arXiv:2304.13682v1 [math.GT] 26 Apr 2023

拟福克斯流形的无穷远处测度叶状结构及其 Fuchsian轨迹附近的 CMC叶层

Diptaishik Choudhury

摘要

本论文的主要研究对象是一类称为拟福克斯流形的双曲三维流形。给定一个定向的闭双曲曲面 S，这些流形与 $S \times \mathbb{R}$ 同胚。我们研究关于它们的两个问题：一个涉及 $measured\ foliations\ at\ infinity$，另一个涉及 $foliation\ byconstant\ mean\ curvature\ surfaces$。

拟福克斯流形的无穷远处的测度叶状结构，是其凸核边界上的测度弯曲层在无穷远处的自然类比。给定一对测度叶状结构 (F_+，F_-)，它们填充一个闭双曲曲面 S 且是无理的，我们证明：当 $t > 0$ 足够小时，tF_+ 和 tF_- 可以唯一地实现为一个与 $S \times \mathbb{R}$ 同胚的拟福克斯流形的无穷远处测度叶状结构；该流形充分接近 Fuchsian 轨迹。证明基于 Bonahon 在 [5] 中所作的证明，该证明表明，接近 Fuchsian 轨迹的拟福克斯流形可以由其凸核边界上的填充的带测弯曲层数据唯一确定。最后，我们在半管几何中解释这一结果。

论文的第二部分讨论了 Thurston 提出的一个猜想：近福克斯流形是否允许由常平均曲率曲面构成的叶状结构。在这里，近福克斯流形被定义为包含唯一极小曲面的拟福克斯流形，该曲面的主曲率位于 $(-1,1)$ 中；已知一般而言，拟福克斯流形并不由常平均曲率曲面构成叶状结构，尽管其端是如此。然而，我们证明了，充分接近 Fuchsian 的近福克斯流形确实可以由常平均曲率曲面单调地构成叶状结构。这项工作是与 Filippo Mazzoli 和 Andrea Seppi 合作完成的。

目录

1 引言. **4**

1

1 无穷远处的测度叶状结构.4 1 1 1 . . 弯曲层与无穷远处的测度叶状结构之间的类比 . . . . . 5 1 1 2 6 . . 概述 .1.2 常平均曲率曲面 .6 1.2.1 方法与概述 .7

2 预备知识. **9**

2 1 双曲空间 .

9 2 9 2 2 3 3 3 . 双曲曲面与 -流形.Fuchsian、近福克斯和拟福克斯 -流形.

10

2 4 ¨ .

Teichmuller 空间.11 2 5 . 全纯二次微分.

11

2 6 S $\mathcal{MF}\ S$. 在 上的测

度叶状结构与空间 ( ).12 2 7 3 . 双曲流形中的极小曲面与常平均曲率曲面.13 2 8 . 拟福克斯流形在无穷远处的 Schwarzian 导数.14 2 8 1 15 . . 构造逆映射.

3 拟福克斯流形在无穷远处的测地叶状结构 1。 **6**

3 1 从 Q (S) 以及由全纯二次微分实现的测度叶状结构 . .

16 q^{F} $q^{-\mathsf{F}}$ 17 . . Hubbard-Masur 定理及截面.填充测地叶层

3 1 1

3 1 2

与 Gardiner-Masur 定理.18 3 1 3 . . 测度叶状结构的极值长度.

18

3 1 4 q^{F} $q^{-\mathsf{G}}$ $T^*\mathcal{T}\ S$ . . ( ) 中 与 的交集.

19

3 1 5 $Q\ S$ $\mathbb{R}_{>0}$ $[q^{\mathsf{F}}]$ $[q^{-\mathsf{G}}]$ 20 . . ( ) 在 和 的作用下的商空间，以及 与 的交集 . . . .

3.2 具有小的填充测度叶状结构（在无穷远处）的路径的必要条件.21

3 22 3 2 1 2 2 3 . . 拟福克斯流形在无穷远处的 Schwarzian 导数.双曲流形中的极小曲面.22 3 2 3 23 无穷远基本形式.

3 2 4 $\beta_{([c],q)}$ s $\mathcal{QF}\ S$ . . 曲线 ( ) 在 ( )

24

中.3 2 5 t^2 . . 路径

$\beta_{([c],q)}$ 25 ( ) 在无穷远处的

3 2 6

测度叶状结构的一阶估计 . . . . . 给定小的填充测度叶状结构（在无穷远处）的路径的一阶必要条件.27

3.3 具有小型填充叶状结构的路径的唯一性.

28

3 3 1 $N\mathcal{F}\ S$ $\mathcal{F}\ S$ 28 . . ( ) 到 ( )

的法丛.3.3.2 在 $\mathcal{F}(S)$ 处对 $\mathcal{QF}(S)$ 进行的爆破 $\widetilde{\mathcal{QF}}(S)$.29 ⁀ ⁀ ⁀ ⁀

3 3 3 $\mathcal{W}^+_+$ $\mathcal{W}^-_-$ $\partial\mathcal{W}^+_+ \cap \partial\mathcal{W}^-_-$ 30 . . 子

3 4

流形 $_{\mathsf{F}}$、$_{\mathsf{F}}$ 以及交集 $_{\mathsf{FF}}$.半管几何中的解释.33 3 4 1 34 . . 半管 Schwarzian 及其测度叶状结构.

4 靠近 Fuchsian 轨迹的拟福克斯流形由常平均曲率曲面分叶：3. **6**
4 36 4 36 4 1 1 1 2 37 . . Epstein 映射.Schwarzian张量.4.1.3 平均曲率.38 4 38 4 1 4 2 39 . . 技术要点.
1 Epstein曲面 ,
CMC 曲面的存在性.4.2.1 端中的存在性.39 4.2.2 端的叶状结构.42 4 45 4 2 3 2 4 . . 紧致部分中的存在性.
小邻域中存在性的结论.46 4 3 . 拟福克斯流形的叶状结构.46 4 3 1 . . 小主曲率与等距叶状结构.47 4 3 2 . .
CMC 曲面的最大值原理.48 4 3 3 1 2 2 48 . . 定理的证明.

5 未来研究 **50**

致谢

首先，我要感谢 Jean-Marc Schlenker。他聘任我为博士生，给予我在卢森堡大学成为博士候选人的机会，随后为我提供了一个很好的论文题目，并在此后耐心指导我，使我得以在许多艰难的处境中完成博士学位。他还把我介绍给 Andrea Seppi，我也由衷感谢他。他同样非常耐心，对每一个细微之处都十分用心。我的论文有一半直接得益于与他的合作。我也感谢他们给予我充分的机会，让我能在各种学术会议上展示自己的工作。此外，Greg McShane 在我硕士第二年结束后帮助我获得博士职位，并持续关注我的工作；我对此的感激之情不言而喻。

在我的求学过程中，还有一些其他人发挥了重要作用，他们分别是 Pierre Dehornoy、Erwan Lanneau 和 Thierry Barbot。他们，尤其是 Pierre，在我于欧洲求学的最初几年里，通过邀请我参加实习并给予我指导，给予了我极大的帮助和关照。此外，我还要感谢 Erwan、Sarah Sherotzke 和 Thierry 同意担任我的答辩委员会成员，并感谢 Fran¸cois Fillastre 和 Thierry 担任我的论文评审人。我也借此机会感谢我在格勒诺布尔和卢森堡求学期间所有曾为我授课的教授。
谨向所有邀请我在各自学术研讨会上作报告的教授、研究人员和学生致谢。我很感激与他们每一位的交流。

Filippo Mazzoli 不仅是学术上的兄弟，我也非常幸运能够从他丰富的知识和专长中学习。在不提及姓名的情况下，我还想提到格勒诺布尔和卢森堡的院系里那些与我共度了许多美好时光的人。

最后，我想提到许多与我有过愉快交流的人，包括我在不同时期的所有合租者或室友，以及房东；我从各种大学活动中认识的所有人、在其他地方遇到的人，还有所有秘书和工作人员。那些给我机会讨论数学、抱怨、吃饭、唠叨等等的人，都非常慷慨。我也觉得自己有时对其中一些人很烦人，实在很不应该。

最后，如果没有父母的支持，一切都不可能实现，所以我想提到迪潘克 ar
and 感谢Jayasri的善意、关怀，以及教会我怀抱希望。

第1章

引言

设 S 为一个亏格为 $g \geq 2$ 的闭定向曲面， M 为一个与 $S \times \mathbb{R}$同胚的3维流形。将 M 上Fuchsian度量的同伦类空间称为Fuchsian轨迹 $\mathcal{F}(S)$，并注意到它也可识别为Teichm¨uller空间 $\mathcal{T}(S)$（见§§2.4）。令 $T^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$为其在点 $[c] \in \mathcal{T}(S)$处的余切空间，并再次将其识别为曲面$(S, [c])$上的全纯二次微分空间$Q(S, [c])$（见§§2.5）。现在，考虑 M上的拟Fuchsian双曲度量，并令 $\mathcal{QF}(S)$表示 M上拟Fuchsian度量的同伦类空间（见§§2.3）。将 M无穷远边界的连通分支记为 $\partial^{\pm}_{\infty}M$和 $\partial^{-}_{\infty}M$ （二者均与 S同胚），并令$([c_+], [c_-]) \in \mathcal{T}(\partial^{+}_{\infty}M) \times \mathcal{T}(\partial^{-}_{\infty}M)$为相应的共形类（见定理3.3.2）。

1.1 无穷远处的测度叶状结构

存在唯一的全纯映射（在右复合 M¨obius 变换的意义下唯一），它们从⌢ ⌢万有覆盖 $\partial^{+}_{\infty}M$, $\partial^{-}_{\infty}M \subset \partial_{\infty}\mathbb{H}^3 \cong \mathbb{C}P^1$ 映射到单位圆盘 $\Delta \subset \mathbb{C}$；这些映射由相应复结构的一致化得到（见 §§3.2.1）。令无穷远处的 Schwarzian 导数 $\sigma_+ \in Q(\partial^{+}_{\infty}M, [c_+])$ 和$\sigma_- \in Q(\partial^{-}_{\infty}M, [c_-])$ 分别为对这些映射取Schwarzian导数并取商空间后得到的全纯二次微分。我们将拟福克斯流形 M 的无穷远处测度叶状结构 F_+, F_- 定义为 σ_+, σ_- 在 $(\partial^{+}_{\infty}M, [c_+])$, $(\partial^{-}_{\infty}M, [c_-])$ 上的水平测地叶层。这些无穷远处的测度叶状结构可视为无穷远处的自然类比，对应于拟福克斯流形凸核边界上的弯曲层理（见 §§1.1.1，引理 3.3.6）。

令 $\mathcal{MF}(S)$ 表示 S 上测度叶状结构的等价类空间（见 §§2.6、§§3.1, [27]），以及 F_+, $\mathsf{F}_- \in \mathcal{MF}(S)$。此外，给定一对测度叶状结构 $(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \in \mathcal{MF}(S) \times \mathcal{MF}(S)$，我们可以定义它们构成一对充满 S 的测度叶状结构。也就是说，任何其他测度叶状结构 H 与 F 或 G 的交集都非零（见定义 3.1.9 和 §§3.1.2）。因此我们提出如下问题（见 [66] 中的问题 7。4）：是否可以仅凭无穷远处的测度叶状结构唯一确定一个拟福克斯流形?

现在令 $\mathcal{MF}_0(S) \subset \mathcal{MF}(S)$ 表示无理的测度叶状结构子空间，即所有尖枝的阶数均为 3，且不存在连接尖枝的叶（见定义 2.6.4 和引理 3.1.8）；$\mathcal{FMF}(S)$ 表示所有充满 S 的测度叶状结构对构成的空间，而 $\mathcal{FMF}_0(S)$ 表示这类对中无理的子空间。如果测度叶状结构对 $(\mathsf{F}_+, \mathsf{F}_-)$ 属于 $\mathcal{FMF}_0(S)$，那么对所有 $t > 0$（见 §§2.6），对 $(t\mathsf{F}_+, t\mathsf{F}_-)$ 也属于该空间。还要注意，对于度量 $g \in \mathcal{F}(S)$，Schwarzian 导数和无穷远处的测度叶状结构均为零（见 §§3.2.1）。以下是最重要的结果，它对上述问题作了部分回答，适用于 Fuchsian 轨迹附近的拟福克斯流形：

定理 1.1.1. *For every pair of measured foliations* $(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-)$ *which are arational and fill* S*, there exists an* $\epsilon_{\mathsf{F}_\pm} > 0$ *such that for* $\forall t \in 0\ \epsilon_{\mathsf{F}_\pm}$ *there exists an unique quasi-Fuchsian metric* $g \in \mathcal{QF}\ S$ *on* M $(,)$ $()$ $,\mathsf{FF}$ *sufficiently close to the Fuchsian locus whose measured foliations at infinity are given by* $t\ _+$ *and* $t\ _-$*.*

也就是说，给定映射 $\mathfrak{F}$： $\mathcal{QF}(S) \to \mathcal{MF}(\partial^{+}_{\infty}M) \times \mathcal{MF}(\partial^{-}_{\infty}M)$，它分别将拟 Fuchsian 度量映射为正端和负端在无穷远处的测度叶状结构；当限制于 $(\mathsf{F}_+, \mathsf{F}_-) \in \mathcal{FMF}_0(S)$ 时，对于足够小的 $t > 0$，方程 $\mathfrak{F}(g) = (t\mathsf{F}_+, t\mathsf{F}_-)$ 有唯一解$g \in \mathcal{QF}(S)$。现在令 $q^{\mathsf{H}}_{[c]}$ 为唯一的全纯二次微分，使得 $\mathrm{H} \in \mathcal{MF}(S)$ 是其在 $(S, [c])$ 上的水平测度叶状结构（见 §§3.1.1）。沿着 McMullen 的思路可立即得到 a

拟福克斯变换互反性（见 $[45,54,56]$）有助于描述无穷远处的 Schwarzian 导数：如果g 是 M 上的拟 Fuchsian 度量，使得无穷远处的测度叶状结构由某个填充无理对 $(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-)$ 给出，其中（Ft，tF$_-$）为 $t>0$ 足够小；那么（M，g）在无穷远处的 Schwarzian 导数分别为$t^2 q^{\mathsf{F}_+}_{[c_+]} \in Q(\partial^+_\infty M,\ [c_+])$ 和 $t^2 q^{\mathsf{F}_-}_{[c_-]} \in Q(\partial^-_\infty M,\ [c_-])$。

随后我们考虑拟福克斯变换半管流形的情形（见定义 3.4.1，另见 $[2,19,28]$）。当我们考察经由 Fuchsian 轨迹在双曲结构与反德西特结构之间的光滑变迁时，这些中间几何结构自然出现于 M；后者凸核边界上的弯曲层同样也是一个研究得相当充分的课题。在这种情形下，我们为半管 Schwarzian 定义一个类似的概念（见定义 3.4.6），并证明：

定理 1.1.2. *Given any pair of filling measured foliations* F$_+$, F$_-$ *on* S*, there exists a unique quasi-Fuchsian half-pipe manifold such that the horizontal measured foliations of its positive and negative half-pipe Schwarzians are given by* $_+$ *and* $_-$ *respectively.* FF

1.1.1 弯曲层与无穷远处测度叶状结构的类比 ty

拟福克斯流形的无穷远边界数据与凸核边界数据之间存在一些类比之处，这使得定理 1.1.1 尤其引人关注。我们将 M 的凸核记为 $\mathcal{CC}(M)$，它是包含于 M 中的最小非空凸紧致子集，并且与 $S\times[-1,1]$ 同胚。将 $\partial^+\mathcal{CC}(M)$ 和 $\partial^-\mathcal{CC}(M)$ 称为两个边界分支，并分别将诱导度量称为 m_+ 和 m_-。Thurston 猜想，对于 M 上的拟 Fuchsian 度量，可以由数据 $(m_+,\ m_-)$ 唯一地参数化（见 $[11,46,68]$）。此外，分支 $\partial^\pm\mathcal{CC}(M)$ 携带两个测地测度层状结构 λ_+ 和 $\lambda_-\in\mathcal{ML}(S)$，其中，$\mathcal{ML}(S)$ 是 S 上测地测度层状结构在等价关系下的空间（见 $[5]$）。这些被称为弯曲层，并且 $\partial^\pm\mathcal{CC}(M)$ 分别沿着 $\lambda_\pm$ 的叶发生弯曲，弯曲角由与 $\lambda_\pm$ 相关联的横向测度给出。

Bonahon-Schl V^*_Cafli 公式中，$\mathcal{CC}(M)$ 的对偶体积 $V^*_C(M)$ 的变分公式与 M 的重整化体积 V_R（见 $[44]$）十分相似，这也使定理 1.1.1 非常有趣。假设对于 $0\le t<\epsilon$，我们有一条由 $t\mapsto M_t$ 给出的、定义在 M 上的拟Fuchsian度量的可微路径，那么重整化体积的一阶变分公式为（ $[66]$）：

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V_R(M_t) = -\frac{1}{2}d(\mathsf{ext}(\mathsf{F}_+))(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[c^t_+]) \tag{1.1}$$

其中，$[c^t_+]$ 表示 $\partial^+_\infty M_t$ 上复结构（在等价意义下）的变分；对于测地叶层 F $\in\mathcal{MF}(S)$，函数 ext(F)：$\mathcal{T}(S)\to\mathbb{R}$ 将共形类 $[c]\in\mathcal{T}(S)$ 映射为该共形类下叶状结构的极值长度 ext$_{[c]}$(F)（见 §3.1.3）。另一方面，通过应用 Bonahon-Schl¨afli 公式，对偶体积的一阶变分可表示为（ $[45,55]$）：

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} V^*_C(M_t) = -\frac{1}{2}d(l(\lambda_+))(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} m^t_+) \tag{1.2}$$

其中，对于带测测地线叶状结构 $\lambda\in\mathcal{ML}(S)$，我们有函数 $l(\lambda):\mathcal{T}(S)\to\mathbb{R}$，它将双曲度量 $m\in\mathcal{T}(S)$ 映射为 λ 的长度，记作 $l_m(\lambda)$，该长度是相对于此度量测得的；而m^t_+ 表示拟福克斯结构变分下凸核边界诱导度量的变分。这里需要注意，对于给定的测地叶层 F 和带测层λ，导数 $d(\mathsf{ext}(\mathsf{F}_+))\ d(l(\lambda_+)):T\mathcal{T}(S)\to\mathbb{R}$ 被视为余切空间 $T^*\mathcal{T}(S)$ 中的元素。此外，我们还有来自 $[8]$ 的上界 $l_{m_\pm}(\lambda_\pm)\le 6\pi|\chi(S)|$；而根据 $[66]$，对于极值长度 ext$_{[c_\pm]}(\mathsf{F}_\pm)\ \le\ 3\pi|\chi(S)|$ 也有类似的上界，其中 $\chi(S)$ 是 S的欧拉示性数。

此外，Thurston 提出了一个广为研究的猜想：将拟 Fuchsian 度量 $g\in\mathcal{QF}(S)$ 映射到其凸核边界上的测度弯曲层状结构数据 $\mathfrak{B}(g):=(\{\mathrm{v14},\lambda_-)$ 的映射 $\mathfrak{B}:\mathcal{QF}(S)\to\mathcal{ML}(S)\times\mathcal{ML}(S)$，是否是到其像上的同胚？也就是说，$M$ 上的拟Fuchsian度量是否可以由其凸核边界上的测度弯曲层状结构数据 (λ_+,λ_-) 参数化？尽管这一问题在一般情形下仍未解决（见

同样，对于反德西特情形的 $[6, 37, 49, 67]$ 和 $[7]$，通过相当初等的论证可以看出，映射 $\beta(\mathcal{QF}(S))$ 的像包含于 $\mathcal{FML}(S)$ 中，即 S 上的填充的测地测度层状结构对组成的空间；也就是说，对于任意拟福克斯流形，λ_+ 和 λ_- 总是填充 S。Bonahon 利用这一性质证明了以下定理；当局限于无理的测度叶状结构情形时，我们声称定理 1.1.1 是该定理的一个类比：

定理 1.1.3。 *[5] There exists an open neighbourhood V of $\mathcal{F}(S)$ in $\mathcal{QF}(S)$ such that $\mathfrak{B}: \mathcal{QF}(S) \to \mathcal{ML}\ S \times \mathcal{ML}\ S$ is a homeomorphism between $V \setminus \mathcal{F}\ S$ and its image. Moreover V can be chosen so that $\mathfrak{B}\ V \setminus \mathcal{F}\ S = U$ is an open subset of $\mathcal{FML}\ S$ which intersects each ray 0∞ in an interval 0 .*

上述定理的一个推论是，像 $\mathfrak{B}(U \setminus \mathcal{F}(S))$ 是填充的测地测度层状结构对 $(t\lambda_+, t\lambda_-)$，当 $t > 0$ 足够小时。显然，这启发了定理 1.1.1。M 的无穷远处的测度叶状结构因而可以被视为一种新的不变量，为 $\mathcal{QF}(S)$ 在 Fuchsian 轨迹附近提供坐标，其方式类似于凸核边界 $\mathcal{CC}(M)$ 上的带测弯曲层。我们将前述讨论总结为表 1.1。我们猜想，当前结果可以推广到任意一对 $(t\mathrm{F}_+, t\mathrm{F}_-) \in \mathcal{FMF}(S)$，当 t 足够小时。

关于凸核	关于无穷远边界
关于（m_+，m_-）的 Thurston 猜想	Bers 同时一致化定理
双曲长度 $l_{m_\pm}$（$\lambda_\pm$）	极值长度 $\mathrm{ext}_{[c_\pm]}(\mathrm{F}_\pm)$
$l_{m_\pm}(\lambda_\pm) \leq 6\pi\lvert\chi(S)\rvert$	$\mathrm{ext}_{[c_\pm]}(\mathrm{F}_\pm) \leq 3\pi\lvert\chi(S)\rvert$
变分公式 (1.2) for V_C^*	变分公式 (1.1) for V_R
定理 1.1.3	定理 1.1.1

表 1.1

1.1.2 概述

我们通过证明以下唯一路径的存在性来证明定理 1.1.1：这些路径位于 $\mathcal{QF}(S)$ 中，从 Fuch- sian轨迹出发，其在无穷远处的测度叶状结构为 $(t\mathrm{F}_+, t\mathrm{F}_-) \in \mathcal{FMF}_0(S)$，其中 $t > 0$ 足够小。按照 $[5]$，基本思路是在Fuchsian轨迹处对函数$\mathfrak{F}: \mathcal{QF}(S) \to \mathcal{MF}(S) \times \mathcal{MF}(S)$ 应用反函数定理；为消除 $\mathfrak{F}$ 在 $\mathcal{F}(S)$ 处的退化，我们转而考虑爆破空间 $\widetilde{\mathcal{QF}\ S}()$。为使论证更系统化，我们在 §3.2 中建立一个必要条件：若从 Fuchsian轨迹出发的拟Fuchsian度量的一阶无穷小变形在 $\mathcal{F}(S)$ 处的一阶无穷远叶状结构中出现任意一对填充测地叶层 $(t\mathrm{F}_+, t\mathrm{F}_-)$，则这些变形必须满足该条件（命题 3.2.17）。随后在 §3.3 中，我们利用此条件构造从 Fuchsian 轨迹出发的拟Fuchsian度量的小路径 g_t，使其满足 $\mathfrak{F}(g_t) = (t\mathrm{F}_+, t\mathrm{F}_-) \in \mathcal{FMF}_0(S)$，其中 $0 < t < \epsilon_{\mathrm{F}_\pm}$，且 $\epsilon_{\mathrm{F}_\pm}$ 依赖于 $(\mathrm{F}_+, \mathrm{F}_-)$（不过我们不知道 $\epsilon_{\mathrm{F}_\pm}$ 如何依赖于这一对）。为此，我们研究无理填充对 (F, G) 对应的截面 $q^{\mathsf{F}}, q^{-\mathsf{G}}: \mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$。证明中的一个重要步骤，是将商单位丛 $UT^*\mathcal{T}(S)$ 中 $[q^{\mathsf{F}}]$ 与 $[q^{-\mathsf{G}}]$ 的交集识别为一条 Teichmüller 测地线，该测地线由函数 $\mathrm{ext}(t\mathrm{F}) + \mathrm{ext}(\mathrm{G}): \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$ 的临界点给出；这在 §3.1 中完成。在 §3.4 中，我们定义半管 Schwarzian 的概念（见 §§3.4.1），并再次利用 §3.2 中的结果来证明定理 1.1.2。第2章包含必要的预备知识。

1.2 常平均曲率曲面

在本章中（与FilippoMazzoli和Andrea Seppi合著），我们将继续对拟 Fuchsian 流形进行解析研究，特别是研究其叶为 *constant mean curvature*（CMC）曲面的 *foliations*，如下定义：

定义 1.2.1。 *A Riemannian three-manifold M homeomorphic to $\Sigma \times \mathbb{R}$ is (smoothly) monotonically foliated by CMC surfaces with mean curvature ranging in the interval (a, b) if there exists a diffeomorphism between $\Sigma \times\ a\ b$ and M which for every $H \in\ a\ b$ is an embedding of constant mean curvature H when $(,)$, $(,)$ restricted to $\Sigma \times \{H\}$.*

众所周知，存在包含多个与 $\Sigma \times \{*\}$ 同伦的闭极小曲面的拟福克斯流形，见 [1] 和 [38]。特别地，这意味着存在不具有全局单调 CMC 叶状结构的拟福克斯流形 M。事实上，若 $M \cong \Sigma \times \mathbb{R}$ 具有单调常平均曲率叶层（如定义 1.2.1 所示），则由几何最大值原理的简单应用可知， M 中与 $\Sigma \times \{*\}$ 同伦的闭嵌入极小曲面是唯一的。

关于极小曲面的唯一性，Uhlenbeck 的工作 [71]凸显了一类拟福克斯流形的重要性，该类流形后来在 [43], 中被称为 *almost-Fuchsian* ，其定义条件是存在一个主曲率位于（-1，1）内的闭极小曲面。事实上，这一条件意味着该极小曲面是唯一的，并且从该极小曲面出发的等距曲面为 M提供了一个全局叶状结构。然而，除 M 为 Fuchsian 的平凡情形外，这一等距叶状结构的叶并不具有常平均曲率。

Thurston 猜想每个近福克斯流形都由 CMC 曲面构成叶状结构。然而，据我们所知，迄今为止，拟福克斯流形中唯一已知能够由 CMC 曲面进行（单调）叶状分解的例子是 Fuchsian 流形。

在陈述我们的结果之前，让我们先关注这一方向上的一些积极结果。根据 Mazzeo 和 Pacard 的结果的一个特殊情形，任意拟福克斯流形的每个 [53], 端（即补集的每个连通分支，其中该补集是某个紧集的补集，并且同胚于 $\Sigma \times I$， I为一个闭区间）都可由 CMC 曲面光滑地进行单调叶状分解，其平均曲率取值于（-1, $-1+\epsilon$）和（$1-\epsilon$, 1）中。Quinn 在 [62], 中采用一种与本工作高度相关的替代方法重新证明了这一结果。此外，Guaraco-Lima-Pallete [36]近期的工作表明，每个拟福克斯流形都具有一个全局叶状结构，其中每个叶的平均曲率符号恒定，也就是说，该叶要么是极小曲面，要么其平均曲率在整个叶上处处不为零。

我们还要指出，关于双曲三空间中具有给定无穷远处边界曲线的常平均曲率曲面，以及拟福克斯流形中此类曲面的存在性结果，已在 [16–18] 中得到。因此，本论文这一部分的主要结果如下：

定理 1.2.2. *Let Σ be a closed oriented surface of genus ≥ 2. Then there exists a neighbourhood U of the Fuchsian locus in quasi-Fuchsian space $\mathcal{QF}$ S Σ such that every quasi-Fuchsian manifold in U is ()() ,(,) smoothly monotonically foliated by CMC surfaces with mean curvature ranging in -1 1 .*

1.2.1 方法与概述

拟福克斯流形 $M \cong \Sigma \times \mathbb{R}$ 的单调常平均曲率叶层（若存在）由几何最大值原理的标准应用可知必定唯一。更确切地说，平均曲率为 H 的叶，是 M 中与 $\Sigma \times \{*\}$ 同伦且平均曲率恒等于 H 的唯一闭曲面。

注意到，如果一个拟福克斯流形 admits 单调常平均曲率叶层，那么平均曲率必然取值于 (−1,1) 中。事实上，该叶状结构的任意叶的平均曲率必然属于 (−1,1)，参见 [15, 引理 2.2]。此外，根据前述 Mazzeo-Pacard 的结果，随着叶状结构趋近于各端，平均曲率收敛于 -1 和 1。

我们注意到，我们在下文概述的证明方法还为以下结果提供了直接证明：在 U 邻域内的拟福克斯流形 M 中，存在平均曲率为 $H \in (-1,1)$ 的*existence* 闭嵌入常平均曲率曲面。（见定理 4.2.8。）我们的证明独立于文献中的既有结果，也不依赖几何测度论技术。

定理 1.2.2 的证明的主要思想，是将 Mazzeo-Pacard 和 Quinn 的工作为每个拟福克斯流形所提供的端的叶状结构，与我们通过从 Fuchsian 流形进行“变形”而得到的紧致部分的叶状结构结合起来。.主要步骤如下

- 对于端的叶状结构，我们改编了 Quinn 在 [62], 中给出的证明，该证明依赖 Epstein 映射构造（ [23, 25]）：该构造通过“horosphere 的包络”，将定义在 $\mathbb{H}^3$ 无穷远边界（的子集）上的共形度量映射为 $\mathbb{H}^3$ 中的浸入曲面。随后，可以将常平均曲率条件转化为关于共形因子的偏微分方程，并在无限维情形下对其应用隐函数定理方法。所得到的解能够在拟福克斯流形 M 中一个大紧集的补集上给出光滑单调叶状结构，这一点则由隐函数定理的另一种应用得出。

与 Quinn 的证明相比，主要区别在于，我们改进了他的方法，以实现对于拟福克斯流形，在给定 $M \in \mathcal{QF}(S)(\Sigma)$ 的邻域 U_M 中存在由平均曲率为 $(-1,-1+\epsilon) \cup (1-\epsilon,1)$ 的常平均曲率曲面构成的单调叶状结构，其中常数 ϵ 在 U_M 上为 $uniform$ （定理 4.2.1）。

- 对于紧致部分，利用 Epstein 构造，我们再次通过无穷维空间中的隐函数定理方法，得到对于 $H \in (-1,\ 1)$ 存在常平均曲率曲面。然而在本例中，我们应用隐函数定理时所针对的初始解并不“在无穷远处”；相反，它是 Fuchsian 流形中的脐点常平均曲率曲面。换言之，我们将 Fuchsian 流形中的常平均曲率曲面 M' “变形”到邻域 $U_{M'}$ 内的附近拟福克斯流形。与上述情况类似，主要的技术困难在于对常数进行一致控制，只要我们仍处于邻域 $U_{M'}$ 内，这些常数就不能依赖于拟福克斯流形。参见定理 4.2.7。

- 证明定理 1.2.2 至此完成：我们证明这些曲面能够拼接成一个全局光滑单调叶状结构（第 4.3 节）。为此，我们综合细致分析在 $\mathcal{QF}(S)(\Sigma)$ 中构造的开集与若干几何论证，例如运用几何最大值原理；这些论证基于如下观察：从 Fuchsian轨迹经变形得到的常平均曲率曲面，在将邻域缩小后，可以假设其主曲率属于 $(-1,1)$。

第2章

预备知识

2.1 双曲空间

为了描述 n 维双曲空间的上半空间模型，我们令 $\{\mathbb{H}^n := (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中配备度量 $\frac{dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2}{x_n^2}$ 的上半平面。本文始终只考虑 $n = 2,3$ 的情形。

在此模型中，无穷远边界 $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ 被认作 $\mathbb{R}^{n-1} \cup \infty$，它不过是 $(n-1)$-球面 S^{n-1}。

我们将 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ 称为 $\mathbb{H}^n$ 的保向等距变换群；在 $n = 2,\ 3$ 的情形下，它分别与群 $PSL_2(\mathbb{R})$ 和 $PSL_2(\mathbb{C})$ 相对应。对于 $n = 2,\ 3$，该作用可通过 S^{n-1} 的共形微分同胚唯一延拓至 $\partial_\infty \mathbb{H}^n$。$\mathbb{H}^n$ 的等距变换是保持度量的自映射。我们还将关注这样一个事实：在低维情形中，双曲几何与一维复分析之间存在有趣的相互作用。在维数为2时，可以将上半平面模型写作 $H = \{z \in \mathbb{C} | z = x + \boldsymbol{i}y,\ y > 0\}$，其度量由 $\frac{|dz|^2}{y^2}$ 给出。这里我们再次看到，$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 与 H的双全纯映射群相对应。

在维数 3 的情形下，我们看到，$\mathbb{H}^3$ 的每个等距变换都由其在无穷远球面 $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ 上的共形作用唯一确定，而后者是复射影空间 $\mathbb{C}P^1$。这是说明 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ 与圆盘上的莫比乌斯变换群 M¨ 同一的一种方式，即 $PSL_2(\mathbb{C})$。

2.2 双曲曲面与3维流形

我们将 S 视为亏格为 $g \geq 2$ 的闭曲面。若 S 上有图册 (U_i, ϕ_i)，其中 $\phi_i \colon U_i \to \mathbb{H}^2$ 是坐标图，且在每个交集 $U_i \cap U_j$ 上，复合映射 $\phi_i \circ \phi_j^-$ 局部都是 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中元素的限制，则称 S 为双曲曲面。另一种定义是：如果 S 带有一个截面曲率恒为 -1 的完备黎曼度量，则称其为闭双曲曲面。由高斯-博内定理可知，只有当 $g > 1$ 时，S 才能带有这样的度量，因此这就导出了我们的假设。在这种情况下，还可以说 S 与 $\mathbb{H}^2$ 关于 Γ 的商空间等距，其中 Γ 是 $PSL_2(\mathbb{R})$ 的一个离散子群。

另一方面，c上的复结构由 S上的图册 $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$组成，其中 $\phi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{C}$是全纯映射，而转移函数 $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$是 ϕ_i（$U_i \cap U_j$）上的双全纯映射。给定一个复结构 c，我们考虑其在与恒等式同伦的 S 的微分同胚作用下的等价类，并将其记为 $[c]$。

现在考虑 S上的黎曼度量 g，我们可以定义：

定义 2.2.1。 *A conformal class on a surface S is an equivalence class of Riemannian metrics $[g]$,where*

$$[[g]] = \left\{e^{2u} g | u : S \to \mathbb{R}\right\}$$

and u is smooth.

