有 g 条非分离曲线，以及所有相关的整数 $K=1$。红外理论只是由一个超多重态耦合的g个 $U(1)$ 副本；（2）对应于 AD 理论加上自由矢量多重态的奇异纤维。

在图中。31，数据为 $n_1=n-K_1,\quad n_2=n-K_2$。由于 SW 几何不再是超椭圆的，且皮卡德数未知，因此我们无法确定体区处A_1 奇点的数量。我们注意到，通过取 $n_1=n_2=n$，可以得到一个超共形场论，并且可以轻松计算全局 SW 几何上的总欧拉数：对应的周期映射是自对偶的（其价数数据为 $(\frac{1}{n})^3+(\frac{n-1}{n})^3$,和 $\delta_x=7n-4$），因此总欧拉数为 $e_{total}=14n-8$。我们假设总欧拉数仍应保持不变，由此可以得出体区奇点的数量为 A_1。

$$\begin{aligned}\#A_1&=14n-8-(7n+2n-n_1-n_2-4)\\&=5n+n_1+n_2-4=2r+f+(n-1).\end{aligned}$$

这里 $r=2n-2$ 是理论的秩，$f=n_1+n_2+1$ 是质量参数的数量。

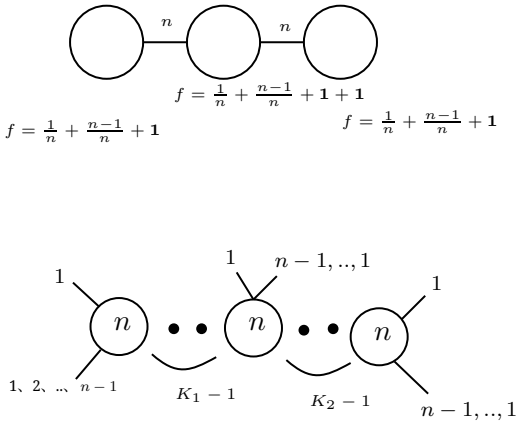


图31：上：紫外完备线性夸克图理论的伪周期映射；下：对偶图，其拓扑欧拉数为 $\delta_x = 7n + K_1 + K_2 - 4$。

5.2 五维理论

现在让我们转向五维KK理论的SW几何：紧化在一个有限尺寸圆上的五维$\mathcal{N} = 1$ 理论的库仑分支解。它与四维SW几何的区别在于，电荷晶格的维数为 $\Gamma = 2r + f + 1$，其中额外的一维表示KK电荷。按照与四维理论类似的论证，五维理论在 ∞ 处的奇异纤维的拓扑约束为：

$$\delta_\infty - n_\infty = 2g - 2.$$

因此， F 的对偶图满足以下条件：a）所有分支都是有理曲线；b）只有一个环；c）对偶纤维是良好的，即可以得到一个良好三维镜像。

示例：让我们考虑五维秩3 KK理论的若干类可能的紫外奇异纤维，见图32。其中一些可能与使用托里克图构造的五维理论有关（也就是说，在某个 SU特殊轨迹上具有规范理论解释。）[43]。一种检验方法是，使用 [4], 中所解释的方法计算无穷远处单值化的特征值，其中有两个特征值为1，其余特征值是3阶单位根；另一方面，对于图32所示的伪周期映射，其在同调环上的诱导单值化同样有两个特征值为1，其余特征值的阶为3（周期映射的阶为3）。

