arXiv:2304.13699v2 [math.CO] 5 Oct 2023

用 r-星覆盖简单正交多边形

Tam´as R´obert Mezei*
mezei.tamas.robert@renyi.hu

Alfr´ed R´enyi 数学研究所，Re´altanoda u. 13–15, 1053布达佩斯，匈牙利

2023年10月6日

谨以此文纪念 J´anos Urb´an。

摘要

我们在二次时间内解决简单正交多边形中的 r-星覆盖问题，该问题也称为具有矩形可见性的简单正交多边形中的点警卫问题。

关键词： r-星； r-可见性；简单正交多边形；多边形覆盖；艺术画廊；

1 引言

艺术画廊问题通常研究：为了控制画廊，需要多少个具有给定能力（例如固定或可移动）和视觉类型（视线、矩形可见性等）的守卫。点警卫是多边形内部的一个点，它可以覆盖闭多边形（画廊）中能够通过一条包含于该闭多边形内的线段与之相连的任意点（视线可见性）。Chv´atal[1] 提出的艺术画廊定理指出，给定一个具有 n 个顶点的简单多边形， $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 个点警卫足以且有时是覆盖该闭多边形所必需的。1980 年，Kahn、Klawe 和 Kleitman [7] 确定了具有 n 个顶点的特殊情形——简单正交多边形的精确界为 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$。

然而，正如 Schuchardt 和 Hecker [17] 所证明的，即使在简单正交多边形中，确定点警卫的确切数量也是 NP-难问题。若要有机会在多项式时间内计算出覆盖点警卫的最小基数集合，就需要限制视线可见性。

正交多边形中的两个点（使用轴平行的边）彼此具有矩形可见性或r-可见性，当且仅当存在一个包含这两个点的非退化轴平行矩形，且该矩形包含于由多边形界定的区域内。 r-星是这样一个区域：其中包含一个点，使得该区域中的每个点都对其 r-可见。为使术语简洁，下文将配备 r-可见性的点警卫称为r-警卫。

Gy˝ori [4] 和 O'Rourke [15] 独立证明，在 Kahn、Klawe 和 Kleitman [7]的正交艺术画廊定理背后，存在一个更强的组合定理：任意具有 n个顶点的简单正交多边形，都可以划分为至多 $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 个顶点数不超过 6 的简单正交多边形。请注意，这立即意味着，即使采用 r守卫，Kahn、Klawe 和 Kleitman 的极值结果仍然成立。换言之，对于正交多边形而言， r视线可见性是对视线可见性的合理限制，因为在极值情况下，两者效果相同。

*部分支持 国家研究、发展和创新办公室（NKFIH）资助项目 SNN-13564 和 K-1326 96.

Worman 和 Keil [18] 的开创性成果表明，求解能够覆盖简单正交多边形的 r守卫最小基数集合，比使用具有视线可见性的守卫更可行。

定理 1（Worman 和 Keil [18]）。可以在 $\mathcal{O}(n^{17} \cdot \text{poly}(\log n))$ 时间内找到简单正交多边形的最小基数 r-星覆盖。

Worman 和 Keil 的算法在实践中仍然相当缓慢。在我们介绍该问题特殊情形的近似结果和更快算法之前，先回顾一下文献中认为的 r-星覆盖问题的解是什么。

（A）覆盖整个区域所需的最少 r-星的数量，以及覆盖中每个 r-星形多边形的顶点列表。这是该术语的规范含义，我们将其简称为 r-星覆盖问题。（B）一个最小基数的 r-守卫集合，使得整个区域中的任意点都能被所列守卫中的至少一个 r可见。我们将这一变体称为 r-守卫覆盖问题。（C）计算覆盖该区域所需的最少 r-守卫数量。这等价于计算覆盖该区域所需的最少 r-星数量。

Culberson 和 Reckhow [2] 证明了，存在一族简单正交多边形，使得对于任意一种（A）类解决方案，当其中的 r-星为极大时，对于无限大的输入子集，其空间复杂度相对于输出大小为 $\Omega(n^2)$。然而，对于（B）类和（C）类解决方案，尚不知晓这样的下界。

第k 类正交多边形（其中 $0 \leq k \leq 4$）是指这样一种简单正交多边形：其凹陷至多沿4个可能的坐标轴平行方向中的 k 个方向分布。在2a类多边形中，这两个方向彼此平行；而在2b类多边形中，凹陷方向彼此正交。按照（A）类的定义，以下算法是渐近最优的。

定理 2（Keil [9]）。在2a类正交多边形中， r-星覆盖问题可以在 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间内求解。

该结果已沿两个不同方向得到扩展。

定理 3（Culberson 和 Reckhow [2]）。在第2b类正交多边形中， r-星覆盖问题可以在 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间内求解。覆盖一个第2类正交多边形所需的最少 r-守卫数量可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内计算得出。

对于第3类多边形，存在一种输出敏感的对数线性算法。

定理 4（Palios 和 Tzimas [16]）。覆盖一个第3类正交多边形所需的最小基数 r-守卫集合可以在 $\mathcal{O}(n + k \log k)$ 时间内计算得出，其中 k 是输出解的基数。

在近似算法领域，人们发现了更快的算法。Lingas、Wasylewicz 和 Zyli ́nski [11] 为 r-守卫问题提出了一种线性时间近似算法。他们的证明将简单正交多边形划分为楼梯形区域，在这种区域中，按照类型（B）的定义，该问题可以在线性时间内精确求解。

定理5（Lingas、Wasylewicz 和 Zyli ́nski [11]）。 r-守卫覆盖问题的 3-近似解可在 $\mathcal{O}(n)$时间内计算得到。

可以以同样高效的方式计算出 r-守卫最小数量的一个略好近似值。

定理 6（Gy˝ori 和 Mezei [6]）。可以在$\mathcal{O}(n)$ 时间内计算出覆盖 P 所需的最小 r-守卫数量的 8 3-近似值。[1]

配备 r 视觉、能够沿画廊中的轴平行线段移动的守卫被 Katz 和 Morgenstern [8] 称为滑动摄像机（在一般多边形中，能够沿线段移动的守卫被称为移动守卫）。定理 6 基于一个极值结果，该结果建立了控制画廊所需的最少 r 守卫数量与水平和垂直滑动摄像机的最少数量之间的不等式。定理 6 背后的主要计算结果如下所示。

定理 7（Gy˝ori 和 Mezei [6]）。最小基数水平滑动摄像机（MHSC）问题可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内求解。

贡献。本文的目标是证明以下结果。

定理 8。一个简单正交多边形的最小基数覆盖 r-星集合可以在 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间内计算得到。

从渐近最优性的角度来看，定理 8 是最优的，因为存在这样的问题：由极大的 r-星的顶点列表组成的每个最小基数覆盖的描述大小为 $\Omega(n^2)$，参见 Culberson 和 Reckhow [2]。定理 8 的证明包含三个部分，即定理 77 、定理 87 和定理 97。定理 8 的证明背后的主要思想受定理 7 的算法启发。

如同关于简单正交多边形的既有研究 [14, 2, 18, 8], 一样，我们的方法将 r-星覆盖问题转化为一个更一般的（极值）图论问题。我们的方法的显著特点是，将画廊的区域映射为边而非顶点；如果两个边都存在于 C_4的同态像中，则它们之间具有可见性。在该图中，将通过算法 1 计算覆盖 r-守卫的最小基数。将利用定理 87中所描述的最小-最大等式证明算法 1所给出解的最优性。在接下来的章节中，我们论证并证明定理 8成立。

2 预备知识和基于树的二部图

设 P 为一个简单正交多边形，即一个不与自身相交且其边均与坐标轴平行的多边形。此类多边形所围成的区域没有孔洞。设G_H 为在 P的每个凹顶点处进行水平切割所得到的内部不相交矩形的集合；我们称这些矩形为水平切片。水平切片覆盖 P所围成的区域。类似地，设垂直切片 G_V是对 P进行垂直切割后以类似方式定义的集合。垂直切片同样覆盖 P。注意，$|G_H| + |G_V|$至多等于 P的顶点数，因为 P 的每个凹顶点都连接一条水平切割和一条垂直切割。此外，每条切割至多连接两个凹顶点，因此 P 的顶点数至多为 $2(|G_H| + |G_V|) + 4$。我们将把问题的复杂度描述为$n = |G_H| + |G_V|$的函数。

定义 9. 令 G 为 G_H 和 G_V 的交图，即:

$$G = \left(G_H, G_V; \left\{\{h, v\} \mid h \in G_H,\ v \in G_V,\ \mathrm{int}(h) \cap \mathrm{int}(v) \neq \emptyset\right\}\right).$$

换言之，当且仅当一条水平切片与一条垂直切片的内部相交时，二者才通过一条边相连。我们将 G 称为 P 的栅格图。

[1]本文作者声称，该算法实际上可以在线性时间内提供一组 r-守卫，但在 ICGT 2018 [13] 上仅给出了证明概要。完整证明从未发表。

注意， G_H 和 G_V 是不相交的集合，除非 $|G_H| = |G_V| = 1$；由于在这种情况下定理 8 是平凡的，下面设 $G_H \cap G_V = \emptyset$。因此，我们可以定义

$$hv = vh = \{h, v\} \qquad \forall h \in G_H \ \forall v \in G_V$$

不会产生歧义。在可能的情况下，我们将按照行列顺序 hv 提及边，因为这与矩阵通常的索引方式相似。然而，对于某些 $st \in E(G)$，事先并不知道是 $s \in G_H$ 还是 $s \in G_V$，因此无法保证遵循此前的约定。

边 $hv \in E(G)$ 的像素为 $h \cap v$。像素集合

$$\text{pixels}(P) = \big\{\, h \cap v \mid hv \in E(G) \big\}$$

显然是由 P 界定的区域的一个覆盖。

定义 10。令 $\Gamma(s)$（无下标时）表示在图 G 中与顶点 $s \in G_H \cup G_V$ 相连的邻居集合。

定义 11。当且仅当 hv'、$h'v \in E(G)$ 时，边 $hv \in E(G)$ 对 $h'v' \in E(G)$ 是 r-可见的。我们用 $hv \boxdot h'v'$ 表示这一对称关系。

图 1 展示了定义 11。下一个引理将简单正交多边形中的 r-视觉转换为其栅格图中的 r-视觉。

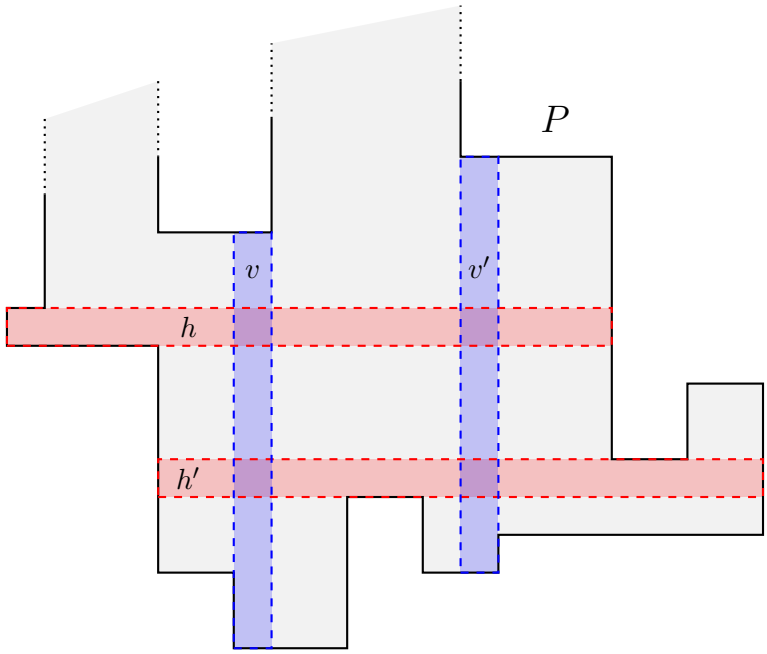

图 1：简单正交多边形 P 以实线线段绘出，其围成的区域填充为灰色。水平切片 h、$h' \in G_H$ 和垂直切片 v、$v' \in G_V$ 分别填充为红色和蓝色，其边界则用虚线描绘。注意，hv、hv'、$h'v$、$h'v' \in E(G)$，因此 $hv \boxdot h'v'$ 成立。