当 S 定向时，在 S 上的复结构的等价类（模同伦于恒等式的微分同胚）与 S 上的共形类（同样模同伦于恒等式的微分同胚）之间存在一一对应关系。因此，我们也可以将 Teichm¨uller 空间视为 S 上的共形类空间（见 [70]）。我们将 S 上的共形结构和复结构均记作 c。共形类中的 S 上的黎曼度量可局部表示为 $g(z) = \rho(z)dzd\bar{z}$，其中 $\rho(z) \geq 0$ 是 $S \to \mathbb{R}_{>0}$ 上的光滑函数。

现在我们将回顾一个关于高斯曲率或内蕴曲率 K_g 的变化的重要引理，该曲率与黎曼度量 g 相关，并且度量在同一共形类中改变共形因子时也会随之变化。关于这一结果的参考文献，除其他文献外，可见 [43]:

引理 **2 2 2** *Let g and g' be two Riemannian metrics on S in the same conformal class and let $u \ S \to \mathbb{R}$。 .. : () be a function such that $g' = e^{2u}g$. Let K_g and $K_{g'}$ be the Gauss curvatures associated to g and g' respectively. Then $K_{g'} = e^{-2u} \ -\Delta_g u + K_g \quad$ where $\Delta_g u$ is the Laplace-Beltrami operator for the metric g.*

这里采用的约定是， Δ_g 为通常分析学中拉普拉斯算子的相反数。若将 g 视为共形度量，则共形类 g 中的双曲度量 m 由 $m = e^{2u}g$给出，其中 u 满足:

$$-1 = e^{-2u}(-\Delta_g u + K_g)$$

因此，在维数为 2 时， S上的每个共形类都对应唯一的双曲度量，同时也对应一个复结构的等价类。

曲面上的双曲结构定义可推广到三维流形。若一个 3维流形带有截面曲率为 -1的完备黎曼度量，我们就称其为双曲流形。另一种表述是，可以将其视为商空间 $\mathbb{H}^3$，其中的离散子群属于 PSL_2（$\mathbb{C}$）。我们还指出，PSL_2（$\mathbb{R}$）和 PSL_2（$\mathbb{C}$）的此类子群分别称为 Fuchsian 群和 Kleinian 群。

2.3 Fuchsian、近福克斯与拟福克斯流形3

我们将考虑此处的 3 维流形 M，它们是商空间 $\mathbb{H}^3/\Gamma$，其中 Γ 是 $PSL_2(\mathbb{C})$ 的离散子群。与 $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{H}^3$ 的作用相对应的极限集 Λ_Γ，是 Γ 的轨道的聚点集合，可以证明它是 $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ 的子集。当 Γ 是 $PSL_2(\mathbb{R})$ $\subset PSL_2(\mathbb{C})$ 的离散子群时，我们称 M 为 Fuchsian 流形。在这种情况下， Λ_Γ 是 $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ 上的一个圆。它可以看作是由该作用保持不变的 $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ 的全测地副本的边界。

如果 3 维流形 M 的 $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ 满足 Λ_Γ 是一条拟圆，我们就称其为拟福克斯流形。具体而言，存在一个拟共形映射 $\phi\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ 和一个福克斯子群 Γ_0，使得 $\Gamma := \phi^{-1} \circ \Gamma_0 \circ \phi$。为简便起见，如果 Λ_Γ 是 $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ 上的一条 Jordan 曲线，我们就可以将 Γ 视为拟福克斯流形。我们还想考察准 Fuchsian 空间的另一个子空间，即近福克斯流形。其定义为包含一个闭极小曲面的拟福克斯流形，且该曲面的主曲率位于区间 $(-1, 1)$ 内。这里还要回顾一下，曲面的平均曲率为 0 时，该曲面就是极小曲面。

Fuchsian 流形与拟福克斯流形的另一个特征性区别，在于它们的凸包几何形状不同。按照上述设定，给定极限集 Λ_Γ，我们可以考虑它在 $\mathbb{H}^3$中的凸包。在 Fuchsian 情形下，由于 Λ_Γ 是一个圆，我们得到由作用保持的 $\mathbb{H}^2$ 的全测地副本。在拟福克斯情形下，凸包是一个闭凸区域，取商空间后便成为凸核 $\mathcal{CC}(M)$。因此，凸核是包含在拟福克斯流形中的最小非空凸子流形，并且有两个边界分支，因为它是 $S \times [-1, 1]$。

此外，我们还有 Fuchsian、近似 Fuchsian 或拟福克斯流形的无穷远边界。 Γ 的作用在补集（$\partial_\infty\mathbb{H}^3 \setminus \Lambda_\Gamma$）上自由且适当不连续；该补集也称为不连续区域，它有两个连通分支。 M的无穷远边界记为 $\partial^+_\infty M$， $\partial^-_\infty M$，它们分别是 $\partial_\infty\mathbb{H}^3 \setminus \Lambda_\Gamma$各分支的商空间，且每个都与 S同胚。

2.4 Teichm¨uller空间

We 现在简要介绍与亏格为 $g \geq 2$的闭曲面相关联的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$。

定义 **2 4 1** *The Teichmüller space* $\mathcal{T}$ S *is the space equivalence classes of complex structures on* ..... () S *under diffeomorphisms isotopic to the identity.*

由于每个共形类或复结构类中都唯一存在一个双曲度量，因此我们也可以将 $\mathcal{T}(S)$ 定义为 S 上双曲度量的等价类空间，其中等价关系取为恒等式的同伦微分同胚。

现在回顾一下，无穷远边界 $\partial^{\pm}_{\infty}M$ 是 S 的两个副本，它们分别带有各自的复结构。事实证明，当 M 为 Fuchian 时，复结构与双曲度量是相同的。因此，如果将 $\mathcal{F}(S)$ 定义为 M 上 Fuchsian 度量的等价类，其中等价关系取为同伦于恒等式的微分同胚，那么 $\mathcal{F}(S) \cong \mathcal{T}(S)$。

同样，将 $\mathcal{QF}(S)$ 称为 M 上拟Fuchsian度量的等价类，其中度量在与恒等映射同伦的微分同胚下等价。根据 Bers同时一致化定理，有 $\mathcal{QF}$ S ≅ ( ) ( ) ( )。
$\mathcal{T}$ $\partial^{+}_{\infty}M$ $\times \mathcal{T}$ $\partial^{-}_{\infty}M$

现在，给定两个共形结构 c, c' 我们可以定义它们之间的拟共形映射 .

定义 **2 4 2** *Let* , $' \subset \mathbb{C}$ *be two domains and* ϕ $\rightarrow$ $'$ *be a homeomorphism with continuous* . . . ΩΩ : Ω Ω *partial derivatives with respect to* z *and* $\bar{z}$. *We denote* ϕ *to be* k*-quasiconformal if*

$$k_{\phi}(z) = \frac{|\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z)| + |\frac{\partial \phi}{\partial z}(z)|}{|\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z)| - |\frac{\partial \phi}{\partial z}(z)|} \leq k$$

for almost every z ∈Ω。

We 将表示 $\frac{\partial \phi}{\partial w}$ ，记作 f_{w}。与映射 ϕ 相关联的贝尔特拉米微分 μ 定义为 t he 比值

$$\mu_{\phi} = \frac{\phi_{\bar{z}}}{\phi_{z}}$$

它几乎处处有定义，是可测的，并满足 $||\mu||_{\infty} < 1$。等价地， k_{ϕ} 可表示为 $\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$，其上界为 $k = \frac{1+||\mu||_{\infty}}{1-||\mu||_{\infty}}$，而 k_{ϕ} 称为 ¬ϕ的偏心率系数。我们还注意到，$(S,$ [c])上的贝尔特拉米微分是一个类型为 $(-1,$ 1) 的张量。我们将利用这一点来定义 S 上的全纯二次微分，并说明它与 $\mathcal{T}(S)$ 的切空间和余切空间之间的关系。

2.5 全纯二次微分

(S, c)上的全纯二次微分 q 是一个类型为 (2, 0) 的张量，在局部坐标下可写为 $f(z)dz^2$，其中 f 是全纯函数。全纯二次微分空间记作 $Q(S)$，它在 $\mathcal{T}(S)$上构成一个丛，其中 $\mathcal{T}(S)$被视为 S 上模去与恒等映射同伦的微分同胚后所得的复结构空间。等价类 $[c] \in \mathcal{T}(S)$上的纤维记作 $Q(S, [c])$，它是一个向量空间，可以证明其实维数为 $6g - 6$（例如，利用黎曼-罗赫公式）。此外，全纯二次微分 q 在 S 上有零点，其阶数由 q的局部泰勒展开中零点的阶数定义。具体而言，若 q 在点 $p \in S$ 处有一个 k 阶零点，这意味着，对于以 p 为中心的 S上的任意坐标图， q 在局部可表示为 $f(z)z^k dz^2$，其中 $f(z)$是全纯函数，且 $f(0) \neq 0$.. 此外，由黎曼-罗赫定理等可知， q 在 S 上所有零点的阶数之和为 $4g - 4$。空间 $Q(S)$还带有一种自然分层，该分层取决于 q零点的阶数。有关这一主题的参考资料，请参见例如 [41], [32] 。

定义 2.5.1。*Let* k *be a* $\bar{n}$*-tuple of integers* $(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ *such that* $\sum_i^n k_i = 4g - 4$. *The stratum* $Q^k(S)$ $\bar{is}$ *the set of holomorphic quadratic differentials* q *such that the degrees of the zeroes of* q *are given*

by the k_i. We say that q is generic, if $k_i = 1$ for all i.

只有 $4g-4$ 个简单零点的全纯二次微分称为一般二次微分，众所周知，它们在 $\mathcal{Q}(S)$ 中构成一个稠密开子集，记作 $\mathcal{Q}_0(S)$。（见 [20]）。

注意，贝尔特拉米微分与全纯二次微分的乘积给出一个 $(1,1)$ 张量。令 $B(S,c)$ 表示 (S,c) 上可测贝尔特拉米微分所构成的向量空间，其中一个元素在局部表示为 $\mu = b(z)\frac{d\bar{z}}{dz}$。由此，我们得到 $\mu \in B(S,c)$ 与 $q \in Q(S,c)$ 之间的自然复配对：

$$\langle q, \mu \rangle = \int_{(S,c)} q\mu dz d\bar{z}$$

由此可得，见 [41], ：

命题 2.5.2。 *There is an isomorphism of vector spaces between*

$$T_{[c]}\mathcal{T}(S) \cong B(S,c)/Q(S,c)^{\perp} \quad and \quad T^*_{[c]}\mathcal{T}(S) \cong Q(S,c)$$

where $Q(S,c)^{\perp} = \{\mu \in B(S,c) | \langle \mu, q \rangle = 0, \ \forall q \in Q(S,c)\}$.

由此，我们可以在 $T^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$ 上定义魏尔-彼得森度量：

$$\langle q_1, q_2 \rangle_{WP} = \int_S \frac{f_1(z)\overline{f_2(z)}}{\rho(z)} dz\overline{dz}$$

其中，同调类 $[c]$ 中的双曲度量可表示为 $\rho(z)|dz|^2$，而 $q_i = f_i(z)dz^2$ 是 $i = 1$、2 个全纯二次微分，属于 $Q(S,c)$。通过对偶性，这也在切空间 $T_{[c]}\mathcal{T}(S)$ 上诱导出一个内积。魏尔-彼得森度量赋予 $\mathcal{T}(S)$ 负曲率黎曼流形的结构。另一方面，余切空间 $T^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$ 上的 L^1-范数定义为：

$$||q||_1 = \int_{(S,c)} |f(z)| dz \wedge \overline{dz}.$$

通过贝尔特拉米微分与全纯二次微分之间的对偶性，可以在 $T\mathcal{T}(S)$ 上诱导出 Teichm¨uller 范数。相关度量称为 Teichm¨uller 度量 $d_{\mathcal{T}(S)}$，其一种表达方式为：

$$d_{\mathcal{T}(S)}([c],[c']) := \frac{1}{2}\inf\left\{\log k_\phi \mid \phi : (S,[c]) \to (S,[c']) \text{ quasiconformal isotopic to the identity}\right\} \tag{2.1}$$

例如，可参阅 [52],以了解这一主题的更多详情。

2.6 S 上的测度叶状结构及空间 $\mathcal{MF}(S)$

按照 [39] ，我们定义：

定义 2.6.1 *A smooth measured foliation on S with singularities $\{p_1,\ldots,p_n\}$ of order $\{k_1,\ldots,k_n\}$ (respectively) is given by an open covering U_i of $S \setminus \{p_1,\ldots,p_n\}$ and open sets $\{V_1,\ldots,V_n\}$ around $\{p_1,\ldots,p_n\}$ (respectively) along with smooth non-vanishing real valued 1-forms $d\phi_i$ defined on U_i such that:*

- $d\phi_i = \pm d\phi_j$ *on* $U_i \cap U_j$
- *around each p_l there is an open neighbourhood V_l and a chart (x_1, x_2): $V_l \to \mathbb{R}^2$ such that $d\phi_i = \Im(z^{\frac{k_l}{2}+1}dz)$ on $U_i \cap V_j$ where $z = x_1 + ix_2$.*

沿着 $d\phi_i$ 消失的 S 上的浸入线，在 $S\setminus(p_1,\dots,p_n)$ 上给出一个叶状结构 F，并且在 p_j 处有一个 (k_j+2) 叶瓣奇点。给定 S 上一条避开零点（ $p_1,p_2,\dots,p_n$ ）的弧 γ，测地叶层 F 为 γ 赋予一个横截测度，其定义为 $\mu_{\mathsf{F}}(\gamma)=\int_\gamma|d\phi|$，其中，$|d\phi|$ 在每个 U_i 上的限制由 $|d\phi_i|$ 给出。

这个测度在保持 γ 的端点不变且保持 γ 与给定叶状结构交集的横截性的同痕变换下是不变的。也就是说，如果 γ' 与 γ 同痕，具有相同的端点，并且在每个时刻都保持横截性，那么 $\mu_{\mathsf{F}}(\gamma)=\mu_{\mathsf{F}}(\gamma')$。因此，给定一个类 $[\gamma]$，我们定义：

定义 2.6.2. *The intersection number of* F *with a isotopy class of closed curves* $[\gamma]$ *avoiding the singularities of is defined* $i\,[\gamma] = \inf_{\gamma\in[\gamma]} i\,\gamma = \inf_{\gamma\in[\gamma]}\mu_{\mathsf{F}}\,\gamma$ *where the infimum is taken over all*$\mathsf{F}(,\mathsf{F})\inf(,\mathsf{F})\inf()$ $\gamma\in[\gamma]$.

我们可以看到，交数定义了一个函数：从 S 上的闭曲线同痕类集合映射到 $\mathbb{R}_{>0}$，我们定义如下，例如 [27]:

定义 2.6.3 *Two measured foliations and on S are said to be equivalent if they define the* ..... F G () *same intersection number. The space of equivalence classes of measured foliations on S will be denoted as* $\mathcal{MF}\ S$.

空间 $\mathcal{MF}(S)$ 也可以通过两个叶状结构的拓扑等价来定义，这种等价由怀特海德变换产生，但我们不对此展开说明。此外，由 [39] 中的命题 2.1 还可知，测度叶状结构 F 可以具有 $4g-4$ 叶瓣奇点，其中按重数计数。

在 $\mathcal{MF}(S)$ 上还存在一个 $\mathbb{R}_{>0}$ 的作用，定义为 $t.\mathsf{F}\mapsto t\mathsf{F}$，其中后者表示通过 1-形式 $d\phi_i$ 将 t 相乘后得到的测度叶状结构；根据定义 2.6.1，这些 1-形式赋予我们测度叶状结构 F。空间 $(\mathcal{MF}(S)\setminus 0)/\mathbb{R}_{>0}$ 称为射影化测度叶状结构空间，记作 $P\mathcal{MF}(S)$，并且它与 $\mathcal{T}(S)$ 的瑟斯顿边界相对应。我们将 $[\mathsf{F}]$ 记作 F 在 $P\mathcal{MF}(S)$ 中的等价类。有兴趣的读者可以参阅例如 [27],，以了解这一主题的更多细节。

我们还引入 了无理测度叶状结构的概念，如 下所示:

定义 2.6.4 *A measured foliation is said to be arational if all its singularities have* 3 *prongs and if* ..... *there are no leaves of the foliation joining the singularities.*

我们将连接奇点叶瓣的叶状结构的叶称为鞍连接。

2.7 双曲3 流形中的极小曲面和常平均曲率曲面

设 $i\colon S\to M$ 是从 S 到 M 的浸入。与之相关的数据包括定义在 S 上的第一基本形式 I，它是从环境空间继承而来的 S 上的诱导度量；以及记作 $I\!I$ 的第二基本形式，它是切丛 TS 上的对称双线性形式。对于二元组 $(I,\ I\!I)$，存在唯一的自伴算子 B，称为形算子，并满足关系式

$$I\!I(x,y)=I(Bx,y)=I(x,By)$$

其中 $x,\ y\in T_pS,\ \forall p\in S$。我们还可以定义一个与该浸入相关的量，称为第三基本形式 $I\!I\!I$，其定义为 $I\!I\!I(x,\ y)=I(Bx,\ By)=I(B^2x,\ y)$，其中 $x,\ y,\ B$ 如前所述。参考文献见 [12]。

B 的特征值给出了与该浸入相关的主曲率。由于极小浸入是指平均曲率为零的浸入，因此我们也可以定义：

定义 2.7.1. *An immersion is minimal if and only if* B *is traceless.*

另一方面，假设给定 S 上的光滑黎曼度量 g 和 TS 上的对称双线性形式 h。如果满足以下条件，则二元组（$g,\ h$）将对应于 S 的浸入数据：

1. Codazzi 方程，$d^{\nabla}h=0$，其中 ∇ 是 g的 Levi-Civita联络。

2. Gauss 方程， $K_I = -1 + \det_g(h)$，其中 K_g 表示高斯曲率或内蕴曲率 of 度量 g。

现在我们定义近福克斯流形的概念：

定义 2.7.2 *A quasi-Fuchsian hyperbolic 3-manifold $M \cong S \times \mathbb{R}$ is called almost-Fuchsian if it contains a closed minimal surface homeomorphic to S with principal curvatures in $(-1, 1)$.*

给定 M 中的一个浸入曲面，Codazzi 方程的一个结果是，第二基本形式的无迹部分（$I\!I$）$_0$ 等于某个全纯二次微分 q 的实部。现在，根据 [43] 的推论 2.9，我们可以证明，如果 M 是一个近福克斯流形，那么其中包含的闭极小曲面是唯一的。这使我们能够按照 [43], 定理 2.12，用 $T^*\mathcal{T}(S)$ 中的一个开子集 Ω 对近福克斯双曲流形进行参数化：

T定理 2.7.3。 *There exists an open subset $\Omega \subset T^*\mathcal{T}(S)$ such that we have the following bijection :*

1. Given a point $([c], q) \in \Omega$, there exists a unique almost-Fuchsian metric on M such that the unique minimal surface has first fundamental form conformal to $[c]$ and the second fundamental form $I\!I$ is $\Re(q)$.

*2. Given a almost-Fuchsian metric $g \in \mathcal{AF}($ S *on* M *the induced metric and second fundamental form* $)$, Ω *of its unique minimal surface are specified by a point in* .

现在我们将回顾另一个定义，它定义了一个常平均曲率 H-曲面。

定义 2.7.4 *An immersed surface S in M is called a CMC H-surface if $B = H$ for all points* ..... $\mathrm{tr}()$ *on S.*

现在我们将回顾一个在本论文所有章中都会用到的工具：

2.8 拟福克斯流形在无穷远处的 Schwarzian导数

回顾一下，无穷远边界 $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ 被识别为复射影空间 $\mathbb{C}P^1$。分支 $\partial^+_\infty M$和 $\partial^-_\infty M$是在 $\mathbb{C}P^1$ 中分别取 $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ 作用下的域的商空间，因此它们带有规范的 $\mathbb{C}P^1$-结构，这是 S上的一个（G, X）结构，其中有 $G = PSL_2(\mathbb{C})$ 和 $X = \mathbb{C}P^1$ [21]。也就是说，我们有一个由图册 (U_α, ϕ_α) 给出的 S的开覆盖，使得 $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}P^1$ 是映射到 $\mathbb{C}P^1$ 中开域的坐标图，并且在两个坐标图的重叠部分 $U_i \cap U_j$ 上，坐标变换映射 $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ 在局部上是某个 M¨obius 变换的限制。将 S 上的 $\mathbb{C}P^1$-结构在与恒等式同伦的微分同胚下的等价类空间记为 $\mathcal{CP}(S)$。

现在，给定一个 $\mathbb{C}P^1$-结构于 S，我们有一个底层复结构，因为 M¨obius 变换是双全纯映射；对于 $\partial^\pm_\infty M$，它在等价意义下恰好就是 $[c_\pm]$。这为我们提供了一个自然的遗忘映射 $\mathcal{CP}(S) \to \mathcal{T}(S)$，将 $\mathbb{C}P^1$-结构映射到底层复结构。根据一致化定理，任意复结构 c于 S都可以表示为某个离散子群 Γ_c在 $PSL_2(\mathbb{R})$ 上的作用于 $\mathbb{H}^2$所得的商空间。由于 $\Gamma_c < PSL_2(\mathbb{C})$ 也是如此，并且 $\mathbb{H}^2$可以看作单位圆盘 $\Delta \subset \mathbb{C}P^1$，我们便得到一个与复结构相关联的规范 $\mathbb{C}P^1$-结构，称为标准Fuchsian复射影结构；这给出了一个连续截面 $\mathcal{T}(S) \to \mathcal{CP}(S)$。

Schwarzian导数给出了遗忘映射 $\mathcal{CP}(S) \to \mathcal{T}(S)$ 的纤维参数化。一般来说，给定一个区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 局部单射全纯映射$u : \Omega \to \mathbb{C}$ 的 Schwarzian导数是一个全纯二次微分，定义如下：

$$\sigma(u) = ((\frac{u''}{u'})' - \frac{1}{2}(\frac{u''}{u'})^2)dz^2$$

一种得到上述右侧表达式的方法是考虑唯一的莫比乌斯变换 M_u，它与 u 在二阶导数上相匹配。上述表达式恰好是 u 和 M_u 的局部泰勒级数展开中三阶项之差（见 [41]的命题 6.3.3）。此外，它们还有两个显著性质：

- 对于两个局部单射全纯映射 u, $v : \Omega \to \mathbb{C}$ 我们有 $\sigma(u \circ v) = v^*\sigma(u) + \sigma(v)$

- $\sigma(A) = 0$ 当且仅当 A 是一个莫比乌斯变换。

特别地，在给定复射影结构与标准Fuchsian复射影结构之间，存在一个在右共轭意义下由 M¨obius 变换确定的唯一映射；该映射相对于底层的典范复结构是全纯的。根据上述性质，这个全纯映射的 Schwarzian导数可以用与坐标图无关的方式定义。这称为相对于标准Fuchsian复射影结构的复射影结构的施瓦茨参数化（见 [21], [65]）。当 $M \in \mathcal{QF}(S)$ 时， $\partial_\infty \mathbb{H}^3 \setminus \Lambda_\Gamma$ 的各个分支按照构造都具有与之相关的非平凡 Schwarzian 导数；取商空间后，这些导数下降为 $\partial^{\pm}_\infty M$ 上的两个全纯二次微分。因此我们定义：

定义 2.8.1. *The Schwarzians at infinity σ_+ and σ_- are the holomorphic quadratic differentials obtained on $\partial^{\pm}_\infty M\ [c_+]$ and $\partial^{\mp}_\infty M\ [c_-]$ by the Schwarzian parametrisation of the $\mathbb{C}P^1$ structures on $\partial^{\pm}_\infty M\,(,)\,(,)$ with respect to the corresponding standard Fuchsian complex projective structure.*

还要注意，根据上述第二个性质，当 $M \in \mathcal{F}(S)$ 时，无穷远处的 Schwarzian 导数为零。更重要的是，从这段讨论中我们可以看出，借助这一点，通过考察在无穷远处一端出现的 Schwarzian 导数和复结构，我们可以用 $\mathcal{Q}(S)$ 对拟福克斯流形进行另一种参数化。因此，我们可以构造一个定义良好的映射

$$\mathcal{S} : \mathcal{QF}(S) \to \mathcal{Q}(S)\ . \tag{2.2}$$

这里 $\mathcal{Q}(S)$ 表示 $\mathcal{T}(S)$ 上的全纯二次微分丛，其在点 $(S, [h])$ 上的纤维与向量空间 $H^0((\Sigma, h)\ K^2)$ 重合，其中 K 表示 $(S, [h])$ 的典范除子。因此，空间 $\mathcal{Q}(S)$ 是一个维数为 $3g - 3$ 的复流形，其中 g 表示 S 的亏格。事实上，映射 $\mathcal{S}$ 是单射（另见下文关于其逆映射构造的讨论）；而 $\mathcal{QF}(S)$ 和 $\mathcal{Q}(S)$ 是实维数相同的流形，因此域不变性定理表明，其像是 $\mathcal{Q}(S)$ 的一个开子集。

2.8.1 构造逆映射

我们常会用到 $\mathcal{S}$ 的逆映射，它定义在 $\mathcal{QF}(S)$ 的像上。因此，简要讨论其显式构造会很有用。一般而言，给定连通开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯二次微分 q，存在局部单射全纯映射 $f_q : \Omega \to \mathbb{C}$，使得 $S(f_q) = q$，参见 [59] 和 [40, 命题 6.3.7]。根据上文讨论的基本性质， f_q 在相差一个 M¨obius 变换的意义下唯一。也可以看出，经过适当归一化的 f_q 平滑地依赖于 q。

为将其应用于我们的情形，我们考虑 Σ 上的双曲度量 h 和 $\phi \in H^0(\Sigma,\ h)\ K^2$，并将 $(\Sigma,\ h)$ 实现为 Poincar´e 圆盘 $\mathbb{D}$ 除以双全纯映射离散群 Γ_h 后得到的商空间。接着，我们可以将 ϕ 提升为 $\mathbb{D}$ 上的 Γ_h-不变全纯二次微分 ϕ，并找到一个局部单射全纯映射 $f_{\tilde{\phi}} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$，其 Schwarzian 导数等于 $\tilde{\phi}$。由于 $\tilde{\phi}$ 在 Γ_h 的作用下保持不变，因此我们有

$$S(f \circ \gamma) = \gamma^* S(f) = \gamma^* \tilde{\phi} = \tilde{\phi} = S(f)$$

对每个 $\gamma \in \Gamma_h$ 均成立。我们推得，对于任意 $\gamma \in \Gamma_h$，存在一个 Möbius 变换 $\zeta = \zeta(\gamma)$，使得 $f \circ \gamma = \zeta(\gamma) \circ f$，从而得到一个表示 $\zeta : \Gamma_h \to \mathrm{PSL}(2,\ \mathbb{C})$。这一构造恰好是映射 $\mathcal{S}$ 的逆映射，具体而言，若 $f : \mathbb{D} \to \Omega^+$ 是与第2.2节中所述拟福克斯流形 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ 相关联的双全纯映射，且 h 和 ϕ 分别是 Σ 上诱导的双曲度量和全纯二次微分，则 $f_{\tilde{\phi}} = f$ 与表示 ζ 的像均与拟福克斯群 Γ 相同。

第3章

拟福克斯流形在无穷远处的测地叶状结构

现在，我们将关注论文的第一部分，即在靠近 Fuchsian 轨迹的拟福克斯流形的无穷远边界上实现测地叶状结构。

3.1 从 $Q(S)$ 以及由全纯二次微分实现的测地叶状结构。

现在，给定 $q \in Q($S,w S c $z\ dz^2$ dw^2 $z \mapsto$),
在其零点之外，我们总可以在 $= \int \sqrt{q}$ 上进行局部坐标变换，使得 $q = f()$ 关于该坐标具有局部表达式。若记 $w = w_1 + \mathbf{i}w_2$，则全纯二次微分 dw^2 以典范方式赋予 $\mathbb{C}$ 两种测地叶状结构:

- 水平测地叶层由 $w_2 =$ const. 给出的浸入线组成，即 $\mathbb{C}$ 的水平线。其横截测度由 $|\Im\sqrt{dw^2}| = |dw_2|$ 给出。
- 垂直测地叶层由浸入线构成，沿这些线 $w_1 =$ 为常数；也就是说，它们是 $\mathbb{C}$的垂直线。其横截测度由 $|\Re\sqrt{dw^2}| = |dw_1|$给出。

此外请注意，二次微分 $|dw^2|$ 的水平测度叶状结构（分别为垂直测度叶状结构）给出了 $\mathbb{C}$上的所有水平线（分别为垂直线），这也启发了相关术语的命名。因此，我们定义:

定义 3.1.1。 *The horizontal measured foliation*水平[c]（q） *(resp. vertical measured foliation* 垂直[c]（q）*)*
of q on S c is a smooth singular measured foliation with singularities at the zeroes of q which is obtained （, ）, , :
locally by pulling back the horizontal measured foliations (resp. vertical measured foliation) of dw^2 under
the change of coordinate $z \mapsto w$
$= \int \sqrt{q}$ *defined above. The transverse measure for the horizontal measured*
foliation (resp. vertical measured foliation) is given by $|\Im\sqrt{q}|$ (resp. $|\Re\sqrt{q}|$).
如果测地叶层 F 由全纯二次微分 q 实现，那么在 q 具有 k 阶零点的位置，F 有一个 $k+2$ 阶叶瓣。此外，如果 q 在局部坐标中表示为 dw^2，那么 $-q$ 无非就是微分 $-dw^2$，其水平（分别为垂直）叶状结构由 $\mathbb{C}$ 上的垂直（分别为水平）直线给出。因此，我们得到如下简单但重要的注记:

注记 **3 1 2** [c] *q is measure equivalent to* [c] *$-q$ in $\mathcal{MF}$ S for all holomorphic quadratic dif-* . . . hor() ver() () (,)
ferential $q \in Q$ S c .