5.3 六维理论

现在让我们转向六维KK理论的SW几何：即在有限尺寸的环面上紧化的六维（1, 0）理论的库仑分支解。它与四维SW几何的区别在于，电荷晶格的维数为 $\Gamma = 2r + f + 2$，其中额外的两个维度表示沿环面两个周期的KK电荷。按照与四维理论类似的论证，四维理论的拓扑约束为

$$\delta_\infty - n_\infty = 2g - 3.$$

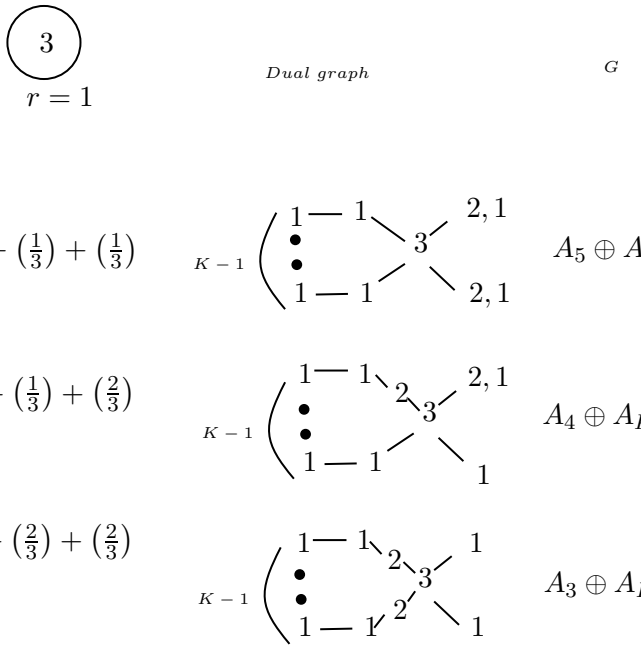


图32：可能为5d $\mathcal{N}=1$KK理论产生库仑分支几何的奇异纤维。其中 δ 的自交数为 -4, δ_1 的自交数为-3。

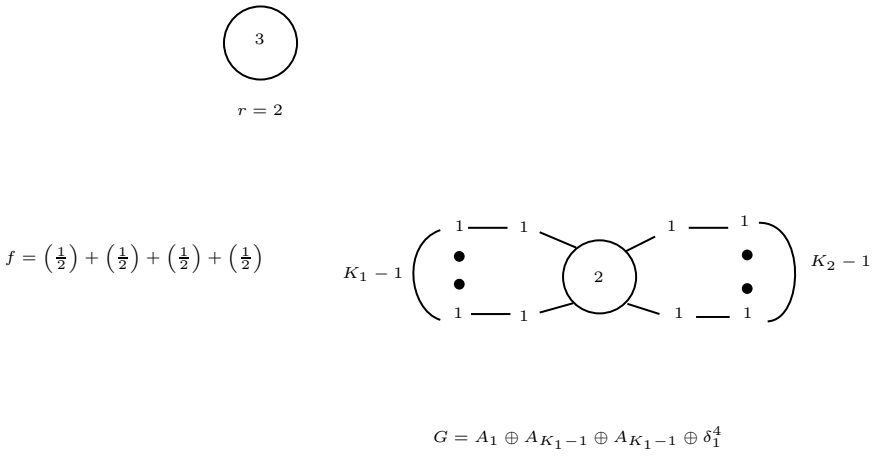


图33：可能产生秩三六维 (1, 0) KK 理论的 SW几何的奇异纤维。

因此， F 的对偶图满足以下条件：a) 所有分支都是有理曲线；b) 它恰好有两个环；c) 对偶纤维是良好的，即可以为其构造一个良好的三维镜像。

示例：图中展示了六维秩三 KK 理论的一类可能的紫外奇异纤维。33。

6 结论

我们对具有八个超荷的理论的库仑分支几何的红外和紫外行为进行分类，并作出以下假设：a) 局部 SW 解由亏格为 g 的曲线纤维化给出；b)：该理论与奇点的一般形变相关联；c)：取 SW 几何的一维切片。关键事实是，这种退化由映射类群[17], 的共轭类分类，这些共轭类即所谓的负型伪周期映射。此类共轭类的描述是组合式的，从而使系统性研究成为可能。