引理 12. 任取 $x \in \mathbb{R}^2$。则

$$\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y \ r\text{-visible to } x \ \text{in } P\} = \bigcup_{\substack{x \in h \cap v \\ hv \in E(G)}} \ \bigcup_{\substack{hv \boxdot h'v' \\ h'v' \in E(G)}} h' \cap v'.$$

证明。我们通过证明方程两边互相包含来证明该方程。

• 令 $hv, h'v' \in E(G)$ 满足 $hv \boxdot h'v'$，并假设 $x \in h \cap v$ 和 $y \in h' \cap v'$。根据r-可见性，我们知道 $hv', h'v \in E(G)$。注意，由于 h 是一个矩形，$h \cap v$ 和 $h \cap v'$的凸包包含于 h中。对 v, h', v'也有类似结论。由于 P 是简单的，$(h \cap v) \cup (h \cap v') \cup (h' \cap v) \cup (h' \cap v')$ 的凸包包含于由 P围成的区域中，因此 x对 y 是 r-可见的。

• 假设 y 对 x 在 P中是 r-可见的。令 R 为同时包含 x和 y的最小尺寸轴平行矩形。延伸 R 的各对平行边，直到所有边都与多边形 P相交；令延伸后的矩形为 R'。于是，R' 是像素的并集。任取hv、$h'v' \in E$（G），使得 $x \in h \cap v$、$y \in h' \cap v'$，且 $h \cap v$、$h' \cap v' \subseteq R'$均成立。由于 R'是一个分别与 h、h'、v、v' 的内部相交的矩形，因此有 int(h) $\cap$ int(v') $\neq \emptyset$，且 int(h') $\cap$ int(v) $\neq \emptyset$。

□

引理 13. 要求将 r-守卫放置在像素的内部，并不会降低 r-守卫问题的一般性。一般问题可以约化为受限版本，其中守卫被放置在 $\mathcal{O}(n)$ 中像素的内部。

证明。令 $\delta \in \mathbb{R}^+$ 为 P 的两个顶点的 x 坐标或 y 坐标之间的最小非零差值。令 S 为一个以原点为中心、边长为 2ε 的轴平行正方形，其中 $\varepsilon = \frac{1}{4}\delta$。令 Q 为包围 S 与由 P 包围的区域之闵可夫斯基和的简单正交多边形。在 P 的顶点 v 处，角的朝向（直角朝向哪一方）决定了是否必须将 $\pm\varepsilon$ 加到 v 的坐标上，以得到其在 Q 中的像。对 ε 的选择保证了 Q 不会自相交，并且 Q 的每个像素都具有 2ε 的最小边长。此外，如果由 Q 包围的区域中的某个点与 Q 的距离至少为 ε，那么该点必定位于由 P 包围的闭区域内。

根据引理 12，存在一个 P 的 r-守卫的最小基数集合 X，使得每个 r-守卫都位于 P 的某个像素的角处。注意，$x \in X$ 不包含在 Q 的任何像素的边界内。还要注意，S 与一个矩形的闵可夫斯基和仍然是一个矩形，因此 X 也覆盖 Q。

反过来，设 Y 是覆盖 Q 的 r-守卫的最小基数覆盖集，且这些守卫避开像素边界。根据引理 12，我们可以选择 Y，使得每个 r-守卫$y \in Y$ 都位于其在 Q 中的包围像素的中心。首先注意，每个 $y \in Y$ 也包含在由 P 围成的区域内，因为 Q 中像素的中心与 Q 的距离至少为 ε。类似地，P 中像素的中心 x 与包含 x 的 Q 像素边界之间的距离至少为 ε。根据引理 12，若 x 在 Q 中对 y 是 r-可见的，那么包含 Q 中的 x 和 y 的极大矩形 R 也包含 $x + S$ 和 $y + S$。设 R' 为从 R 得到的矩形：将 R 的每个角沿水平轴和垂直轴朝其中心移动 ε。那么 R' 包含在由 P 围成的区域内，并且 x、$y \in R'$ 也都包含在其中。因此，根据引理 12，P 中每个像素的中心都对 Y 是 r-可见的（在 P 中），故 Y 覆盖 P 的每个像素。

□

假设 14. 我们假设，对于每个 $hv \in E(G)$，P 中的 r-守卫都避开边界 $\partial(h \cap v)$。等价地，P 的一个 r-守卫必须包含在某个 $hv \in E(G)$ 的内部 int($h \cap v$) 中。

现在，根据引理 12，可见区域中的 r-守卫 x 由唯一的边 $hv \in E(G)$ 确定，该边满足 $x \in$ int($h \cap v$) 的条件。这样一来，一个 r-守卫 x 对应于边$hv \in E(G)$，其像素包含该守卫（$x \in h \cap v$）。根据引理 12，对 x 而言 r-可见的区域，是由 G 中对 hv r-可见的各条边的像素构成的并集。由于滑动相机覆盖其巡逻路径上 r-守卫的可见区域的并集，因此不失一般性，我们还可以作出如下假设。

假设 15。水平滑动摄像机的巡逻路径对于任何 $h \in G_H$ 都不是 ∂h 的子集。垂直滑动摄像机的巡逻路径对于任何 $v \in G_V$ 都不是 ∂v 的子集。我们假设滑动摄像机在长度上是极大的。

引理 12 表明，由水平或垂直滑动摄像机覆盖的区域由包含其巡逻路径的唯一切片决定。为便于后文参考，下面记录 r-守卫问题和滑动摄像机问题在栅格图中的相应定义。

定义 16. 给定栅格图 G，称

- 集合 $F \subseteq E(G)$ 为 r-守卫的覆盖集，当且仅当任意边 $e \in E(G)$ 都对某个 $f \in F$ r-可见；
- 集合 $M_H \subseteq G_H$ 为水平滑动摄像机的覆盖集，当且仅当对于任意垂直切片 $v \in G_V$，都存在一个水平切片 $h \in M_H$，使得 $hv \in E(G)$；
- 集合 $M_V \subseteq G_V$ 为垂直滑动摄像机的覆盖集，当且仅当对于任意水平切片 $h \in G_H$，都存在一个垂直切片 $v \in M_V$，使得 $hv \in E(G)$；
- 集合 $S \subseteq G_H \cup G_V$ 为滑动摄像机的覆盖集，当且仅当对于任意边 $hv \in E(G)$，都存在一个切片 $s \in S$，使得 $hs \in E(G)$ 或 $sv \in E(G)$。换言之，对于任意 $s \in G_H \cup G_V$，都有 $s \in \Gamma(S)$ 或 $\Gamma(s) \subseteq \Gamma(S)$。[2]

引理 17。定义 16 所定义的概念与 r-视觉下的几何定义相对应（受假设 14 和 15 的限制）。

证明。关于 r-守卫的陈述可由引理 12 得出。极大的滑动相机的可见区域，是其巡逻路径上各 r-守卫可见区域的并集。根据我们先前的陈述，巡逻路径包含于 $h \in G_H$ 的极大水平滑动摄像机的可见区域等于

$$\bigcup_{v\in\Gamma(h)} \bigcup_{\substack{hv\square h'v' \\ h'v'\in E(G)}} h' \cap v' = \bigcup_{v\in\Gamma(h)} \bigcup_{\substack{h'\in\Gamma(v) \\ v'\in\Gamma(h) \\ h'v'\in E(G)}} h' \cap v' = \bigcup_{\substack{h'\in\Gamma(\Gamma(h)) \\ v'\in\Gamma(h) \\ h'\in\Gamma(v')}} h' \cap v' = \bigcup_{\substack{v'\in\Gamma(h) \\ h'\in\Gamma(v')}} h' \cap v' = \bigcup_{v'\in\Gamma(h)} v'.$$

这证明了关于水平滑动摄像机的陈述；根据对称性，垂直滑动摄像机的情形也成立。当且仅当存在 $h \in S$ 使得 $v' \in \Gamma(h)$，或存在 $v \in S$ 使得 $h' \in \Gamma(v)$ 时，滑动摄像机覆盖集 S 才覆盖对应于 $h'v' \in E(G)$ 的像素。 □

R-树的概念由 Gy˝ori、Hoffmann、Kriegel 和 Shermer [5] 提出。

P 的水平 R-树 T_H 等于

$$T_H := \left(G_H, \left\{\{h_1, h_2\} \subseteq G_H \ : \ h_1 \neq h_2,\ h_1 \cap h_2 \neq \emptyset\right\}\right),$$

即，T_H 是 P的水平切片的交图。同理，P 的垂直 R-树是 P的垂直切片的交图:

$$T_V := \left(G_V, \left\{\{v_1, v_2\} \subseteq G_V \ \mid \ v_1 \neq v_2,\ v_1 \cap v_2 \neq \emptyset\right\}\right).$$

容易看出，图 T_H 和图 T_V 是连通且无环的，因为每条水平和垂直切割都会分隔内部不相交区域，正如 P 是简单的 [4, 5]一样。等价地，如图2和图3所示，T_H 和 T_V 分别是不含外部面的平面图的对偶图，该平面图由 P 的线段及其水平和垂直切割确定。

[2]文献 [6] 将移动守卫的覆盖集定义为对应于G中顶点支配集的概念。遗憾的是，该定义存在缺陷，因为它与几何定义不符。请注意，在网格交图中，支配数确实是协作移动守卫 [10]所对应的概念。

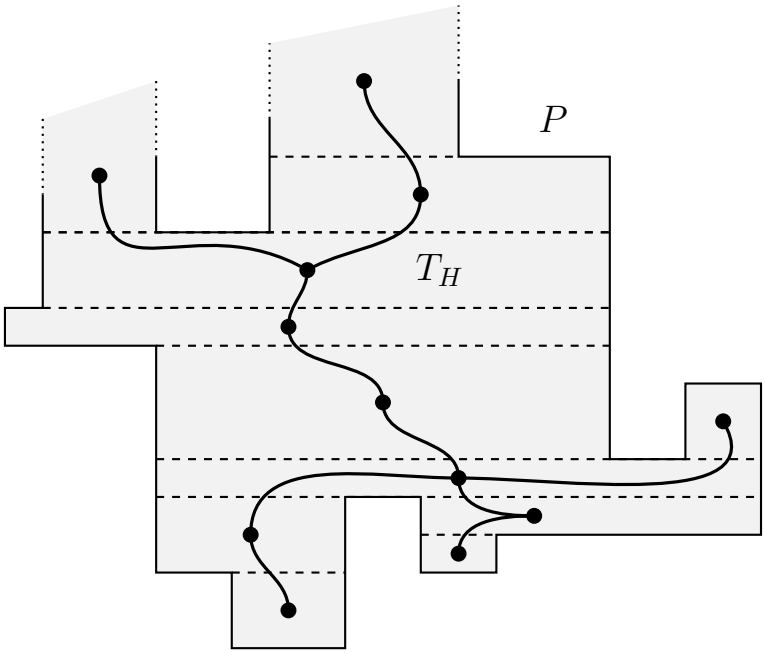

图2：简单正交多边形 P 由实线线段绘制，其围成的区域填充为灰色。每个实心圆表示包围它的水平切片。 T_H 的边绘制为连接代表其顶点的实心圆的曲线。与未显示切片相 incident 的 T_H 的边也不绘制。