现在我们回顾 Teichm¨uller 的一个著名定理，该定理使我们能够用测度叶状结构来解释拟共形变形（例如参见 [52]）：

定理 **3 1 3** *Given two conformal classes $[c]$ and $[c']$ in $\mathcal{T}$ S there exists an unique quasi-conformal* ... ():
map ϕ $[c] \to [c']$ with minimal eccentricity coefficient among all quasi-conformal maps from $[c]$ to $[c']$. The

associated Beltrami differential μ is of the form $k\frac{|q|}{q}$ for some unique holomorphic quadratic differential $q \in T^*_{[c]}\mathcal{T}\ S$ with $||q||_1 = 1$ and for some $k \in [0,1$ — $0)$

. The quadratic differential q is denoted as the initial( ) quadratic differential of the map. There is a quadratic differential $q' \in T^*_{[c']}\mathcal{T}\ S$ denoted as the terminal quadratic differential with the property that the map ϕ takes zeroes of q to zeroes of q' of the same order.

In the natural local coordinates $z = x + iy$ of q in the complement of its zeroes, and the natural coordinates$w = x' + iy'$ for q', we have:

$$x' = \sqrt{k}x, y' = (1/\sqrt{k})y$$

.

根据上述内容，方程 (2.1) 中定义的度量 $d_{\mathcal{T}(S)}$ 是 $\mathcal{T}(S)$ 上的度量。此外，对于给定的 $(S,\ c)$、满足 $||q||_1 = 1$ 和 $t \geq 0$ 的二次微分 $q \in T^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$，存在一个共形类 $(S,\ [c_t])$，以及唯一的极值映射 $\phi_t : (S,\ c) \to (S,\ [c_t])$，使得：

$$d_{\mathcal{T}(S)}([c],[c_t]) = \frac{1}{2}\log k_{\phi_t}$$

取 $\log\ k_{\phi_t} = 2t$，可知映射 $\mathbb{R}_{>0} \to T^*\mathcal{T}(S) \cong Q(S)$ 在满足 $t \mapsto [c_t]$ 时的像，是 $\mathcal{T}(S)$ 中一条关于度量 $d_{\mathcal{T}(S)}$ 的适当嵌入测地线；该测地线称为以初始二次微分 q 为初始条件的 Teichm¨uller 测地线。这也使度量成为完备度量（更多细节请参见 [52] ）。

3.1.1 Hubbard-Masur 定理与截面 q^{F} 和 $q^{-\mathsf{F}}$

现在定义一个映射 hor: $Q(S,\ c) \to \mathcal{MF}(S)$，它将全纯二次微分 q 映射到其水平测地叶层 $\mathrm{hor}_c(q)$，并考虑其在 $\mathcal{MF}(S)$ 中的像。那么根据 [39] （另见 [42], [74]）：

定理 3.1.4. *The map* $\mathrm{hor}_c : Q(S,c) \to \mathcal{MF}(S)$ *is a homeomorphism.*

注记 3.1.5。 *Given any measured foliation* F *on Riemann surface, we may not find a holomorphic quadratic differential realising it as its horizontal measured foliation, for example notice the example in § 2 of Chapter II of [39]. However as noted in the paper, this issue can be taken care of as according to Proposition 2.2 of [39] as in the equivalence class of in $\mathcal{MF}$ S F ( ) there exists a representative that can be realised by a holomorphic quadratic differential.*

为此，我们将考虑该映射的逆映射；对于固定的叶状结构 F，它将给出 $T^*\mathcal{T}(S)$ 的截面。定义如下：

定义 3.1.6. *For a given equivalence class of foliation* $\mathsf{F} \in \mathcal{MF}(S)$ *define*

$$q^{\mathsf{F}} : \mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$$

*to be the map which associates to each equivalence class of complex structure $[c]$ on S the unique holo- ,,*hor( ) F *morphic quadratic differential q_c^{F} such that $_c\ q_c^{\mathsf{F}}$ is measure equivalent to .*

我们将与 $[c]$ 相关联的全纯二次微分记为 $q^{\mathsf{F}}_{[c]}$。事实上，若考虑垂直测度叶状结构而非水平测度叶状结构，Hubbard-Masur 定理仍然成立，因此我们可以考虑映射

$$q^{-\mathsf{F}} : \mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$$

该映射将 S 上的复结构 $[c]$ 对应到唯一的全纯二次微分 $q^{-\mathsf{F}}_{[c]}$，使得 $q^{-\mathsf{F}}_{[c]}$ 在 $(S,[c])$ 上的垂直测度叶状结构与 F 测度等价。因此，我们可以将注记 3.1.2 改写如下：

注记 3.1.7。 *For a given measured foliation* $\mathsf{F} \in \mathcal{MF}(S)$ $q^{-\mathsf{F}}_{[c]} = -q^{\mathsf{F}}_{[c]}$ *for any $[c]$ in $\mathcal{T}(S)$。*

这些截面是 C^0，特别是它们不是 C^1 ([63])。此外，根据 Masur 在 [51] 中的一个结果可知，当 q 是一般的时，截面 $q^{+\mathsf{F}}, q^{-\mathsf{F}} : \mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$ 是实解析的。事实上，我们可以表述如下：

引理 3.1.8 *A measured foliation is arational if and only if the holomorphic quadratic differential realising it as the horizontal measured foliation over each point in $\mathcal{T}(S)$ is generic. Moreover in this case the map $q^{\mathsf{F}}: \mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$ is smooth.*

其中一个方向显而易见：若二次微分是一般的，那么它所实现的测地叶层在每个零点处都有三个尖枝。另一方向也很容易看出：若 F 是无理的，那么任何怀特海德等价的测度叶状结构都与 F 同位（因为根据定义，没有可供压缩的鞍连接）。我们还将无理测度叶状结构的子集记为 $\mathcal{MF}_0(S)$，并注意到它也是 $\mathcal{MF}(S)$ 的稠密子集。

3.1.2 填充测地叶层与 Gardiner-Masur 定理

首先回顾如下定义：

定义 3.1.9。 *A pair of measured foliations (F,G) is said to fill S if for any measured foliation $\mathsf{H} \in \mathcal{MF}(S)$ on S we have,*

$$i(\mathsf{H},\mathsf{F}) + i(\mathsf{H},\mathsf{G}) > 0$$

.

回顾一下，我们将填充叶状结构对的等价类空间记为 $\mathcal{FMF}(S)$。注意，对 $(\mathrm{hor}(q),\mathrm{ver}(q))$ 自动满足填充 S 的拓扑性质，这是由以下引理 5.3 得出的： [33] （另见 [75] ）：

引理 3.1.10。 *Given a holomorphic quadratic differential q on a Riemann surface $(S, [c])$ the pair $($水平$_{[c]}(q)$，垂直$_{[c]}(q))$ fill S.*

给定一对 $(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \in \mathcal{FMF}(S)$，因此我们可以提出这样的问题：在固定复结构（模等价）的条件下，一对 (F, G) 能否实现为同一个全纯二次微分 q 的水平和垂直测地叶层？答案是肯定的，可总结如下：

定理 3.1.11。 *([33], [72]) A pair (F, G) of measured foliations on S is filling if and only there is a complex structure c and a holomorphic quadratic differential $q \in S\ c$ such that , are respectively measure equivalent to the vertical and horizontal foliations of q. Moreover the class $[c]$ up to diffeomorphism isotopic to the identity is determined uniquely and for each $c \in [c]$ the quadratic differential realising the filling pair , is also unique.* (FG)

因此，对于填充的一对 (F, G)，我们有：

推论 3.1.12 *The sections q^{F} and $q^{-\mathsf{G}}$ intersect uniquely in $T^*\mathcal{T}(S)$ at the point $[c]\ q$ determined by Theorem 3.1.11. Moreover $= {}_{[c]}\ q$ and $= {}_{[c]}\ -q$ in $\mathcal{MF}(S)$ where $q = q^{\mathsf{F}} = q^{-\mathsf{G}} = -q^{\mathsf{G}}$.*

3.1.3 测度叶状结构的极值长度

给定 (S, c) 上的简单闭曲线 γ，我们将其极值长度定义为

$$\mathsf{ext}_c(\gamma) = \sup_{[[g]]} \frac{l_g^2(\gamma)}{\mathrm{Area}(g)}$$

其中， $l_g(\gamma)$ 是相对于 g 计算的长度，上确界取遍共形类 c 中的所有黎曼度量。闭曲线上极值长度的这一定义可以推广到测度叶状结构（见 [42]），其中叶状结构 F 的极值长度在 $\mathcal{T}(S)$ 上定义了一个连续函数

$$\begin{aligned} \mathsf{ext}(\mathsf{F}) : \mathcal{T}(S) &\to \mathbb{R} \\ [c] &\mapsto \mathsf{ext}_{[c]}(\mathsf{F}) \end{aligned}$$

其中 $\mathsf{ext}_{[c]}(t\mathsf{F}) = t^2\mathsf{ext}_{[c]}(\mathsf{F})$ 对于 $t > 0$成立。利用截面 $q^{\mathsf{F}}_{[c]}$，我们还可以将其表示为（见 [39]）：

引理 3.1.13。 *For* $[c] \in \mathcal{T}(S)$ *the extremal length of* $\mathsf{F} \in \mathcal{MF}(S)$ *is given by*

$$\mathsf{ext}_{[c]}(\mathsf{F}) = \int_{(S,c)} |q^{\mathsf{F}}_{[c]}| dz \wedge d\bar{z} = ||q^{\mathsf{F}}_{[c]}||_1 = ||q^{-\mathsf{F}}_{[c]}||_1$$

这里 $||q||_1 = \int_S |\phi(z)| dz \wedge d\bar{z}$ 其中 $q = \phi(z) dz^2$。由此可得另一个简单的观察：

推论 3.1.14. $\mathsf{ext}_{[c]}(\mathsf{F}) = \mathsf{ext}_{[c]}(\mathsf{G})$ *where* $[c] \in \mathcal{T}(S)$ *is determined by Theorem 3.1.11.*

Proof. 由于 $q = q^{\mathsf{F}}_{[c]} = q^{-\mathsf{G}}_{[c]}$ 在 $[c]$ 处，截面 q^{F} 与 $q^{-\mathsf{G}}$ 相交（见注记 3.1.12），应用引理 3.1.13 即得结论。 □

我们还有一个关于极值长度的著名变分公式，最初由 Gardiner 提出（另见 [31], [50]），其表述如下：

引理 3.1.15. *Let* $[c_t]$ *for* $0 \leq t < 0$ *be a smooth* 1*-parameter family of conformal classes and* F *be a smooth measured foliation in* $\mathcal{MF}(S)$ *then*

$$(d\mathsf{ext}_{[c_0]}\mathsf{F})(\mu) = \Re \left\langle q^{\mathsf{F}}_{[c_0]}, \mu \right\rangle$$

where $\mu \in T_{[c_0]}\mathcal{T}(S)$ *is the Beltrami differential denoting the derivative* $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[c_t]$.

注记 **3 1 16** *It is known from [63] that the extremal length function is not* C^2 *in general. The fact* .. 。 *that the Hubbard-Masur map is not* C^1 *can be now seen from the above formula.*

3.1.4 q^{F} 与 $q^{-\mathsf{G}}$ 在 $T^*\mathcal{T}$中的交集$S)$

利用目前为止建立的工具，我们可以陈述：

命题 3.1.17。 *Let*$(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \in \mathcal{FMF}(S)$ *be a pair of measured foliations that fill* S *and* q^{F}, $q^{-\mathsf{G}}$: $\mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$ *be the associated sections defined before. Then their images in* $T^*\mathcal{T}(S)$ *intersect uniquely and the projection of the intersection into* $\mathcal{T}(S)$ *is the unique critical point of the function* $\mathsf{ext}(\mathsf{F}) + \mathsf{ext}(\mathsf{G}) : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$. *Moreover when*$(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \in \mathcal{FMF}_0(S)$ *then the sections intersect transversely.*

Proof. 给定 $(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \in \mathcal{FMF}(S)$，截面 $q^{\mathsf{F}}_{[c_0]}$, $q^{-\mathsf{G}}_{[c_0]}$ 相交，当且仅当 $q^{\mathsf{F}}_{[c_0]} = q^{-\mathsf{G}}_{[c_0]} = -q^{\mathsf{G}}_{[c_0]}$（见注记 3.1.7）。若 μ 是表示 $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[c_t]$的贝尔特拉米微分，则由引理 3.1.15 可得：

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathsf{ext}_{[c_t]}(\mathsf{F}) = \Re(\langle q^{\mathsf{F}}_{[c_0]}, \mu \rangle) = \Re(\langle q^{-\mathsf{G}}_{[c_0]}, \mu \rangle), \mu \in T_{[c]}\mathcal{T}(S).$$

我们也可以将 G 视为实现为水平测地叶层的测地叶层，并考虑

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathsf{ext}_{[c_t]}(\mathsf{G}) = \Re(\langle q^{\mathsf{G}}_{[c_0]}, \mu \rangle), \mu \in T_{[c]}\mathcal{T}(S).$$

因此，$[c_0]$ 是函数 $\mathsf{ext}(\mathsf{F}) + \mathsf{ext}(\mathsf{G})$ 的临界点，当且仅当 $q^{\mathsf{F}}_{[c_0]} = -q^{\mathsf{G}}_{[c_0]}$。由定理 3.1.11 和注记 3.1.12 可知，该临界点存在且唯一。现在假设 $(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \in \mathcal{FMF}_0(S)$。若 dq^{F}, $dq^{-\mathsf{G}}$: $T\mathcal{T}(S) \to TT^*\mathcal{T}(S)$ 分别为相应的微分，则为证明交的横截性，我们需要证明：若对 $\nu \in T\mathcal{T}(S)$ 有 $dq^{\mathsf{F}}(\nu) = dq^{-\mathsf{G}}(\nu)$，则 $\nu = 0$。回顾截面 q^{F}, $q^{-\mathsf{G}}$ 的定义，这相当于证明：

引理 **3 1 18** *Consider a deformation of the type* c_t q_t $t \geq 0$ *with* c_0 q_0 *being the point of inter-* ... *section of* q^{F} $q^{-\mathsf{G}}$ *with* , $\in \mathcal{FMF}_0$ S . *Let* $_t$ $_t$ $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathsf{F}_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathsf{G}_t = 0$. *Then the deformation is trivial.* (,) (,) ,(FG) ( ) F,G*realised by*(c_t, q_t) *and assume*

Proof. 回顾一下，当 (F, G) 是无理的时， $q^{\mathsf{F}}, q^{-\mathsf{G}}$: $\mathcal{T}(S) \to T^*\mathcal{T}(S)$ 是一个光滑映射。为此，我们将 $\pi: S \to S$ 视为一个规范双覆盖，其分支点位于 q 的零点上（参见 [48], 构造 1.2 以及 [22]），使得 $\pi^*(q) = \omega_q^2$，其中 ω_q 是 $(\widehat{S}, [\widehat{c}])$ 上的全纯 1-形式，且 $[\widehat{c}] = \pi^*[c]$。根据 [48] 的引理 2，$([c], q) \mapsto ([\widehat{c}], \omega_q^2)$ 是一个局部嵌入，因此一般分层中的变形 $([c_t], q_t)$ 会诱导变形 $([\widehat{c}_t], \omega_{q_t}^2) \in Q(\widehat{S})$，同时保持在相同的分层中。令 $\widehat{\mathsf{F}}_t$ 和 $\widehat{\mathsf{G}}_t$ 为 $\omega_{q_t}^2$ 在 $(\widehat{S}, [\widehat{c}_t])$ 上实现的水平和垂直叶状结构，其中 $\widehat{\mathsf{F}}_0 = \widehat{\mathsf{F}}$（分别地，$\widehat{\mathsf{G}}_0 = \widehat{\mathsf{G}}$）是 F（分别地，G）在该双覆盖中的提升。现在考虑 γ 为相对同调群 $H_1^-(\widehat{S}, V_{\omega_q}; \mathbb{C})$ 中的一个循环，其中后者是 $H_1(S, V_{\omega_q}; \mathbb{C})$ 的特征子空间，由在 S 的对合下保持不变的循环组成，而集合 V_{ω_q} 表示 ω_q 的零点集合。$\int_\gamma \omega_q$ 的全纯单值化的实部和虚部恰好分别是与 ω_q^2 的水平和垂直叶状结构的交数。这给出了周期坐标

$$\begin{aligned} \mathsf{per}: Q_0(S) &\hookrightarrow H_-^1(\widehat{S}, V_{\omega_q}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{12g-12} \\ \mathsf{per}(q) &\mapsto \int_\gamma \omega_q \end{aligned}$$

这是一个浸入。因此，我们的假设转化为 $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i(\gamma, \widehat{\mathsf{F}}_t) = 0$ 以及 $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i(\gamma, \widehat{\mathsf{G}}_t) = 0$。由此得到 $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathsf{per}(q_t)(\gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i(\gamma, \widehat{\mathsf{G}}_t) + \mathbf{i} i(\gamma, \widehat{\mathsf{F}}_t) = 0$；当限制在保持分层的变形上时，我们可以假设 γ 固定。由于周期映射是浸入，因此这一变形必然是平凡的。 □

现在定义：

定义 **3 1 19** *For a pair , that fill S we denote , to be the critical point in T S of the* ... (F G) ,p(F G) ( ) ext(F) *function* + $\mathcal{T}$ $S \to \mathbb{R}$ ext(G) : ( ) 。

根据定义可简单看出，若叶状结构 F 的横截测度为 $|\Re\sqrt{q^{\mathsf{F}}}|$，那么在同一黎曼曲面结构 S 上，实现测地叶层 tF 的相应全纯二次微分就是 $t^2 q^{\mathsf{F}}$，因为此时横截测度为 $|\Re\sqrt{t^2 q^{\mathsf{F}}}|$，这等于 $t|\Re\sqrt{q^{\mathsf{F}}}|$。在临界点 p(F,G) 的记号中，这意味着： —

引理 3.1.20. *If* (F, G) *fill S, then* p(tF tG) = p(F, G) *where* $t > 0$.

Proof. 根据极值长度函数的定义可知，ext(tF) +ext(tG) = t^2(ext(F) + ext(G)) n
and 因此，ext(tF) + ext(tG) 和 ext(F) + ext(G) 具有相同的临界点。 □

此外，我们还观察到，该点由第二个坐标唯一确定。也就是说：

引理 3.1.21. *If* p(F, G) = p(F′, G) *then* F = F′ *in* $\mathcal{MF}(S)$。

Proof. 设 p(F, G) = $[c]$ 为 $\mathcal{T}(S)$ 中的唯一点，而 $q \in Q(S, c)$ 为使 (F, G) 分别成为其水平与垂直测地测度叶层的唯一全纯二次微分。对于这对 (F′, G)，我们有 p(F′, G) = p(F, G) = $[c]$。由于在 $Q(S, c)$ 上，根据 Hubbard-Masur 定理，使 G 成为其垂直测地叶层的 q' 是唯一的，因此我们有 $q' = q$。但根据定义，F′ 与 hor$_{[c]}(q')$ = hor$_{[c]}(q)$ = F 测度等价。 □

3.1.5 $Q(S)$ 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 作用下的商空间，以及 $[q^{\mathsf{F}}]$ 与 $[q^{-\mathsf{G}}]$的交集

$\mathbb{R}_{>0}$ 在 $(Q(S, [c]) - 0)$ 上有一个自然的作用，它将每个非零的 $q \in Q(S, [c])$ 映到 $t^2 q, \forall t \in (0, \infty)$。因此，我们可以将 $Q^1(S, c)$ 定义为在此作用下的商空间 $(Q(S, [c]) - 0)/\mathbb{R}_{>0}$。显然， $Q^1(S, c)$ 与命题 2.5.2 中的 $UT^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$ 同构，后者表示点 $[c] \in \mathcal{T}(S)$ 处的单位余切空间。下一个命题是关于截面 $[q^{\mathsf{F}}]$ 的类似结果，它们是 q^{F} 在商映射下的像。现在我们可以讨论本节的主要命题，该命题涉及填充对 (F, G) 中等价类 $[q^{\mathsf{F}}]$ 和 $[q^{-\mathsf{G}}]$ 在 $UT^*\mathcal{T}(S)$ 中的交集：

命题 3.1.22。 *Let* (F，G) $\in \mathcal{FMF}(S)$ *be a pair filling measured foliations on* S， *then the projection of the intersection of the sections* $[q^{\mathsf{F}}]$ $[q^{-\mathsf{G}}]$ *in* $UT^*\mathcal{T}\ S$ *onto* $\mathcal{T}\ S$ *is a Teichmüller geodesic line given*，( ) ( ) p(F *by* $t \mapsto$ $\sqrt{t}$ ¯ —= $\in \mathcal{T}\ S$ *for* $t > 0$. *Moreover when* ， $\in \mathcal{FMF}_0\ S$ *then the sections intersect* G) ( )，(FG) ( ) ( ) *transversely in* $UT^*\mathcal{T}\ S$.

Proof。 我们首先注意到，如果一对 (F，G) 填充 S，那么对于任意，对 (tF，G)、(tF $\frac{1}{t}$G) 和 (F tG) 也同样成立。令 $[c_t] \in \mathcal{T}(S)$ 为复结构的一个等价类，使得两个截面 $q^{t\mathsf{F}}$， $q^{-\mathsf{G}}$ 在 $[c_t]$ 处相交。根据定义，我们有 $t^2 q^{\mathsf{F}}_{[c_t]} = q^{-\mathsf{G}}_{[c_t]}$，这等价于 $tq^{\mathsf{F}}_{[c_t]} = \frac{1}{t} q^{-\mathsf{G}}_{[c_t]}$。由于叶状结构 tF 是由 $t^2 q^{\mathsf{F}}_{[c_t]}$ 在同一个复结构上实现的，因此在点 $[c_t]$ 处，对于某个 $t > 0$，有 $q^{\sqrt{t}t\mathsf{F}}_{[c_t]} = q^{\sqrt{t}\mathsf{G}}_{[c_t]}$。

这等价于这样一个事实： $[c_t]$ 是函数 ext($\sqrt{t}$F) $+$ext($\frac{1}{\sqrt{t}}$G) 的唯一临界点，因为 ($\sqrt{t}$F $\frac{1}{\sqrt{t}}$G) 填充 S。由于 $[c_t]$ 与 p($\sqrt{t}$F $\frac{1}{\sqrt{t}}$G) 相对应，交集的投影沿着

$$\mathbb{R}_{>0} \to \mathcal{T}(S)$$
$$t \mapsto [c_t] = \mathsf{p}(\sqrt{t}\mathsf{F}, \frac{1}{\sqrt{t}}\mathsf{G})$$

因此，现在只需证明路径 $t \to$p(tF, G) 是 Teichmüller 度量 $d_{\mathcal{T}(S)}$ 上的测地线，其中 $\mathcal{T}(S)$。我们首先注意到，对于填充对 (F, G)， $[c]$ 作为临界点 ext(F) $+$ext(G) 也意味着 $[c]$ 是函数的临界点

$$\mathsf{ext}(\mathsf{F})\mathsf{ext}(\mathsf{G}) : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$$

这里我们用到了推论 3.1.14 中的事实：ext$_{[c]}$(F) $=$ ext$_{[c]}$(G)。因此，p($\sqrt{t}$F $\frac{1}{\sqrt{t}}$G) 是 ext($\sqrt{t}$F)ext($\frac{1}{\sqrt{t}}$G) 的临界点；又因为 ext$_{[c]}$(tF) $=$ t^2ext$_{[c]}$(F)，所以我们也得出，点 p($\sqrt{t}$F $\frac{1}{\sqrt{t}}$G) 是函数 ext(F)ext(G) 的临界点。现在已在 [33] 中证明，当 (F, G) 填充 S时，函数 ext(F)ext(G) 的临界点集是 $\mathcal{T}(S)$ 中的一条 Teichmüller 测地线。此外，根据引理 3.1.21，映射 $t \mapsto$p(tF, G) $\in \mathcal{T}(S)$ 是单射。最后，我们注意到，ext(F)ext(G) 的每个临界点也是某个 $\alpha, \beta > 0$ 对应的 ext(αF) $+$ ext(βG) 的临界点，因此映射 $t \to$p(tF, G) 的像就是整条 Teichmüller 测地线。

对于横截性，我们可以使用命题 3.1.17，因为对 $q^{t\mathsf{F}}$ 和 $q^{-\mathsf{G}}$ 横截相交，i .e,

$$T_{([c_t],q_t)}T^*\mathcal{T}(S) = T_{([c_t],q_t)}(q^{t\mathsf{F}}(\mathcal{T}(S))) \bigoplus T_{([c_t],q_t)}(q^{-\mathsf{G}}(\mathcal{T}(S)))$$

对所有 $t \geq 0$ 和 (F， G) $\in \mathcal{FMF}_0(S)$ 都成立。取商空间后即可得到该结果。 □

对于给定的对 (F， G) $\in \mathcal{FMF}(S)$，我们将 $t \mapsto$p($\sqrt{t}$F Γ G)—$\in \mathcal{T}(S)$ 记作 $t > 0$ as P(F， G)。由此可得另一个推论：

推论 3.1.23。 *The line* P(F， G) *is a Teichmüller geodesic.*

为了后续讨论，我们还希望进一步说明当 (F， G) 是填充无理对时，截面 q^{F} 和 $q^{-\mathsf{G}}$ 的交集的正则性。

3.2 无穷远处具有小的填充测度叶状结构的路径的必要条件

本节的目标是建立必要条件：如果无穷远处的测度叶状结构由填充对（F，F）（）在（）处的一阶数据给出，那么从 $\mathcal{F}\ S$ $t\ +\ t\ -$ ∈( ) 出发、位于 $\mathcal{FMF}\ S$ $\mathcal{F}\ S$ [71], $\beta_{([c],q)}$ t^2 $\in \mathcal{QF}\ S$ 中的足够小的可微路径应满足这些条件。为此，接下来我们将研究曲线（） （），当 $t > 0$ 足够小时，该曲线由其所包含的唯一极小曲面的数据参数化，即第一基本形式 I 属于共形类 $[c] \in \mathcal{T}(S)$，而第二基本形式 $I\!I$ 由 $t^2\mathfrak{R}(q)$ 给出，其中 $q \in T^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$。我们将计算该路径在无穷远处的 Schwarzian 导数的一阶估计，并确定：如果该路径在 $\mathcal{F}(S)$ 处的一阶数据确实为（tF$_+$， tF$_-$），那么 $[c]$ 确实是函数 ext(F$_+$) $+$ext(F$_-$)： $\mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$ 的唯一临界点

并且 q 是我们根据 Gardiner-Masur 定理得到的、在 $[c]$ 上实现（F_+，F_-）的唯一全纯微分。为此，我们将首先回顾无穷远处的 Schwarzian 导数的定义，然后介绍进行相关一阶估计计算所需的工具。

3.2.1 拟福克斯流形在无穷远处的 Schwarzian导数

回顾一下，无穷远边界 $\partial_\infty\mathbb{H}^3$ 被识别为复射影空间 $\mathbb{C}P^1$。分支 ∂_∞^+M 和 ∂_∞^-M 是在 $\mathbb{C}P^1$ 中的域关于 $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ 作用的商空间，因此它们带有规范的 $\mathbb{C}P^1$-结构，即 S 上的（G，X）结构，其中有 $G = PSL_2(\mathbb{C})$ 和 $X = \mathbb{C}P^1$ [21]。也就是说，我们有一个由图册（U_α，ϕ_α）给出的 S 的开覆盖，使得 $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}P^1$ 是映射到 $\mathbb{C}P^1$ 中开域的坐标图；在两个坐标图的重叠部分 $U_i \cap U_j$ 上，坐标变换映射 $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ 在局部上是某个 M¨obius 变换的限制。将 S 上在与恒等式同伦的微分同胚下的 $\mathbb{C}P^1$-结构的等价类空间记为 $\mathcal{CP}(S)$。

现在，给定 S 上的一个 $\mathbb{C}P^1$结构，由于 M¨obius 变换是双全纯映射，因此我们有一个底层复结构；对于 $\partial_\infty^\pm M$，它恰好在等价意义下是 $[c_\pm]$。这给出了一个自然的遗忘映射 $\mathcal{CP}(S) \to \mathcal{T}(S)$，将 $\mathbb{C}P^1$结构映射到其底层复结构。根据一致化定理，S 上的任意复结构 c 都可表示为某个离散子群 Γ_c 对 $\mathbb{H}^2$ 的作用的商空间，其中该离散子群是 $PSL_2(\mathbb{R})$ 的子群。由于 $\mathbb{C}$ 也是 $\Gamma_c < PSL_2$，且 $\mathbb{H}^2$ 可视为单位圆盘 $\Delta \subset \mathbb{C}P^1$，我们有一个与复结构相关联的规范 $\mathbb{C}P^1$结构，称为标准Fuchsian复射影结构；由此得到一个连续截面 $\mathcal{T}(S) \to \mathcal{CP}(S)$。

Schwarzian 导数给出了遗忘映射 $\mathcal{CP}(S) \to \mathcal{T}(S)$ 的纤维参数化。一般而言，给定区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$，局部单射全纯映射$u : \Omega \to \mathbb{C}$ 的 Schwarzian 导数是一个全纯二次微分，定义如下：

$$\sigma(u) = ((\frac{u''}{u'})' - \frac{1}{2}(\frac{u''}{u'})^2)dz^2$$

得到上述右侧表达式的一种方法，是考虑唯一的 M¨obius 变换 M_u，该变换与 u 在二阶导数意义下相匹配。上述表达式恰好是 u 和 M_u 的局部泰勒级数展开中三阶项之差（见 [41]的命题 6.3.3）。此外，它们还具有两个显著性质：

- 对于两个局部单射全纯映射 u，$v : \Omega \to \mathbb{C}$，我们有 $\sigma(u \circ v) = v^*\sigma(u) + \sigma(v)$
- $\sigma(A) = 0$ 当且仅当 A 是 M¨obius 变换。

特别地，在给定复射影结构 on S 与标准 Fuchsian 复射影结构之间，存在一个由 M¨obius 变换的右共轭确定的唯一映射；该映射关于底层典范复结构是全纯的，并且凭借上述性质，这个全纯映射的 Schwarzian导数可以用与坐标图无关的方式定义。这称为相对于标准 Fuchsian 复射影结构的复射影结构 on S 的施瓦茨参数化（见 [21], [65]）。当 $M \in \mathcal{QF}(S)$ 时，$\partial_\infty\mathbb{H}^3 \setminus \Lambda_\Gamma$ 的各个分支按照构造都带有非平凡的 Schwarzian 导数；取商空间后，它们下降为 $\partial_\infty^\pm M$ 上的两个全纯二次微分。因此我们定义：

定义 3.2.1。 *The Schwarzians at infinity σ_+ and σ_- are the holomorphic quadratic differentials obtained on $\partial_\infty^+M\ [c_+]$ and $\partial_\infty^-M\ [c_-]$ by the Schwarzian parametrisation of the $\mathbb{C}P^1$ structures on $\partial_\infty^\pm M(\ ,\ )$ with respect to the corresponding standard Fuchsian complex projective structure.*

还要注意，当 $M \in \mathcal{F}(S)$ 时，根据上述第二个性质，在无穷远处的 Schwarzian 导数为零。

3.2.2 双曲3 流形中的极小曲面

设 $i :\ S \to M$ 是从 S 到 M的浸入。与之相关的数据包括定义在 S 上的第一基本形式 I，它是从环境空间诱导到 S 上的诱导度量；以及第二基本形式 $I\!I$，它是切丛 TS上的对称双线性形式。与之相关

到 对于这一对 (I, II)，存在唯一的自伴算子 B，称为形算子，它满足 es
该 关系

$$\mathit{II}(x,y) = I(Bx,y) = I(x,By)$$

其中 $x, y \in T_pS, \forall p \in S$。我们还可以定义一个与该浸入相关的量，称为第三基本形式 III，其定义为 $\mathit{III}(x,y) = I(Bx,By) = I(B^2x,y)$，其中 x, y, B 与之前相同。参见 [12] 以供参考。

B 的特征值给出了与该浸入相关的主曲率。由于极小浸入是指平均曲率为零的浸入，其中 S 的平均曲率为零，因此我们也可以定义：

定义 3.2.2。 *An immersion is minimal if and only if B is traceless.*

另一方面，假设给定了 S 上的光滑黎曼度量 g 以及 TS 上的对称双线性形式 h。如果二元组（g, h）满足以下条件，它将与 S 的一个浸入的数据相关联：

1. Codazzi 方程， $d^{\nabla}h = 0$，其中 ∇ 是 g 的 Levi-Civita 联络。
2. Gauss 方程， $K_I = -1 + \det_g(h)$，其中 K_g 表示度量 g 的高斯曲率或内蕴曲率。

现在我们将近福克斯流形定义为：

Defi定义 3.2.3。 *A quasi-Fuchsian hyperbolic 3-manifold $M \cong S \times \mathbb{R}$ is called almost-Fuchsian if it contains a closed minimal surface homeomorphic to S with principal curvatures in $(-1, 1)$。*

现在，根据 [43] 的推论2.9，我们可以证明，若 M 是一个近福克流形，则其中包含的闭极小曲面是唯一的。由此，按照 [43], 的定理2.12，我们可以用 $T^*\mathcal{T}(S)$中的一个开子集Ω来参数化近福克双曲流形：

定理3.2.4。 *There exists an open neighbourhood $\Omega \subset T^*\mathcal{T}(S)$ of the zero-section such that we have the following bijection:*

1. *Given a point $([c], q) \in \Omega$ there exists a unique $g \in \mathcal{AF}(S)$ such that the unique minimal surface in (M, g) has first fundamental form conformal to $[c]$ and the second fundamental form II is $\mathfrak{R}(q)$.*
2. *Given a almost-Fuchsian metric $g \in \mathcal{AF}($*

S on M the induced metric and second fundamental form $)$,Ω of its unique minimal surface are specified by a point in

U利用极小浸入数据，我们现在将使用等距曲面的叶状结构来逼近 ch
b M的无穷远边界。

3.2.3 在无穷远处的基本形式

给定近福克斯流形 M 中的一个极小曲面，我们可以考虑在 M 中与其相距定向距离的等距曲面。这些曲面构成近福克斯流形的叶状结构，随后我们可以根据与极小嵌入相关的数据，计算这些曲面的相应第一基本形式和第二基本形式。因此，我们可以表述如下 [44] （另见 [64]）：

引理3.2.5。 *Let S be a complete, oriented, smooth surface with principal curvatures in （-1, 1） immersed minimally into an almost-Fuchsian manifold homeomorphic to $S \times -\infty \infty$ and let I II B be（, ） the associated data of the immersion. Then $\forall r \in \mathbb{R}$ the set of point S_r at an oriented distance r from S is（, , ） a smooth embedded surface with data（I_r, II_r, B_r） where :*

1. $I_r(x, y) = I((cosh(r)E + sinh(r)B)x, (cosh(r)E + sinh(r)B)y)$
2. $\mathit{II}_r = \frac{1}{2}\frac{dI_r}{dr}3$. $B_r = (cosh(r)E + sinh(r)B)^{-1}(sinh(r)$
$E + cosh(r)B)$

where E is the identity operator and S_r is identified to S through the closest point projection.