为了确定红外理论（与体区处的奇异纤维相关联）或紫外理论（与 ∞ 处的奇异纤维相关联），我们发现伪周期映射所得到的对偶图发挥着关键作用：它们与这些理论的三维镜像密切相关。利用对偶图及相关的三维镜像，我们可以识别出超共形场论（例如 Argyres-Douglas 理论、 T_n 理论）、红外自由理论，以及具有映射类群某些共轭类的紫外完备理论！鉴于这种描述的简洁性，我们相信，许多关于具有八个超荷的理论的物理问题都可以得到解决！在本文中，这有助于我们解释 T_n理论的一般形变中 A_1 奇异点的数量，并确认了关于 Argyres-Douglas 理论的三维镜像猜想 [23]。

还有几个值得进一步研究的有趣问题：

1. 通常的电磁对偶群作用于光子耦合，而事实证明，仅这一作用本身不足以确定红外理论。对偶群可在几何上解释为对同调群的作用。现在，如果考察扩大的作用，并考虑映射类群中的共轭类，那么红外理论便可以完全确定。问题在于，映射类群所作用的物理对象是什么。由于映射类群自然作用于黎曼曲面上的简单闭曲线，而这进而给出了红外线算符，因此这表明，当我们沿着特殊真空移动时，需要研究其对红外线算符集合的作用！

2. 理解对偶图与三维镜像之间神秘关系的含义将会很有趣。我们利用三维镜像的对应关系来约束奇异纤维可能出现的形式。研究这些约束的物理意义将会很有趣。

3. 我们研究了完整库仑分支几何的一个单参数切片，而研究SW几何的完整参数空间无疑也是有益的。例如，对于一个超共形场论，可能无法找到单参数的尺度不变几何，但却有可能找到一个适用于多参数族 [44] 的尺度不变几何。更一般地说，通过考察物理理论的完整形变空间，我们或许能够发现关于奇异纤维出现条件的更多约束。

4. 当然，下一个重大问题是全局 SW 几何的分类（关于秩一情形，参见[45] ）。我们希望在不久的将来报告这一问题的进展。

5. 在我们的研究中，假设红外理论与一般形变相关联。要给出完整的分类，需要对与所谓非一般形变相关联的理论进行分类。

6. 我们还假设 SW几何由一族黎曼曲面给出。此条件可以按以下方式放宽：可以考虑局部族上的有限群作用，并研究其商。特别是，可以在共轭类上定义一种所谓的“定向投影”作用，从而得到具有正交辛规范群的箭图理论。详情将在另一篇论文中发表。

致谢

DX 谨向 S. Y. Cheng 教授致谢，感谢他一直以来的鼓励。

A 对于 $1 \leq g \leq 5$ 的周期映射

亏格为 $1 \leq g \leq 5$ 的闭曲面上周期映射的不同共轭类列于表 2、3、4、5、6。

阶	$Data$
$n=6$	$(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}, \frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2})$
$n=4$	$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2})$
$n=3$	$(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3})$
$n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

表2：亏格 $g=1$的周期映射。亏格 $g'=0$ 被忽略。

阶	$Data$
$n=10$	$(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+2, \frac{1}{10}+\frac{9}{10}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}), (\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+2, \frac{1}{10}+\frac{7}{10}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2})$,
$n=8$	$(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}, \frac{7}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{2})$
$n=6$	$(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}, \frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}), \quad (\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$
$n=5$	$(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}, \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}) \quad (\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}, \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5})$
$n=4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$n=3$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$
$n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=1, \quad n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