引理19。对于任意 $s \in G_H \cup G_V$，邻域 $\Gamma(s)$是相应 R-树（T_H 或 T_V）中一条路径的顶点集。

证明。 $\Gamma(h)$中的垂直切片彼此内部不相交，并覆盖 h。由于 h 是连通区域， $\Gamma(h)$在 T_V中诱导出一棵连通子树。此外，由于 h 也是垂直凸的，$T_V[\Gamma(h)]$ 不可能包含度为3或更大的顶点。根据对称性，该结论对任意 $v \in G_V$也成立。

□

下面两个引理的陈述几乎是显而易见的，但若将其正式表述出来，则并非立即明了。

引理20。设 $F \subseteq E(G)$ 是栅格图 G中的边的子集。则

$$\partial\left(\bigcup_{hv\in F} h\cap v\right) = \mathrm{cl}\left(\Delta_{hv\in F}\,\partial\,(h\cap v)\right),$$

其中， Δ 是对称差算子。闭包 $\mathrm{cl}\left(\Delta_{hv\in F}\,\partial\,(h\cap v)\right)\setminus\left(\Delta_{hv\in F}\,\partial\,(h\cap v)\right)$ 所专包含的点集是像素角点的一个（有限）子集，其中 P。

证明。设 $hv \in F$，考虑矩形 $h\cap v$的四条边之一：至多存在另一个 $h'v' \in F$，使得 $h'v'$ 也包含这条边。因此，右侧的对称差算子会得到那些恰好出现在一个 $\partial\,(h\cap v)$ 中的边的内部，其中 $hv \in F$。对于每个 $hv \in F$， $\partial\,(h\cap v)$ 有四个角。对称差算子得到这样的角 A，当且仅当恰好存在一个 $hv \in F$，或恰好存在三个 $hv \in F$，使得 $A \in \partial\,(h\cap v)$。对于所有 $hv \in F$，集合 $\partial\,(\bigcup_{hv\in F} h\cap v)$ 包含有限多个 $\partial\,(h\cap v)$ 的角，因此闭包只会重新引入有限多个缺失点。

□

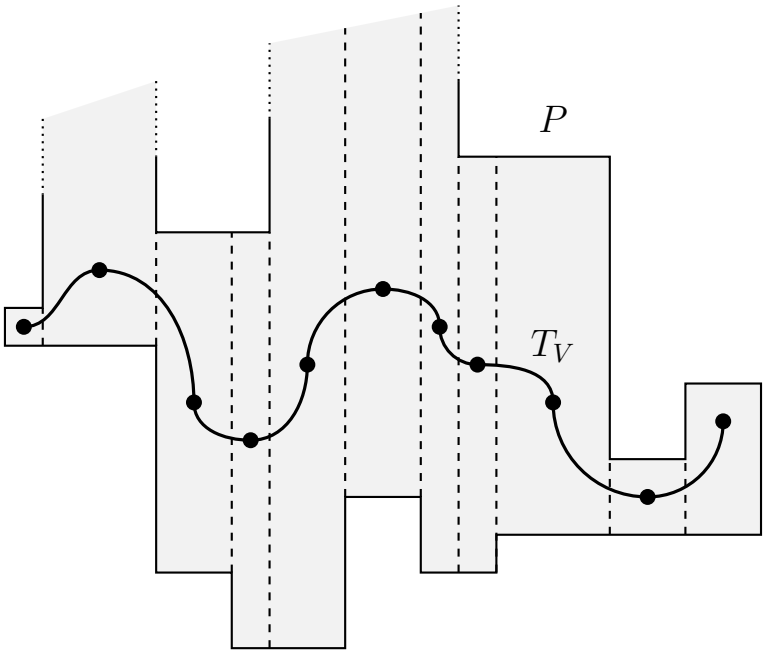

图 3：简单正交多边形 P 由实线线段绘制，其围成的区域填充为灰色。每个实心圆表示包围它的垂直切片，T_V 的边绘制为曲线，连接表示其顶点的实心圆。与未显示的切片关联的 T_V 的边也不绘制。

引理 21。设 $v \in G_V$，且 h_1、$h_2 \in \Gamma(v)$。令 $[h_1, h_2]$ 表示在 T_H 中连接 h_1 与 h_2 的路径的顶点集。那么

$$\bigcup_{h \in [h_1, h_2]} h \cap v = \text{convexHull}\Big((h_1 \cap v) \cup (h_2 \cup v)\Big).$$

证明。根据引理19，$\Gamma(v)$ 是 T_H中一条路径的顶点集，因此 $[h_1, h_2] \subseteq \Gamma(v)$。由 v的凸性可得该结论。 □

在本节中，我们将栅格图 G 定义为多边形的水平和垂直 R-树的顶点集的交图。下面给出栅格图的一个抽象推广。

定义 22。如果以下陈述成立，则称 G 为基于树的二部图，其中 T_H 和 T_V 分别是其水平和垂直 R-树：

(i) $G = (G_H, G_V, E)$ 是一个连通二分图；(ii) T_H 是一棵树，其顶点集为 G_H；(iii) T_V 是一棵树，其顶点集为 G_V；(iv) 对任意 $h \in G_H$，邻域 $\Gamma(h)$ 是 T_V中一条路径的顶点集；(v) 对任意 $v \in G_V$，邻域 $\Gamma(v)$ 是 T_H中一条路径的顶点集。

不带下标时，$\Gamma(s)$ 仍表示 s 在 G 中的邻居集合。

每个栅格图都是基于树的二部图。在接下来的第 3 至第 8 节中，我们将研究任意一个基于树的二部图 G。我们将在第 9 节回到栅格图，并证明定理 8。

3 顶点上的偏序

设 G 是一个基于树的二部图，其 R-树为 T_H 和 T_V（见定义 22）。本节为本文奠定基础，即建立后续章节中用于分析 G 结构的基本引理。

定义 23（R-树的根）。设 $h_{\text{root}}v_{\text{root}}$ 是 G 的一条边，使得 v_{root} 是 T_V 中的叶节点。顶点 h_{root} 和 v_{root} 将分别作为 T_H 和 T_V 的根。

注记 24。尽管根的选择可能会破坏 T_H 与 T_V 之间的对称性（R-树中可能不存在一条边，其两个端点都是叶节点），但除引理 39 外，我们的所有结果和定理都与这种对称性破缺无关。引理 39 在引理 54 和 55 的证明中被应用了两次。然而，这些引理的表述相对于 T_H 和 T_V 完全对称。换言之，即使交换 G_H 和 G_V 的角色，本文中的每个引理和定理仍然成立。

定义 25。对于任意 $h \in G_H \setminus \{h_{\text{root}}\}$，令 parent($h$) 为 T_H 中 h 的父节点。类似地，对于任意 $v \in G_H$，若 $v \neq v_{\text{root}}$，则令 parent(v) 为 T_V 中 v 的父节点。定义 parent(h_{root}) $= \emptyset$，以及 parent(v_{root}) $= \emptyset$。

定义 26. 给定 s_1、$s_2 \in G_H$ 或 s_1、$s_2 \in G_V$，令 $[s_1, s_2]$ 分别表示连接它们的路径在 T_H 或 T_V 中的顶点集。定义 $\partial[s_1, s_2] := \{s_1, s_2\}$、$\partial(\emptyset) := \emptyset$。

定义 27. 我们在 G_H 和 G_V 上定义一个偏序。对于任意 h_1、$h_2 \in G_H$ 以及任意 v_1、$v_2 \in G_V$，定义：

$$h_1 \leq h_2 \iff h_1 \in [h_{\text{root}}, h_2]$$
$$v_1 \leq v_2 \iff v_1 \in [v_{\text{root}}, v_2]$$

当且仅当 $s_1 \leq s_2$ 或 $s_2 \leq s_1$ 时，顶点 s_1、$s_2 \in G_H \cup G_V$ 是可比较的。G_H 中的元素与 G_V 中的任何元素都不可比较，反之亦然。

本文使用 $<$ 和 $\leq$ 同时表示 G 的顶点上的偏序以及整数上的自然序。然而，根据上下文应始终能够明确我们所指的是哪一种；此外，顶点通常表示为（带索引的）h、v、t、s，而变量 i、j、k、m、n 则表示整数。

稍后我们将介绍这一偏序的扩展（定义 49）。然而，除非另有说明，在讨论切片之间的可比性或提及切片上的序时，均指定义 27 中的意义。

定义 28. 给定一个元素集合 $S \subseteq G_H$ or $S \subseteq G_V$，如果该集合存在唯一的最小元素和唯一的最大元素（相对于上述定义的序），则分别记为 $\min S$ and $\max S$。如果不存在唯一的极小（极大）元素，则称最小值（最大值）不存在。为方便起见，我们定义 $\min \emptyset = \max \emptyset = \emptyset$。

引理 29. 假设 S 在 T_H or T_V 中诱导出一个连通子图。如果 $a, b \in S$，那么 $[a, b] \subseteq S$.

推论 30. 设 $s_0 \in G_V \cup G_H$。如果 $s_1, s_2 \in \Gamma(s_0)$，那么 $[s_1, s_2] \in \Gamma(s_0)$。

推论 31. 令 s_1、$s_2 \in G_V \cup G_H$ 满足 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2) \neq \emptyset$。则 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2)$ 在 T_H 或 T_V中诱导出一条路径。

推论 32. 如果 S 在 T_H 或 T_V中诱导出一个连通子图，则 $\min S$ 存在。

Lemma 33. 假设 a、b、$c \in G_H$ 或 a、b、$c \in G_V$。如果 a、$b \leq c$，那么 a 和 b 是可比较的 .

证明。由于 a、$b \le c$，顶点 a、b 都位于从根到 y 的路径上。 □

引理34. 如果 s_1在 T_H 或 T_V中是邻居，则 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2) \neq \emptyset$。

证明. 由于 G是连通的，因此在 G中存在一条经过顶点 $t_1 t_2 \dots t_{2k+1}$的路径，使得 $t_1 = s_1$和 $t_2 = s_2$。注意，$\cup_{i=1}^{k} \Gamma(t_{2i})$在 T_H 或 T_V中诱导出一个连通子图，因此存在某个 i，使得 s_1、$s_2 \in \Gamma(t_i)$。

□

推论35. 如果 S 在 T_H 或 T_V中诱导出一个连通子图，那么 $\Gamma(S)$也同样如此。

定义36. 为了便于阅读，我们将记作

$$\Gamma\Gamma(s) := \Gamma(\Gamma(s)).$$

推论37. 对于任意 $s \in G_H \cup G_V$，唯一的最小值 $\min \Gamma(s)$、$\min \Gamma\Gamma(s)$、$\min \Gamma\Gamma\Gamma(s)$均存在。

推论38. 对于任意 $s \in G_H \cup G_V$和 $t \in \Gamma(s)$，有 $\min \Gamma(s) \le t$。

引理 39. 如果 $s_1, s_2 \in \Gamma(s_0)$ 且 $\min \Gamma(s_0) = v_{\text{root}}$，那么 s_1 和 s_2 可比较。

证明. 由于 v_{root} 是一个叶节点，我们必有 $\min \Gamma(s_0) \in \partial\Gamma(s_0)$。因此 $\Gamma(s_0) = [v_{\text{root}}, v]$，其中 $v \in \partial\Gamma(s_0)$。由此可知 $s_1, s_2 \le v$ 都成立，因此它们必定可比较。 □

引理 40. 如果 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2) \neq \emptyset$，那么 $\min \Gamma(s_1)$ 和 $\min \Gamma(s_2)$ 可比较。

证明. 由引理 33 可得。 □

引理 41. 如果 $\min \Gamma(s_1) < \min \Gamma(s_2)$，那么 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2)$ 中任意两个元素都可比较。

证明. 任取 $s, s' \in \Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2)$。根据定义

$$\min \Gamma(s_1) < \min \Gamma(s_2) \le s, s'.$$

然而，请注意，存在唯一的 $s \in \partial\Gamma(s_1)$ 使得 $\min \Gamma(s_2) \le s$，因此 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2)$ 中的任意两个元素都小于或等于 s。 □

推论 42. 如果 s_1 和 s_2 不可比较，那么任意 t_1、$t_2 \in \Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2)$ 都满足 $\min \Gamma(t_1) = \min \Gamma(t_2)$。

引理 43. 如果 $\Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2) \neq \emptyset$ 且 $\min \Gamma(s_1) \le \min \Gamma(s_2)$，那么 $\min \Gamma(s_2) \in \Gamma(s_1)$.