无穷远基本形式记为 I^*, $\mathit{I\!I}^*$，并在 [44], 中引入，用于量化上述量在 $r \to \infty$ 时的渐近行为。特别地，对于一个近福克斯流形 M，它估计了相对于主曲率属于 $(-1,\ 1)$ 的唯一极小曲面的无穷远共形类数据。

形式上， $I^* = \lim_{r\to\infty} 2e^{-2r} I_r$ 和 $\mathit{I\!I}^* = \lim_{r\to\infty}(I_r - \mathit{I\!I\!I}_r)$。然而，上述引理给出了显式公式，可将其表示为 $(I,\ \mathit{I\!I},\ \mathit{I\!I\!I})$ 的形式，因此我们据此定义：

定义 3.2.6。 *Adhering to the notations introduced above, the first fundamental form at infinity is given by the expression $I^* = \frac{1}{2}\mathcal{I} + 2\mathit{I\!I} + \mathit{I\!I\!I}$ and the second fundamental form at infinity is given by*() () $\mathit{I\!I}^* = \frac{1}{2} I - \mathit{I\!I\!I}$.

对 $(I^*,\ \mathit{I\!I}^*)$ 满足无穷远处 Gauss 方程的一个修正版（见 [65], [43]），即 $\mathrm{tr}(B^*) = -K^*$ 其中 B^* 是与 I^* 和 $\mathit{I\!I}^*$ 相关联的形算子。另一方面，通过考虑与 I^* 相容的 Levi-Civita联络 ∇^*，Codazzi 方程保持不变。对我们而言，重要的是与 I^* 相关联的曲率表达式，我们将其称为 K^*。 [44] 进一步利用浸入的极小曲面数据给出了它的表达式：

引理 3.2.7。 *With the notation as above,*

$$K^* = \frac{2K}{\det(E+B)} = \frac{-1+\det(B)}{1+\det(B)}$$

where K is the Gaussian curvature of the minimal immersion of S.

注记 **3 2 8** *The second equality follows from the fact that $Tr\ B = 0$ the immersion being minimal*..... () (,) *and I $\mathit{I\!I}$ satisfy the Gauss-Codazzi equations.*

一般而言， I^* 不一定是双曲度量。事实上， [44] 注意到，当乘以适当的共形因子，将 I^* 变为其共形类中的唯一双曲度量时， $\mathit{I\!I}^*$ 中相应的变化与和该端相关联的 Schwarzian导数 σ 密切相关。因此，当我们对 I^* 施加共形变换时，$(\mathit{I\!I}^*)_0$ 的变化可作如下说明：

引理 3.2.9。 *Let I_1^* and I_2^* be two metrics in the same conformal class at infinity such that $I_2^* = e^{2f} I_1^*$ for some smooth function f, then the traceless parts $(\mathit{I\!I}_1^*)_0$ and $(\mathit{I\!I}_2^*)_0$ are related as:*

$$(\mathit{I\!I}_2^*)_0 - (\mathit{I\!I}_1^*)_0 = \mathrm{Hess}_{I_1^*}(f) - df \otimes df + \frac{1}{2}||df||_{I_1^*}^2 I_1^* - \frac{1}{2}(\Delta f) I_1^*$$

事实上，若我们考虑一个全纯映射 $u : \Omega \to \mathbb{C}$，其中 $\Omega \subset \mathbb{C}$，那么 $\Re(\sigma(u))$ 恰好就是在考虑 $2f = \log(\frac{u'}{u})$ 时上述方程右端的项。因此我们有如下结果：（其几何证明也可见于 [44] 的附录 A）：

定理 **3 2 10** *If I^* is hyperbolic then $\mathit{I\!I}^*{}_0 = -\Re\ \sigma$ where $\mathit{I\!I}^*{}_0$ denotes the traceless part of the*..., () () () *second fundamental form at infinity and σ is the Schwarzian at infinity.*

在以下各节中，我们将用其唯一极小曲面的 I 和 $\mathit{I\!I}$ 数据来参数化近福克斯度量，并计算两端处的 I^* 和 $\mathit{I\!I}^*$。为此，我们将使用 Uhlenbeck 在 [71] 中引入的曲线，证明足够接近 $\mathcal{F}(S)$ 的拟福克斯度量存在一个极小曲面，其数据由点 $([c],\ sq) \in T^*\mathcal{T}(S)$ 给出，其中 $s > 0$ 充分小。

3.2.4 $\beta_{([c],q)}$曲线(s) 位于 $\mathcal{QF}(S)$

设（ $[c]$， q) 是 $T^*\mathcal{T}(S)$ 中的一个点。如 [71] 中所述，我们考虑一条光滑一参数曲线 $\beta_{([c],q)}(s$ ），$s \in [0,\ \epsilon)$ 是从 Fuchsian轨迹出发的一族近福克度量，其由以下数据给出

$$\begin{aligned}\beta_{([c],q)} : \mathbb{R}_{>0} &\to T^*\mathcal{T}(S) \supset \Omega \cong \mathcal{AF}(S) \subset \mathcal{QF}(S)\\ s &\mapsto ([c], s\mathfrak{R}(q))\end{aligned}$$

唯一极小曲面的数据，使得 I 是某个函数 u_s： $S \to \mathbb{R}$ 的 $e^{2u_s}h$，其中 h 表示共形类 c中的唯一双曲度量，且 $I\!I = s\mathfrak{R}$（q）。在 $s = 0$处，我们有 $u_s = 0$ 和 $\beta_{([c],q)}(0) \in \mathcal{F}$（$S$）。

根据 Gauss 方程，对（$e^{2u_s}h,\ s\mathfrak{R}(q)$）是极小浸入的数据，当且仅当 u_s 是下列方程的解:

$$e^{-2u_s}(-\Delta_h u_s - 1) = -1 + e^{-4u_s}s^2\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q)) \tag{3.1}$$

注记 **3 2 11** *This is a reformulation of the Gauss equation $K_g = -1+$ B for the pair $e^{2u_s}h$ $s\mathfrak{R}$ q . 。 . . det() (, 0 The left hand side comes from Lemma 2.2.2. The right hand side comes by the formulae for change of basis for determinants.*

已 于是已知 [71]（另见 [69]），方程 3.1 存在唯一解，就..... of almost-Fuchsian 度量可以表述为:

命题 3.2.12。 *For $0 \leq s < \epsilon$, $\exists$ a unique almost-Fuchsian metric with a unique minimal surface whose $(I, I\!I)$ is given by the pair $([c], s\mathfrak{R}(q))$。*

3.2.5 关于测地叶状结构在无穷远处沿路径 $\beta_{([c],q)}$（t 的一阶估计 ^{2})

事实上，我们将对路径 $\beta_{([c],q)}(s)$ 进行所有计算，稍后再将 s 变量替换为 t^2。这样做是为了计入无穷远处测度叶状结构的一阶正确因子，我们最终将计算该因子。先约定一些记号：对于固定的 $s > 0$，嵌入近福克斯流形 M 中的极小曲面 S 的数据可表示为 $I_s = e^{2u_s}h$ 和 $I\!I_s = s\mathfrak{R}(q)$。由于 $B_s = I_s^{-1}I\!I_s$ 和 $I\!I\!I_s(x,\ y) = I_s(B_s^2x,\ y)$，在 I_s 的局部正交坐标中进行简单计算可知，$I\!I\!I_s$ 等于 $-s^2e^{-2u_s}(\det_{I_s}(\mathfrak{R}(q)))h$。设该流形对应的无穷远基本形式为 I_s^*，$I\!I_s^*$，无穷远处的曲率为 K_s^*。此外，将与 $\beta_{([c],q)}(s)$ 两个端相关的无穷远处的 Schwarzian 导数分别记为 σ_+^s 和 σ_-^s。

我们的首要目标是说明 I_s^* 在 $s = 0$ 处一阶双曲，从而可以应用定理 3.2.10 的一阶版本，该定理将 $I\!I_s^*$ 的无迹部分与 σ_+^s 的实数域部分联系起来。

引理 3.2.13. *I_s^* is hyperbolic at first order at $\mathcal{F}(S)$ i.e the derivative of the curvature K_s^* with respect to s vanishes at $\mathcal{F}(S)$ and $K_0^* = -1$ at $s = 0$. Moreover, for this path $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(I\!I_s^*)_0 = -\mathfrak{R}(q)$.*

Proof. 首先我们注意到，在 $s = 0$ 处我们位于 Fuchsian轨迹，根据引理 3.2.7，我们有 $K_0^* = -$ 1. Now 注意到

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\mathsf{det}(B_s)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}s^2e^{-2u_s}\mathfrak{R}(q) = 0$$

因此，使用引理 3.2.7

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}K_s^* = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{-1+\mathsf{det}(B_s)}{1+\mathsf{det}(B_s)} = 0$$

接下来，我们首先看到 u_s 满足:

$$e^{-2u_s}(-\Delta_h u_s - 1) = -1 + e^{-4u_s}s^2\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q)) \tag{3.2}$$

我们定义非线性映射:

$$F : W^{(2,2)}(S) \times [0,\infty) \to L^2(S) \tag{3.3}$$

$$F(u_s, s) = -\Delta_h u_s - 1 + e^{2u_s} - e^{-2u_s}s^2\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q)) \tag{3.4}$$

其中 $W^{(2,2)}$ 是经典 Sobolev 空间。Fr´echet 导数为:

$$dF_{(u_s,s)}(\dot{u}_s,\dot{s}) = -\Delta\dot{u}_s + 2\dot{u}_s e^{2u_s} + 2\dot{u}_s e^{-2u_s}s^2\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q)) - 2e^{-2u_s}s\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q))$$

显然，当且仅当 $(u_s,\ s)$ 是方程 (3.4) 的解时，$u = u_s$ 才满足方程 (3.2)。现在我们来看函数 $F(u,\ s)$ 关于 u 的线性化算子，其表达式为:

$$L_{u_s}(\dot{u}_s) = -\Delta_h\dot{u}_s + 2\dot{u}_s(e^{2u_s} + e^{-2u_s}s^2\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q))$$

因此，在解 $(u_s,\ s) = (0,\ 0)$ 处，我们有

$$\begin{aligned} L_{u_0} : W^{(2,2)}(S) &\to L^2(S) \\ \dot{u}_s &\mapsto -\Delta_h\dot{u}_s + 2\dot{u}_s \end{aligned}$$

这是一个向量空间的线性同构，见 [14]。因此，我们可以应用隐函数定理，得到解曲线 $\gamma: [0,\epsilon) \to W^{(2,2)}(S) \times [0,+\infty)$，其中 $\gamma(s) := (u_s,\ s)$ 满足 $F(u_s,\ s) = 0,\ \forall s \in [0,\epsilon)$（另见 [69]中的定理 5。13）。现在

$$dF_{(u_s,s)}(\dot{u}_s,\dot{s}) = L_{u_s}(\dot{u}_s) - 2e^{-2u_s}s\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q))$$

对于这条路径，我们有 $dF(\dot{u}_s,\ \dot{s}) = 0$，因此,

$$\begin{aligned} \dot{u}_s = L_{u_s}^{-1}(2se^{-2u_s}\mathsf{det}_h(\mathfrak{R}(q)) \\ \implies \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} u_s = 0 \end{aligned}$$

现在回忆一下，$I_s^* = \frac{1}{2}(I_s + 2I\!I_s + I\!I\!I_s) = \frac{1}{2}(e^{2u_s}h + 2s\mathfrak{R}(q) - s^2e^{-2u_s}\mathsf{det}_{I_s}(\mathfrak{R}(q))h)$。因此，在 $s = 0$ 处求导可得:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I_s^* = \frac{1}{2}(2\dot{u}_0 h + 2\mathfrak{R}(q) + 0) = \mathfrak{R}(q). \tag{3.5}$$

现在，通过相同的计算可观察到

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I\!I_s^* = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(I_s - I\!I\!I_s) = 0.$$

Now, [44] 进一步表明，无穷远处的平均曲率可表示为 $H_s^* = -K_s^*$。记

$$\begin{aligned} I\!I_s^* &= (I\!I_s^*)_0 + H_s^* I_s^* \\ \implies \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(-I\!I_s^*)_0 &= H_0^*\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I_s^* + I_0^*\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} H_s^* \\ \implies \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(I\!I_s^*)_0 &= -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I_s^* \end{aligned}$$

由方程 3.5 可得我们的结论。 □

现在，根据定理 3.2.10，我们知道，如果 I_s^* 是双曲的，那么 $(I\!I_s^*)_0$ 等于 $-\mathfrak{R}(\sigma_+^s)$，其中 σ_+^s 是无穷远处正端的 Schwarzian 导数。此外，如果我们用一端在无穷远处的双曲度量与 Schwarzian 导数这组数据来参数化拟福克斯流形空间:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} : \mathcal{QF}(S) &\to T^*\mathcal{T}(\partial_\infty^+ M) \\ g &\mapsto (I_h^*, (I\!I_h^*)_0) \end{aligned}$$

于是，在 Fuchsian 轨迹上的点 $[c] \in \mathcal{F}(S)$ 处，切空间有一个典范分解$T_{[c]}(\mathcal{QF}(S)) = T_{[c]}\mathcal{T}(S) \bigoplus T_{[c]}^*\mathcal{T}(S)$，其中第一因子与 Fuchsian 轨迹相切，表示双曲度量的导数；第二因子表示 Fuchsian 轨迹上无穷远处的 Schwarzian 导数的导数。考虑路径 $\beta_{([c],q)}(s)$ 时，有 $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathfrak{A}(\beta_{([c],q)}(s)) = (\mathfrak{R}(q) - \mathfrak{R}(q))$。因此,

引理 3.2.14。 *For the path* $\beta_{([c],q)}(s)$ $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\sigma_+^s = q$

注意，我们是在 M 的一个无穷远边界分支上完成所有计算的，而该分支是近福克斯的。不过，请回想一下， M 允许由与极小曲面"平行"的曲面构成叶状结构，而对另一个分支进行的相应计算会相差一个符号。更准确地说，当我们考虑无穷远处另一端的边界分支时，$I_s^* = \frac{1}{2}(I_s - 2I\!I_s + I\!I\!I_s)$（见 [43]）。其余计算保持不变。牢记这一点，我们有：

命题 3.2.15. *For the path* $\beta_{([c],q)}(s)$ $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\sigma_\pm^s = \pm q$.

通过从 s 到 t^2 的变量替换，我们现在将证明，路径 $\beta_{([c],q)}(t^2)$ 确实是近福克斯度量路径的候选路径，在一阶意义下，其在无穷远处的测度叶状结构由对 $(t\mathsf{F}_+,\ t\mathsf{F}_-)$ 给出。记该路径中度量在无穷远处的测度叶状结构为 $\mathfrak{F}(\beta_{([c],q)})(t^2) = (\mathsf{F}_+^t,\ \mathsf{F}_-^t)$。同样，如果对于任意给定的闭曲线 γ 位于 S 上，则称叶状结构 F^t 的一参数族在一阶意义下等价于叶状结构 F

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} i(\gamma,\mathsf{F}^t) = i(\gamma,\mathsf{F})$$
$$\Longrightarrow\ i(\gamma,\mathsf{F}^t) = ti(\gamma,\mathsf{F}) + o(t)$$

根据命题 3.2.15 $\sigma_\pm^{t^2} = \pm t^2 q + o(t^2)$，在路径 $\beta_{([c],q)}(t^2)$ 中，于 $t^2 = 0$（或于 $\mathcal{F}(S)$）处的一阶展开。因此我们需要证明：

引理 3.2.16。 *For any isotopy class of simple closed curve* γ *on* S *we have:*

$$i(\gamma,\mathsf{F}^t) - i(\gamma,\mathsf{hor}_{[c]}(t^2 q)) = o(t)$$

Proof. 我们进行如下计算：

$$\begin{aligned} i(\gamma,\mathsf{F}^t) - i(\gamma,\mathsf{hor}_{[c]}(t^2 q)) &= \inf_\gamma \int_\gamma |\Im\sqrt{\sigma_{t^2}}| - \inf_\gamma \int_\gamma |\Im\sqrt{t^2 q}| \\ &= \inf_\gamma \int_\gamma |\Im\sqrt{t^2 q + O(t^2)}| - \inf_\gamma \int_\gamma |\Im\sqrt{t^2 q}| \\ &= \inf_\gamma \int_\gamma |\Im\frac{\sigma_{t^2} - t^2 q}{\sqrt{\sigma_{t^2}} + \sqrt{t^2 q}}| = o(t) \end{aligned}$$

于是我们得到了所要证明的结论 . □

3.2.6 具有给定的小的填充测度叶状结构在无穷远处一阶行为的路径的必要条件

因此我们看到，对于路径 $\beta_{([c],q)}(t^2)$ 中的 $0 < t < \epsilon$ 度量，无穷远处的测度叶状结构（$\mathsf{F}_+^t,\ \mathsf{F}_-^t$）在 Fuchsian 轨迹处的一阶展开由填充对（$t\mathsf{F}_+,\ t\mathsf{F}_-$）给出。其次，注意到点（$[c],\ q$）是通过 Gardiner-Masur 定理与填充对（$\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-$）相关联的唯一点，并且 $\beta_{([c],q)}(0) = [c] = \mathsf{p}(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-)$ 根据命题 3.1.17 是函数 $\mathsf{ext}(\mathsf{F}_+) + \mathsf{ext}(\mathsf{F}_-)$ 的唯一临界点。这两点将恰好帮助我们表述具有给定无穷远处测度叶状结构一阶行为的路径需要满足的条件。

命题 3.2.17。 *Let* $(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-)$ *be a pair of measured foliations that fill* S*. Then there exists differentiable curve of quasi-Fuchsian metrics* $t \mapsto \beta_{([c],q)}\ t^2$ *for* $t \in [0,\epsilon$ *starting from the Fuchsian locus such* $)\ )\ (\ )\ )\ (\ )$ *that the image* $\mathfrak{F}\ \beta_{([c],q)}\ t^2$ $\in \mathcal{FMF}\ S$ *is measure equivalent to* $t\ +\ t\ -$ *at first order at* $\mathcal{F}\ S$ *. More-*
$(\mathsf{F},\ \mathsf{F})\ (\ )$*over* $[c] \in \mathcal{T}(S)$ *is the unique critical point of the function* $\mathsf{ext}(\mathsf{F}_+) + \mathsf{ext}(\mathsf{F}_-)$*:* $\mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$ *and* $q \in T^*_{[c]}\mathcal{T}(S)$ *is the unique holomorphic quadratic differential realising* $(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-)$。

Proof. 根据命题 3.2.15 和引理 3.2.16，该路径在 $t = 0$ 处的一阶无穷远测度叶状结构由这一对 $(t\mathsf{hor}_{[c]}(q)\ t\ \mathsf{hor}_{[c]}(-q))$ 给出。因此，该命题是命题 3.1.17 的推论。

□

3.3 具有小填充叶状结构的路径的唯一性

本节旨在构造可微路径，实现无穷远处小的、无理且填充的测度叶状结构对，并利用命题 3.2.17 中证明的它们应满足的条件。为此，我们首先引入爆破空间 $\widetilde{\mathcal{QF}}\ S(\ )$，它是通过将 $\mathcal{F}(S) \subset \mathcal{QF}(S)$ 替换为其"单位法丛" $UN\mathcal{F}(S)$ 得到的。遵循 [5] 的策略，我们接着考虑 $\mathcal{QF}(S)$ 的子集，称为 $\mathcal{W}^+$ F+ （以及 $\mathcal{W}^-$ F−），其定义如下：

定义 3 3 1 *For ∈ MF S define* $\mathcal{W}^+ \subset \mathcal{QF}\ S$ *(resp.* $\mathcal{W}^-$*) to be the set of quasi-Fuchsian* ..... F ( )F ( ) F F *metrics g such that the foliation at the end at* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) is t for all* $t \geq 0$.

将 $\widetilde{\mathcal{W}^{\pm}}$ F 称为在提升 $\mathcal{QF}(S) \to \widetilde{\mathcal{QF}\ S(\ )}$ 下 $\mathcal{W}^{\pm}$ F 的像。对于 $(\mathrm{F}_+, \mathrm{F}_-) \in \mathcal{FMF}_0(S)$，我们随后将 ~ ~ ~ ~证明，在爆破空间 $\mathcal{W}^+$ F+ 中，$\mathcal{W}^-$ F− 是 $\mathcal{QF}(S)$ 的子流形，并且它们的边界 $\partial\mathcal{W}^+$ F+ ~ ~ ~ ~ 和 $\partial\mathcal{W}^-$ F− 包含于并横截相交于 $\partial\mathcal{QF}(S)$ 中，其中 $\partial\mathcal{W}^+ \mathrm{F}_+ \cap \partial\mathcal{W}^- \mathrm{F}_-$ 横截相交，并投影到 Teichm¨uller 测地线 $\mathrm{P}(\mathrm{F}_+, \mathrm{F}_-) \in \mathcal{T}(S)$，如命题 3.1.22 中所定义。然后我们考虑~ ~映射 $\pi\colon \mathcal{W}^+\mathrm{F}_+ \cap \mathcal{W}^-\mathrm{F}_- \to \mathbb{R}^2$，将 $g \in \mathcal{W}^+\mathrm{F}_+ \cap \mathcal{W}^-\mathrm{F}_-$ 映射到 (a, b)，其中根据定义，对于某些 $a, b \geq 0$~ ~ ~，$\mathfrak{F}(g) = (a\mathrm{F}_+, b\mathrm{F}_-)$，并将该设置提升到爆破 $\tilde{\pi}\colon \mathcal{W}^+\mathrm{F}_+ \cap \mathcal{W}^-\mathrm{F}_- \to \mathbb{R}^2$，其中后者表示在原点处对 $\mathbb{R}^2$ 进行的爆破。随后，给定小叶状结构的路径的存在性由以下事实得出：我们证明 $\tilde{\pi}$ 在 $\partial\mathcal{W}^+\mathrm{F}_+ \cap \partial\mathcal{W}^+\mathrm{F}_+$ 处是一个局部微分同胚。

3.3.1 $N\mathcal{F}$（S）到 $\mathcal{F}$（S）的法丛

首先，回顾一下，魏尔-彼得森度量赋予 $\mathcal{T}(S)$ 一个辛形式 ω_{WP}，其在余切空间上的定义为

$$\omega_{WP}(.,.) = -\Im\langle .,. \rangle_{WP}$$

此外，$\mathcal{T}(S)$ 带有一个近复结构 J_{WP}，使得 $\langle q_1, q_2\rangle_{WP} = \omega_{WP}(q_1,\ J_{WP}(q_2))$ 由 $J_{WP}(q_2) = \mathrm{i}q_2$ 定义。进一步，回顾特征簇 $\chi_{PSL_2}(\mathbb{C})$ 的概念，它是一个不可约仿射簇，复维数为 $6g-6$ ([35])，并可表示为以下 GIT 商：

$$\chi_{PSL_2(\mathbb{C})} := \mathsf{Hom}(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{C}))//PSL_2(\mathbb{C})$$

由于 S 上的每个双曲结构都由 $\pi_1(S)$ 到 $\mathbb{H}^2$ $PSL_2\ \mathbb{R}$ $\mathcal{F}\ S$ ≅ 的保 $\mathcal{T}\ S$ $\chi_{PSL_2\ \mathbb{C}}$ [35] 向等距变换群（可识别为 ( )）的整体化表示唯一确定，因此，Fuchsian轨迹 ( )(( )) 可识别为 ( ) ( ) 中实点集的一个连通分支。现在，$\mathbb{H}^3$ 的保向等距变换群可识别为 $PSL_2(\mathbb{C})$，因此，空间 $\mathcal{QF}(S)$ 也可通过从 $\pi_1(S)$ 到 $\to PSL_2(\mathbb{C})$ 的离散忠实表示，识别为 $\chi_{PSL_2}(\mathbb{C})$ 中 $\mathcal{F}(S)$ 的一个开邻域；这些表示可与一个拟 Fuchsian 度量相联系。这赋予 $\mathcal{QF}(S)$ 一个复结构 $J^2_{PSL_2}(\mathbb{C}) = -1$，并由此将点 $[c] \in \mathcal{F}(S)$ 处的切空间分解为 $T_{[c]}\mathcal{QF}(S) = T_{[c]}\mathcal{F}(S) \bigoplus J_{PSL_2}(\mathbb{C})\ T_{[c]}\mathcal{F}(S)$。由此我们可以回顾 Bers 同时一致化定理：

定理 3.3.2 ([3])。 *The map* $B\colon \mathcal{QF}(S) \to \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$ *mapping a quasi-Fuchsian metric* $g \in \mathcal{QF}(S)$*to the pair* $B(g) := ([c_+],\ [c_-])$ *is biholomorphic with respect to the complex structure* $J_{PSL_2(\mathbb{C})}$ *of* $\mathcal{QF}(S)$ *coming from the character variety and the complex structure* J_{WP} *on* $\mathcal{T}(S)$。

显然，$\mathcal{F}(S)$也是对角线的原像。若 $v \in T_{[c]}\mathcal{QF}(S)$是拟Fuchsian度量路径 $t \to g_t$ 在 $0 \leq t < \epsilon$ 处、满足 $g_0 \in \mathcal{F}(S)$的切向量，则点 $[g_0] \in \mathcal{T}(S)$处贝尔斯映射的导数为 $d_{[g_0]}B(v)\colon = (q_1, q_2)$，其中 q_1、q_2 是 $Q(S, [g_0])$中的两个全纯二次微分，表示与向量 v相对应的无穷远两端复结构变化所关联的 $\mathcal{T}(S)$的切向量。因此，我们有$d_{[g_0]}B(J_{PSL_2(\mathbb{C})}v) = (J_{WP}(q_1)\ -J_{WP}(q_2)) = (\mathrm{i}q_1, -\mathrm{i}q_2)$，其中$\mathrm{i}^2 = -1$，而第二个因子中的负号

则仅仅是由于 S的方向相反。

由于通过考虑每个共形类中的唯一双曲度量 m，将 $\mathcal{F}(S)$ 与 $\mathcal{T}(S)$ 识别起来，当我们考虑 S 上双曲结构的变形时，切向量 $T_m\mathcal{F}(S) \cong T_m\mathcal{T}(S)$ 由 $\mathfrak{R}(q)$ 给出，其中 $q \in Q(S,c)$（见 [29]）。若考虑与两个无穷远端相关联的共形类中的双曲度量的变化，则 $d_{[c]}B\ J_{PSL_2\ \mathbb{C}}\ v\ =\ \mathfrak{R}\ \ q_1\ \ \mathfrak{R}\ -\ q_2\ \ \in (\,)\,(\,)\,(\,\boldsymbol{i})$ $T_{[c]}\mathcal{F}\ S\ \times T_{[c]}\mathcal{F}\ S$ $(\,\boldsymbol{i})\,)\,(\,)\,(\,)$。因此我们可以定义：

定义 **3 3 3** *The normal bundle* $N\mathcal{F}\ S\ \to \mathcal{F}\ S$ *is the bundle whose fiber* $N_{[c]}\mathcal{F}\ S$ *over each* $\ldots(\,)\,(\,)\,(\,)\,(\,)\,(\,)\,(\,)$ *conformal class* $[c] \in \mathcal{T}\ S$ *is the vector space isomorphic to the quotient* $T_{[c]}\mathcal{QF}\ S\ /T_{[c]}\mathcal{F}\ S$ *.*