表 3：亏格为 $g=2$ 的周期映射。

阶	$Data$
$n=14$	$(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}+\frac{1}{2},\frac{11}{14}+\frac{5}{7}+\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{14}+\frac{3}{7}+\frac{1}{2},\ \frac{13}{14}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2})(5\ 1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{9}{14}+\frac{6}{7}+\frac{1}{2})$
$n=12$	$(\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{2},\ \frac{11}{12}+\frac{7}{12}+\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3},\ \frac{11}{12}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3})(5\ 12\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+3,\ \frac{1}{2}\ \frac{7}{12}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3})$
$n=9$	$(\frac{1}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{3},\frac{8}{9}+\frac{5}{7}+\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3},\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\frac{1}{3})(\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{3},\frac{7}{9}+\frac{5}{9}+\frac{2}{3})$
$n=8$	$(\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4},\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}),\ (\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4},\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4})(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4},\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4})$
$n=7$	$(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{5}{7},\frac{6}{7}+\frac{6}{7}+\frac{2}{7}),\ (\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7},\frac{6}{7}+\frac{5}{7}+\frac{3}{7})(\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7},\frac{6}{7}+\frac{4}{7}+\frac{4}{7})$ $(\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7},\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{4}{7})$
$n=6$	$(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}),(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2},\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2})$
$n=4$	$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}),(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}),(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$
$n=3$	$(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3})$
$n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=1,\ \ n=4$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=1,\ \ n=3$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$
$g'=1,\ \ n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=2,\ \ n=2$	$f:\ \Pi\to\Pi'$ 是一个非分歧覆盖。

表4：亏格为 $g=3$ 的周期映射。

由周期映射得到的 B秩4和秩54d超共形场论

我们列出与亏格为4的情形（图。34）和亏格为5的情形（图。35）的周期映射相关联的超共形场论。

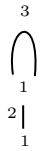
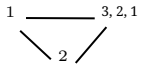
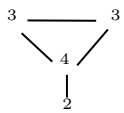
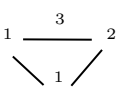
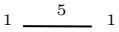
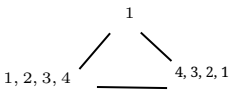
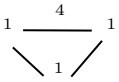
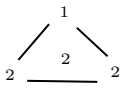
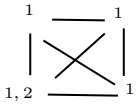
$\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{1}{18}$		(A_1, A_8)
$\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{9}{16}$		(A_1, D_9)
$\frac{3}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$		(A_2, A_4)
$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{5}$		$\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$
$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}$		$\left(5, \frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$
$\frac{1}{10}+\frac{7}{10}+\frac{1}{5}$		$\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{6}{4}, \frac{5}{4}\right)$
$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$		(A_1, A_9)
$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}$		$D_2(SU(9))$
$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$		(A_1, D_{10})
$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$		$\left(3, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$		$\left(2, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