证明。令 $s_0 \in \Gamma(s_1) \cap \Gamma(s_2)$，则

$$\min \Gamma(s_1) \le \min \Gamma(s_2) \le s_0,$$

因此

$$\min \Gamma(s_2) \in [\min \Gamma(s_1), s_0] \subseteq \Gamma(s_1),$$

这就证明了该结论。 □

以下引理对于我们后续的所有证明都至关重要。它进一步巩固并串联起各项基础。

引理 44. 若 $s_1 \le s_2$，则 $\min \Gamma(s_1) \le \min \Gamma(\{v6)$。

证明. 我们声称，只需证明：若 $v_1v_2 \in E(T_V)$ 且 $v_1 < v_2$，则 $\min\Gamma(v_2) \in \Gamma(v_1)$。事实上，若该结论得证，则由偏序的传递性（对于 G_H，则由对称性）以及推论37，可得引理的一般情形。

设 $v_1v_2 \in E(T_V)$ 且 $v_1 < v_2$。根据引理34，有 $\Gamma(v_1) \cap \Gamma(v_2) \neq \emptyset$。根据引理 43，必有 $\min \Gamma(v_1) \in \Gamma(v_2)$ 或 $\min\Gamma(v_2) \in \Gamma(v_1)$。若后者成立，则结论得证。若后者不成立，则 $\min \Gamma(v_2) < \min\Gamma(v_1)$。

设 $v_1v_2 \in E(T_H)$、$v_1 < v_2$、$\min \Gamma(v_2) \notin \Gamma(v_1)$，且相对于这些条件，$v_2$ 具有极小性。若 $v_1 = v_{\text{root}}$，则 $h_{\text{root}} = \min \Gamma(v_1) \in \Gamma(v_2)$，从而 $\min\Gamma(v_2) = h_{\text{root}}$，因此 $\min\Gamma(v_2) \in \Gamma(v_1)$，这与假设矛盾。若 $v_1 \neq v_{\text{root}}$，则令 $v_0 = \text{parent}(v_1)$。根据 v_2 的极小性，必有 $\min\Gamma(v_1) \in \Gamma(v_0)$ 且 $\min \Gamma(v_0) \leq \min \Gamma(v_1)$。根据引理 33，$\min \Gamma(v_0)$ 与 $\min\Gamma(v_2)$ 可比较。

如果 $\min \Gamma(v_0) \leq \min \Gamma(v_2)$，那么 $\min \Gamma(v_2) \in [\min\Gamma(v_0), \min \Gamma(v_1)] \subseteq \Gamma(v_0)$。但这样一来 $v_1 \in [v_0, v_2] \subseteq \Gamma(\min \Gamma(v_2))$，这就产生了矛盾。因此我们必须有

$$\min\Gamma(v_2) < \min\Gamma(v_0).$$

通过归纳法（如果 v_0 存在父节点，则取其父节点），可得 $\min \Gamma(v_2) < \min\Gamma(v_{\text{root}}) = h_{\text{root}}$，这就产生了矛盾。 □

推论 45。对于任意 $s \in G_H \cup G_V$，我们有

$$\min\Gamma\Gamma(s) = \min\Gamma(\min\Gamma(s)).$$

推论 46。如果 $\min \Gamma(s_1) \leq \min \Gamma(s_2)$，那么 $\min \Gamma\Gamma(s_1) \leq \min\Gamma\Gamma(s_2)$。

引理 47。对于任意 $s \in G_H \cup G_V$，要么 $\min\Gamma\Gamma(s) < s$，要么 s 是 T_H 或 T_V 的根。

证明。如果 s 不是相应 R-树的根，令 s_0 为其父节点。由于 G 是连通的，存在一个同时与 s 和 s_0 相连的顶点，因此 $\min\Gamma\Gamma(s) \leq s_0 < s$。 □

引理 48. 若 $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(s_0)$ 且 $\min \Gamma(s_0) < s_1 \leq s_2, s_3$，则 s_2 和 s_3 可比较。

证明. 设 $\{a, b\} = \partial\Gamma(s_0)$。若 $s_2, s_3 \leq a$ 或 $s_2, s_3 \leq b$，则结论由引理 33 得出。若 $s_2 \leq a$ 和 $s_3 \leq b$，则 $s_1 \leq a, b$，因此 $s_1 \leq \min \Gamma(s_0)$，这就产生了矛盾。 □

4 细化偏序

算法 1（见第 6 节）是一种贪心算法，它逐个处理 G_V 的元素。然而，我们需要细化 $<$ 序，使得新的偏序符合扫描这一直观概念。

定义 49. 定义 $<_b$ 在 $G_H \cup G_V$ 上的偏序如下：

- 若 $h_1, h_2 \in G_H$，则令

$$\begin{aligned} h_1 <_b h_2 \iff & \min\Gamma(h_1) < \min\Gamma(h_2) \text{ or} \\ & \min\Gamma(h_1) = \min\Gamma(h_2) \text{ and } h_1 < h_2; \end{aligned}$$

- 如果 $v_1, v_2 \in G_V$，那么令

$$\begin{aligned} v_1 <_b v_2 \iff & \min\Gamma(v_1) < \min\Gamma(v_2) \text{ or} \\ & \min\Gamma(v_1) = \min\Gamma(v_2) \text{ and } v_1 < v_2; \end{aligned}$$

- 如果 $h \in G_H$ 和 $v \in G_V$，那么 h 和 v 不可比较。



（a）根据引理 54，的假设和前提，可以得出 $h_1v_1 \in E(G)$。

（b）根据引理 55 的假设和前提，可以得出 $h_2v_2 \in E(G)$。

图 4：引理 54 和 55 的可视化。竖线表示 v_1、v_2（和 v_3），横线表示 h_1、h_2（和 h_3）。两条线的实线部分相交，表示在相应引理的前提中，假设所表示的元素通过一条边相连。两条以虚线部分相交的线表示每个引理结论中出现的边的顶点。

自然地，我们定义 $s_1 \leq_b s_2 \iff$（$s_1 = s_2$ 或 $s_1 <_b s_2$）。

引理 50。关系 $<_b$ 是一个扩展了 $<$ 的偏序。

证明。扩展性质由引理 44 和推论 46 得出。$<_b$ 的自反性由 $<$ 的自反性得出。$<_b$ 的反对称性也由 $<$ 的反对称性得出。$<_b$ 的传递性由 $<$ 的传递性以及推论 45 和 46 得出。□

众所周知，任何偏序都可以扩展为全序或线性序。

定义 51（顶点上的线性序）。设 $\prec$ 是 $G_H \cup G_V$ 上 $<_b$ 的一个细化，使得将 $\prec$ 限制在 G_H 和 G_V 上时，它是一个线性序。若 $h \in G_H$ 和 $v \in G_V$，则 h 和 v 关于 $\prec$ 不可比较。

引理 52。假设 $\min \Gamma(s)$ 和 $\min \Gamma(s')$ 可比较。若 $s \prec s'$，则 $\min \Gamma(s) \leq \min \Gamma(s')$。

证明。如果 $\min \Gamma(s') < \min \Gamma(s)$，那么根据定义，$s' <_b s$，这与 $s \prec s'$ 矛盾。□

引理 53。如果 $s \prec s'$ 和 $\Gamma(s) \cap \Gamma(s') \neq \emptyset$，那么 $\min \Gamma(s') \in \Gamma(s)$，且 $\min \Gamma(s) \leq \min \Gamma(s')$。

证明。由引理 40 和引理 52 可得。□

以下两个引理将在后文发挥非常重要的作用。引理 54 表明，邻域相对于 $\prec$ 是共同递降的。引理 55 的一种可能解释是，不允许出现“孔洞”。接下来两个引理的证明在技术上稍显复杂，因此推迟到附录 A。

引理 54。设 $h_1, h_2 \in G_H$ 和 $v_1, v_2 \in G_V$ 满足条件 $h_1 \preceq h_2$ 和 $v_1 \preceq v_2$。如果 $h_1, h_2 \in \Gamma(v_2)$ 且 $h_2 \in \Gamma(v_1)$，那么 $h_1 \in \Gamma(v_1)$。

引理 55. 设 h_1、h_2、$h_3 \in G_H$ 和 v_1、v_2、$v_3 \in G_V$ 满足 $h_1 \preceq h_2 \preceq h_3$ 和 $v_1 \preceq v_2 \preceq v_3$。若 h_2、$h_3 \in \Gamma(v_1)$，且 h_1、$h_3 \in \Gamma(v_2)$，且 h_1、$h_2 \in \Gamma(v_3)$，则 $h_2 \in \Gamma(v_2)$。

请注意，尽管这些引理的正式表述并不对称，但交换 G_V 和 G_H 后，这些引理完全对称（见图 4）。

5 守卫、覆盖与独立性

让我们针对基于树的二部图 G 定义 r-守卫和 r-独立性。引理58阐释了 r-独立性的抽象定义。回顾定义 11、16 和 22。让我们明确地定义基于树的二部图 G 中的 r-守卫。

定义 56。在 G 中， r-守卫是边 $hv \in E(G)$。当且仅当 $h'v, hv' \in E(G)$ 时， r-守卫 hv 覆盖边$h'v' \in E(G)$。

定义 57。当且仅当 $\Gamma(h_1)\cap\Gamma(h_2) = \emptyset$或 $\Gamma(v_1) \cap \Gamma(v_2) = \emptyset$ 时，边 h_1v_1 和 h_2v_2 在 G 中是 r-独立的。如果两条边不是 r-独立的，则称它们是 r-相关的。

引理58。两条边在 G 中是 r-独立的，当且仅当不存在一个能覆盖这两条边的 r-守卫$e \in E(G)$。

证明。如果 $h_0v_0 \in E(G)$同时覆盖 h_1v_1 和 h_2v_2，则 $h_0 \in \Gamma(v_1)\cap\Gamma(v_2)$ 且 $v_0 \in \Gamma(h_1)\cap\Gamma(h_2)$。因此，如果 h_1v_1 和 h_2v_2 都被 h_0v_0覆盖，则它们不是 r-独立的。

假设 h_1v_1 和 h_2v_2 不是 r-独立的。若 $v_2 \prec v_1$，则交换 h_1v_1 和h_2v_2。因此，不失一般性，我们可以假设 $v_1 \preceq v_2$。由于 $\Gamma(v_1) \cap \Gamma(v_2) \neq \emptyset$，由引理 53 可知，$\min \Gamma(v_2) \in \Gamma(v_1)$。