纤维 $N_{[c]}\mathcal{F}(S)$是$J_{PSL_2(\mathbb{C})}T_{[c]}\mathcal{F}(S)$，其中$J_{PSL_2(\mathbb{C})}$ 是 $\mathcal{QF}(S)$的近复结构。因此，$N_{[c]}\mathcal{F}\ S$ $v_{([c],q)}$ $dB\ J_{PSL_2\ \mathbb{C}}\ v_{([c],q)}\ =\ \mathfrak{R}\ \ q\ \ \mathfrak{R}\ \ q\ \ \in T\mathcal{T}\ S\ \times(\,)$是$T\mathcal{T}\ S$ $q \in Q\ S\ c$ $v_{([c],q)}$ $\beta_{([c],q)}\ [0,\epsilon\ \to \mathcal{QF}\ S$ $\mathcal{F}\ S$ 满足$(\,)\,(\,)\,(\,\boldsymbol{i})\,(\,\boldsymbol{i})\,)\,(\,)\,(\,)$的切向量集合，其中$(,)$。现在，设是在路径$:)\,(\,)$上与$(\,)$相切的向量。也就是说：

$$v_{([c],q)} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \beta_{([c],q)}(s) \in T_{[c]}\mathcal{QF}(S)$$

因此，我们表述如下：

命题 3.3.4. *$v_{([c],q)}$ is an element of $N_{[c]}\mathcal{F}(S)$.*

Proof. 由于无穷远处第一基本形式 I_s^* 在 $s=0$ 处仍然保持一阶双曲，因此 s from 引理 3.2.13 表明

$$dB(v_{([c],q)}) = (\mathfrak{R}(q), -\mathfrak{R}(q))$$

于是，

$$dB(J_{PSL_2(\mathbb{C})}v_{([c],q)}) = (\mathfrak{R}(\boldsymbol{i}q), \mathfrak{R}(\boldsymbol{i}q))$$

因此 $J_{PSL_2\ (\mathbb{C})}\ v_{([c],q)} \in T_{[c]}\mathcal{F}(S)$，即与 Fuchsian轨迹相切。Fuchsian轨迹处切空间 $T_{[c]}\mathcal{QF}(S)\ = T_{[c]}\mathcal{F}(S)$ $\bigoplus JT_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 的分解随后推出 $v_{([c],q)} \in N_{[c]}\mathcal{F}(S)$。 □

3.3.2 在 $\mathcal{F}\ (S)$ 处对 $\mathcal{QF}\ (S)$ 进行 $\mathcal{QF}\ (S)$ 爆破

为构造爆破 $\widetilde{\mathcal{QF}\ S}(\,)$，再次考虑定义在 $\mathcal{F}(S)$ 上的丛 $N\mathcal{F}(S)$。因此，我们取 $N_{[c]}\mathcal{F}(S)\ \setminus 0$ 关于称为单位法丛 $UN_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 的 $\mathbb{R}_{>0}$ 作用的商空间，并令 $v_{([c],q)}$ 为 $v_{([c],q)} \in N_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 的像。现在考虑 $\eta(N\mathcal{F}(S))$ $\overline{\to U}N\mathcal{F}(S)$ 为典范可微线丛，同时我们还有一个典范线性映射 $\eta(N\mathcal{F}(S)) \to \mathcal{F}(S)$。现在可以证明 $\eta($ $N\mathcal{F}(S))\ \setminus (0-section) \cong N\mathcal{F}(S)\ \setminus \mathcal{F}(S)$ 是一个微分同胚。注意，$\eta(N\mathcal{F}(S))$ 的零截面再次是 $UN\mathcal{F}(S)$。

现在令 τ 为 $\mathcal{QF}(S)$ 中 $\mathcal{F}(S)$ 的管状映射，并令 $\theta:\ \eta(N\mathcal{F}(S)) \to N\mathcal{F}(S)$ 为典范映射。爆破 $\mathcal{QF}(S)$ 是 $(\mathcal{QF}(S)\ \setminus \mathcal{F}(S))\ \cup UN\mathcal{F}(S)$ 上唯一的可微结构，使得包含映射 $\mathcal{QF}(S)\ \setminus \mathcal{F}(S)\ \subset \mathcal{QF}(S)$ 和映射：

$$\begin{aligned}
&\eta(N\mathcal{F}(S)) \to \widetilde{\mathcal{QF}(S)}\\
&v \mapsto \tau(\theta(v)) \quad \text{when } v \in \eta(N\mathcal{F}(S)) \setminus (\text{0-section})\\
&v \mapsto v \quad \text{otherwise}
\end{aligned}$$

都是嵌入（例如参见 [10]，第 128 页）。

此外，它是一个带边流形 $\partial\widetilde{\mathcal{QF}\ S}(\,)$，并且是 $UN\mathcal{F}(S)$。我们注意到，自然的 $\widetilde{\ }$ 包含映射 $\mathcal{QF}(S)\ \setminus \mathcal{F}(S)\ \hookrightarrow\ \mathcal{QF}(S)$ 通过将 $[c]\ \in\ \mathcal{F}(S)$ 发送到 $UN_{[c]}\mathcal{F}$ $(S)\ \in\partial\widetilde{\mathcal{QF}\ S}(\,)$，提升为 $\mathcal{QF}(S)\ \to\ \mathcal{QF}(S)$。

现在回顾某个 $\mathrm{F}\ \in \mathcal{MF}(S)$ 的 $\mathcal{QF}(S)$、$\mathcal{W}^+{}_{\mathrm{F}}$ 和 $\mathcal{W}^-{}_{\mathrm{F}}$ 空间。由于 $\mathcal{F}(S)\ \subset \mathcal{W}^{\pm}{}_{\mathrm{F}}$，我们有

自然包含 $\mathcal{W}^{\pm}{}_{\mathsf{F}} \setminus \mathcal{F}(S) \hookrightarrow \mathcal{QF}(S) \setminus \mathcal{F}(S)$，它再次提升为唯一嵌入 $\mathcal{W}^{\pm}{}_{\mathsf{F}} \to \mathcal{QF}(S)$。我们通过将点 $[c] \in \mathcal{F}(S) \subset \mathcal{W}^{\pm}{}_{\mathsf{F}}$ 替换为 $v_{([c],q)} \in UN_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 中与 $\mathcal{W}^{\pm}{}_{\mathsf{F}}$ 在 $[c]$ 处相切的唯一法向量来得到该嵌入。因此，按照爆破的构造，当 t 足够小时 $(v_{([c],q)},\ t)$，$\mapsto ([c],\ t^2\mathfrak{R}(q))$ 在 $\mathcal{F}(S)$ 处一阶相切于 $\mathbf{F}^t_{\pm}$，其由 t F 给出。根据引理 3.2.14 和定理 3.1.4，$v_{([c],q^{\pm\mathsf{F}}_{[c]})}$ 确实就是该向量。于是我们定义：

定义 3.3.5. *$\widetilde{\mathcal{W}^{+}}_{\mathsf{F}}$ and $\widetilde{\mathcal{W}^{-}}_{\mathsf{F}}$ are the respective lifts of $\mathcal{W}^{+}{}_{\mathsf{F}}$ and $\mathcal{W}^{-}{}_{\mathsf{F}}$ into $\widetilde{\mathcal{QF}(S)}$.*

从 $\mathcal{QF}(S)$中移除承载平凡 Schwarzian 导数的 Fuchsian轨迹后，我们现在将通过以下数据来参数化 $\mathcal{QF}(S)$ 中的元素：在无穷远处的边界上实现为 Schwarzian 导数的全纯二次微分。由此可证明，$\mathcal{W}^{+}{}_{\mathsf{F}}$ 和 $\mathcal{W}^{-}{}_{\mathsf{F}}$ 是$\widetilde{\mathcal{QF}(S)}$的带边界子流形。为此，我们首先回顾一下，无穷远处的 Schwarzian 导数可以参数化 $\partial^{+}_{\infty}M$和 $\partial^{-}_{\infty}M$上的 $\mathbb{C}P^1$-结构（见 [21]）。更一般地，若将S 上在与恒等映射同伦的微分同胚下的 $\mathbb{C}P^1$-结构等价类空间记为 $\mathcal{CP}(S)$，则 Schwarzian 导数为遗忘映射 $\mathcal{CP}(S) \to \mathcal{T}(S)$([21])的纤维提供参数化。因此，我们表述如下：

引理 3.3.6 *A quasi-Fuchsian metric on $M \cong S \times \mathbb{R}$ can be uniquely parametrised by the Schwarzian ... parameterisation of the $\mathbb{C}P^1$-structures on one component of the boundary at infinity.*

Proof. 将凸核 $\mathcal{CC}(M)$ 边界上的诱导度量记为 m。引理分两步得出。首先，M 上的拟 Fuchsian 度量可以由来自 [4] 的凸核边界上的诱导度量和带测弯曲层数据唯一确定；其中，$\mathcal{QF}(S) \to \mathcal{T}(S) \times \mathcal{ML}(S)$ 将唯一折叠曲面的数据对应到拟 Fuchsian 度量数据的映射是双全纯的，因而是光滑的。现在考虑数据 $(m_{\pm}, d_{m_{\pm}}(l(\lambda_{\pm})))$，它给出了 $T^*\mathcal{T}(S)$ 中的一个点，其中 $d_{m_{\pm}}(l(\lambda_{\pm}))$ 是带测层 $\lambda_{\pm}$ 的长度函数在 $m_{\pm}$ 处计算得到的导数。该结论随后由 [21], 的定理 4.1（最初归于 Thurston）以及 [45], 中的主定理共同推出；这两个定理共同表明，光滑的嫁接映射将凸核 $\partial^{\pm}_{\infty}\mathcal{CC}(M)$ 边界上的诱导度量和带测弯曲层数据 $(m_{\pm}, \lambda_{\pm}) \in \mathcal{T}(S) \times \mathcal{ML}(S) \cong T^*\mathcal{T}(S) \to \mathcal{CP}(S)$ 发送到无穷远边界处的数据 $([c_{\pm}], \sigma_{\pm}) \in T^*\mathcal{T}(\partial^{\pm}_{\infty}M)$，且该映射是同胚的，并且 C^1。

□

3.3.3 子流形 $\mathcal{W}^{+}{}_{\mathsf{F}_+}$, $\mathcal{W}^{-}{}_{\mathsf{F}_-}$ 及交集 $\partial\mathcal{W}^{+}_{\mathsf{F}_+} \cap \widetilde{\partial\mathcal{W}^{-}}_{\mathsf{F}}$

由于引理 3.3.6 允许我们通过边界 $\partial^{\pm}_{\infty}M$ 处的 Schwarzian 导数数据对拟福克斯结构进行唯一参数化，因此我们可以继续讨论以下内容：

命题 3.3.7. *For $\mathsf{F} \in \mathcal{MF}_0(S)$ the set $\mathcal{W}^{+}{}_{\mathsf{F}}$ (resp. $\mathcal{W}^{-}{}_{\mathsf{F}}$) is a smooth submanifold with boundary of $\widetilde{\mathcal{QF}(S)}$ of dimension $dim(\mathcal{T}(S)) + 1$ with boundary $\mathcal{F}(S)$. In the blow-up $\widetilde{\mathcal{QF}(S)}$ the lifts $\widetilde{\mathcal{W}^{+}}_{\mathsf{F}_+}$ and $\widetilde{\mathcal{W}^{-}}_{\mathsf{F}}$ are again smooth submanifolds with the boundary $\partial\widetilde{\mathcal{W}^{+}}_{\mathsf{F}}$ (resp. $\partial\widetilde{\mathcal{W}^{-}}_{\mathsf{F}}$) contained in $\partial\widetilde{\mathcal{QF}(S)}$。*

Proof. 我们只处理 $\mathcal{W}^{+}{}_{\mathsf{F}}$ 的情形，因为对于 $\mathcal{W}^{-}{}_{\mathsf{F}}$，证明通过对称性同样成立。首先我们将证明，$\widetilde{\mathcal{W}^{+}}_{\mathsf{F}} \setminus \mathcal{F}(S)$ 是 $\mathcal{QF}(S) \setminus \mathcal{F}(S)$ 的子流形。注意：

$$\mathcal{QF}(S) \to \mathcal{CP}(\partial^{+}_{\infty}M) \hookrightarrow Q_0(\partial^{+}_{\infty}M)$$

根据引理 3.3.6，我们得到一个将 $\mathcal{QF}(S)$ 嵌入 $Q_0(\partial^{\pm}_{\infty}M)$ 的开子集中的嵌入。对于给定的 $[c_+]$，存在唯一的 $\sigma^{\mathsf{F}}_{[c_+]} \in T^*\mathcal{T}(\partial^{\pm}_{\infty}M)$，使 F 在 $\partial^{\pm}_{\infty}M$ 处实现为水平测度叶状结构。这给出了映射 $\sigma^{\mathsf{F}}:\ \mathcal{T}(\partial^{\pm}_{\infty}M) \to T^*\mathcal{T}(\partial^{\pm}_{\infty}M)$，该映射可与映射 q^{F} 视为相同。现在回顾，在相同的复结构 $[c]$ 上，$t\mathbf{F}$ 由 $t^2\sigma^{\mathsf{F}}_{[c]}$ 实现。我们看到，$\widetilde{\mathcal{W}^{+}}_{\mathsf{F}} \setminus \mathcal{F}(S)$ 通过 σ^{F} 的周期坐标，在 $\mathbb{R}^{12g-12}$ 中局部嵌入为 $\mathbb{R}_{>0} \times \sigma^{\mathsf{F}}(\mathcal{T}(\partial^{\pm}_{\infty}M))$。换言之，它是以下嵌入的像：

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{T}(\partial^{+}_{\infty}M) \to Q_0(\partial^{+}_{\infty}M) \hookrightarrow \mathbb{R}^{12g-12}$$

其中，最后一个包含映射是通过与稠密分层相关联的周期坐标实现的，该分层给出了进入 $\mathbb{R}^{12g-12}$ 的坐标图。注意，对应于 $T^*\mathcal{T}(S)$ 零截面的 Fuchsian 轨迹具有零 Schwarzian 导数，因此相应的周期也为零。我们还注意到，该子流形的光滑性源于映射 q^{F} 在限制于无理测度叶状结构时是实解析的。子流形的维数显然为 $\dim(\mathcal{T}(\partial_\infty^{\pm}M)) + \dim(\mathbb{R}_{>0}) = \dim(\mathcal{T}(S)) + 1$。

现在考虑爆破 $Q_0(\partial_\infty^{\pm}M)$，它是带有 §3.3.2 中所述 C^1 结构的 $(Q_0(S) \setminus \mathcal{T}(S)) \cup Q_0^1(S)$。由于在同构 $UN\mathcal{F}(S) \cong UT\mathcal{T}(S)$ 下，$(v_{[c]},q^{\mathsf{F}}) \in UN\mathcal{F}(S)$ 被映射到 $\mathfrak{R}([q]) \in UT\mathcal{T}(S)$，而且根据魏尔-彼得森对偶性，$\mathfrak{R}(q)$ 再次对应于 $[q] \in Q^1(S)$，因此我们有一个开嵌入 $\widetilde{\mathcal{QF}}\,S(\,) \hookrightarrow Q_0(\partial_\infty^{\pm}M)$。回想一下，$[c] \in \mathcal{F}(S) \subset \mathcal{W}^+\,\mathsf{F}$ 与 $v_{([c],q^{\mathsf{F}}_{[c]})}$ 中的单位法向量相关联，该向量位于 $UN_{[c]}\mathcal{F}(S) \subset \partial\mathcal{W}^+\,\mathsf{F}$ 中，因为 $v_{([c],q^{\mathsf{F}}_{[c]})}$ 是由路径 $\beta_{([c],q^{\mathsf{F}}_{[c]})}(t^2)$ 实现的，并且根据引理 3.2.14 和引理 3.2.16，在 $\mathcal{F}(S)$ 处，这条路径的 σ_+^t 确实在一阶上为 $t^2 q^{\mathsf{F}}_{[c]}$。因此，$\partial\mathcal{W}^+\,\mathsf{F}$ 包含于 $Q_0^1(S)$，即 $\widetilde{Q_0\,S}(\,)$ 的边界。

为了修改 F 我们需要考虑在 $[c] \in \mathcal{F}(S)$ 处的向量 $q^{-\mathsf{F}}_{[c]} \subset \mathcal{W}^-\,\mathsf{F}$，因为根据命题 3.2.15 和引理 3.2.16，路径 $\beta_{([c],q)}(t^2)$ 在无穷远处负端的叶状结构由 $\mathcal{F}(S)$ 处一阶的 hor$_{[c]}(-q)$ 给出。其余论证照旧进行，于是得到我们的结论。 □

现在我们可以作出如下断言：

命题 3.3.8。 *When* $(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-) \in \mathcal{FMF}_0(S)$ $\partial\widetilde{\mathcal{W}^+}_{\mathsf{F}_+}$ *and* $\partial\widetilde{\mathcal{W}^-}_{\mathsf{F}_-}$ *intersect transversely in* $\partial\widetilde{\mathcal{QF}\,S}(\,)$。*Moreover, their intersection is equal to* $(\mathsf{P}(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-)v_{([c_t],q_t)}) \ni UN\mathcal{F}(S)$ *where* $[c_t] \in \mathcal{T}(S)$ *is the unique critical point of the function* $\sqrt{t}_{\,+} + {}^{-}\,{}^{1}_{\sqrt{t}\,-}\ \mathcal{T}\ S \to \mathbb{R}$ *and* $q_t \in Q\ S\ c_t$ *is the unique holomorphic* ext(F) ext(F) : ( ) (,) *quadratic differential realising them.*

Proof. 在 $[c] \in \mathcal{F}(S)$ 处，$\partial\mathcal{W}^+\,\mathsf{F}_+$ 等于 $v_{([c],q^{\mathsf{F}_+}_{[c]})} \in UN_{[c]}\mathcal{F}(S)$，而 $\partial\mathcal{W}^-\,\mathsf{F}_-$ 由向量 $v_{([c],q^{\mathsf{F}_-}_{[c]})} \in UN_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 给出。由 §§3.3.2 可知，$dB(J_{PSL_2(\mathbb{C})}v_{([c],q^{\mathsf{F}_\pm}_{[c]})}) \in UT_{[c]}\mathcal{QF}(S)$ 由 $(\mathfrak{R}(\mathrm{i}[q^{\mathsf{F}_\pm}_{[c]}])\ \mathfrak{R}(\mathrm{i}[q^{\mathsf{F}_\pm}_{[c]}])) \in UT_{[c]}\mathcal{F}(S) \times UT_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 给出。因此，$\partial\widetilde{\mathcal{W}^+}\,\mathsf{F}_+$ 与 $\partial\widetilde{\mathcal{W}^-}\,\mathsf{F}_-$ 在 $[c] \in \mathcal{F}(S)$ 处有唯一交点，当且仅当截面 $\mathfrak{R}([q^{\mathsf{F}_+}])$ 和 $\mathfrak{R}([q^{\mathsf{F}_-}])$ 在 $UT\mathcal{T}(S)$ 中也有唯一交点。同样，对于某个 $[c] \in \mathcal{T}(S)$，$\mathfrak{R}([q^{\mathsf{F}_+}_{[c]}]) = \mathfrak{R}([q^{\mathsf{F}_-}_{[c]}])$ 当且仅当 $[q^{\mathsf{F}_+}_{[c]}] = [q^{\mathsf{F}_-}_{[c]}]$，这是由 $T^*\mathcal{T}(S)$ 与 $T\mathcal{T}(S)$ 之间的对偶性得出的。因此，由命题 3.1.22 可知，$[c]$ 是函数 $\mathrm{ext}(\sqrt{t}\mathsf{F}_+)+\mathrm{ext}(\,{}^{1}_{\sqrt{t}}\mathsf{F}_-) : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}$ 的唯一临界点 $\mathsf{p}(\sqrt{t}\mathsf{F}_+,\,{}^{1}_{\sqrt{t}}\mathsf{F}_-)$，其中 $t > 0$。由命题 3.1.22 可知，边界 $\partial\widetilde{\mathcal{W}^+}\,\mathsf{F}_+$ 和 $\partial\widetilde{\mathcal{W}^-}\,\mathsf{F}_-$ 沿着 Teichmüller 测地线 $\mathsf{p}(\sqrt{t}\mathsf{F}_+,\,{}^{1}_{\sqrt{t}}\mathsf{F}_-)$ 在截面映射 $\mathcal{F}(S) \to UN\mathcal{F}(S)$ 下的像相交。它们交集的横截性由引理 3.1.22 中所示子流形 $[q^{\mathsf{F}_+}]$ 和 $[q^{-\mathsf{F}_-}]$ 的横截性推出。 □

现在定义映射

$$\pi : \mathcal{W}^+_{\mathsf{F}_+} \cap \mathcal{W}^-_{\mathsf{F}_-} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

该映射将 $g \in \mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 发送到对 (a, b)，使得根据 $\mathfrak{F}$的定义，$\mathfrak{F}(g) = (a\mathsf{F}_+, b\mathsf{F}_-)$。注意，在此映射下，$\mathcal{F}(S)$被映射为 $\{0\} := (0,\ 0)$，并且对于 $(\mathsf{F}_+,\ \mathsf{F}_-),\ \in \mathcal{FMF}_0(S)$映射 π是光滑的。因此，若 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 在原点处的爆破，则 π 提升为一个光滑映射

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{W}^+_{\mathsf{F}_+}} \cap \widetilde{\mathcal{W}^-_{\mathsf{F}_-}} \to \widetilde{\mathbb{R}^2}$$

这里，$\mathbb{R}^2$ 是集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cup UT_{\{0\}}\mathbb{R}^2$，其中 $UT_{\{0\}}\mathbb{R}^2$ 是切空间在原点处关于 $\mathbb{R}_{>0}$的作用的商空间。因此我们有

命题 3.3.9. *For a pair* $(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-) \in \mathcal{FMF}_0(S)$ *the map* $\widetilde{\pi}$ *is a local diffeomorphism near* $\partial\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ *onto its image.*

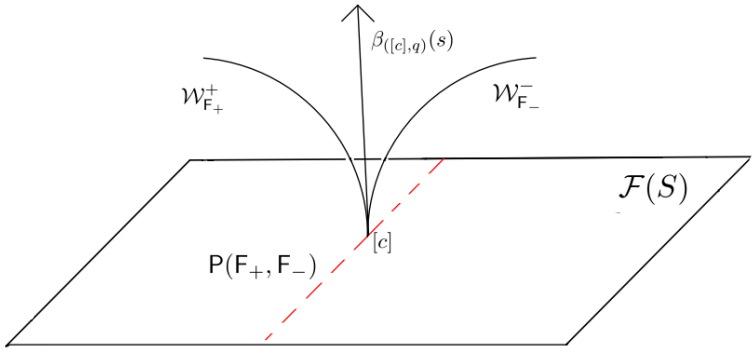

图3.1：示意图展示了路径 $\beta_{([c],q)}(s)$ 从 Fuchsian轨迹 $\mathcal{F}(S)$ 上的点 $[c]$ 沿法向量 $v_{([c],q)}$ 的方向离开，其中 $\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}+}$ 和 $\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}-}$ 在爆破过程之前于 $\mathcal{F}(S) \subset \mathcal{QF}(S)$ 处相交；该路径对应于一个填充 S 的无理对（F_+, F_-），虚线表示 Teichmüller 测地线 $\mathsf{P}(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-)$。

Proof. 我们要证明，映射 $\widetilde{\pi}$ 在 Fuchsian轨迹上有解，在该点可逆，随后应用隐函数定理。为此，我们证明 $\widetilde{\pi}$ 在 $p \in \widetilde{\partial\mathcal{W}^+}{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}}$ 处是局部浸入且是局部浸没，也就是说要证明

$$d_p\widetilde{\pi} : T_p\widetilde{\mathcal{W}^+_{\mathsf{F}_+}} \cap T_p\widetilde{\mathcal{W}^-_{\mathsf{F}_-}} \to T_{\widetilde{\pi}(p)}\widetilde{\mathbb{R}^2}$$

它是单射且满射。注意，将其限制在无理对中的 $(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-)$ 上时，该映射确实是光滑的，因为子流形 $\widetilde{\mathcal{W}^\pm}{}_{\mathsf{F}_\pm}$ 对于 $\mathsf{F} \in \mathcal{MF}_0(S)$ 而言是光滑的。

如果对于某个 $v \in T_p\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap T_p\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$，我们有 $d_p\widetilde{\pi}(v) = \{0\}$，那么我们首先要证明 v 属于边界 $T_p\widetilde{\partial\mathcal{W}^+}{}_{\mathsf{F}_+} \cap T_p\partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}}$ 的切空间的交集。令 $m_+ \colon \mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \to [0,\infty)$ 为满足以下条件的映射：对于某个 $g \in \mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+}$，有 $m_+(g) = t$，且其在无穷远边界处的测地叶层为 $t\mathsf{F}_+$。这同样在爆破空间中诱导出一个映射 $\widetilde{m_+} \colon \widetilde{\mathcal{W}^+}{}_{\mathsf{F}_+} \to [0,\infty)$。注意，如果类似地定义映射 $\widetilde{m_-} \colon \widetilde{\mathcal{W}^-}{}_{\mathsf{F}_-} \to [0,\infty)$，则有 $\widetilde{\pi} := (\widetilde{m_+}, \widetilde{m_-})$。因此，如果 $v \in \mathrm{Ker}(d\widetilde{\pi})$，那么 $v \in \mathrm{Ker}(d\widetilde{m_+}) \cap \mathrm{Ker}(d\widetilde{m_-})$，这就意味着 $v \in T_p\partial\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap T_p\partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}}$。

现在令 $\kappa \colon \widetilde{\mathbb{R}^2_{\geq 0}} \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为将 $(x,y) \mapsto \binom{x}{y}, y)$ 的坐标图。根据命题 3.3.8，回顾可知，$\partial\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 已被证明是 $\mathcal{T}(S) \cong \mathcal{F}(S)$ 中直线 $\mathsf{P}(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-)$ 的提升，其由截面 $\mathcal{F}(S) \to UN\mathcal{F}(S)$ 给出，该截面将 $\mathsf{P}(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-) \ni [c] \mapsto ([c], v_{([c],q_{[c]}^{\mathsf{F}_+})}) = ([c], v_{([c],q_{[c]}^{-\mathsf{F}_-})}) \in UN_{[c]}\mathcal{F}(S)$。

对于固定的 $t > 0$，令 $[c]$ 为 $\mathrm{ext}(\sqrt{t}\mathsf{F}_+) + \mathrm{ext}(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathsf{F}_-)$ 的临界点，这等价于其为 $\mathrm{ext}(t\mathsf{F}_+) + \mathrm{ext}(\mathsf{F}_-)$ 的临界点。令 $s \mapsto \widetilde{g}_s \in \mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 为一条可微路径，使得 $\widetilde{g}_0$ 是 $([c], v_{([c],q_{[c]}^{\mathsf{F}_+})}) = ([c], v_{([c],q_{[c]}^{-\mathsf{F}_-})}) \in \partial\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$，并设 $\widetilde{g}_s$ 在投影 $\widetilde{\mathcal{QF}}(S) \to \mathcal{QF}(S)$ 下相应地降为一条曲线 $g_s \in \mathcal{QF}(S)$，其具有 $g_0 = [c]$。由于 $\widetilde{g}_s \in \widetilde{\mathcal{W}^+}{}_{\mathsf{F}_+} \cap \widetilde{\mathcal{W}^-}{}_{\mathsf{F}_-}$，我们有 $\widetilde{\pi}(\mathfrak{F}(\widetilde{g}_s)) = (\widetilde{a}(s)\mathsf{F}_+, b(s)\mathsf{F}_-)$，它们再次降为两个光滑函数的一参数函数 $a(s)$ $b(s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，满足 $\mathfrak{F}(g_s) = (a(s)\mathsf{F}_+, b(s)\mathsf{F}_-)$，且 $a(0) = b(0) = 0$。此外，根据定义，g_s 在 g_0 处以及沿着方向 $v_{([c],q_{[c]}^{\mathsf{F}_+})} = v_{([c],q_{[c]}^{-\mathsf{F}_-})}$ 与 $\mathcal{F}(S)$ 正交。

这使我们回到了命题 3.2.17 的情形：其中有一条路径从 $\mathcal{F}(S)$出发，正交于$\mathcal{F}(S)$，并且其无穷远处的测度叶状结构具有由填充 S 的一对给定的一阶行为。因此，g_s 是一条类型为 $\beta_{([c],q)}(t^2)$ 的路径，其中 $g_0 = [c] = \mathsf{p}(a'(0)\mathsf{F}_+, b'(0)\mathsf{F}_-)$，即函数 $\mathrm{ext}(a'(0)\mathsf{F}_+) + \mathrm{ext}(b'(0)\mathsf{F}_-)$ 的临界点。再次根据假设，$[c] = \mathsf{p}(t\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-)$；因此 $a'(0)\,b'(0) = t$，因为 $\mathsf{p}(\mathsf{F}_+,\mathsf{F}_-)$ 是

对于填充对 (F+,F−)，除以 t 的缩放外是唯一的（见注释 3.1.20）。因此我们看到

$$\kappa \circ \widetilde{\pi}([c], \overline{v_{([c],q_{[c]}^{\mathsf{F}_+})}}) = \lim_{s\to 0} \kappa \circ \widetilde{\pi}(\widetilde{g_s}) = \lim_{s\to 0} \kappa \circ \pi(g_s) = \lim_{s\to 0} \kappa \circ (a(s), b(s)) = \lim_{s\to 0} (\frac{a(s)}{b(s)}, b(s)) = (t, 0)$$

这表明，如果 $v \in T_p\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap T_p\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 满足 $d_p\widetilde{\pi}(v) = 0$，那么 v 为零。因此，$d_p\widetilde{\pi}$ 在$\partial\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}}$处是单射的。

因此，该映射 $\widetilde{\pi}$在点 $p \in \partial\widetilde{\mathcal{W}^+}{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\widetilde{\mathcal{W}^-}{}_{\mathsf{F}}$</style>处是到 中的局部浸入。此外，在$\mathsf{F}_+ \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 处是满射，因为其定义域是一个二维实流形，即 $\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}} \cap \mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}}$ 的边界，而其像是作为 $UT_{\{0\}}\mathbb{R}^2$的二维实流形 $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ 的边界。因此，我们证明了 $\widetilde{\pi}$在 $\partial\widetilde{\mathcal{W}^+}{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}}$的某个邻域内是一个局部微分同胚。

□

现在我们可以讨论本节的主要命题，它证明了定理 1.1.1：

命题 3 3 10 *Let $_+$ $_-$ be a pair of arational measured foliations that fill S and let $_+$ $_-$ ∈ ... (F, F) p(F, F) ( ) ext(F) $\mathcal{F}$ S be the critical point of the function $_+$ + $_-$. Then for $t \in [0, \epsilon$ there exists a unique smooth* ext(F)) *curve $t \mapsto g_t \in \mathcal{QF}$ S with $g_0 =$ $_+$ $_-$ such that the $\mathfrak{F}$ g_t = t $_+$ t $_-$ for all $t \in [0, \epsilon$.* ( ) p(F,F) ( ) (F,F))

Proof. 由前述命题可知，在 $\partial\mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \partial\mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 的开邻域内，存在一条 $t \to \widetilde{g_t} \in \mathcal{W}^+{}_{\mathsf{F}_+} \cap \mathcal{W}^-{}_{\mathsf{F}_-}$ 光滑曲线，使得 $b \circ \widetilde{\pi} \circ \mathfrak{F}(\widetilde{g_t}) = (t, t)$ 对于 $t \in (0, \epsilon)$ 成立，其中 b 是爆破映射b：将 $UT_{\{0\}}(\mathbb{R}^2)$ 映到原点，并在其余部分取恒等映射。于是，由于 $\widetilde{g_t}$ 下降到 $g_t \in \mathcal{QF}(S)$，且 $\mathfrak{F}(g_t) = (t\mathsf{F}_+, t\mathsf{F}_-)$ 对于 $t \in [0, \epsilon)$ 成立，结论得证。..