图34：秩4超共形场论与周期映射。左：周期映射的数据；中：由对偶图得到的三维镜像；右：已知理论的名称或标度维数。

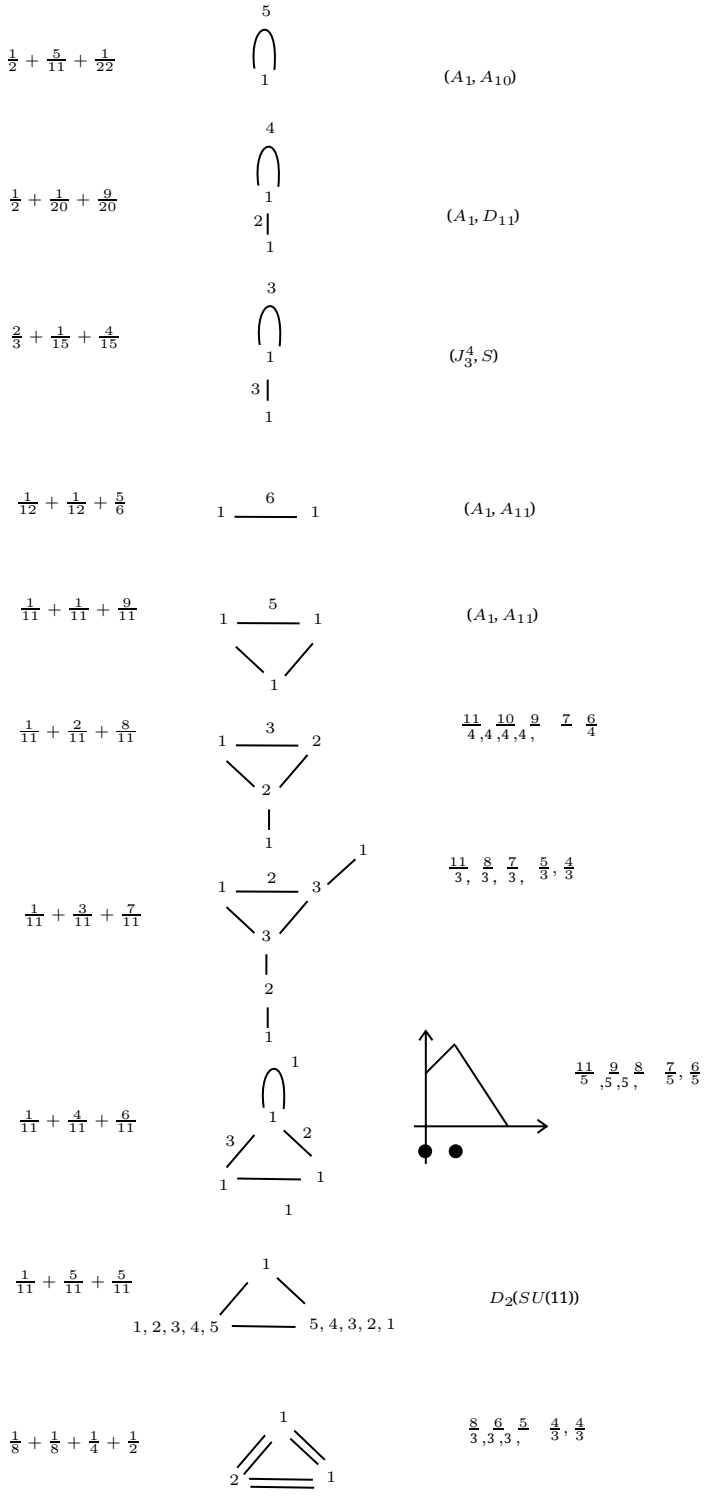


图 35：秩 5 超共形场论和周期映射。左：周期映射的数据；中：由对偶图得到的三维镜像；右：已知理论的名称或标度维数。

阶	$Data$
$n=18$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{7}{18},\ \frac{1}{2}+\frac{8}{9}+\frac{11}{18}),(\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{5}{18},\ \frac{1}{2}+\frac{7}{9}+\frac{13}{18})\ (\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{1}{2}+\frac{5}{9}+\frac{17}{18})$
$n=16$	$(\frac{1}{2}+\frac{3}{16}+\frac{5}{16},\frac{1}{2}+\frac{13}{16}+\frac{11}{16}),\ (\frac{1}{2}+\frac{7}{16}+\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{15}{16})$
$n=15$	$(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{7}{15},\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{15}),\ (\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{15},\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{11}{15})(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+\frac{2}{15}\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{13}{15})$ $(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+\frac{14}{15})$
$n=10$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}),\ (\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10},\frac{7}{10}+\frac{7}{10})(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{5},\ \frac{9}{10}+\frac{7}{10}+\frac{2}{5})$ $(\frac{1}{10}+\frac{7}{10}+\frac{1}{5},\ \frac{9}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{5})(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{5},\ \frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{1}{5})$
$n=9$	$(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9},\frac{8}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}),\ (\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{7}{9},\frac{8}{9}+\frac{8}{9}+\frac{2}{9})(\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{5}{9},\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{4}{9})$
$n=8$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}),(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8})$
$n=6$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}),(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}),\ (\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3})$ $(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2},\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}),(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$
$n=5$	$(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5},\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}),\ (\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5},\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5})$ $(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5})),(\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5})$
$n=4$	$(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}),\ (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4},\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$
$n=3$	$(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}),(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})$
$n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=1, n=6$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=1, n=4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$
$g'=1, n=3$	$(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3})$
$g'=1,\ \ n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g'=2,\ \ n=3$	非分歧覆盖
$g'=2,\ \ n=2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