由于 $v_2 \in \Gamma(h_2)$ 且 $h_2 \in \Gamma(v_2)$，我们有 $\min \Gamma(v_2) \leq h_2$，且 $\min \Gamma(h_2) \leq v_2$。由引理 54 可知，$e = \min \Gamma(v_2) \min \Gamma(h_2)$ 是 $E(G)$ 中的一条边。

- 若 $h_1 \preceq h_2$：由引理 53 可知，$\min \Gamma(h_2) \in \Gamma(h_1)$。根据前面的推理， e 覆盖h_1v_1，且 e 显然覆盖 h_2v_2。
- 若 $h_2 \prec h_1$：引理 53 意味着 $\min \Gamma(h_1) \in \Gamma(h_2)$。注意，$\min \Gamma(v_2) \leq h_2 \prec h_1$ 以及 $\min \Gamma(h_1) \leq v_1 \prec v_2$。我们有 $h_2, h_1 \in \Gamma(\min \Gamma(h_1))$、$\min \Gamma(v_2)\ h_1 \in \Gamma(v_1)$，以及 $\min \Gamma(v_2)\ h_2 \in \Gamma(v_2)$。现在引理 55 意味着 $h_2 \in \Gamma(v_1)$。由此可知， $h_2v_1 \in E(G)$ 覆盖了 h_1v_1 和 h_2v_2。

□

我们将在算法 1 中逐步构造 r-守卫的 G 覆盖集，每次迭代至多添加或替换一个守卫。由于我们希望被覆盖的边集合具有某种单调性，因此需要对守卫所覆盖的内容施加人为限制。

定义 59。半守卫是顶点的一个有序对 $(h, v) \in G_H \times G_V$，满足 $\min \Gamma(v)$ 和 $\min \Gamma(h)$ 由 G中的一条边连接。顶点 h 和 v 称为半守卫的元素。作为一个守卫，它覆盖由边 $\min \Gamma(v) \min \Gamma(h) \in E(G)$ 所覆盖的边的一个子集：

$$(h, v) \text{ covers } h'v' \in E(G) \iff \begin{cases} h' \preceq h, \\ v' \preceq v, \\ \min \Gamma(h) \in \Gamma(h'), \\ \min \Gamma(v) \in \Gamma(v'). \end{cases}$$

备注60。从技术上讲，我们在证明中并不需要 $v' \preceq v$ 这一要求，因为 G_V 中的元素无论如何都会按 $\prec$ 递减的顺序进行处理。不过，对称定义解释了算法 1设计中的一些选择，因此出于概念和教学方面的原因，我们保留了这一要求。例如，下面的引理为半守卫所覆盖的边集提供了一种简洁的等价表述。

引理 61。设 (h, v) 是一个半守卫，并且 $h'v' \in E(G)$。那么

$$(h,v) \text{ covers } h'v' \in E(G) \iff \begin{cases} h' \preceq h, \\ v' \preceq v, \\ \Gamma(h') \cap \Gamma(h) \neq \emptyset, \\ \Gamma(v') \cap \Gamma(v) \neq \emptyset. \end{cases}$$

证明。由引理 53 可得。 □

定义 62. 若半守卫集合 W 覆盖边 $e \in E(G)$，则称其覆盖 e，其中 $\exists (h, v) \in W$。若半守卫集合 W 覆盖边的子集 $F \in E(G)$，则称其覆盖该子集，当且仅当每条边 $f \in F$ 都被 W 覆盖。

为了证明覆盖 G 的每条边的 r-守卫（或半守卫）集合具有可能的最小基数，只需构造一个基数相同的 r-独立边集。实际上，这就是我们将采用算法 1 和 2 的策略。

引理 63. 若 (h, v) 是一个半守卫，则

$$\min \Gamma\Gamma(h) \leq \min \Gamma(v),$$
$$\min \Gamma\Gamma(v) \leq \min \Gamma(h).$$

证明。若 (h, v) 是一个半守卫，则根据定义，$\min \Gamma(v) \in \Gamma(\min \Gamma(h))$，且 $\min \Gamma(h) \in \Gamma(\min \Gamma(v))$。由推论 45 可得这些不等式。 □

以下引理表明，除显然的必要条件外，只需验证一个简单条件，就足以判定半守卫覆盖一条边。

引理 64. 设 (h, v) 是一个半守卫，并设 $h'v' \in E(G)$ 满足 $v' \preceq v$ 和 $h' \preceq h$。若$h \in \Gamma(v')$ 成立，则 (h, v) 覆盖 $h'v'$。

证明. 若 $h \in \Gamma(v')$，则 v' 是 h 和 h'的公共邻居。由引理 53，$\min \Gamma(h) \in \Gamma(h')$ 也成立。类似地，h 是 v 和 v'的公共邻居，因此 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(v')$。 □

引理 65. 假设 $hv \in E(G)$。则 (h, v) 是一个半守卫，并且 (h, v) 覆盖

$$\{h'v \in E(G) \mid h' \preceq h\}.$$

证明. 注意到 $h \in \Gamma(v)$，因此我们有 $\min \Gamma(v) \leq h$和 $v \in \Gamma(h) \cap \Gamma(\min \Gamma(v))$。由引理 53，我们有 $\min \Gamma(h) \in \Gamma(\min \Gamma(v))$，因此 (h, v) 是一个半守卫。取 $v = v'$后，引理的其余部分由引理 64 得出。 □

6 构造最小覆盖

现在我们可以介绍算法 1，它构造一组半守卫，用于覆盖基于树的二部图 G。

定义 66. 令 $(s_i)_{i=1}^k$ 为 G_V 中元素按 $\prec$ 递减顺序排列所得的序列，即

$$s_k \prec s_{k-1} \prec \cdots \prec s_2 \prec s_1.$$

粗略地说，算法 1 按照以下方式进行：

1. 算法 1 按递减的 $\prec$ 顺序，在 k 轮中“扫描” G_V 的顶点（定义 51）。也就是说，主循环依次访问元素 s_i，其中 i 枚举从 1 到 k的整数。

2. 在每一轮中，$t_i \in \Gamma(s_i)$ 是满足 $t_i s_i$ 未被 W_{i-1} 覆盖的最大 $\prec$（如果不存在这样的 t_i，则定义 $t_i = \emptyset$ 并继续处理 s_{i+1}）。如果当前顶点 $s_i \in G_V$ 与一条尚未覆盖的边 $t_i s_i$ 相接，则算法 1 会尝试修改现有的半守卫（h，v）$\in W_{i-1}$ 以覆盖 $t_i s_i$，见第 9 行。如果不存在合适的（h，v），则将半守卫（t_i，s_i）添加到 W_{i-1} 中，以获得 W_i，见第 11 行。

算法 1：查找覆盖树-
基于树的二部图的最小基数半守卫集合 G

数据：带有 $k = |G_V|$ 的基于树的二部图 G，以及其顶点上的 $\prec$ 顺序
结果：对于 $i = 1$，.....，k 的半守卫集合 W_i

```
1  令 (s_i)_{i=1}^k 为按 ≺ 顺序递减排列的 G_V 元素
2  令 (t_i)_{i=1}^k 为 G_H ∪ {∅} 的一列尚未定义的元素
3  令 (W_i)_{i=1}^k 为 G_H × G_V 的一列尚未定义的子集，令 W_0 = ∅
4  对于 i = 1, ..., n do
5  |  t_i ← max_≺{t ∈ Γ(s_i) | t s_i 未被 W_{i-1}}覆盖        // max_≺ ∅ = ∅
6  |  如果 t_i ≠ ∅，那么
7  |  |  如果 ∃(h, v) ∈ W_{i-1} 使得 h ∈ Γ(s_i)，那么
8  |  |  |  令 (h, v) ∈ W_{i-1} 满足 h ∈ Γ(s_i)，且 h 在 ≺ 阶中最大
9  |  |  |  W_i ← W_{i-1} − (h, v) + (t_i, v)
10 |  |  else
11 |  |  |  W_i ← W_{i-1} + (t_i, s_i)
12 |  |  end
13 |  else
14 |  |  W_i ← W_{i-1}
15 |  end
16 结束
```

算法 1 的具体实现将在第8节中讨论，我们将在该节证明算法 1 可以在二次时间内实现。

对于每个 $i = 1$，.....，k，W_i 和 t_i 都由算法 1 恰好赋值一次，因此可以将它们视为数学变量（而不是将它们理解为随着算法执行而改变其值的变量）。下面给出关于算法 1 的几个简单观察。

观察 67。对于任意 $i = 1$，.....，k，$t_i \neq \emptyset$ 当且仅当 $t_i \in G_H$，当且仅当 $t_i \in \Gamma(s_i)$。

观察68。如果 $t_i \in \Gamma(s_i)$，则 $s_i \in \Gamma(t_i)$，$\min \Gamma(s_i) \preceq t_i$，且 $\min \Gamma(t_i) \preceq s_i$。

观察69。如果 $(h, v) \in W_i \setminus W_{i-1}$，则 $h = t_i$。

观察70。如果 $(h, v) \in W_i$，则 $s_i \preceq v$。

观察71。如果 (h, v)、$(h', v') \in W_i$ 均不相同，则 $v \neq v'$。

引理 72。对于任意 $i = 1$、.....、k，W_i 是一组半守卫。对于任意 $(h, v) \in W_i$，存在 $j \leq i$ 使得 $h = t_j$ 且

$$\min \Gamma(v) \preceq t_j$$
$$\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_j).$$

证明。对 i 进行归纳法。注意，$W_0 = \emptyset$ 在初始化期间设置。

- 如果 $W_i = W_{i-1}$，那么归纳步骤是显然的。
- 若 $W_i = W_{i-1} + (t_i, s_i)$，则根据引理 65，$(t_i, s_i)$ 是半守卫。由于 $t_i \in \Gamma(s_i)$，我们有 $\min \Gamma(s_i) \preceq t_i$。回顾一下，$\prec$ 扩展了 $<$。
- 若 $W_i = W_{i-1} - (h, v) + (t_i, v)$：则 $h \in \Gamma(s_i)$。此外，我们将归纳假设应用于 $(h, v) \in W_{i-1}$。也就是说，存在 $j \leq i-1$，使得 $h = t_j$ 且 $\min \Gamma(v) \preceq t_j$ 且 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_j)$。另外，$t_j \in \Gamma(s_i)$。

  注意，$\min \Gamma(v) \preceq t_j$ 且 $s_i \preceq s_j$。此外，$\min \Gamma(v)\ t_j \in \Gamma(s_j)$ 且 $t_j \in \Gamma(s_i)$。在这种情况下，引理 54 蕴含 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$。
  由此可知，s_i 是 t_i 和 $\min \Gamma(v)$ 的公共邻居。若 $t_i \preceq t_j$，则根据引理 64，$(t_j, v) \in W_{i-1}$ 覆盖 $t_i s_i$，这与假设矛盾。因此必有 $t_j \prec t_i$。根据归纳法，$\min \Gamma(v) \preceq t_j$。由传递性和引理 53，可得

$$\min \Gamma(v) \preceq t_i,$$
$$\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(\min \Gamma(v)),$$

  这证明了(t_i, v)是一个半守卫。归纳假设适用于$(h, v) \in W_i$，因为我们已经证明 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$。

□

引理 73。若 $W_i = W_{i-1} - (h, v) + (t_i, v)$，则 $h \prec t_i$，$s_i \in \Gamma(h)$，$\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(h)$，且 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$。

证明。关系 $h \prec t_i$ 和 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$ 在引理 72 的证明中已明确给出，而算法要求 $s_i \in \Gamma(h)$。由于 $s_i \in \Gamma(t_i)$，引理 53 蕴含 $\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(h)$。