□

3.4 半管几何中的诠释

现在，我们将按照 [19] 中的描述，对我们在拟福克斯半管三维流形中的结果作出诠释。为了描述空间 $\mathbb{HP}^3$，本节中我们将转换视角，采用 $\mathbb{H}^3$ 的射影模型。考虑 $\mathbb{RP}^3 \subset \mathbb{R}^4$，其等距群为群 $PGL_4(\mathbb{R})$。现在将 $\mathbb{H}^3$ 视为 $\mathbb{RP}^3$ 的子集。更准确地说，考虑 $\mathbb{R}^4$，其对角形式由矩阵给出

$$\eta_t = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & t^2 \end{bmatrix}$$

其中 $t \geq 0$。每个形式 η_t 都根据关系在 $\mathbb{X}_t \subset \mathbb{RP}^3$ 中定义一个凸区域

$$x^T \eta_t x = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + t^2 x_4^2 < 0$$

对于每个 t，$\mathbb{X}_t$ 都是 $\mathbb{RP}^3$ 的一个齐次子空间，并且保持 η_t 不变的线性变换群 G_t 保持该子空间不变。采用这些记号，$\mathbb{H}^3 = \mathbb{X}_{+1}$ 和 $G_{+1} = PO(3, 1) \cong PSL_2(\mathbb{C})$。

此外，将 $\mathsf{G}_t : \mathbb{X}_{+1} \to \mathbb{X}_t$ 定义为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & t^{-1} \end{bmatrix}$$

这就给出了 $\mathbb{X}_{+1}$与 $\mathbb{X}_t$之间的一个同构。此外，G_t将 $PO(3, 1)$ 共轭为 $G_{t\circ}$ 进一步注意到，由 $x_4 = 0$ 和 $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$ 定义的余维一空间 $\mathbb{P}^3$ 是 $\mathbb{H}^2$ 的一个全测地副本，并且对于所有 t，都包含于 $\mathbb{X}_t$ 中，而 g_t 逐点固定 $\mathbb{P}^3$。

对于 $t>0$，我们现在考虑 $M\cong S\times\mathbb{R}$上的一个一参数拟福克斯结构族。因此，w e have 一族发展映射和全纯表示如下：

$$\mathcal{D}_t:\widetilde{S}\to\mathbb{H}^3\cong X_{+1}$$
$$\rho_t:\pi_1(S)\to PO(3,1)\cong PSL_2(\mathbb{C})$$

进一步假设，对于 $t=0$, $\mathcal{D}_0$ 给出了从 $\widetilde{S}$ 到 $\mathbb{P}^3=\mathbb{H}^2$的浸没。也就是说，坐标 x_4 收敛到零函数。 ρ_t 随后收敛到 ρ_0，其像位于子群 $PO(2,1)\cong SL(2,\mathbb{R})$.

现在应用结构性整体化表示发展映射 $g_t\mathcal{D}_t^{-1}$ 给出。假设 $t\to 0$，那么 $g_t\mathcal{D}_t^{\sim}$ 收敛到局部微分同胚 $\sim\mathcal{D}$：$S\to\mathbb{X}_0$；如果 $\rho_{\mathcal{D}}$： $\pi_1(S)\to PGL_4(\mathbb{R})$ 是全纯单值化在 $t\to 0$ 时的极限，那么 $\mathcal{D}$ 关于 $\rho_{\mathcal{D}}$ 是等变的。具体而言，对于 $\gamma\in\pi_1(S)$，如果 ρ_t 具有如下形式：

$$\rho_t=\begin{pmatrix}A(t) & w(t)\\ v(t) & a(t)\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

其中 $A\in PO(2,1)\cong PSL(2,\mathbb{R})$ 且 $w(t)\ v(t)^T\in\mathbb{R}^3$，于是有

$$\lim_{t\to 0}g_t\rho_t(\gamma)g_t^{-1}=\lim_{t\to 0}\begin{pmatrix}A(t) & tw(t)\\ v(t)/t & a(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A(0) & 0\\ v'(0) & 1\end{pmatrix}=\rho_{\mathcal{D}} \tag{3.7}$$

因此我们得到如下结果：

定义 3.4.1。 *A half-pipe structure on $S\times\mathbb{R}$ is a（G_{HP^3}, $\mathbb{HP}^3$） structure where $\mathbb{HP}^3=\mathbb{X}_0$ and G_{HP} is the subgroup of PGL_4（$\mathbb{R}$） of matrices with the form $\begin{pmatrix}A & 0\\ v & \pm 1\end{pmatrix}$ where $A\in O$（2，1） and $v^T\in\mathbb{R}^3$.*

我们还定义：

定义 3 4 2 *Any path ρ_t of representations into $PSL_2\ \mathbb{C}$ satisfying Equation (3.7) is said to be* **...**（）。 *compatible at first order at $t=0$ with $\rho_{\mathcal{D}}$*

如 [19]， $G_{HP^3}\cong\mathbb{R}^{2,\ 1}\rtimes O(2,1)$ 中所观察到的，其中形如 $\begin{pmatrix}A & 0\\ v & \pm 1\end{pmatrix}$ 的元素可以解释为由 $A\in PO($ 2，1) 给出的双曲结构的无穷小变形，并沿着与 $PO(2,1)$ 正交的方向 v 进入 $PO(3,1)$。取商空间后，我们看到，拟福克斯流形半管三维流形正是从点 $[c]\in\mathcal{F}(S)$ 出发，在 $\mathcal{QF}(S)$ 中沿方向 $v_{([c],q)}\in N_{[c]}\mathcal{F}(S)$ 进行无穷小变形得到的。因此我们定义：

定义 3.4.3。 *$M_c^{HP}{}_{,q}$ is the half-pipe quasi-Fuchsian structures whose holonomy representation into $PGL_4\ \mathbb{R}$ is compatible at first order at $t=0$ with the holonomy ρ_t associated to quasi-Fuchsian metrics* ( ) () *in $\beta_{([c],q)}\ t$ in the sense of Definition 3.4.2.*

3.4.1 半管 Schwarzian 及其测度叶状结构

再次回忆，$v_{([c],q)}$ 是与路径 $\beta_{([c],q)}(t)\in\mathcal{QF}(S)$ 相切的切向量；对于该路径上的每个 $t<\epsilon$，我们都有 S 的唯一极小浸入，其浸入数据为 $I_t\in[c]$ 和 $I\!I_t=t\mathfrak{R}(q)$。因此，对每个 t，我们都有上述意义下的 $\mathcal{D}_t$ 和 ρ_t，并且当 t 趋于 0 时，半管结构是其极限。根据 [28]，在半管几何中，第二基本形式和形算子也有类似的半管概念。因此，我们希望研究当 $t\to 0$ 时这些浸入数据的极限，并使用以下引理：

引理 3 4 4 [28] *Let σ_t be a C^2 family of minimal immersions of $\mathbb{H}^2$ into $\mathbb{H}^3$ such that σ_0 is an* **..**( )。，极限 *embedding of $\mathbb{H}^2$. Let $\sigma=\ {}_{t\to 0}G_t\circ\sigma_t$ be the rescaled immersion in $\mathbb{HP}^3$. Then:*

- *The first fundamental form of σ coincides with the first fundamental form of σ_0:*

$$I(v,w)=\lim_{t\to 0}I_t(v,w)$$

- *The second fundamental form of σ is the first derivative of the second fundamental form of σ_t:*

$$I\!I(v,w) = \lim_{t\to 0} \frac{I\!I_t(v,w)}{t}$$

- *The shape operator B of σ is the first derivative of the shape operator B_t of σ_t:*

$$B(v) = \lim_{t\to 0} \frac{B_t}{t}$$

我们立即得到关于 $M_c^{HP}{}_{,\ q}$ 的以下结果。

命题 **3 4 5** *The half-pipe manifold $M_{c\ q}^{HP}$ contains a smooth minimal surface with immersion data ... ,() uniquely given by $I \in [c]$ and $I\!I = \mathfrak{R}\ q$.*

Proof. 由于 $M_c^{HP}{}_{,\ q}$ 是由路径 $\beta_{([c],q)}(t)$ 定义的拟福克斯结构的极限，我们直接应用引理。将 S 浸入 $M_c^{HP}{}_{,\ q}$ 的极小浸入的诱导度量由 $I = \lim_{t\to 0} I_t \in [c]$ 给出。因此我们看到 $I\!I = \lim_{t\to 0} \frac{I\!I_t}{t} = \mathfrak{R}(q)$。

因此，对于半管流形，我们将引入一个类似于无穷远处的 Schwarzian 的概念；结合我们目前已发展的工具以及对 M_{cq}^{HP} 的定义，这一概念相当自然。

定义 **3 4 6** *The positive (resp. negative) half pipe Schwarzian at infinity associated to M_{cq}^{HP} is de- ... () fined as the derivative at $\mathcal{F}\ S$ of the Schwarzian derivatives at the positive (resp. negative) end at infinity () for quasi-Fuchsian metrics in the path $\beta_{([c],q)}\ t$ for t small enough.*

由引理 3.2.14 可知

命题 3.4.7。*The positive and negative half-pipe Schwarzians at infinity for $M_c^{HP}{}_{,\ q}$ are q and $-q$.*

现在我们可以再次考虑与 $\pm q$ 上的 $[c]$ 相关联的水平测地叶层 $\pm$F，并通过应用定理 3.1.11 得到定理 1.1.2：

定理 **3 4 8** *Any pair $_+\ _- \in \mathcal{FMF}\ S$ can be uniquely realised as the horizontal foliations of ... (F, F) ( ) the positive and negative half pipe Schwarzians at infinity associated to quasi-Fuchsian half-pipe manifold. Moreover M_{cq}^{HP} defined before is the unique one realising $_+\ _-$ where $[c]\ q \in T^*\mathcal{T}\ S$ is the unique, (F, F) (,) ( ) point realising $_+\ _-$.*
(F, F)

这可以看作 Gardiner-Masur 定理的一阶解释：半管状拟福克斯流形通过其所包含的极小曲面，依据命题 3.4.5 与 $T^*\mathcal{T}(S)$ 中的点相对应。

第4章

靠近 Fuchsian轨迹的拟福克斯流形由常平均曲率曲面分叶：

这项工作的一个主要思路，是根据无穷远边界处的数据，考察拟福克斯流形内部的 Epstein曲面。首先，我们约定拟福克斯流形中浸入曲面的正交方向。

注记 4.0.1. *When S is an embedded surface in $\mathbb{H}^3/\Gamma$ homotopic to $S \times \{*\}$, we will refer to the (unit) normal vector to S as the one chosen according to the following convention. We lift S to a surface $\widetilde{S}$ in the universal cover $\mathbb{H}^3$,*

whose asymptotic boundary is the limit set Λ_Γ. Then $\widetilde{S}$ disconnects $\mathbb{H}^3$ in two Ω, components. We declare that the unit normal vector to S lifts to the unit normal vector to $\widetilde{S}$ pointing towards the component whose closure contains $+$ the positive end of the domain of discontinuity.

4.1 Epstein曲面

本小节介绍 Epstein 提出的一种构造：它将区域 $\mathbb{C}P^1 \cong \partial_\infty \mathbb{H}^3$ 上的某些共形度量自然地对应到 $\mathbb{H}^3$ 中的一个浸入，我们称之为 Epstein曲面。

4.1.1 Epstein 映射

给定任意点 $p \in \mathbb{H}^3$，我们定义映射 G_p：$T^1_p\mathbb{H}^3 \to \mathbb{C}P^1$：将 (x, v) 映到从 x 出发、切向量为 v 的 $\mathbb{H}^3$ 中唯一测地线的无穷远端点。接着，我们将 *visual metric* V_p 定义为通过 G_p 将 $T^1_p\mathbb{H}^3$ 的典范球面度量推前所得的度量。容易验证，度量 V_p 是共形的，也就是说，它与 $\mathbb{C}P^1$ 的黎曼曲面结构相容。事实上，若 o 是单位球模型中的原点，则 V_o 就是单位球面上的通常球面度量。对于一般情形，若 M 是将 o 映到 p 的 $\mathbb{H}^3$ 的等距变换，则 $V_p = M_* V_o$，因此二者属于同一个共形类，因为 M 可扩张为 $\mathbb{C}P^1$ 的双全纯映射。

基本结果如下：

命题 4.1.1 [23,25] *Let be a connected open domain in $\mathbb{C}P^1$ and let $\varphi \to \mathbb{C}P^1$ be a locally injective holomorphic map. If σ is a C^1 conformal metric on then there exists a unique continuous map $\Omega : \Omega$ Epstein 映射 $_{(\varphi,\sigma)} : \Omega \to \mathbb{H}^3$ such that*

$$(\varphi^* V_{\mathrm{Eps}_{(\varphi,\sigma)}(z)})(z) = \sigma(z)$$

for all $z \in \Omega$. Moreover, if σ is C^k, then Epstein 映射$_{(\varphi,\sigma)}$ *is C^{k-1}.*

我们注意到，$\mathrm{Eps}_{(\varphi,\sigma)}$ 一般不是浸入。例如，若 σ 是单位球面上的标准球面度量，则相应的 Epstein 映射在单位球模型中恒等于原点 o。

在 [23, 第 3] 节中，Dumas 在 $\mathbb{H}^3$的上半空间模型中给出了 $\mathrm{Eps}_{(\varphi,\sigma)}$ 的一个显式公式，这对我们的研究很有用。令 p 为上半空间模型中连接 0 与 ∞ 的测地线上的一点，使得 0 处的视觉度量 V_p 等于 $|dz|^2$。具体而言，$p = (0, 0, 2)$。若将共形度量写作 $\sigma = e^{2\eta}|dz|^2$，并为简化记号，令 Ω 为 $\mathbb{C}$的一个连通开子集，从而取 $\varphi = \mathrm{id}$，则 $\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma)}$ 的表达式 $D \to \mathbb{H}^3$ 如下：

$$\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma)}(z)=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \eta_z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{\eta}{2}} & 0\\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}}\end{pmatrix}\cdot p \tag{4.1}$$

4.1.2 施瓦氏张量

本文所需的最后一个基本预备步骤，是给出 Epstein 映射的平均曲率表达式。为此，我们首先需要引入 Schwarzian 张量的概念，该概念由 Osgood 和 Stowe 提出 [61]。给定定义在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}P^1$上的两个共形度量 $\sigma_1 = e^{2\eta_1}|dz|^2$ 和 $\sigma_2 = e^{2\eta_2}|dz|^2$， σ_1 相对于 σ_2 的 $Schwarzian\ tensor$ 是如下定义的二次微分（一般而言，不一定是全纯的）：

$$B(\sigma_1,\sigma_2)=((\eta_2)_{zz}-(\eta_2)_z{}^2-(\eta_1)_{zz}+(\eta_1)_z{}^2)dz^2 \tag{4.2}$$

该定义推广了经典的Schwarzian导数，即当 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 是一个局部单射全纯函数时，有

$$S(f)=2B(|dz|^2,f^*|dz|^2)\ . \tag{4.3}$$

显然 $B(\sigma_2,\ \sigma_1)=-B(\sigma_1,\ \sigma_2)$。与Schwarzian导数类似，施瓦氏张量具有若干自然性。对于 $\Omega\subset\mathbb{C}P^1$上的任意度量 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$，

- 给定一个局部单射全纯映射 f，

$$f^*B(\sigma_1,\sigma_2)=B(f^*\sigma_1,f^*\sigma_2)\ . \tag{4.4}$$

- 余循环性质成立：

$$B(\sigma_1,\sigma_3)=B(\sigma_1,\sigma_2)+B(\sigma_2,\sigma_3)\ . \tag{4.5}$$

特别地，(4.4) 意味着，如果 σ_1 和 σ_2 在 Ω 的某个自同构下保持不变，那么二次微分 $B(\sigma_1,\ \sigma_2)$ 也保持不变。如果群 Γ 通过双全纯映射作用于 Ω，且 $\Omega/\Gamma\cong\Sigma$，从而在商曲面 Σ 上诱导出黎曼曲面结构，并且 $\sigma_1,\ \sigma_2$ 是 Γ-不变的共形度量，那么 $B(\sigma_1,\ \sigma_2)$ 会在商空间中诱导出一个定义良好的二次微分。

M¨obius 平坦度量

如果一个共形度量 σ 满足 $M\ddot{o}bius\ flat$，则称其为 $B(\sigma,\ |dz|^2)=0$。例如，由（4.3）可知，当 f 本身是一个 M¨obius 变换时，拉回度量 $f^*|dz|^2$ 总是 M¨obius 平坦的。这并非唯一的情形。事实上，可以证明， $B(\sigma,\ |dz|^2)=0$，当且仅当 σ 是以下某个度量在 M¨obius 变换下的拉回：

- 在 $\mathbb{C}$上的平坦度量 $|dz|^2$，
- 在 $\mathbb{D}$上的 Poincar´e 度量的正倍数，
- $\mathbb{P}^1$上的球面度量的正倍数 $\mathbb{C}$。

现在，给定一个度量 σ，我们将记作

$$B(\sigma)=B(g_{\mathbb{CP}^1},\sigma)$$

相对于 M¨obius 平坦度量 $g_{\mathbb{CP}^1}$ 的 σ Schwarzian 导数。根据 M¨obius 平坦的定义和余循环性质（4.5），$B(\sigma)$ 与所选的 M¨obius 平坦度量 $g_{\mathbb{CP}^1}$ 无关。因此，如果 f 是一个 M¨obius 变换，那么

$$B(f^*\sigma)=f^*B(\sigma) \tag{4.6}$$

由 (4.4) 得。作为定义 $B(\sigma)$ 不依赖于 $g_{\mathbb{CP}^1}$ 的另一推论，结合将定义 (4.2) 应用于 $B(e^{2t}\sigma)=B(|dz|^2,\ e^{2t}\sigma)$，我们得到：若 e^{2t} 是任意正实常数，则

$$B(e^{2t}\sigma)=B(\sigma)\ . \tag{4.7}$$

F最后，给定一个二次微分 $\phi = \lambda(z)dz^2$ 和一个共形度量 $\sigma = e^{2\eta}|dz|^2$，我们定义 the norm 关于 ϕ 相对于 σ：

$$\|\phi\|_\sigma(z) := e^{-2\eta(z)}|\lambda(z)| \ .$$

由于 $|\phi|$ 和 σ 在双全纯坐标变换下遵循相同的变换规则，$\|\phi\|_\sigma$ 也是定义良好的函数，这意味着如果 f 是一个局部单射全纯函数，那么

$$\|f^*\phi\|_{f^*\sigma} = \|\phi\|_\sigma \circ f \ . \tag{4.8}$$

特别地，如果 $\sigma = e^{2u}h_0$ 是开集 Ω 上的共形度量，而 ϕ 是 (Σ, h) 上的二次微分，那么 $\|\phi\|_\sigma$ 是 Σ 上的函数。由 (4.7) 我们还可得到：

$$\|\phi\|_{e^{2t}\sigma} = e^{-2t}\|\phi\|_\sigma \ , \tag{4.9}$$

对于任意常数 $t \in \mathbb{R}$。

4.1.3 平均曲率

现在我们可以给出 Epstein 映射的平均曲率公式。设 σ 是开集 Ω 上的 C^2 共形度量。为简化记号，我们先假设 $\varphi =$ 为恒等映射。此外，假设 $\mathrm{Eps}^{(\mathrm{id},\sigma)}$ 是一个浸入。在这种情况下，事实证明，$\mathrm{Eps}^{(\mathrm{id},\sigma)}$ 在 z 处与经过 $\mathrm{Eps}^{(\mathrm{id},\sigma)}$ 且无穷远点为 z 的唯一 horosphere 相切。因此，$\mathrm{Eps}^{(\mathrm{id},\sigma)}$ 的平均曲率等于函数

$$\mathcal{H}(\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma)}) = \frac{K(\sigma)^2 - 1 - 16\|B(\sigma)\|_\sigma^2}{(K(\sigma)-1)^2 - 16\|B(\sigma)\|_\sigma^2} \ , \tag{4.10}$$

其中 $K(\sigma)$ 表示 σ的曲率。参见 [21,方程 3.2、3.3] 以及 [62, 引理 3.4]。这里，平均曲率定义为第二基本形式相对于第一基本形式的迹的一半。计算时采用指向 Ω 的单位法向量。接下来，当 Epstein 映射在 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ 中为 Γ 一个拟 Fuchsian 群且 $\Omega = \Omega^+$时，我们将应用公式 (4.10)，此时 Epstein 映射诱导出一个嵌入曲面。因此，这里对平均曲率的约定与注记 4.0.1 一致。

为写出 $\mathrm{Eps}^{(\varphi,\sigma)}$ 的一般公式，由于计算是局部的，我们可以限制在一个开子集 Ω 上，使得 φ 是一个到其像上的双全纯映射。令 σ 为 Ω 上的一个度量，并令 $\hat{\sigma}$ 满足 $\varphi^*\hat{\sigma} = \sigma$。那么我们注意到 $K(\hat{\sigma}) \circ \varphi = K(\sigma)$，而由 (4.3)、(4.4) 和 (4.5) 可得，

$$\varphi^* B(\hat{\sigma}) = B(\varphi^* g_{\mathbb{CP}^1}, \sigma) = B(\varphi^* g_{\mathbb{CP}^1}, g_{\mathbb{CP}^1}) + B(g_{\mathbb{CP}^1}, \sigma) = B(\sigma) - \frac{1}{2}S(\varphi) \ .$$

因此我们可以推导出以下表达式：

$$\mathcal{H}(\mathrm{Eps}_{(\varphi,\sigma)}) = \frac{K(\sigma)^2 - 1 - 16\|B(\sigma) - S(\varphi)/2\|_\sigma^2}{(K(\sigma)-1)^2 - 16\|B(\sigma) - S(\varphi)/2\|_\sigma^2} \tag{4.11}$$

4.1.4 一个技术要点

利用隐函数定理证明常平均曲率曲面存在性的基本思路如下。考虑拟福克斯流形 $\mathbb{H}^3/\Gamma$，其中 $\Omega^\pm$ 是极限集 Λ_Γ 补集的连通分支。我们希望将 CMC条件 $\mathcal{H} = c$ 的解（对于 $c \in (-1, 1)$）表示为某个函数 G 的水平集，该函数取决于 S 上共形类中 Ω^+/Γ 的双曲度量 h （即，它表示 M 的第一个伯斯参数 h^+ ）、定义在 (S, h) 上的全纯二次微分 ϕ（它是 $\mathbb{D}$ 与 Ω_+ 之间共形同构的 Schwarzian导数的商），以及 S 上形如 $e^{2u}h$ 的度量的共形因子。最后这个函数 u 是无限维函数空间 $C^\infty(S, \mathbb{R})$ 的一个元素。先验地，对 (h, ϕ) 也在一个无限维空间中变化，因为 h 在双曲度量空间 $\mathcal{M}_{-1}(S)$ 中变化。尽管这并非真正必要，但使用 $\mathrm{Diff}_0(S)$ 的作用将自身约化到对 (h, ϕ) 的代表元上会很方便；此时它们在有限维空间 $\mathcal{Q}(S)$ 中变化。下面的引理将使这一思路形式化。

引理 **4 1 2** *Let π* $\mathcal{M}_{-1}$ S $\to \mathcal{T}$ S *be the quotient map by the action of* $_0$ S *on* $\mathcal{M}_{-1}$ S *. There* ... : ( ) ( ) Diff( ) ( ) : ( ) ( ) *exists a smooth section s* $\mathcal{T}$ S $\to \mathcal{M}_{-1}$ S *of π.*

我们要指出的是，我们所寻找的截面 s 以任何方式都不是“典范的”。实际上，有多种方法可以实现这一点；我们将概述其中一种方法，该方法依赖于双曲曲面的调和映射理论，见 [73]。

Sketch of proof of Lemma 4.1.2. 固定 h_0 上的双曲度量，并考虑 $H^0((S,h_0)\ K^2)$ 上的全纯二次微分向量空间。于是对于每个 $q \in H^0((S,h_0)\ K^2)$，都存在唯一的双曲度量 h_q，使得 $\mathrm{id} : (S,h_0) \to (S,h_q)$ 是调和的，其中 h_q 随 q 光滑变化。因此，对应关系 $q \mapsto h_q$ 给出一个映射 $H^0((S,h_0)\ K^2) \to \mathcal{M}_{-1}(S)$，该映射与 π 后复合后，为从 $H^0((S,h_0)\ K^2)$ 到 $\mathcal{T}(S)$ 的同胚。这证明了所需截面的存在性。

□

注记 **4 1 3** *Wolf's approach via harmonic maps actually led to the construction of a global param-... ( ) ((,)) eterization of $\mathcal{T}\ S$ by means of the space $H^0\ S\ h_0\ K^2$ once the metric h_0 is fixed. This allows us to identify the space $\mathcal{Q}(S)$ with a very concrete finite-dimensional manifold of real dimension $12g-12$, namely the total space of the smooth vector bundle $\mathcal{E}$ over $H^0((S,h_0)\ K^2)$ whose fiber over a quadratic differential q is equal to $H^0\ S\ h_q\ K^2$ the space of holomorphic quadratic differentials of the hyperbolic((,)) (,) (,) surface $S\ h_q$. In rest of our exposition we will identify with abuse any pair $h\ \phi$ with its corresponding point in the total space of $\mathcal{E}$. (Notice that the identification with $\mathcal{Q}\ S$ ( )*

heavily depends on the choice of the section s from Lemma 4.1.2.)

4.2 常平均曲率曲面的存在性

本节旨在证明常平均曲率曲面的两个存在性结果，从本质上说，一个是“在端上”的结果（定理 4.2.1），另一个是“在紧致部分”的结果（定理 4.2.7）。随后，在定理 4.2.8 中，我们将二者结合起来，得到对于接近 Fuchsian轨迹的拟福克斯流形，$h \in (-1,\ 1)$ 中常平均曲率曲面的存在性；目前这一结果弱于我们的主要结果，即定理 1.2.2。

4.2.1 端上的存在性

文献 [53] 已证明，每个拟福克斯流形的端都由常平均曲率曲面单调叶状分解；最近，文献 [62] 又给出了另一种证明。在这里，我们需要一个改进的表述，以便对叶状结构的叶上平均曲率的取值，在 $\mathcal{QF}(S)$ 中获得局部的一致控制。

定理 4.2.1。 *Let S be a closed oriented surface of genus ≥ 2 and $m \in \mathcal{QF}(S)$. Then there exists a neighbourhood U_0 of m in $\mathcal{QF}(S)$ and a constant $\epsilon = \epsilon(m,\ U_0)$ such that the ends of every quasi-Fuchsian manifold in U_0 are smoothly monotonically foliated by CMC surfaces whose mean curvature ranges in $(-1,\ -1+\epsilon)$ and in $(1-\epsilon,\ 1)$。*

我们称 $M \cong S \times \mathbb{R}$ 的端为 M 中某个紧致带边子流形的补集的连通分支，该子流形同胚于 $S \times I$，其中 I 为一个闭区间。

固定流形的常平均曲率曲面的存在性概述

现在我们使用我们的记号和设置，简要回顾 [62] 中给出的证明，随后将说明如何对其进行调整，以证明定理 4.2.1。粗略地说，[62] 的证明是将隐函数定理应用于平均曲率公式（4.10）中的常平均曲率方程，并以无穷远处的共形度量为背景。

更准确地说，Quinn 证明的思路是考察定义在 Ω_+ 上、具有 $\varphi = \mathrm{id}$ 的 Epstein 映射，它们与形式为 $\sigma(u) = e^{2u}h_0$ 的共形度量相关，其中 h_0 表示完备共形双曲度量，并研究 u 中的下列方程：

$$\mathcal{H}(\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(u))}) = H$$

当 $H \in (-1,\ 1)$ 接近 ± 1 时。由 (4.10) 可得方程：

$$\mathcal{H}(\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(u))}) = \frac{K(\sigma(u))^2 - 1 - 16\|B(\sigma(u))\|^2_{\sigma(u)}}{(K(\sigma(u)) - 1)^2 - 16\|B(\sigma(u))\|^2_{\sigma(u)}} = H \tag{4.12}$$

注记 **4 2 2** *If we choose a metric σ invariant under the quasi-Fuchsian group Γ acting on $_+$ by .....Ω,* (( )) *biholomorphisms then $\|B\ \sigma\ u\ \|^2_{\sigma\ u}$ is a well-defined invariant function on the quotient S by* 4 6 *and* () , (.) (4 8 4 12 *can be really thought as an equation for a function u on the* .) *quotient surface S where $\sigma\ u\ = e^{2u}h_0$ is a metric on S.* *. This shows that the equation* (.) , ( )

注记 **4 2 3** *the uniqueness property of the Epstein map as in* .. *Proposition 4.1.1 implies that the Epstein surface is invariant under the quasi-Fuchsian group Γ. More* . *In the situation of Remark 4.2.2,precisely, for any $\gamma \in \Gamma$, we have*

$$\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(u))} \circ \gamma = \gamma \circ \mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(u))} \ . \tag{4.13}$$

Therefore $\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(u))}$ *induces a map from Ω^+/Γ to the quasi-Fuchsian manifold $\mathbb{H}^3/\Gamma$.*

现在的关键是对方程 (4.12) 进行重整化，从而得到一个等价方程，并可为该方程求出 $H = -1$ 的显式解。具体而言，这是将 (H, u) 变量替换为 (H, v)，其中

$$v := u + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+H}{1-H}\right) \ . \tag{4.14}$$

现在令 $\tau(v) = e^{2v}h_0$，于是有恒等式:

$$\tau(v) = \frac{1+H}{1-H}\sigma(u) \ . \tag{4.15}$$

直接由 (4.12) 和 (4.15) 计算（并使用 (4.9)）可知，对于 $H \in (-1,1)$，u 是 (4.12) 的解，当且仅当 v 满足以下方程:

$$G(H, v) := 1 - H - 2HK(\tau(v)) + (-1-H)\left(K(\tau(v))^2 - 16\|B(\tau(v))\|^2_{\tau(v)}\right) = 0 \ . \tag{4.16}$$

其主要优势在于，现在所作的选择 $v_0 \equiv 0$ 满足 $G(-1,\ v_0) = 0$，因为 $\tau(v_0) = h_0$ 且 $K(h_0) = -1$。因此，我们处于适合在该方程的这一解（$-1,\ v_0$）附近应用隐函数定理的情形（例如参见 [47, §I.5]）。必须证明，G 关于 u 的导数是在适当函数空间之间的可逆算子（详见下文），并且得到一族解 $\mathsf{v} = \mathsf{v}(H)$，其关于 H 光滑地依赖于 (4.16)，对于 $H \in [-1, -1+\epsilon)$。通过 Epstein 映射 $\mathrm{Eps}^{(\mathrm{id},\sigma(\mathsf{u}(H)))}$，这将给出平均曲率 H 接近 -1 的常平均曲率曲面，其中

$$\mathsf{u}(H) = \mathsf{v}(H) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+H}{1-H}\right) \ .$$

定理 4.2.1 的推广

现在我们将描述如何在我们的情形中扩展这一策略。不同之处在于，我们还需要允许拟福克斯流形发生变化，这由一对（$h,\ \phi$）的变分表示，从而全纯映射 $f = f_{\tilde{\phi}}$ 也发生变化；该映射在 $\mathbb{D}$ 与区域 Ω^+ 之间给出一个双全纯映射。下面对此进行详细说明。

为明确表示对双曲度量 h 的依赖性，我们现在记 $\sigma_h(u) := e^{2u}h$。我们需要将方程（4.12）替换为以下条件：Epstein 映射 $\mathrm{Eps}_{(f_{\tilde{\phi}},\sigma_h(u))}$ 的平均曲率等于 H。由方程（4.11）可知，该恒等式写作:

$$\frac{K(\sigma_h(u))^2 - 1 - 16\|B(\sigma_h(u)) - \phi/2\|^2_{\sigma_h(u)}}{(K(\sigma_h(u)) - 1)^2 - 16\|B(\sigma_h(u)) - \phi/2\|^2_{\sigma_h(u)}} = H \tag{4.17}$$