表5：亏格为 $g=4$ 的周期映射。

阶	$Data$
$n=22$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{9}{22}\frac{1}{2}+\frac{10}{11}+\frac{13}{22}),\quad (\frac{1}{2}+\frac{2}{11}+\frac{7}{22},\frac{1}{}+\frac{9}{11}+\frac{15}{22})\,(\frac{1}{2}+\frac{3}{11}+\frac{5}{22},\frac{1}{}+\frac{8}{11}+\frac{17}{22})$ $(\frac{1}{2}+\frac{4}{11}+\frac{3}{22},\frac{1}{2}+\frac{7}{11}+\frac{19}{22}),\quad (\frac{1}{2}+\frac{5}{11}+\frac{1}{22},\frac{1}{2}+\frac{6}{11}+\frac{21}{22})$
$n=20$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{}{9\,20},\frac{1}{2}+\frac{11}{20}+\frac{19}{20}),\quad (\frac{1}{2}+\frac{3}{20}+\frac{}{7\,20},\frac{1}{2}+\frac{17}{20}+\frac{13}{20})$
$n=15$	$(\frac{1}{3}+\frac{2}{15}+\frac{8}{15},\frac{}{}+\frac{13}{15}+\frac{7}{15}),\quad (\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+\frac{}{4\,15},\frac{1}{3}+\frac{14}{15}+\frac{11}{15})$
$n=12$	$(\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12},\frac{}{}+\frac{7}{12}+\frac{7}{12}),\quad (\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{5}{6},\frac{11}{12}+\frac{11}{12}+\frac{1}{6})$
$n=11$	$(\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{9}{11},\frac{10}{}+\frac{10}{}+\frac{}{11}),\quad (\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+\frac{8}{11},\frac{10}{}+\frac{9}{11}+\frac{}{3\,11})\,(\frac{}{}+\frac{3}{11}+\frac{7}{11},\frac{10}{}+\frac{8}{11}+\frac{}{11})$ $(\frac{1}{11}+\frac{4}{11}+\frac{6}{11},\frac{}{}+\frac{7}{11}+\frac{5}{11}),\quad (\frac{1}{11}+\frac{5}{11}+\frac{5}{11},\frac{}{}+\frac{6}{11}+\frac{}{2\,11})\,(\frac{}{}+\frac{2}{11}+\frac{7}{11},\frac{}{}+\frac{9}{11}+\frac{}{}^{4})$ $(\frac{2}{11}+\frac{4}{11}+\frac{5}{11},\frac{}{}+\frac{7}{11}+\frac{6}{11}),\quad (\frac{3}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11},\frac{}{}+\frac{8}{11}+\frac{}{2\,11})\,(\frac{}{}+\frac{3}{11}+\frac{6}{11},\frac{9}{11}+\frac{8}{11}+\frac{5}{11})$ $(\frac{}{}+\frac{4}{11}+\frac{4}{11},\frac{8}{11}+\frac{7}{11}+\frac{7}{11})$
$n=10$	$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{}{9\,10}),(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{}{7\,10})$
$n=8$	$(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}),(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4},\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4})$ $(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4},\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4})$
$n=6$	$(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2},\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}),(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3},\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$ $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}),\quad (\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6})$
$n=4$	$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}),\quad (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4})$ $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$
$n=3$	$(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3},\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})$
$n=2$	$(\frac{1}{2})^{12}$
$g^{'}=1,n=8$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$g^{'}=1,n=6$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$
$g^{'}=1,n=5$	$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}$
$g^{'}=1,n=4$	$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}),(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$
$g^{'}=1,n=3$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$
$g^{'}=1,n=2$	$(\frac{1}{2})^{8}$
$g^{'}=2,n=4$	非分歧覆盖
$g^{'}=2,n=2$	$(\frac{1}{2})^{4}$
$g^{'}=3,n=2$	非分歧覆盖