□

注意，半守卫的垂直分量得以保留。

推论 74. 如果 $(h, v) \in W_j$，那么对于任意 $i \geq j$（以及 $i \leq k$），存在 $\exists m \in \mathbb{N}$，使得 $(t_m, v) \in W_i$ 且 $h \preceq t_m$，其中 $j \leq m \leq i$。

由引理 64 可轻易推出，对于任意 $t \in \Gamma(s_j)$，W_j 覆盖 ts_j。

引理 75. 设 $1 \leq j \leq k$ 和 $t \in \Gamma(s_j)$。那么 W_j 覆盖 ts_j。

证明。我们分三种情况讨论。

- 如果 $t_j = \emptyset$，那么 W_{j-1} 覆盖 ts_j。根据算法 1，我们有 $W_j = W_{j-1}$。
- 如果 $t_j \neq \emptyset$ 且 $W_j = W_{j-1} - (h, v) + (t_j, v)$ 且 $t_j \prec t$，那么 $(h, v) \in W_{j-1}$ 不覆盖ts_j（因为根据引理 73，$h \prec t$），但 W_{j-1} 确实覆盖 ts_j（否则 t_j 在 $\prec$次序中就不是极大的）；由此可得，W_j 也覆盖 ts_j;
- 如果 $t_j \neq \emptyset$ 且 $W_j = W_{j-1} - (h, v) + (t_j, v)$ 且 $t \preceq t_j$，那么根据引理 64，(t_j, v) 覆盖ts_j，因为根据观察 67，$t_j \in \Gamma(s_j)$。

因此，我们已经证明 W_j 覆盖任意 $ts_j \in E(G)$。 □

由此可得，如果 $\exists (h, v) \in W_{i-1}$ 使得 $h \in \Gamma(s_i)$，那么 $h \neq t_i$；否则，$t_i s_i$ 就不会被 W_i 覆盖。我们还需要确保，对于任意$i > j$，$ts_j \in E(G)$ 仍被 W_i 覆盖。

引理 76。设 $1 \leq j \leq i \leq k$ 和 $t \in \Gamma(s_j)$。则 W_i 覆盖 ts_j。此外，如果 $j < i$ 且 $W_{i-1} \setminus W_i$ 覆盖 ts_j，那么 $W_i \setminus W_{i-1}$ 也覆盖 ts_j。

证明。我们通过对 i 进行归纳法来证明完整的陈述。引理 75 证明了归纳假设对 $i = j$ 成立。设 $i > j$，并假设（h，v）$\in W_{i-1}$ 覆盖 ts_j。如果（h，v）$\in W_i$，那么归纳步骤是平凡的。

从现在开始，假设 $W_i = W_{i-1} - (h, v) + (t_i, v)$。由于 (h, v) 是一个半守卫，我们有 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(\min \Gamma(h))$。由于 (h, v) 覆盖 ts_j，我们知道 $t \preceq h$，$s_j \preceq v$，并且 $\min \Gamma(h) \in \Gamma(t)$，$\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_j)$。回顾引理 73，并注意到 $\min \Gamma(v)\ h \in \Gamma(s_i)$ 以及 $t \preceq h \prec t_i$。我们将证明 $s_i \in \Gamma(t)$。分两种情况讨论。

- 如果 $t \preceq \min \Gamma(v)$：则我们如下应用引理 54。我们有 $t \preceq \min \Gamma(v)$ 和 $s_i \preceq s_j$。此外，$\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)\ \Gamma(s_j)$ 以及 $t \in \Gamma(s_j)$。因此可得 $t \in \Gamma(s_i)$。
- 如果 $\min \Gamma(v) \preceq t \preceq h$：注意，$\min \Gamma(h) \preceq s_i \preceq s_j$。观察到，引理 55 适用：事实上，$t$、$h \in \Gamma(\min \Gamma(h))$、$\min \Gamma(v)\ h \in \Gamma(s_i)$，以及 $\min \Gamma(v)\ t \in \Gamma(s_j)$。因此，$t \in \Gamma(s_i)$成立。

无论如何，s_i 是 t 和 t_i的公共邻居，因此根据引理 53，我们有 $\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(t)$。由于 $t \prec t_i$，这就证明了(t_i, v)覆盖 ts_j。 □

定理 77。半守卫集 W_k 覆盖 $E(G)$。因此，r-守卫集 s

$$\left\{\min \Gamma(v) \min \Gamma(h) \mid (h, v) \in W_k\right\} \tag{1}$$

也覆盖 $E(G)$。

证明。引理 76 证明了半守卫集 W_k 覆盖 $E(G)$。根据定义 59，半守卫(h, v)所覆盖的任何对象，都被 r-守卫 $\min \Gamma(v)\ \min \Gamma(h)$覆盖。 □

7 构造极大独立集

在本节中，我们将证明，算法 2 选择了一个集合 I_1，其中的边两两 r-独立（定义 57），且这些边属于基于树的二部图 G，满足 $|I_1| = |W_k|$。

Lemma 78. 设 $1 \le j \le i \le k$。如果 $t_j \in G_H$，则对于任意 $s \in \Gamma(t_j$，W_i 覆盖 $t_j s \in E(G)$。).

证明。如果 $s_j \prec s$，则根据引理75和引理76，W_i 覆盖 $t_j s$。

以下设 $s \preceq s_j$。注意，$t_j \in \Gamma(s) \cap \Gamma(s_j)$。根据引理 53，我们得到 $\min \Gamma(s_j) \in \Gamma(s)$，因此（$t_j$，$s_j$）$\in W_j$覆盖 $t_j s$。如果 $i = j$，则证明完毕。

另外设 $i > j$。根据推论 74，存在某个（t_m，s_j）$\in W_i$，其中 $j \le m \le i$。根据引理75和引理76，（t_m，s_j）覆盖 $t_j s_j$。因此，$\min \Gamma(t_m) \in \Gamma(t_m)$ 且 $t_j \preceq t_m$。此外，我们此前已经证明 $\min \Gamma(s_j) \in \Gamma(s)$，因此（$t_m$，$s_j$）覆盖 $t_j s$。 □

推论 79. 如果 $j < i$和 t_j、$t_i \in G_H$，则 $t_j \ne t_i$。

证明. 根据引理 78，W_{i-1} 覆盖任意 $s \in \Gamma(t_j)$ 的 $t_j s$。如果边 $t_j s_i \in E(G)$ 存在，则代入 $s = s_i$ 意味着 $t_j s_i$ 也被 W_{i-1}覆盖。 □

推论80. 如果（t_m，s_j）$\in W_i$，则 $1 \le j \le m \le i$。

证明. 根据推论 79，通过检查算法 1即可轻易得到该结论。 □

引理81. 如果（h，v）、（h'，v'）$\in W_i$互不相同，则 $h \ne h'$和 $v \ne v'$。

证明。根据观察71，我们有 $v \ne v'$。存在两个不同的整数 j、$m \le i$，使得（h，v）$\in W_j \setminus W_{j-1}$，且（$h'$，$v'$）$\in W_m \setminus W_{m-1}$。由观察69可知，$h = t_j$且$h' = t_m$，因此 $h \ne h'$。 □

算法 2：寻找 G 的最大规模 r-独立边集

输入：基于树的二部图 G、其顶点上的 $\prec$序，以及序列 $(W_i)_{i=1}^k$ 以及 $(t_i)_{i=1}^k$ 由算法 1 生成

结果：对于每个 $i = 1, \cdots, k$，一组两两 r-独立的 G 边 I_i

```
1  令 I_{k+1} = ∅;
2  对于 i = k, ..., 1 do
3      如果 t_i ≠ ∅ 和 t_i s_i 与 I_{i+1} 中的每条边都 r-独立，则
4          如果 W_i = W_{i-1} + (t_i, s_i)，则
5              令 I_i ← I_{i+1} + t_i s_i;
6          否则，如果 W_i = W_{i-1} − (h, v) + (t_i, v)，则
7              如果 ∃t_n s_n ∈ I_{i+1} 使得 (h, v) 覆盖 t_n s_n，则
8                  令 I_i ← I_{i+1} + t_i s_i;
9              否则，如果 ∃t_n s_n ∈ I_{i+1} 使得 h ∈ Γ(s_n) 且 h ≺ t_n，则
10                 令 I_i ← I_{i+1} + t_i s_i;
11             else
12                 令 I_i ← I_{i+1};
13             end
14         end
15     else
16         令 I_i ← I_{i+1};
17     end
18 结束
19 返回 I_1;
```

接下来，我们证明算法 2 会贪心地选择 r-独立的、按递减顺序排列的 G 的边。注意，索引 i 在第 2 行的 for 循环中按递减顺序枚举。

定义 82. 令 $(I_i)_{i=1}^{k+1}$ 为 $E(G)$ 的子集序列，由算法 2 定义。

注意，$I_{i+1} \subseteq I_i$，因此

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_k \supseteq I_{k+1} = \emptyset. \tag{2}$$

引理 83. 对于任意 $i = 1, \ldots, k$，我们有 $I_i \subseteq \{t_m s_m \mid i \leq m \leq k,\ t_m \in G_H\}$。

证明。显然，因为 $I_i \setminus I_{i+1} \subseteq \{t_i s_i\}$。 □

L引理 84。对于任意 $i = 1$、...、$k + 1$，I_i 中的元素两两 r-独立。

证明。对递减的 i 进行归纳。对于 $I_{k+1} = \emptyset$，该陈述显然成立。根据第 3 行，只有当 $t_i s_i$ 与 I_{i+1} 中的每条边都 r- 独立时，$t_i s_i$ 才能成为 I_i 的一个元素。 □

下一个引理是 I_1 基数下界的基础。为使本节主要论证的阐述简洁，引理 85 的证明推迟至附录 B。

引理 85。对于任意 $i = 1$、...、k 以及 $(h, v) \in W_i$，以下至少有一项成立：

1. $\exists t_n s_n \in I_{i+1}$ 使得（h，v）覆盖 $t_n s_n$；或 2. $\exists t_n s_n \in I_{i+1}$ 使得 $h \in \Gamma$（s_n）以及 $h \prec t_n$；或 3. 存在 $q \in \mathbb{N}$ 使得 $1 \leq q \leq i$、$t_q s_q \in I_1$，且（t_q，v）$\in W_q$。

引理 86。 I_1 和 W_k 的基数满足 $|I_1| \geq |W_k|$。

证明。设 $i = k$，并注意到在这个特殊情形下，引理 85 表述如下：对于任意的 $(h, v) \in W_k$，存在 $q_{(h,v)}$，使得 $t_{q_{(h,v)}} s_{q_{(h,v)}} \in I_1$ 且 $(t_{q_{(h,v)}}, v) \in W_{q_{(h,v)}}$。

根据推论 79，只需证明对于任意两个 (h, v)、$(h', v') \in W_k$，都有 $q_{(h,v)} \neq q_{(h',v')}$。反设 $q = q_{(h,v)} = q_{(h',v')}$。于是 $t_q = h = h'$，且 (t_q, v)、$(t_q, v') \in W_q$。根据引理81，必有 $(h, v) = (h', v')$，这就产生了矛盾。

□

换言之，以下极小极大定理成立。

定理 87。覆盖 G 所需的最少 r-守卫数量等于 G 中两两 r-独立边的最大数量。特别地，W_k 是覆盖 G 的最小基数半守卫集合，而 I_1 是 G 中两两 r-独立边的最大规模集合，使得 $|W_k| = |I_1|$。

证明。根据引理58，覆盖 G 所需的最少 r-守卫数量至少等于 G 中 r-独立边的最大数量。回顾定理 77 和引理 84。(1) 中的 r-守卫集合覆盖 $E(G)$，且 I_1 的元素两两 r-独立。因此，我们必须有 $|I_1| \leq |W_k|$。