其中我们利用了这样的事实：由构造可知，$S(f_{\tilde{\phi}})$ 在商空间中诱导的全纯二次微分等于 ϕ。这再次是闭曲面 S 上的一个方程，并且与（4.14）中相同的变量替换导出方程:

$$G(H, h, \phi, v) := 1 - H - 2HK(\tau_h(v)) + (-1-H)\left(K(\tau_h(v))^2 - 16\|B(\tau_h(v)) - \phi/2\|^2_{\tau_h(v)}\right) = 0 \ , \tag{4.18}$$

其中现在 $\tau_h(v) = e^{2v}h$。

现在，固定 S上的一个双曲度量 h_0以及 (S,h)上的一个全纯二次微分 ϕ_0。与第4.2.1节类似，方程（4.18）的一组解为 $(-1,h_0,\phi_0,v_0)$，其中 v_0表示常零函数，因为 $\tau_{h_0}(v_0)=h_0$的曲率为 -1。为应用隐函数定理，我们仔细描述一下 G的定义区域。回忆注4.1.3，引理4.1.2中所述的截面选择为我们提供了 $\mathcal{Q}(S)$与 $\mathbb{R}^{12g-12}$之间的一个微分同胚。因此，我们考虑 $\mathbb{R}^{12g-12}$的开子集 W，它对应于映射 $\mathcal{S}$（在（2.2）中引入）作用于 $\mathcal{QF}(S)$所得的像。稍微滥用一下记号，我们将 W中的元素记作一对 (h,ϕ)，其中 h是双曲度量，ϕ是 (S,h)上的全纯二次微分。接着，我们将 G视为一个映射

$$G:\mathbb{R}\times W\times W^{2,s}(S,h_0)\to W^{2,s-2}(S,h_0)$$

对于 $s\geq 2$，其中 $W^{2,s}(S,h_0)$表示 S上取实值且具有 L^2-可积的 $\leq s$ 阶弱导数的函数的Sobolev空间（相对于 h_0的标准黎曼测度），以及 $W^{2,0}(S,h_0):=L^2(S,h_0)$。通过直接检查，$G$关于所有变量光滑。现在需要证明，对于任意 $s\geq 2$，导数 $d_vG_{(-1,h_0,\phi_0,v_0)}$是一个有界可逆算子。简单计算得:

$$\begin{aligned} d_vG_{(-1,h_0,\phi_0,v_0)}(\dot v) &= 2\left.\frac{d}{dv}\right|_{v=v_0}(K(e^{2v}h)) \\ &= 2\left.\frac{d}{dv}\right|_{v=v_0}(e^{-2v}(-\Delta_{h_0}v+K(h_0)) \\ &= 2(2\dot v-\Delta_{h_0}\dot v) \end{aligned} \tag{4.19}$$

众所周知，这样的算子是连续线性同构；为方便读者，我们在此简要给出证明。

引理 4.2.4 *Let f be a smooth and strictly positive function and let h be any Riemannian metric on a compact surface S. Then the operator $u\mapsto fu-\Delta_h u$ is a positive definite and continuous linear isomorphism from $W^{2,s}(S,h)$ to $W^{2,s-2}(S,h)$ for any $s\geq 2$. In particular for any smooth function λ on S there exists a unique smooth function u satisfying $\Delta_h u-fu=\lambda$.*

Proof. 令 T表示连续线性算子

$$T:=f\,id-\Delta_h:W^{2,s}(S,h)\to W^{2,s-2}(S,h),$$

其中某个 $s\geq 2$。通过简单的分部积分可知，T相对于 L^2-内积是一个正定对称算子：事实上，对于任意 v, $w\in W^{2,s}(S,h)$，有

$$\langle v,Tw\rangle_{L^2}=\int_S v\,Tw\,\mathrm{d}a_h=\int_S(fvw+h(\nabla v,\nabla w))\,\mathrm{d}a_h,$$

其中 ∇v表示相对于度量 h的 v的（弱）梯度，而 $\mathrm{d}a_h$是标准的黎曼体积形式。由于 f是严格正的函数，T满足 $\langle v,Tv\rangle_{L^2}\geq 0$，对任意 $v\in W^{2,s}(S,h)$均成立，且等号成立当且仅当 $v=0$。为证明 T是满射，取 $\lambda\in W^{2,s-2}(S,h)$，并定义线性泛函

$$\varphi(v):=\int_S v\lambda\,\mathrm{d}a_h.$$

Noti明 φ 关于 L^2-范数是连续的，因此关于Sobolev 范数也是连续的 m $\|\cdot\|_{W^{2,s}}$对于任意 $s\geq 0$。现在我们在 $W^{2,1}(S,h)$上引入以下双线性对称形式:

$$a(v,w):=\int_S(fvw+h(\nabla v,\nabla w))\,\mathrm{d}a_h,$$

若 $C\geq 1$ 是满足 $C^{-1}\leq f\leq C$ 的某个正常数，则有

$$C^{-1}\|v\|^2_{W^{2,1}}\leq a(v,v)\leq C\|v\|^2_{W^{2,1}}.$$

对于任意 $v \in W^{2,1}(S, h)$。因此，双线性形式 a 等价于 Sobolev空间 $W^{2,1}(S, h)$ 的标准希尔伯特内积，因此 φ 关于 a 也是连续的。根据里斯表示定理，我们得出存在唯一的 $u \in W^{2,1}(S, h)$，满足 $a(u, v) = \varphi(v)$，对于任意 $v \in W^{2,1}(S, h)$。这证明了方程 $fu - \Delta_h u = \lambda$ 存在一个弱解 $u \in W^{2,1}(S, h)$。

接下来需要进行更细致的分析，以证明 $\lambda \in W^{2,s-2}(S, h)$ 的正则性足以将 u “提升”为 $W^{2,s}(S, h)$ 中的一个真正元素，并满足 $Tu = \lambda$。论证中这一部分需要用到椭圆正则性理论，从而得到如下形式的控制

$$\|u\|_{W^{2,s}} \leq M(\|u\|_{L^2} + \|\lambda\|_{W^{2,s-2}}),$$

其中乘法常数 $M > 0$ 仅依赖于 $s \geq 2$、函数 f 以及紧黎曼曲面 (S, h)。关于光滑流形上椭圆正则性结果的详细介绍，请参见 [60, §10.3.2] （尤其是 [60, 定理 10.3.12]）。

□

因此，我们证明了 $d_v G\colon W^{2,s}(S, h_0) \to W^{2,s-2}(S, h_0)$ 在点 $(-1, h, \phi, v_0)$ 处是线性同构。现在可以应用巴拿赫空间的隐函数定理，并推出存在 $\epsilon > 0$、(h_0, ϕ_0) 的一个邻域 U_0，以及一个函数

$$\mathsf{v} : [-1, 1+\epsilon) \times U_0 \to W^{2,s}(S, h_0)$$

使得在 $(-1, h_0, \phi_0, 0$ v_0 $H\ h$ $=$ $)$ 的某个邻域内，$G = 0$ 的所有解都具有形式 $G(H, h, \phi, \mathsf{v}(H, h, \phi))$。与 [62], 中完全一样，我们可以应用椭圆正则性来证明函数 $\mathsf{v}(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是光滑的，并且关于 (H, h, ϕ) 光滑依赖（例如参见 [34, 引理 17.16]）。

利用 (4.14)，我们定义函数 $\mathsf{u}\colon [-1, 1+\epsilon) \times U_0 \to W^{2,s}(S, h)$ 如下：

$$\mathsf{u}(H, h, \phi) := \mathsf{v}(H, h, \phi) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+H}{1-H}\right). \tag{4.20}$$

根据构造，当 H 在 $[-1, -1+\epsilon)$ 中变化时，Epstein 映射

$$\mathrm{Eps}_{(f_{\tilde{\phi}}, e^{2\mathsf{u}(H,h,\phi)})} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}^3$$

于是诱导出平均曲率为 H 的（光滑）常平均曲率浸入。我们将在下文第 4.2.2 节看到，通过选取更小的 ϵ 和 U_0，这些映射是浸入。此外，正如注记 4.2.3 中所观察到的，它们在拟福克斯流形中诱导出常平均曲率浸入，其像经映射 $\mathcal{S}$ 后为点 (h, ϕ)。

当然，同样的论证也可用于另一个端，即不连续域的分支 Ω^-，并且适用于 H 接近 1 的情形。至此，定理 4.2.1 的存在性部分得证。

4.2.2 端的叶状结构

现在我们讨论定理 4.2.1 中关于叶状结构的部分。为此，我们先概述 [62], 中给出的证明，该证明表明，给定拟福克斯流形 M 的端由常平均曲率曲面构成叶状结构；随后我们将调整这一证明，以完成定理 4.2.1 的证明。

固定流形的叶状结构结论概述

沿用上一节的记号，Quinn 的思路是：固定 h_0 和 ϕ_0，考虑映射

$$\widehat{\Psi} : S \times [-1, -1+\epsilon) \to M \cup \partial^+_\infty M$$

它由映射 $\Psi : \Omega^+ \times [-1, -1+\epsilon) \to \mathbb{H}^3 \cup \Omega^+$ 在商空间上诱导而成：

$$\Psi(z, H) = \begin{cases} z & \text{if } H = -1 \\ \mathrm{Eps}_{(\mathrm{id}, e^{2\mathsf{u}(H)})}(z) & \text{if } H > -1 \end{cases}$$

接下来，我们希望证明 Ψ 在每个 $(z, -1)$ 处都是局部微分同胚，并利用紧性论证推得 $\widehat{\Psi}$ 是从 $S \times [-1, -1+\epsilon')$ 到其像的微分同胚，只要选择足够小的 $\epsilon' < \epsilon$。

遗憾的是，上面写出的映射 Ψ 的微分在点 $(z, -1)$ 处并非单射。不过，只需对参数 H 进行重新参数化即可轻松解决。令 $t(H) = \sqrt{1+H}$，并且

写 $H(t) = -1 + t^2$，其中 $t > 0$。然后，我们将上面的映射 Ψ 修改为一个新映射，称之为 aga in $\Psi : \Omega^+ \times [0, \delta) \to \mathbb{H}^3 \cup \Omega^+$ 为避免记号滥用，对于 $\delta = \sqrt{1+\epsilon}$，其定义为：

$$\Psi(z,t) = \begin{cases} z & \text{if } t = 0 \\ \mathrm{Eps}_{(\mathrm{id}, e^{2\mathsf{u}(H(t))})}(z) & \text{if } t > 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

(4.21) 中的映射现在就是我们希望在各点 $(z, t = 0)$ 处求导的表达式。当 $\varphi = \mathsf{id}$ 和 $\sigma = e^{2\eta}|dz|^2$ 时，利用 Epstein 映射的以下显式表达式即可轻松完成，这一表达式由公式 (4.1) 推出：

$$\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma)}(z) = (z, 0) + \frac{2}{e^{2\eta} + 4|\eta_z|^2}(2\eta_{\bar{z}}, e^{\eta}) \ .$$

我们必须将此公式应用于度量 $\sigma(u) = e^{2\eta}|dz|^2 = e^{2u}h_0$，其中

$$u = \mathsf{u}(H(t)) = \mathsf{v}(H(t)) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+H(t)}{1-H(t)}\right)$$

如 (4.20) 所示。记 $v = \mathsf{v}(H(t))$ 和 $\tau(v) = e^{2v}h_0 = e^{2\lambda}|dz|^2$，则有

$$\eta = \lambda - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+H(t)}{1-H(t)}\right)$$

因此我们得到以下表达式：

$$\begin{aligned} \mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(\mathsf{u}(H(t))))}(z) &= (z,0) + \frac{2}{e^{2\lambda} + 4\frac{1+H(t)}{1-H(t)}|\lambda_{\bar{z}}|^2}\left(2\frac{1+H(t)}{1-H(t)}\lambda_z, \sqrt{\frac{1+H(t)}{1-H(t)}}e^{\lambda}\right) \\ &= (z,0) + \frac{2}{e^{2\lambda} + \frac{4t^2}{2-t^2}|\lambda_z|^2}\left(\frac{2t^2}{2-t^2}\lambda_{\bar{z}}, \sqrt{\frac{t^2}{2-t^2}}e^{\lambda}\right) \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

由此可见，当 $t \to 0^+$ （即当 $H \to -1^+$）时，$\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(\mathsf{u}(H(t))))}(z)$ 的极限等于 z。此外，$\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id},\sigma(\mathsf{u}(H(t))))}$ 关于 t 在 $t = 0$ 处的导数等于 $(0, \sqrt{2}e^{-\varrho})$，其中 ϱ 是 Ω^+ 上的双曲度量相对于 $|dz|^2$ 的密度。因此我们有（在上半空间的实坐标中）：

$$d\Psi_{(z,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}e^{-\varrho} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

这显然是可逆的。

定理 4.2.1 的适配

上述 Quinn 的构造与我们在此处应用的构造类似，但需要进行修改，以便在对 (h, ϕ) 于 (h_0, ϕ_0) 的某个小邻域内变化时，能够一致地选择 ϵ'。为此，我们对上述映射进行修改（为简便起见仍用同一符号表示）：

$$\Psi : \mathbb{D} \times [0, \delta) \times U_0 \to \left(\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3\right) \times U_0$$

由以下内容定义（回顾（4 中 $u(H, h, \phi)$ 的定义 .20)):

$$\Psi(z, H, h, \phi) = \begin{cases} \left(f_{\tilde{\phi}}(z), h, \phi\right) & \text{if } t = 0 \\ \left(\mathrm{Eps}_{(f_{\tilde{\phi}}, e^{2\mathsf{u}(H(t),h,\phi))})}, h, \phi\right) & \text{if } t > 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

因此，该映射诱导出一个连续映射

$$\widehat{\Psi} : S \times [0, \delta) \times U_0 \to \left(M \cup \partial^+_\infty M\right) \times U_0 \ .$$

^第一步包括证明，Ψ 的微分（因此 Ψ的微分）在点（z，$t = 0$）处是可逆的。

Lem引理 4.2.5. *For every $z \in \mathbb{D}$ and every pair $(h,\ \phi) \in U_0$, the differential at $(z,\ 0,\ h,\ \phi)$ of the map $\Psi : \mathbb{D} \times [0,\delta) \times U_0 \to \left(\mathbb{H}^3 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^3\right) \times U_0$ defined in (4.24) is invertible.*

Proof. 显然，Ψ 的微分具有如下形式

$$d\Psi_{(z,0,h_0,\phi_0)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{d\Psi_{(z,0)}(\cdot,\cdot,h_0,\phi_0)}{0} & \begin{array}{c}\star\\ \hline 1\end{array}\end{array}\right)$$

因此，只需验证 $\Psi(\cdot,\ \cdot,\ h_0,\ \phi_0)$ 的微分是可逆的，即计算关于 z 和 t 的导数，同时固定 h 和 ϕ。为此，我们实际上可以将其归结为为得到 (4.23) 而进行的计算。事实上，由于 $f_{\tilde{\phi}_0}$ 是一个局部单射全纯函数，我们可以在一个小的开集上将变量从 z 改为 $w := f_{\tilde{\phi}_0}(z)$，在该开集上 $f_{\tilde{\phi}_0}$ 是到其像上的双全纯映射。于是，我们可以将 u、v、η 和 λ 看作 w 而不是 z 的函数，方法是与 $f_{\tilde{\phi}_0}$ 的局部逆映射复合。（当然，这里的 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$ 不仅是 $(z,\ H)$ 的函数，也是 $(h,\ \phi)$ 的函数，但由于我们是在固定 $(h,\ \phi)$ 的情况下求微分，结果将完全相同。）

然后，我们便得到与式 (4.22) 相同的结果，

$$\mathrm{Eps}_{(f_{\tilde{\phi}_0},\sigma(\mathfrak{u}(H(t),h_0,\phi_0))}(w) = (w,0) + \frac{2}{e^{2\lambda} + \frac{4t^2}{2-t^2}|\lambda_w|^2}\left(\frac{2t^2}{2-t^2}\lambda_{\bar{w}}, \sqrt{\frac{t^2}{2-t^2}}e^{\lambda}\right)\ .$$

如上进行微分，我们得到与 (4.23) 中相同的表达式，该表达式是可逆的。由于 w 是局部坐标，且 $(h_0,\ \phi_0)$ 的选择是任意的，因此对于任意 z, h, ϕ，Ψ 的微分在点 $(z, 0, h, \phi)$ 处是可逆的。

□

因此，$\widehat{\Psi}$ 是每个点（z，0，h，ϕ）邻域中的局部微分同胚。现在我们证明一个简单的拓扑引理。

引理 4 2 6 *Let X be a metrizable compact topological space Y any topological space and V an open . . . ,: subset of $\mathbb{R}^n$ containing the origin. Let $F \quad X \times V \to Y$ be a continuous map such that*

- *$F|_{X\times\{0\}}$ is injective and*
- *F is locally injective at any $(x,\ 0) \in X \times \{0\}$.*

Then there exists a neighbourhood $V' \subset V$ of the origin such that $F|_{X\times V'}$ is injective.

Proof. 假设不存在这样的邻域 V' 使得 $F|_{X\times V'}$ 为单射。那么存在序列 $(x_n \quad x_n \quad =$ $F\ x'_n\ t'_n \qquad X$ $,t_n)$ 和 (x'_n, t'_n)，满足 $t_n, t'_n \to 0$，使得 $(\ , t_n) \neq (x'_n, t'_n)$ 且 $F(\ , t_n) = (\ ,)$。由于 是单射的，因此它是序列紧的，我们可以分别从 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中提取收敛子序列。设相应的极限点为 x_∞ 和 x'_∞。由 F 的连续性可知，$F(x_\infty, 0) = F(x'_\infty, 0)$，这意味着 $x_\infty = x'_\infty$，因为 $F|_{X\times\{0\}}$ 是单射的。但假设 F 在 $(x_\infty, 0)$ 的某个邻域内是局部单射的，这意味着对于足够大的 n，$(x_n, t_n) = (x'_n, t'_n)$。这就产生了矛盾。 □

我们现在已经准备好完成定理 4.2.1 的证明。事实上，根据引理 4.2.6，如果我们进一步限制其定义域，选取更小的 δ 和 U_0，则映射 $\widehat{\Psi}$ 是一个单射局部微分同胚。因此，它是到其像上的一个微分同胚。特别地，与到第一因子的投影 $M \cup \partial^+_\infty M$ 复合后，对于 U_0. 中的所有 (h, ϕ)，都给出了从 $S \times [0, \delta)$ 到其像的一个微分同胚。由于 $H(t) = -1 + t^2$ 对于 $\epsilon = -1 + \delta^2$ 是 $(0, \delta)$ 与 $(-1, -1 + \epsilon)$ 之间的一个微分同胚，我们得到：对于 U_0 中的每个 (h, ϕ) 以及每个 $H \in (-1, -1 + \epsilon)$，Epstein 映射 $\mathrm{Eps}_{(f_{\tilde{\phi}},\sigma(\mathfrak{u}(H,h,\phi))}$ 在与 (h, ϕ) 对应的拟福克斯流形 M 中诱导出一个常平均曲率为 H 的光滑嵌入族。

当然，对于接近 -1 的 H，可以重复相同的论证，从而得到 $\partial^-_\infty M$ 的一个邻域上的单调常平均曲率叶层。显然，通过选取更小的 ϵ 和更小的 U_0，我们可以假设 $m \in U_0$ 中由平均曲率属于 $(-1,\ -1 + \epsilon)$ 和 $(1 - \epsilon,\ 1)$ 的曲面所形成的区域彼此不相交。这意味着，对于每个 $m \in U_0$，这些常平均曲率曲面叶状分解了一个与 $S \times I$ 同胚的紧集的补集。这就完成了定理 4.2.1。

4.2.3 紧致部分中的存在性

现在我们证明，在任意 *Fuchsian* 流形的一个邻域内，存在平均曲率属于 $(-1,\ 1)$ 的常平均曲率曲面。同样地，我们需要对平均曲率的取值具有某种（尽管非常弱的）局部一致控制，正如下面的陈述所示。

定理 4.2.7。 *Let S be a closed oriented surface of genus ≥ 2, $H_0 \in (-1,\ 1)$ and $m \in \mathcal{F}(S)(S)$. Then there exists a neighbourhood U_{H_0} of m in $\mathcal{QF}(S)$ and a constant $\epsilon = \epsilon(m,\ U_{H_0},\ H_0)$ such that, for every $H \in\ H_0 - \epsilon\ H_0 + \epsilon$ every quasi-Fuchsian manifold in U_{H_0} contains CMC surfaces with mean curvature $(,\ )$, H which vary smoothly with respect to H. Moreover we can assume that all such CMC surfaces have , principal curvatures in $-1\ 1$.* $(,\ )$

为了证明定理 4.2.7，我们将采用与第4.2.1节类似的设置。粗略地说，主要思路是使用隐函数定理，将 Fuchsian 流形中 CMC 问题的解变形为邻近流形中、且平均曲率取邻近值时的 CMC 问题的解；这些解由与全测地曲面等距的脐曲面给出。

Proof. 该证明与第4.2.1节非常相似。将变量从 (H, h, ϕ, u) 替换为 (H, h, ϕ, v) 后，其中 v 在方程（4.14）中定义，Epstein 映射 $\mathrm{Eps}_{(f_{\tilde{\phi}}, \sigma_h(u))}$ 的平均曲率等于 H 的方程等价于方程（4.18）。为方便起见，我们在此重写该方程：

$$G(H, h, \phi, v) := 1 - H - 2HK(\tau_h(v)) + (-1 - H)\left(K(\tau_h(v))^2 - 16\|B(\tau_h(v)) - \phi/2\|^2_{\tau_h(v)}\right) = 0\ ,$$

对于 $\tau_h(v) = e^{2v}h$。我们再次将 G 视为从 $\mathbb{R} \times W \times W^{2,s}(S, h_0)$ 到 $W^{2,s-2}(S, h_0)$ 的映射，其中 h_0 是 S上的某个固定双曲度量。直接验证可知，对于任意 $H_0 \in (-1, 1)$，点 (H_0, h_0, ϕ_0, v_0) 是一个解，其中 $v_0 \equiv 0$ 且 $\phi_0 \equiv 0$。这是因为 $B(h_0) = 0$，因为 h_0 提升为 $\mathbb{D}$上的 Poincar´e 度量；如第 4.1.2 节所述，该度量是 M¨obius 平坦的。当然，这个解在几何上对应于 Fuchsian 流形中的脐点常平均曲率曲面，它是从全测地曲面出发得到的等距曲面。

因此，要应用巴拿赫空间上的隐函数定理，我们对 G 关于 v 求微分。项 $\|B(\tau_h(v)) - \phi/2\|^2_{\tau_h(v)}$ 的微分为零，因为

$$B(\tau_{h_0}(v_0)) - \phi_0/2 = 0\ ,$$

理由与上面相同。因此，类似于定理 4.2.1 的证明（见方程 (4.19)）：

$$\begin{aligned} d_v G_{(H_0, h_0, \phi_0, v_0)} &= (-2H_0 + 1 + H_0)\left.\frac{d}{dv}\right|_{v=v_0}(K(e^{2v}h)) \\ &= (1 - H_0)(2\dot{v} - \Delta_{h_0}\dot{v}) \end{aligned}$$

由于 $H_0 \neq 1\ d_v G_{(H_0, h_0, \phi_0, v_0}$ 4 2 4, $[-1, 1+,\ )$根据引理.....是可逆的，因此我们得到一族光滑解 v:),(,)，它光滑地依赖于 。
$\epsilon \times U_0 \to W^{2\ s}\ S\ h_0$ H

按照 (4.20) 定义 u: $[-1, 1+\epsilon) \times U_0 \to W^{2,s}(S, h_0)$。我们断言 Epstein 映射 $\mathrm{Eps}_{(\tilde{f}_{\phi_0}, e^{2\mathrm{u}(H_0, h_0, \phi_0)h_0})}$ =$\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id}, e^{2u_0}h_0)}$，其中

$$u_0 = \mathrm{u}(H_0, h_0, \phi_0) = -\frac{1}{2}\log\frac{1 + H_0}{1 - H_0}\ ,$$

是一个浸入，其第一基本形式等于双曲度量 h_0 的某个倍数。这当然正是我们所预期的，因为解（H_0、h_0、ϕ_0、v_0）的几何意义是一个脐点常平均曲率曲面，它在 Fuchsian 流形中降为距全测地曲面等距的曲面。实际上，无需任何计算即可验证这一点，因为$\mathbb{D}$上的 Poincar´e 度量、恒为零的二次微分 ϕ_0 以及常函数 u_0，都在 $\mathbb{D}$ 的双全纯映射群作用下保持不变。因此，可以利用命题 4.1.1 中的唯一性，推知存在一个曲面 S，位于 $\mathbb{H}^3$ 中，与全测地平面等距，且其边界与 $\partial\mathbb{D}$ 重合，使得 Epstein 映射 $\mathrm{Eps}_{(\mathrm{id}, e^{2u_0}h_0)}$ 是满足下述条件的唯一嵌入 $\iota:\ \mathbb{D} \to S \subset \mathbb{H}^3$

$$\iota \circ \zeta = \zeta \circ \iota$$

对于 $\mathbb{D}$ 的每个双全纯映射 ζ。

由于浸入是一个开条件，在限制邻域 U_{H_0} 并取一个更小的 ϵ 后，我们因此可以假设所有 Epstein 映射

$$\mathrm{Eps}_{(f_{\vec{\phi}}, e^{2u(H,h,\phi)})} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}^3$$

都是浸入，并且根据构造，其平均曲率均为常数 H。因此，这些 Epstein 映射在与邻域 (h_0, ϕ_0) 中的点 (h, ϕ) 相对应的拟福克斯流形商空间中诱导出常平均曲率曲面。

该陈述的"此外"部分同样由连续性得出：在限制邻域 U_{H_0} 并取一个更小的 ϵ 后，因为平均曲率为 H 的脐点常平均曲率曲面的主曲率都等于 H，因此其绝对值都小于 1。 □

4.2.4 在小邻域中存在性的结论

Base基于定理4.2.1和4.2.7，我们现在可以证明对于每个 ch 值 在（-1，1）中的平均曲率，位于Fuchsian轨迹的某个适当邻域内。

定理 4.2.8。 *Let S be a closed oriented surface of genus ≥ 2. Then there exists a neighbourhood U of the Fuchsian locus in quasi-Fuchsian space $\mathcal{QF}$ S such that for every $H \in -1\ 1$ every quasi-Fuchsian $(),(,)$ manifold in U contains an embedded CMC surface of mean curvature H.*

Proof. 我们将证明，对于每个 $m \in \mathcal{F}$（S）（S），存在 m 在 $\mathcal{QF}$（S）中的一个邻域 $V = V$（m），使得每个 m' 在 V中都包含对于所有 $H \in$（-1，1）的嵌入的CMC曲面。当 m 在 $\mathcal{F}$（S）（S）中变化时，取 V（m）的并集，显然给出了所述的Fuchsian轨迹邻域。

我们先固定一个方便的记号。为简单起见，我们固定 m 在 $\mathcal{F}$（S）（S）中，并省略所有对 m的依赖。定理4.2.1和4.2.7为我们提供了：

1. 一个 $\widehat{U}$ m 的邻域和一个常数 $\widehat{\epsilon}$，使得 $\widehat{U}$ 中的所有拟福克斯流形都包含平均曲率为 H、取值范围为 $(-1, -1+\widehat{\epsilon}) \cup (1-\widehat{\epsilon}, 1)$ 的嵌入的CMC曲面，并且

2. 对于每个 $H_0 \in (-1,1)$，存在 m 的一个邻域 U_{H_0} 和一个常数 ϵ_{H_0}，使得 U H $H_0 - \epsilon_{H_0}$ $H_0 + \epsilon_{H_0}$ 中的所有拟福克斯流形都包含平均曲率取值范围为 $(,)$ 的浸入的常平均曲率曲面（显然，取值会足够小，从而 $(,) \subset (,)$）。

实际上，在第 (2) 项中，我们可以假设浸入的常平均曲率曲面的主曲率位于 $(-1,1)$ 内。这自动意味着它们是嵌入的，见下文命题 4.3.1 的第 i 项。现在，区间族

$$\mathcal{F} := \{[-1, -1+\widehat{\epsilon})\} \cup \{(1-\widehat{\epsilon}, 1]\} \cup \{(H_0 - \epsilon_{H_0}, H_0 + \epsilon_{H_0}) \,|\, H_0 \in (-1, 1)\}$$

是紧区间 $[-1, 1]$ 的开覆盖，因此它存在有限子覆盖

$$\mathcal{F}' := \{[-1, -1+\widehat{\epsilon})\} \cup \{(1-\widehat{\epsilon}, 1]\} \cup \{(H_0 - \epsilon_{H_0}, H_0 + \epsilon_{H_0}) \,|\, H_0 \in \{c_1, \ldots, c_N\}\}\ .$$

因此，交集

$$U := \widehat{U} \cap U_{c_1} \cap \ldots \cap U_{c_N}$$

是 $\mathcal{QF}(S)$ 中 m 的一个开邻域，并具有如下性质：对于每个 $H \in (-1,1)$，以及每个属于 U 的 m'，都存在一个平均曲率为 H 的嵌入的常平均曲率曲面。证明至此完成。 □

在下一节中，我们将改进定理 4.2.8 的证明，以证明邻域 U 可以选取得具有如下性质：对每个拟福克斯流形 M（其中 U），其嵌入的常平均曲率曲面构成 M 的光滑单调叶状结构。

4.3 拟福克斯流形的叶状结构

在足够小的Fuchsian轨迹邻域内的拟福克斯流形中建立了针对 $H \in (-1,$ 1) 的嵌入的CMC曲面的存在性之后，我们现在进一步改进这一构造，以证明在一个可能更小的邻域内，存在由常平均曲率曲面构成的单调光滑叶状结构。

4.3.1 小主曲率与等距叶状结构

如果曲面在 $\mathbb{H}^3$ 中的 C^2 浸入的主曲率属于 $(-1,\ 1)$，我们就称其具有小主曲率。下面的陈述包含了我们将在具有小主曲率的曲面上使用的基本性质。

命题 **4.3.1** *Let S be a closed surface and let $\iota : S \to M$ be an immersion with small principal curvatures in a quasi-Fuchsian manifold M homeomorphic to $S \times \mathbb{R}$. Then:*

i) The immersion ι is an embedding and a homotopy equivalence.

ii) There is a diffeomorphism $\zeta : S \times \mathbb{R} \to M$ such that $\zeta(\cdot, 0) = \iota$, $\zeta(p, \cdot)$ is the unit speed geodesic intersecting $\iota(S)$ orthogonally at $\iota(p)$ and

$$d_M(\zeta(p, r_1), \zeta(p, r_2)) = d_M(\zeta(S \times \{r_1\}), \zeta(p, r_2)) = |r_2 - r_1| \ . \tag{4.25}$$

Let us choose such ζ so that $\zeta(\cdot,\ r)$ approaches $\partial^-_\infty M$ as $r \to +\infty$. If moreover ι has constant mean curvature H, then

iii) The mean curvature of the surface $\zeta\ S \times \{r\}$ is strictly larger than H if $r > 0$ and strictly smaller ( ) iv) than H if $r < 0$.