表6：亏格为 $g=5$的周期映射。

参考文献

[1] N. Seiberg 和 E. Witten, 《N=2 超对称杨-米尔斯理论中的电磁对偶、磁单极子凝聚与禁闭》, Nucl. Phys. B426 (1994年) 19–52, [hep-th/9407087]. [勘误: Nucl. Phys.B430,485(1994)].[2] N. Seiberg 和 E. Witten, 《N=2超对称量子色动力学中的磁单极子、对偶性与手征对称性破缺》, Nucl. Phys. B431 (1994年) 484–550, [hep-th/9408099].[3] D. Xie 和 D. Zhang, 《混合霍奇结构与 $\mathcal{N}=2$ 库仑分支解》, arXiv:2107.1118.[4] D. Xie, 《具有八个超荷的秩二理论（第一部分）: 局部奇点》, arXiv:2212.0247.[5] Y. Namikawa 和 K. Ueno, 《亏格二曲线铅笔中纤维的完整分类》, Manuscripta mathematica 9 (1973), no. 2 143–186.[6] D. Gaiotto, 《N=2 对偶性》, 高能物理学杂志 08 (2012)034, [arXiv:0904.2715].[7] D. Xie, 《一般 Argyres-Douglas 理论》, 高能物理学杂志 1301 (2013) 100, [arXiv:1204.2270].[8] Y. Wang 和 D. Xie, 《M5膜上的 Argyres-Douglas理论分类》, arXiv:1509.0084.[9] Y. Wang 和 D. Xie, 《六维(2,0)理论中外自同构扭曲产生的余维二缺陷与 Argyres-Douglas理论》, arXiv:1805.0883.[10] D. Xie 和 S.-T. Yau, 《四维 N=2 超共形场论与奇点理论第一部分: 分类》, arXiv:1510.0132.[11] Y. Wang、D. Xie、S. S. T. Yau 和 S.-T. Yau, 《完全交奇点产生的 $4d$ $\mathcal{N}=2$ 超共形场论》, Adv. Theor. Math. Phys. 21 (2017年) 801–855, [arXiv:1606.0630].[12] P. Argyres、M. Lotito、Y. L¨u 和 M. Martone, 《超共形场论空间的几何约束, 第一部分: 相关形变的物理约束》, 高能物理学杂志 02 (2018) 001, [arXiv:1505.0481].[13] P. Argyres、M. Lotito、Y. L¨u 和 M. Martone, 《超共形场论空间的几何约束, 第三部分: 增强库仑分支与中心荷》, 高能物理学杂志 02 (2018) 003, [arXiv:1609.0440].[14] P. C. Argyres、M. Lotito、Y. L¨u 和 M. Martone, 《拓展秩1超共形场论的谱系》, 高能物理学杂志 05 (2016) 088, [arXiv:1602.0276].[15] R. Donagi 和 E. Witten, 《超对称杨-米尔斯理论与可积系统》, Nucl. Phys. B 460 (1996) 299–334, [hep-th/9510101].[16] T. Ashikaga 和 M. Ishizaka, 《通过 Matsumoto-Montesinos 定理分类亏格三曲线的退化》, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 54 (2002), no. 2 195–226.[17] Y. Matsumoto 和 J. M. Montesinos-Amilibia, 《伪周期映射与黎曼曲面的退化》, 第2030卷。Springer Science & Business Media, 2011年。[18] S. Cecotti、A. Neitzke 和 C. Vafa, 《R扭曲与四维/二维对应》, arXiv预印本 arXiv:1006.3435 (2010).[19] B. Farb 和 D. Margalit, 《映射类群入门》（pms-49）, 第41卷。普林斯顿大学出版社, 2011年。