最后，根据引理 86，等式 $|I_1| = |W_k|$ 必须成立。换言之，I_1 和 W_k 是最小-最大等式的见证。

□

8 以二次时间构造覆盖

设 $n = |G_H| + |G_V|$ 为 G 的顶点数。为了高效处理图 G，我们无需为每个 $s \in G_H \cup G_V$ 存储完整的邻域 $\Gamma(s)$。如果已知 R-树 T_H 和 T_V，那么只需为每个 $s \in G_H \cup G_V$ 存储由 $\Gamma(s)$ 在相应的 R-树中诱导的路径的端点 $\partial\Gamma(s)$ 即可。

定义 88（基于树的二部图的稀疏表示）。基于树的二部图 G 的稀疏表示是三元组 $(T_H, T_V, \partial\Gamma)$，由其两棵 R-树和函数 $\partial\Gamma : s \mapsto \partial\Gamma(s)$ 构成，该函数将 $G_H \cup G_V$ 映射到其至多含两个元素的子集。

请注意，即使 G 有 $\Omega(n^2)$ 条边，两个 R-树和 $\partial\Gamma$ 仍可用 $\mathcal{O}(n)$ 空间存储。

下面简要说明，计算简单正交多边形 P的栅格图 G 需要线性时间。

定理89（Gy″ori、Hoffmann、Kriegel 和 Shermer [5]）。对于给定的任意简单正交多边形 P，其 R-树 T_H 和 T_V 可以在线性时间内确定。

引理90。简单正交多边形 P的栅格图 G 的稀疏表示可以在线性时间内计算得到。

证明概要。研究定理89的证明后，该引理显然成立。在构造 T_H 和 T_V的过程中，可以将 P 的线段链接到包含该线段的切片。对于任意 $h \in G_H$，取包含矩形 h的垂直边的 P 中的一条一一对应的垂直线段。显然，包含这些垂直线段的一个或两个垂直切片构成集合 $\partial\Gamma(h)$。对于任意 $v \in G_V$，可以采用类似的方法。

□

关于完整的技术描述，勤奋的读者可参阅 [12, 第4章和附录 B]。从现在起，我们回到一般的基于树的二部图 G。

定理91（Gabow 和 Tarjan [3]）。可以在 $\mathcal{O}(n + m)$ 时间内确定一棵具有 n 个顶点的树上 m 对顶点的最近公共祖先。

定义 92. 给定 $S \subseteq G_H$ 或 $S \subseteq G_V$，令 NCA(S) 分别表示 T_H 或 T_V 中 S 的最近公共祖先。

对于基于树的二分图的稀疏表示，高效计算离不开 NCA 查询。例如，下面的观察表明，只需进行一次 NCA 查询，就足以判断 G 的两个顶点是否小于或等于彼此。

观察 93. 给定 a、$b \in G_H$ 或 a、$b \in G_V$，当且仅当 NCA(a, b) $= a$ 时，有 $a \leq b$。

引理 94. 给定 $s \in G_H \cup G_V$，有 $\min \Gamma(s) = \text{NCA}(\partial\Gamma(s))$。

证明。显然，因为 $\Gamma(s)$ 在相应的 R-树中诱导出一条路径。 □

回顾定义 26。下面的引理表明，可以高效地计算G 中两个邻域的交集。

引理 95. 给定 s_{11}、s_{12}、s_{21}、$s_{22} \in G_H$ 或 s_{11}、s_{12}、s_{21}、$s_{22} \in G_V$，算法 3 通过 7 次 NCA 查询确定集合 $\partial([s_{11}, s_{12}] \cap [s_{21}, s_{22}])$。

证明。注意，在适当的 R-树中，$U = [s_{11}, s_{12}] \cap [s_{21}, s_{22}]$ 也诱导出一条路径（或一个空图）。根据定义，$\partial U \subseteq [s_{11}, s_{12}] \cap [s_{21}, s_{22}]$，因此 ∂U 中的元素是 $\{s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$某个子集的公共祖先。事实上，$\partial U$ 中的元素是 $\{s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$某些子集的最近公共祖先，因为更近的公共祖先仍必须同时包含在 $[s_{11}, s_{12}]$ 和 $[s_{21}, s_{22}]$中。通过简单但略显繁琐的分类讨论即可完成证明。 □

引理 95 还意味着可以通过 7 次 NCA 查询来检查 $st \in E(G)$，因为当且仅当 $\{s\} \cap \Gamma(t) \neq \emptyset$ 时它成立，而这等价于 $\partial([s, s] \cap \Gamma(t)) \neq \emptyset$。特别是，这意味着也可以高效地检查 r-可见性（定义 11）。

算法 3：计算 $\partial\big([s_{11}, s_{12}] \cap [s_{21}, s_{22}]\big)$，即确定
从各自端点出发的两条路径在 R-树中的交集的端点

```
s_1 ← 最近公共祖先(s_11, s_12);
s_2 ← 最近公共祖先(s_21, s_22);
s_0 ← 最近公共祖先(s_1, s_2);
如果 s_0 ∈ {s_1, s_2} 则
    S ← {最近公共祖先(s_1i, s_2j) | i, j ∈ {1, 2}} \ {s_0};
    如果 s_1 = s_2 且 |S| ≤ 1，那么
        return S ∪ {s_0};                    // s_0 = s_1 = s_2 在交集中
    else
        return S;
    end
end
return ∅;                                    // 这两条路径彼此不相交
```

引理 96. 可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内确定 G_H 和 G_V 上与 $<_b$ 兼容的一个线性序 $\prec$（参见定义 51）。

证明。回顾定义49和定义51以及引理94。根据定理91和引理94，对于每个 $s \in G_H \cup G_V$，都可以同时在 $\mathcal{O}(n)$时间内计算$\min \Gamma(s)$。随后，可以通过在 R-树上进行简单的广度优先搜索来确定线性序。

□

现在很容易看出，可以在 $\mathcal{O}(n^3)$时间内模拟算法 1。所有可能的最近公共祖先查询构成的集合的基数为 $\mathcal{O}(n^2)$，可以在运行算法 1 之前预先计算。 $\Gamma(s_i)$中的元素可以很容易地按 $\prec$ 序列出。剩下的只是描述如何针对每个 $t \in \Gamma(s_i)$检查是否存在某个$(h, v) \in W_{i-1}$ 覆盖 ts_i 。回顾引理 61。计算出线性序后，检查 $t \preceq h$ 和 $s_i \preceq v$ 是否成立是显然的。根据引理 95，判定$\Gamma(h) \cap \Gamma(t)$和 $\Gamma(h) \cap \Gamma(t)$是否均非空，需要 $\mathcal{O}(1)$次最近公共祖先查询。如果 $t_i \neq \emptyset$，则很容易在 $\mathcal{O}(n)$中找到每个满足 $h \in \Gamma(s_i)$和 $h \prec t_i$的$(h, v) \in W_{i-1}$ 。

这种朴素方法可以改进如下。

定理 97。算法 1 可以在 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间内模拟（如果基于树的二部图 G采用稀疏表示编码）。

证明。为了达到 $\mathcal{O}(n^2)$ 的运行时间，只需通过一种计算 t_i 在 $\mathcal{O}(n)$ 中的方法来补充上述论证。回顾一下，在预处理阶段，可以在 $\mathcal{O}(n^2)$ 中计算出所有可能的 NCA 查询集合。对于每个 $t \in \Gamma(s_i)$，我们将计算覆盖 ts_i 的半守卫（h， v）数量。

对于每个 $h \in G_H$，令

$$C_h := \{t \in \Gamma(\min \Gamma(h)) \mid t \preceq h\}.$$

注意， C_h 在 T_H 中诱导出一条路径（因为 $\prec$ 与 $<$兼容），并且对于每个 $h \in G_H$， ∂C_h 可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内确定。

假设（h， v）$\in W_{i-1}$。定义

$$C_{(h,v)}(s_i) := \{t \in \Gamma(s_i) \mid (h, v) \text{ covers } ts_i\}.$$

回顾定义 59。如果某个 (h, v) 覆盖一个 $ts_i \in E(G)$，那么 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$。因此，如果 $\min \Gamma(v) \notin \Gamma(s_i)$，那么 $C_{(h,v)}(s_i) = \emptyset$。然而，如果 $\min\ \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$，那么

$$\begin{aligned} C_{(h,v)}(s_i) &= \{t \in \Gamma(s_i) \cap \Gamma(\min \Gamma(h)) \mid t \preceq h\} = \\ &= \Gamma(s_i) \cap \{t \in \Gamma(\min \Gamma(h)) \mid t \preceq h\} = \\ &= \Gamma(s_i) \cap C_h. \end{aligned}$$

对于每个 $s_i \in G_V$，可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内收集满足 $\min \Gamma(v) \in \Gamma(s_i)$ 的半守卫 $(h, v) \in W_{i-1}$。对于此类半守卫，根据引理 95，我们可以通过常数次 NCA 查询，根据 $\partial\Gamma(s_i)$ 和 ∂C_h 确定 $\partial C_{(h,v)}(s_i)$。由于 $|W_i| \leq k$，确定每个满足 $(h, v) \in W_i$ 的 $C_{(h,v)}(s_i)$ 至多需要 $\mathcal{O}(n)$ 次查询。

通过将 $\Gamma(s_i)$ 作为 T_H 中的一条路径进行简单遍历（从 $\partial\Gamma(s_i)$ 的元素开始并在其元素处结束），可以计算满足 $t \in C_{(h,v)}(s_i)$ 的半守卫 (h, v) 的数量。具体而言，每当首次遇到 $\partial C_{(h,v)}(s_i)$ 的元素时，就将计数器加一；当遍历到 $\partial C_{(h,v)}(s_i)$ 的另一个元素时，则将计数器减一。

如果计数器在任何 $t \in \Gamma(s_i)$ 处都没有变为零，那么 $t_i = \emptyset$。否则， t_i 就是按 $\prec$ 顺序计数器变为零的位置中最大的$t \in \Gamma(s_i)$。 □

如引言中所述，对于第3类（和第2类）简单正交多边形，已有对数线性（和线性）算法。对于第4类多边形是否也存在这种低复杂度算法，仍是一个开放问题。

猜想98. 算法 1 可以在 $\mathcal{O}(n\log\ n)$ 时间内模拟（如果基于树的二部图 G采用稀疏表示编码）。

9 计算 r-星的顶点列表

我们是　可以证明，由一个 r-守卫覆盖的 r-星可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内确定　.