There exist differentiable functions $f_-,\ f_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $f_\pm(0) = H$ and $f'_\pm(r) > 0$ for all r, such that the mean curvature of $\zeta\ S \times \{r\}$ is between $f_-\ r$ and $f_+\ r$ ( ) ( ) ()。

我们将函数 $r : M \to \mathbb{R}$ 称为嵌入曲面 $S = \iota(S)$的 *signed distance* 。

Proof. 点 *i)* 和 *ii)* 众所周知。关于点 *i)*，参见 [25]或 [24,命题 4.15、注记 4.22]。设$\widetilde{S}$ 为 $S = \iota(S)$在万有覆盖 $\mathbb{H}^3$上的提升。为证明点 *ii)*，关键性质是$\widetilde{S}$ 始终位于任意切超球面的凹侧（见 [24, 引理 4.11]），因此 *a fortiori* 位于以 $\widetilde{S}$外一点 P 为中心的任意切度量球的凹侧。这意味着垂直于 S 的测地线两两不相交，并构成 M的一个全局线叶状结构。此外，到 S 的距离沿着经过 P的正交测地线实现。注意，若 $S = \iota(S)$具有小主曲率，则所有等距曲面 $\zeta(S \times \{r\})$也具有小主曲率（ [25, 章3] 或 [24, 推论 4.4]）。因此，可以用 $\zeta($ $\Sigma \times \{r\})$替换 S，重复上述论证，从而得出对于所有 r_1，r_2，结论 (4.25) 均成立。

为证明点 *iii)* 和 *iv)*，注意到，根据我们对平均曲率的约定（见第 4.1.3 节），嵌入 $\iota_r := \zeta(\cdot, r) :$ $S \to M$在点 p处的主曲率 $\lambda_1(r)$ $\lambda_2(r)$ 满足以下公式：

$$\lambda_i(p, r) = \tanh(\mu_i(p) + r) \ , \tag{4.26}$$

它关于 r 单调递增，其中 $\lambda_i(p, 0) = \tanh \mu_i(p) \in (-1, 1)$。由于 ι_r在 p处的平均曲率等于 $(\lambda_1(p, r) + \lambda_2(p, r))/2$，因此可知，当 $r > 0$ 时，它大于 $H = (\lambda_1(p, 0) + \lambda_2(p, 0))/2$；当 $r < 0$时，它小于 H，这正如第 *iii)* 点所述。

更精确地说，通过直接计算公式 (4.26)，可以验证平均曲率函数的导数

$$r \mapsto H_p(r) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1(p, r) + \lambda_2(p, r)\right)$$

对所有 r 都取值于 (0,1)。若固定 r，利用 S 的紧性，我们可以定义函数

$$g_-(r_0) = \min_{p \in S} \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=r_0} H_p(r) \qquad g_+(r_0) = \max_{p \in S} \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=r_0} H_p(r) \ .$$

将处处为正的 g_- 和 g_+从 0 积分到 r，可得到点 *iv*）中所述的函数 f_- 和 f_+。我们注意到，$g_\pm$ 是连续的，因而可积：事实上，利用 $H_p(r)$ 的 r-导数在 p和 r 中的连续性，我们看到，如果 $r_n \to r_\infty$，那么 $(d/dr)H_\bullet(r_n)$ 的最小值点序列 $p_n \in S$ 存在一个子序列收敛到 p_∞，而 p_∞ 必然是 $(d/dr)H_\bullet(r_\infty)$ 的最小值点。因此，$g_-(r_\infty) = \lim_n g_-(r_n)$，对于 g_+，将最小值替换为最大值即可得到类似结论。 □

4.3.2 常平均曲率曲面的最大值原理

在本节中，我们应用命题 4.3.1 和关于平均曲率的几何最大值原理，来证明两个性质；这些性质将在叶状分解结果定理 1.2.2 的证明中发挥基础性作用。

命题 **4 3 2** *Let $M \cong S \times \mathbb{R}$ be a quasi-Fuchsian manifold and let S_H and S'_H be closed embedded。 。 。 CMC surfaces in M homotopic to $S \times \{*\}$ with the same mean curvature $H \in -1\ 1$ (,) . If S_H has small, principal curvatures then $S_H = S'_H$.*

Proof. 设 r 是从 S_H出发的有向距离函数，由命题 4.3.1 中的微分同胚 ζ 给出，并应用于 S 的包含映射 ι，其像为 S_H。由于 S'_H 是紧致的， r 在 S'_H 上的限制具有最大值 $r_{\max} = r(p_{\max})$ 和最小值 $r_{\min} = r(p_{\min})$。根据注记 4.0.1， S'_H 的法向量在点 $p_{\min}$ 和 $p_{\max}$处与函数 r 的梯度的负值重合。

这意味着 S'_H 与等距曲面 $\zeta(S \times \{r_{\max}\})$相切，并且完全包含在 $\{r \leq r_{\max}\}$一侧；按照我们的约定，法向量正指向该侧。根据几何最大值原理，S'_H的平均曲率（等于 H）大于 $\zeta(S \times \{r_{\max}\})$在 $p_{\max}$处的平均曲率。根据命题 4.3.1 的第 iii）项， $r_{\max} \leq 0$。对最小值点重复这一论证，可得 $r_{\min} \geq 0$。因此，在 S'_H上有 $r \equiv 0$ 。由于 S_H 和 S'_H 都是闭的嵌入曲面，它们必定重合。

□

现在考虑两个平均曲率取值不同的常平均曲率曲面的情形。

引理 **4 3 3** *Let $M \cong S \times \mathbb{R}$ be a quasi-Fuchsian manifold and let S_H and $S_{H'}$ be closed embedded... CMC surfaces in M homotopic to $S \times \{*\}$ with mean curvature H and H' respectively for $H \neq H'$. If S_H ,,has small principal curvatures, then S_H and $S_{H'}$ are disjoint, and moreover the signed distance of every point of $S_{H'}$ from S_H is between $f_+^{-1}\ H'$ and $f_-^{-1}\ H'$ where $f_\pm$ are the increasing functions introduced () () in Proposition 4.3.1.*

Proof. 证明与命题 4.3.2 的证明非常相似。假设 $H' > H$，另一种情形的论证类似。考虑有向距离函数 r 相对于 S_H在 $S_{H'}$ 上的限制。该函数存在一个最小值 $r_{\min} = r(p_{\min})$ 和一个最大值 $r_{\max} = r(p_{\max})$。因此，$S_{H'}$ 在 $p_{\min}$ 处与 $\zeta(S \times \{r_{\min}\})$ 相切，并在 $p_{\max}$处与 $\zeta(S \times \{r_{\max}\})$ 相切，且包含在两者之间的区域 $\{r_{\min} \leq r \leq r_{\max}\}$ 内。几何最大值原理结合命题 4.3.1 的第 iv）项，便可推出

$$f_-(r_{\max}) \leq H' \leq f_+(r_{\min}) \ .$$

这意味着 r 在 $S_{H'}$ 上的限制至少为 $r_{\min} \geq f_+^{-1}(H')$，至多为 $r_{\max} \leq f_-^{-1}(H')$，如所声称的那样。

□

4.3.3 定理 1.2.2 的证明

现在，我们将所有要素汇总起来，完成光滑单调叶状结构结果的证明。目标是证明：对于 M 位于Fuchsian轨迹 $\mathcal{F}(S)(S)$的适当邻域 U 内的拟福克斯流形，存在一个从 $S \times(-1,\ 1)$ 到 M的微分同胚，使其限制在每个切片 $S \times \{H\}$上时，都是一个平均曲率为 H的嵌入。此类常平均曲率曲面的存在性已在定理 4.2.8 中得到证明，因此现在的目标是（通过选取 $\mathcal{F}(S)(S)$的更小邻域 U）构造该微分同胚，从而证明光滑叶状结构部分。

Proof of Theorem 1.2.2. 回顾一下，定理 4.2.8 的证明表明，对于每个 $m \in \mathcal{F}(S)(S)$，都存在一个邻域 $U \in \mathcal{QF}(S)$，其定义为以下交集

$$U := \widehat{U} \cap U_{c_1} \cap \ldots \cap U_{c_N} \ , \tag{4.27}$$

其中， U 是 m 的一个邻域，在该邻域内，端由常平均曲率曲面单调叶状分解，平均曲率取值于 $(-1,\ -1+\widehat{\epsilon}) \cup (1-\widehat{\epsilon},\ 1)$；而 U_{c_i}是从族 U_{H_0}中得到的 m的邻域（通过对区间 $[-1, 1]$取有限覆盖）。因此，对于每个 i，在 U_{c_i}内的每个拟福克斯流形中，都存在平均曲率取值于 $(c_i - \epsilon_{c_i},\ c_i + \epsilon_{c_i})$ 的常平均曲率曲面。

现在，我们先给出几点初步观察。首先，根据定理 4.2.7，我们可以假设U_{H_0}具有这样的性质：平均曲率为 $(H_0 - \epsilon_{H_0},\ H_0 + \epsilon_{H_0})$ 的常平均曲率曲面具有小主曲率

。（特别地，根据命题 4.3.1，它们是嵌入的。）因此，在 (4.27) 中，我们可以假设所有 U_{c_i} 都具有这一性质。其次，不妨假设 $c_1 < \ldots < c_N$，并且相应的区间，即 $(-1,\ -1+\widehat{\epsilon})$、$(c_1-\epsilon_{c_1},\ c_1+\epsilon_{c_1})$.....$(c_N-\epsilon_{c_N},\ c_N+\epsilon_{c_N})$、$(1-\widehat{\epsilon},\ 1)$ 两两相交（也就是说，每个区间只与前一个和后一个区间相交，不与其他区间相交）；为此，可以选取更小的 ϵ。

H在作出这些假设后，利用定理 4.2.7，对于任意拟福克斯流形，我们可以构造 ld M in U，光滑映射

$$\xi_i : S \times (c_i - \epsilon_{c_i}, c_i + \epsilon_{c_i}) \to M$$

使得 $\xi_{c_i}(S \times \{H\})$ 是平均曲率为 H 的嵌入的CMC曲面。同样地，在各个端中，由定理 4.2.1 可得到光滑映射

$$\xi_0 : S \times (-1, -1+\widehat{\epsilon}) \to M \qquad \text{and} \qquad \xi_{N+1} : S \times (1-\widehat{\epsilon}, 1) \to M$$

满足类似的性质。

根据我们先前的假设，当 $i \in \{1, \ldots, N\}$ 时，所有的 $\xi_i(S \times \{H\})$ 都具有小主曲率。因此，由命题 4.3.2，对于每个 $i,\ i' \in \{0, \ldots, N+1\}$，都有 $\xi_i(S \times \{H\}) = \xi_{i'}(S \times \{H\})$。利用我们的另一个假设，即只有相邻区间彼此重叠，我们可以从 ξ_1 开始，迭代地对每个ξ_i进行前复合，复合以保持每个切片 $S \times \{H\}$ 不变的源空间微分同胚，使得只要 H 位于相应区间的交集内，就有 $\xi_i(\cdot,\ H) = \xi_{i+1}(\cdot,\ H)$。因此，我们可以将这些 ξ_i 粘合起来，得到一个光滑映射

$$\xi : S \times (-1, 1) \to M$$

such that $\xi(\cdot, H)$ 是单射。事实上，它在每个切片 $S \times \{H\}$ 上都是单射的，因此只需证明不同切片的像互不相交。我们分三种情况讨论。如果 H 位于区间 $(c_i - \epsilon_{c_i},\ c_i + \epsilon_{c_i})$ 中，那么根据引理 4.3.3，S_H 对于 $H' \neq H$ 的任意 $S_{H'}$ 都是不相交的。如果 $H \in (-1,\ -1+\widehat{\epsilon})$ 且 $H' \in (1-\widehat{\epsilon},\ 1)$，那么 S_H 和 $S_{H'}$ 不相交，因为两个端点邻域互不相交。最后，如果 H 和 H' 都位于 $(-1,\ -1+\widehat{\epsilon})$ 或 $(1-\widehat{\epsilon},\ 1)$ 中，那么根据定理 4.2.1，S_H 和 $S_{H'}$ 不相交。

此外，由介值定理可知 ξ 是满射，因为根据定理 4.2.1，将其限制在 $S \times (-1,\ -1+\widehat{\epsilon})$ 和 $S \times (1-\widehat{\epsilon},\ 1)$ 上时，它们分别是到端的某个邻域上的微分同胚。因此 ξ 是同胚。由反函数定理，要证明它是微分同胚，从而得出定理 1.2.2，只需证明它在每个满足 H 属于区间 $(c_i - \epsilon_{c_i},\ c_i + \epsilon_{c_i})$ 之一的 $(p,\ H)$ 处的微分都是单射。

为此，我们已经知道，将

ξ $T_pS \subset$ 的微分限制 $T_{(p,H)}\ S \times\ -1\ 1$ $d\xi\ T_pS$ S_H 在 ((,)) 上时，它是单射，而 ( ) 是常平均曲率曲面的切空间，我们将其记为 。因此，只需证明 $d\xi(\partial/\partial H)$ 是一个非零向量，且横截于 $d\xi_{(p,H)}(T_pS) = T_{\xi(p,H)}S_H$。这里我们利用 S_H 具有小主曲率这一点，以及命题 4.3.1 给出的等距叶状结构。事实上，只需证明 $d(r \circ \xi)(\partial/\partial H)$ 不为零，其中 r 是命题 4.3.1 给出的、从 S_H 起算的有向距离。但引理 4.3.3 的最后一部分告诉我们，$r \circ \xi$（这是一个可微函数）大于函数 f_+^{-1}，而后者的导数为正。因此

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=H} (r \circ \xi)(p,t) > 0\ .$$

证明至此结束。 □

第5章

未来研究

项目在 [14] 中的一个后续方向是研究 $T^*\mathcal{T}(S)$中的流。为此，我们考虑由 $t \mapsto ([c_t],\ q_t)$给出的路径（$-1,\ 1$）$\to T^*\mathcal{T}(S)$，其中平均曲率为 t 的常平均曲率曲面的第一基本形式属于共形类 $[c_t]$，而第二基本形式的无迹部分由实部 $\mathfrak{R}(q_t)$给出（例如参见 [30] ）。接下来我们要证明的陈述是：

定理5.0.1 *The flow $(-1,1) \to T^*\mathcal{T}(S)$, $t \mapsto ([c_t], q_t)$ corresponds to a Hamiltonian flow on $T^*\mathcal{T}(S)$ with Hamiltonian function $H = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{c_t} b_t$ where b_t is the shape operator of the CMC-t surfaces in $\mathbb{H}^3$ with respect to the metric c_t and the Hopf differential q_t.*

请注意，洛伦兹情形中的类似 CMC叶层结果及其与 Teichm¨uller 理论的关系，已经在 [57] 中进行了研究。此外，作为我的博士项目的延伸，我还希望考虑一个相关问题，即为拟福克斯流形在无穷远处指定 Schwarzian 导数。对于给定的测度叶状结构 F，我们可以考虑集合 $O(\mathsf{F}) \in \mathcal{MF}(S)$，该集合由所有满足以下条件的测度叶状结构 G′ 组成：对于任意 $\mathsf{G}' \in O(\mathsf{F})$，(F，G′) 都是填充的。于是我们可以提出如下问题：

问题 5.0.2 *Given a measured foliations F, G' does there exist a unique quasi-Fuchsian manifold with Schwarzians at infinity $[c_+]\, tq^{\mathsf{F}}_{[c_+]}$ and $[c_-]\, tq^{\mathsf{G}'}_{[c_-]}$ for some $t > 0$ where $[c_+]\ [c_-] \in \mathcal{T}S$ the equivalence classes of complex structures appearing at the boundary at infinity and for any $g' \in O(\mathsf{F})$?*

对于足够小的 t，并限于无理叶层情形，定理 1.1.1 为靠近 Fuchsian轨迹的拟福克斯流形提供了答案。若考虑近福克斯流形的情形，那么关于近福克斯流形端处复结构如何通过其中极小曲面的浸入数据来描述，同样已有一些较为成熟的结果，这些结果或许对这一目的有所帮助；例如参见 [69] (命题 5。6)，以及 [43]。事实上，我们已经证明，对于靠近 Fuchsian轨迹的拟福克斯流形，路径 $\beta_{([c],q)}(t)$ 在无穷远处的 Schwarzian 导数实际上在一阶上由全纯二次微分 $q \in T^*\mathcal{T}(S)$ 决定，其中其实部 $\mathfrak{R}(q)$ 等于该流形所包含的唯一浸入极小曲面的第二基本形式 $I\!I$。

另一个方面是考虑一个众所周知的结果（见 [68], [26], [9]）：$\mathcal{CC}(M)$的正边界分支上的双曲度量与拟福克斯流形正无穷远处边界上的共形类在 $\mathcal{T}(S)$中一致接近，事实上二者彼此以因子≤ 2.1 准共形；并针对无穷远处的测度叶状结构和无穷远处的带测弯曲层提出类似的比较问题。我们将 S 上的带测层等价类空间记为$\mathcal{ML}(S)$, 并且还有 $\mathcal{MF}(S) \cong \mathcal{ML}(S)$（见 [58]）。因此我们可以问：

问题 5.0.3 *Let λ_+ and $\_+$ be the measured bending lamination and the measured foliation at infinity at the positive ends of the boundary of $\mathcal{CC}\ M$ and the boundary at infinity respectively. Then are they uniformly close in some sense in the space of equivalence class of measured geodesic lamination $\mathcal{ML}(S)$?*

此外，研究凸共紧双曲三维流形或更高维双曲流形上无穷远处的测度叶状结构是否存在，或在无穷远处指定 Schwarzian 导数，是我未来希望从事的工作。

我们还可以提出一个问题：关于一列拟福克斯流形 g_n，根据它们在无穷远处的测度叶状结构（F_n，G_n），其极限行为是怎样的。这里回顾一下，在测度叶状结构空间中存在一个定义良好的收敛概念，即一列测度叶状结构在 $\mathcal{MF}(S)$ 中的极限会收敛到射影测度叶状结构空间 $P\mathcal{MF}(S)$ 中的一个点。特别是，我们想提出以下问题：

问题 5.0.4. *Let* $(\mathsf{F}_n,\mathsf{G}_n)$ *converge to the pair of filling projective measured foliations* $([\mathsf{F}],[\mathsf{G}])$*. Then does* g_n *have a converging subsequence? If so, is the limit the ending lamination for the sequence* g_n*?*

这里所说的端层状结构，是指 g_n 的凸核边界上的带测弯曲层的极限；近年来，这一对象得到了广泛研究。

最后，还有一个我目前感兴趣的相关问题，涉及截面 $q^{\mathsf{F}}, q^{-\mathsf{G}}$ 的交集：对于一个填充对 $(\mathsf{F},\ \mathsf{G})$，$\mathcal{T}(S)$ $\to T^*\mathcal{T}(S)$，截面的交集在 $T^*\mathcal{T}(S)$ 中是否横截？显然，它们在点 $([7]c],\ q) \in T^*\mathcal{T}(S)$ 处唯一相交；根据 Gardiner-Masur 定理，该点将 F 和 G 实现为水平与垂直测地测度叶层。另一方面，它们交集的横截性可以改述为以下问题：

问题 **5 0 5** *Let* , *be a filling pair and* $[c]\ q \in T^*\mathcal{T}\ S$ *be the unique holomorphic quadratic dif-*。。(FG) (,) *ferential realising them. Consider a first-order deformation given by* $t \mapsto [c_t]\ q_t \quad t \geq 0$ *such that* $[c_0] = [c]$ ( ) (,)*and* $q_0 = q$ *and which maintains* , *as its measured foliation at first-order at* $t = 0$*. Then is this* (F G) , *deformation necessarily trivial?*

在这里，我们称 $t \mapsto \mathsf{F}_t \in \mathcal{MF}(S)$（其中 $\mathsf{F}_0 = \mathsf{F}$）在 $t = 0$ 处与 F 一阶相等，即对于 S 上的任意简单闭曲线 γ，$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i(\gamma, \mathsf{F}_t) = 0$，其中 $i(\gamma, .) : \mathcal{MF}(S) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是 γ 与给定测地叶层的交数。将范围限制为稠密一般层中的全纯二次微分时，答案是肯定的，即 q_t 的所有零点都是简单的。此外，对于亏格2曲面，可以证明上述问题的答案是肯定的。主要困难在于分析对于任意亏格会使 q 的零点塌缩或合并的变形。

参考文献

[1] M. T. Anderson。双曲 n-流形中的完备极小超曲面。 *Comment. Math. Helv.*，58 264 290，1983：–。[2] T. Barbot 和 F. Fillastre。拟 Fuchsian 共 Minkowski 流形。载于 *In the tradition of Thurston.* ，第 – *Geometry and topology* 645 703 2020 页。Cham：Springer，。[3] L. Bers。 *On Moduli of Riemann Surfaces*。苏黎世联邦理工学院数学研究所讲义，1964 年夏季学期。瑞士联邦理工学院，1965 年。[4] F. Bonahon。双曲曲面的剪切、褶皱曲面的弯曲与 Thurston 辛形式。*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*，第 6 辑，5(2)：233–297，1996。[5] F. Bonahon。几乎 Fuchsian 的 Kleinian 群。 *J. Reine Angew. Math.*，587：1–15，2005。[6] F. Bonahon 和 J.-P. Otal。3 维双曲流形的测地褶皱层理。*Ann. Math. (2)*，160(3)：1013–1055，2005。[7] F. Bonsante 和 J.-M. Schlenker。地震变换复合的固定点。 *Duke Math. J.*，161 6 1011( )：–1054，2012。[8] M. Bridgeman、J. Brock 和 K. Bromberg。Schwarzian 导数、射影结构以及重整化体积的 Weil-Petersson 梯度流。 *Duke Math. J.*，168(5)：867–896，2019。[9] M. Bridgeman、R. Canary 和 A. Yarmola。Sullivan 凸包定理的改进界。*Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，112(1)：146–168，2016。[10] T. Br ¨ ¨ *Introduction to differential topology. Transl. from the German by C. B. and M. J. Thomas* 1982 ocker 和 K. Janich。.[11] R. D. Canary、A. Marden 和 D. Epstein，编。 *London mathematical society lecture note series: Fundamentals of hyperbolic manifolds: Selected expositions series number 328: Selected expositions* 。剑桥大学出版社，英国剑桥，2011 年。[12] M. P. d. Carmo。 *Riemannian Geometry*。Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，2013 年。[13] D. Choudhury。Fuchsian轨迹附近拟福克斯流形在无穷远处的测度叶状结构。https://arxiv.org/abs/2111.01614。[14] D. Choudhury、F. Mazzoli 和 A. Seppi。靠近 Fuchsian轨迹的拟福克斯流形由常平均曲率曲面构成叶状结构。 *arXiv:2204.05736*，2022 年。[15] B. Coskunuzer。双曲空间中常平均曲率超曲面的极小化。 *Geom. Ded-* ：–。 *icata* 118 157 171, 2006 [16] B. Coskunuzer。 H-Plateau 问题在 $\mathbb{H}^3$ 中的渐近形式。 *Geom. Topol.*，20(1)：613–627，2016。[17] B. Coskunuzer。 H 317 553 574, - 2017 Plateau 问题解的嵌入性。 *Adv. Math.*：–。

[18] B. Coskunuzer。双曲
H 3 371 2 1253 1269, 平面
2019
中的嵌入 *Trans. Am. Math. Soc.*。[19] J. Danciger。从双曲几何到反德西特几何的几何变迁。*Geom. Topol.*，17 5 3077 3134，2013（）：–。[20] A. Douady 和 J. Hubbard。关于 Strebel 微分的稠密性。
Invent. Math.，30：175–179，1975。[21] D. Dumas。复射影结构。载于
Handbook of Teichmüller theory. Volume II，第 455–508 页。苏黎世：欧洲数学会，2009。[22] D. Dumas。剥离映射是有限对一的。 *Acta Math.*，215(1)：55–126，2015。[23] D. Dumas。复射影结构的全纯单值化极限。 *Adv. Math.*，315：427–473，2017。[24] C. El Emam 和 A. Seppi。关于双曲空间中等变浸入的高斯映射。
ArXiv
2008.07390. To appear in Journal of Topology 2022
，。

[25] C. L. Epstein。双曲三维空间中 horosphere 的包络与 Weingarten 曲面。https: //
www2.math.upenn.edu/~cle/papers/WeingartenSurfaces.pdf，1984。[26] D. Epstein 和 V. Markovic。对数螺线：对 k = 2 猜想的反例。*Annals of Mathematics*，161(2)：925–957，2005 年 3 月。[27] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Po
´ *Thurston's work on surfaces. Transl. from the French*
by Djun Kim and Dan Margalit 48 *Math. Notes (Princeton)*

enaru。，[28] 卷，第。普林斯顿，新泽西州：普林斯顿大学出版社，2012。
*Eighteen Essays in Non-Euclidean Geometry*F. Fillastre 和 A. Seppi。球面、双曲及其他射影几何：凸性、对偶性与变迁。载于[29]，第 321–409 页。欧洲数学会出版社，2019 年 3 月。 *Transactions of*
the American Mathematical Society 284 1 319, 1984 A.

E. Fischer 和 A. J. Tromba。关于 Teichmüller 空间上的魏尔-彼得森度量。[30]，（）：2019 年 7 月。
*A new proof that Teichmüller space is a cell*A. E. Fischer 和 A. J. Tromba。[31]，第 303 卷。1987 年。*Acta*
Math. 152 57 76, 1984 F.

P. Gardiner。测度叶状结构与二次微分的最小范数性质。[32]，：–。
*Teichmüller theory and quadratic differentials*F. P. Gardiner。[33] 。约翰·威立父子出版公司，田纳西州纳什维尔，1987 年。¨F. P. Gardiner 和 H. Masur。Teichmüller 空间的极值长度几何。 *Complex Variables*
Theory Appl. 16 2 3 209 237, 1991
，
(-)：–。[34] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger。 *Elliptic partial differential equations of second order*。数学经典。施普林格出版社，柏林，2001 年。1998 年版本的重印。[35] W. M. Goldman。表示空间的拓扑分支。 *Invent. Math.*，93 607，1988 3 557（）：–。[36] M. Guaraco、F. V. Pallete 和 V. Lima。同调中的平均曲率流与双曲三维流形的叶状结构。 *Preprint arXiv:2105.07504*，2021 年。[37] F. Gu´eritaud。带孔环面群的三角剖分核心。 *J. Differ. Geom.*，81(1)：91–142，2009。[38] Z. Huang 和 B. Wang。拟福克斯流形中极小曲面的计数。
Trans. Am. ，
Math. Soc. 367 9 6063 6083, 2015

（）：–。[39] J. Hubbard 和 H. Masur。二次微分与叶状结构。 *Acta Math.*，142：221–274，1979。

[40] J. H. Hubbard。

Teichmüller theory and applications to geometry topology and dynamics. Volume 1: , , *Teichmüller theory. With contributions by Adrien Douady William Dunbar and Roland Roeder*

, , , *Sylvain Bonnot David Brown Allen Hatcher Chris Hruska Sudeb Mitra* , ,

, , 。纽约州伊萨卡：Matrix Editions，2006 年。[41] J. H. Hubbard。

Teichmüller theory and applications to geometry topology and dynamics. Volume 3. , , *Manifolds that fiber over the circle* 2022

。纽约州伊萨卡：Matrix Editions， 。[42] S. P. Kerckhoff。Teichmüller 空间的渐近几何。 *Topology*，19：23–41，1980年。[43] K. Krasnov和J.-M. Schlenker。三维流形中的极小曲面与粒子。 *Geom. Dedicata*，126 187 254，2007年：–。[44] K. Krasnov和J.-M. Schlenker。关于双曲

3 *Commun.* 流形 *Math. Phys.* 279 3 637 668, 2008

的重整化体积。， （）：–。[45] K. Krasnov和J.-M. Schlenker。双曲Teichmüller理论与复Teichmüller理论之间的一个辛映射。 *Duke Math. J.*，150(2)：331–356，2009年。[46] F. Labourie。维数为

3 *J. Differ.* 的双 *Geom.* 35 3 609 626, 1992

曲流形边界上的指定度量。， （）：–。[47] S. Lang。 *Differential manifolds*。施普林格出版社，纽约，第二版，1985年。[48] E. Lanneau。具有指定奇点的二次微分模空间的超椭圆分支。 *Comment. Math. Helv.*，79(3)：471–501，2004年。[49] C. Lecuire。双曲三维流形的褶皱。 *Invent. Math.*，164(1)：85–141，2006年。[50] L. Liu和W. Su。Teichmüller空间上极值长度函数的变分。 *Int. Math. Res. Not.*，2017 21 6411 6443，2017年（）：–。[51] H. Masur。Teichmüller流是哈密顿的。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，123(12)：3739–3747，1995年。[52] C. Matheus。Teichmüller测地流与Hodge丛的几何学。，第–页。[53] R. Mazzeo和F. Pacard。渐近双曲空间中的常曲率叶状结构。 *Revista Matematica Iberoamericana* 27 1 303 333, 2011 ,

（）：–。[54] F. Mazzoli。双曲三维流形的常高斯曲率叶状结构与Schläfli公式。

Preprint *To appear in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze* 2019

ArXiv: 1910.062031， ， 。[55] F. Mazzoli。对偶Bonahon-Schläfli公式。 *Algebr. Geom. Topol.*，21(1)：279–315，2021年。[56] C. T. McMullen。复地震与Teichmüller理论。 *J. Am. Math. Soc.*，（）：–。[57] V. Moncrief。将 $2+1$ 维中的爱因斯坦方程约化为定义在 Teichmüller 空间上的哈密顿系统。 *J. Math. Phys.*，30(12)：2907–2914，1989年。[58] L. Mosher。测度叶状结构的轨道扩张。 https://homepages.warwick.ac.uk/ ~masgar/Maths/arationality_03_12_28.pdf，2011年。[59] Z. Nehari。Schwarzian导数与单叶函数。 *Bull. Am. Math. Soc.*，55：545–551，1949年。[60] L. I. Nicolaescu。 *Lectures on the geometry of manifolds*。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，新泽西州哈肯萨克，2021年。 [第三版， 1435504]。[61] B. Osgood和D. Stowe。黎曼流形的Schwarzian导数与共形映射。*Duke Math. J.*，67(1)：57–99，1992年。

[62] K. Quinn。拟福克斯流形中的渐近庞加莱曲面。 *Proc. Am. Math. Soc.*，148 3 1239 1253，2020（）：–。[63] H. L. Royden。Teichm¨uller空间的自同构与等距变换。1971。[64] J.-M. Schlenker。拟福克斯流形的重整化体积与凸核的体积。 *Math. Res. Lett.*，20(4):773–786，2013。[65] J.-M. Schlenker。关于拟福克斯流形的Schwarzian张量与无穷远处的测度叶状结构的注记，2017。[66] J.-M. Schlenker。拟福克斯流形的体积。 *Surveys in differential geometry.* 25，第319–353页，2022。[67] C. Series。一次穿孔环面群的Thurston弯曲测度猜想。载于 *Spaces of Kleinian groups. Proceedings of the programme 'Spaces of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds'*

Cambridge UK 2003 75 89 ，*July 21–August 15*，第–页。剑桥：剑桥大学出版社，2006。[68] D. Sullivan。关于Thurston在拟福克斯群和纤维于 s^1上的双曲三维流形方面的工作。S´eminaire Bourbaki第22号。施普林格出版社，1981。报告：554。[69] S. Trautwein。近福克斯模空间上的超凯勒度量。 *EMS Surv. Math. Sci.*，6 1 2 83 131，2019（-）：–。[70] A. J. Tromba。*Teichmüller theory in Riemannian geometry: based on lecture notes by Jochen Denzler*。巴塞尔等地：Birkh¨auser Verlag，1992。[71] K. K. Uhlenbeck。双曲三维流形中的闭极小曲面。*Semin. on minimal submanifolds*

Ann. Math. Stud. 103 147-168 (1983). 1983 ，。[72] R. A. Wentworth。调和映射能量与Gardiner公式。 *In the tradition of Ahlfors-Bers IV. Proceedings of the 3rd Ahlfors-Bers colloquium Ann Arbor MI USA May 19–22 2005* ，第221–229页，2007。[73] M. Wolf。调和映射的Teichm¨uller理论。 *J. Differ. Geom.*，29(2):449–479，1989。[74] M. Wolf。通过调和映射到R-树的二次微分实现测度叶状结构。

J.：–。*Anal. Math.* 68 107 120, 1996

[75] A. Wright。Mirzakhani的工作与地震流。 *arXiv:1810.07571*，2018。