[20] Y. Matsumoto 和 J. M. Montesinos-Amilibia, 《伪周期同胚与黎曼曲面的退化》, 《美国数学会通报》30 (1994年), no. 1 70–75.[21] F. Benini、Y. Tachikawa 和 D. Xie, 《三维西西里理论的镜像》, 高能物理学杂志 09 (2010) 063, [arXiv:1007.0992].[22] D. Nanopoulos 和 D. Xie, 《更多三维镜像对》, 高能物理学杂志 05 (2011) 071, [arXiv:1011.1911].[23] D. Xie, 《Argyres-Douglas理论的三维镜像》, arXiv:2107.0525.[24] M. Artin 和 G. Winters, 《退化纤维与曲线的稳定约化》, 《Topology》10 (1971), no. 4 373–383.[25] D. Xie 和 S.-T. Yau, 《重整化群流下四维 N$=2$ 谱的半连续性》, 高能物理学杂志 03 (2016) 094, [arXiv:1510.0603].[26] A. D. Shapere 和 Y. Tachikawa, 《四维 N$=2$ 超共形场论的中心荷》, Journal of High Energy Physics 2008 (2008), no. 09 109.[27] D. Xie 和 P. Zhao, 《强耦合 N$=2$ 理论的中心荷与重整化群流》, 高能物理学杂志 03 (2013) 006, [arXiv:1301.0210].[28] S. Takamura, 《迈向退化原子的分类：通过奇异纤维构形的 i-分裂判据——谨以此文献给 Yukio Matsumoto 教授六十寿辰》, Journal of the Mathematical Society of Japan 56 (2004), no. 1 115–145.[29] J. A. Minahan 和 D. Nemeschansky, 《具有 E(n)全局对称性的超共形定点》, Nucl. Phys. B 489 (1997) 24–46, [hep-th/9610076].[30] P. C. Argyres、M. R. Plesser、N. Seiberg 和 E. Witten, 《四维中的新 N$=2$ 超共形场论》, Nucl. Phys. B 461 (1996) 71–84, [hep-th/9511154].[31] B. Li、D. Xie 和 W. Yan, 《关于低秩四维 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论》, arXiv:2212.0308.[32] K. A. Intriligatorand N. Seiberg, 《三维规范理论中的镜像对称性》, Phys.Lett. B387 (1996) 513–519, [hep-th/9607207].[33] J. de Boer、K. Hori、H. Ooguri 和 Y. Oz, 《三维规范理论、夸克图与D膜中的镜像对称性》, Nucl. Phys. B 493 (1997) 101–147, [hep-th/9611063].[34] K. Ueno, 《亏格 2 曲线的判别式与算术曲面》, 载于《代数几何与交换代数》, 第749–770页。Elsevier, 1988年。[35] S.-L. Tan, 《曲线铅笔基变换的不变量，第一部分》, Manuscripta mathematica 84 (1994), no. 1 225–244.[36] J. Lu 和 S.-L. Tan, 《代数曲线族中奇异纤维陈数之间的不等式》, Transactions of the American Mathematical Society 365 (2013), no. 7 3373–3396.[37] T. Arakawa 和 T. Ashikaga, 《超椭圆铅笔的局部分裂族，第一部分》, Tohoku Mathematical Journal, Second Series 53 (2001), no. 3 369–394.[38] T. Shioda, 《曲线上高亏格纤维化的 Mordell-Weil格》, 伦敦数学会讲义系列 (1999) 359–374.[39] M. Caorsi 和 S. Cecotti, 《味的特殊算术》, 高能物理学杂志 08 (2018) 057, [arXiv:1803.0053]。

[40] P. C. Argyres 和 M. Lotito，《秩1处特殊卡勒结构的味对称性与拓扑》，高能物理学杂志 02 (2019) 026, [arXiv:1811.0001].[41] M.-H. Saito 和 K.-I. Sakakibara，《有理曲面上高亏格纤维化的 Mordell-Weil 格》，京都大学数学杂志 34 (1994年)，第4期，859–871页。[42] S. Cecotti 和 M. Del Zotto，《具有 ADE 味对称性的无穷多个超共形场论》，高能物理学杂志 2013年 (2013年)，第1期，1–22页。[43] D. Xie 和 S.-T. Yau，《三维典范奇点与五维超共形场论》，高能物理学杂志 06 (2017年)134, [arXiv:1704.0079].[44] P. C. Argyres 和 M. Martone，《秩2分类问题 I：尺度不变几何》，arXiv:2209.0924。[45] D. Xie，《秩一五维及六维 (1, 0) 超共形场论的分类》，arXiv:2210.1732。