定理 8 的证明。回顾引理 17。根据引理90，简单正交多边形 P 的栅格图 G 的稀疏表示（T_H、T_V、$\partial\Gamma$）可以在线性时间内确定。随后，算法 1 可以在 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间内报告覆盖 r-守卫的最小基数集合。

设 $(h, v) \in W_k$ 是一个固定的半守卫；由 r-守卫 $\min\ \Gamma(v) \min\ \Gamma(h) \in E(G)$ 覆盖的边集合包含 h, v 在 G 中覆盖的边。根据定义 56，由 $\min\ \Gamma(v) \min\ \Gamma(h)$ 覆盖的边集合等于

$$\{h'v' \in E(G) \mid h'v' \boxdot \min\Gamma(v) \min\Gamma(h)\} = \bigcup_{\substack{h'v' \in E(G) \\ h' \in \Gamma(\min\Gamma(h)) \\ v' \in \Gamma(\min\Gamma(v))}} \{h'v'\} = \bigcup_{\substack{v' \in \Gamma(\min\Gamma(v)) \\ h' \in \Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h))}} \{h'v'\}.$$

在正交多边形中，这些边的像素所覆盖的 r-星等于

$$\{h' \cap v' \mid h'v' \in E(G),\ h'v' \boxdot \min\Gamma(v) \min\Gamma(h)\} = \bigcup_{\substack{v' \in \Gamma(\min\Gamma(v)) \\ h' \in \Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h))}} h' \cap v'$$

我们取上一个方程两侧表达式的边界。由于该区域是单连通的，边界是闭合且连通的。应用两次引理 20，可得

$$\begin{aligned}
\partial\{h' \cap v' \mid h'v' \in E(G),\ h'v' \boxdot \min\Gamma(v) \min\Gamma(h)\} &= \mathrm{cl}\left(\bigtriangleup_{\substack{v' \in \Gamma(\min\Gamma(v)) \\ h' \in \Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h))}} \partial(h' \cap v')\right) \\
&= \mathrm{cl}\left(\bigtriangleup_{v' \in \Gamma(\min\Gamma(v))} \left(\bigtriangleup_{h' \in \Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h))} \partial(h' \cap v')\right)\right) \\
&= \mathrm{cl}\left(\bigtriangleup_{v' \in \Gamma(\min\Gamma(v))} \partial\left(\bigcup_{h' \in \Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h))} h' \cap v'\right)\right). \qquad (3)
\end{aligned}$$

注意，根据引理 20，闭包算子只会向右侧表达式添加有限个点。记

$$R_h(v') := \bigcup_{h' \in \Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h))} h' \cap v'.$$

有关 $R_h(v')$ 的可视化，请参见图 5。根据引理 21，我们可以写成

$$\begin{aligned}
R_h(v') &= \mathrm{convexHull}\left(\bigcup_{h' \in \partial(\Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h)))} h' \cap v'\right) \\
R_h(v') &= \mathrm{convexHull}\left(\bigcup_{h' \in \partial(\Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h)))} \partial(h' \cap v')\right) \\
\partial R_h(v') &= \partial\mathrm{convexHull}\left(\bigcup_{h' \in \partial(\Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h)))} \partial(h' \cap v')\right). \qquad (4)
\end{aligned}$$

根据引理 95，$\partial(\Gamma(v') \cap \Gamma(\min\Gamma(h)))$ 可通过 $\mathcal{O}(1)$ 次 NCA 查询计算得出。对于固定的 v'，边界 $\partial R_h(v')$ 可在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内计算得出，因为它很容易由两个像素的边界推导出来。由于 v' 遍历 $\Gamma(\min\Gamma(v))$，总共只需 $\mathcal{O}(n)$ 次 NCA 查询即可确定每个 $\partial R_h(v')$。

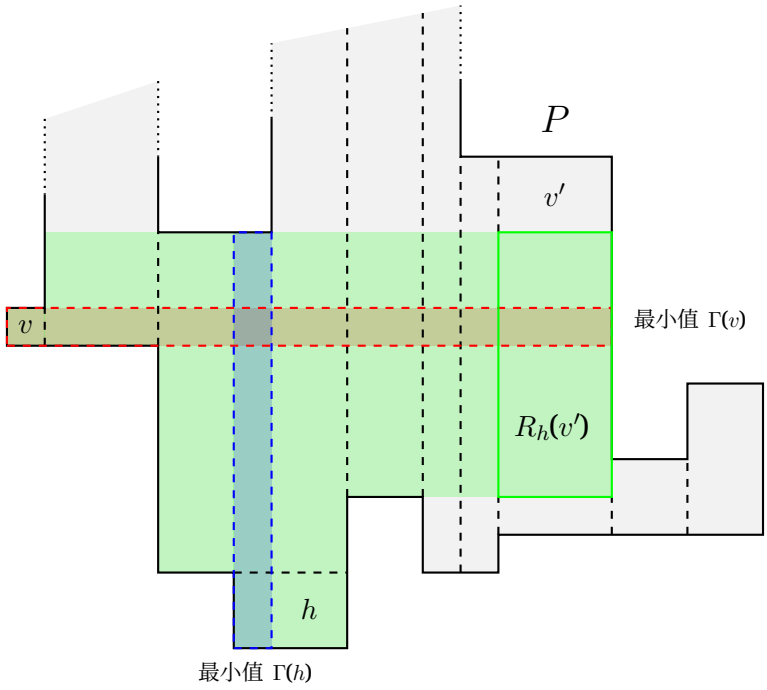

图 5：简单正交多边形 P 用实线线段绘制，其围成的区域填充为灰色。切片 $\min \Gamma(v)$ 和 $\min\ \Gamma(h)$ 分别填充为红色和蓝色，其边界则用虚线勾勒。其余垂直切割用虚线绘制，大多数水平切割未显示，以免画面杂乱。边 $\min\ \Gamma(v)$ $\min\ \Gamma(h)$ 覆盖的边上的像素染成了绿色。 v' 中被覆盖的部分用粗绿色线条勾勒，以突出显示 $R_h(v')$的边界。

接着式 (3)， r-星的边界为

$$\partial\{h' \cap v' \mid h'v' \in E(G),\ h'v' \boxdot \min \Gamma(v) \min \Gamma(h)\} = \mathrm{cl}\left(\Delta_{v' \in \Gamma(\min \Gamma(v))} \partial R_h(v')\right).$$

设 v'、$v'' \in$ Γ(最小值 $\Gamma(v)$) 是两个任意元素。那么，当且仅当 $v'v'' \in E(T_V)$ 时， $R_h(v')$ 与 $R_h(v'')$ 相交（根据定义）。 $R_h(v')$ 和 $R_h(v'')$ 的边界相交于一条线段或空集。由于 Γ(最小值 $\Gamma(v)$) 是 T_V 中一条路径的顶点集，因此，对于每个 $(h, v) \in W_k$，界定该 r-星的正交多边形都可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内构造出来。 □

参考文献

[1] Va˘sek Chv´atal。《平面几何中的一个组合定理》。载于：组合理论杂志 B 辑 18（1975），第 39–41页。 DOI：10.1016/0095-8956(75)90061-1。[2] Joseph Culberson 和 Robert A. Reckhow。《无孔洞正交多边形的正交凸覆盖》。载于：计算机与系统科学杂志 39.2（1989年10月1日），第 166–204页。ISSN：0022-0000。 DOI：10.1016/0022-0000(89)90043-3。[3] Harold N. Gabow 和 Robert Endre Tarjan。《一种特殊不相交集并问题的线性时间算法》。载于：计算机与系统科学杂志 30.2（1985），第209–221页。 ISSN：0022-0000。 DOI：10.1016/0022-0000(85)90014-5。[4] Ervin Gy˝ori。《直线型美术馆定理的一个简短证明》。载于：SIAM 代数离散方法杂志 7.3（1986），第452–454页。 ISSN：0196-5212。 DOI：10.1137/0607051。[5] Ervin Gy˝ori、Frank Hoffmann、Klaus Kriegel 和 Thomas Shermer。《直线型多边形的广义守卫与划分》。载于：计算几何 6.1（1996），第21–44页。 ISSN：0925-7721。DOI：10.1016/0925-7721(96)00014-4。

[6] Ervin Gy˝ori 和 Tam´as R´obert Mezei。《移动守卫与点守卫》。载于：离散计算几何 61.2（2019年3月1日），第421–451页。 ISSN：1432-0444。 DOI：10.1007/s00454-018-9996-x。[7] J. Kahn、M. Klawe 和 D. Kleitman。《传统画廊所需守卫更少》。载于：SIAM 代数离散方法杂志 4.2（1983年6月1日），第194–206页。 ISSN：0196-5212。 DOI：10.1137/0604020。[8] Matthew J. Katz 和 Gila Morgenstern。《用滑动摄像机守卫正交艺术画廊》。载于：Internat. J. Comput. Geom. Appl. 21.2（2011），第241–250页。 ISSN：0218-1959。 DOI：10.1142/S0218195911003639。[9] J M Keil。《水平凸正交多边形的最小覆盖》。载于：第二届计算几何年度研讨会论文集。SCG '86。美国纽约州纽约市：计算机协会，1986年8月1日，第43–51页。 ISBN：978-0-89791-194-8。 DOI：10.1145/10515.10520。[10] Adrian Kosowski、Micha l Ma lafiejski 和 Pawe l Zyli´nski。《网格中的协作移动守卫》。载于：计算几何 37.2（2007），第59–71页。 ISSN：0925-7721。 DOI：10.1016/j.comgeo.2006.11.002。[11] Andrzej Lingas、Agnieszka Wasylewicz 和 Pawe l Zyli´nski。《r星覆盖问题的线性时间3-近似算法》。载于：Internat. J. Comput. Geom. Appl. 22.2（2012），第103–141页。 ISSN：0218-1959。 DOI：10.1142/S021819591250001X。[12] Tam´as R´obert Mezei。《若干艺术画廊与终端配对问题的极值解》。博士论文。匈牙利布达佩斯：中欧大学，2017年8月29日。arXiv：1708.08691。[13] Tam´as R´obert Mezei。《简单正交艺术画廊中 r星形守卫的线性时间8/3-近似》。ICGT 2018。法国里昂，2018年3月25日。[14] R. Motwani、A. Raghunathan 和 H. Saran。《用星形多边形覆盖正交多边形：完美图方法》。载于：第四届计算几何年度研讨会论文集。SCG '88。美国纽约州纽约市：计算机协会，1988年1月6日，第211–223页。 ISBN：978-0-89791-270-9。 DOI：10.1145/73393.73415。[15] Joseph O'Rourke。《直线型美术馆定理的另一种证明》。载于：J Geom 21.1（1983年12月1日），第118–130页。 ISSN：1420-8997。 DOI：10.1007/BF01918136。[16] Leonidas Palios 和 Petros Tzimas。《3类正交多边形的最小r星覆盖》。载于：组合算法。Kratochv´ıl Jan、Mirka Miller 和 Dalibor Froncek 编。《计算机科学讲义》。尚：施普林格国际出版公司，2015年，第286–297页。 ISBN：978-3-319-19315-1。 DOI：10.1007/978-3-319-19315-1_25。[17] Dietmar Schuchardt 和 Hans-Dietrich Hecker。《正交多边形的两个NP难艺术画廊问题》。载于：Math. Logic Quart. 41.2（1995），第261–267页。 ISSN：0942-5616。 DOI：10.1002/malq.19950410212。[18] Chris Worman 和 J. Mark Keil。《多边形分解与正交艺术画廊问题》。载于：Internat. J. Comput. Geom. Appl. 17.2（2007），第105–138页。 ISSN：0218-1959。 DOI：10.1142/S0218195907002264。

A 第4节中推迟的证明

引理54的证明。我们分三种情况讨论。

- 若 h_1 和 h_2 可比较：由于 $h_1 \preceq h_2$，我们必有 $h_1 \leq h_2$。由于 h_2 是 v_1 和 v_2的公共邻居，根据引理 52，我们有

$$\min \Gamma(v_1) \leq \min \Gamma(v_2) \leq h_1 \leq h_2.$$

由于 h_2、min $\Gamma(v_1) \in \Gamma(v_1)$ 都成立，因此我们有

$$h_1 \in [\min \Gamma(v_1), h_2] \subseteq \Gamma(v_1),$$

这正是我们想要证明的结论。

• 如果 h_1 和 h_2 不可比较，且 $\min \Gamma(h_2) = v_{\text{根}}$：我们有 $v_1, v_2 \in \Gamma(h_2)$。根据引理 39，我们知道 v_1 和 v_2 可比较。由于 $v_1 \preceq v_2$，因此$v_1 \leq v_2$。此外，$v_1 \in \Gamma(h_2)$意味着

$$\min \Gamma(h_2) \leq v_1 \leq v_2.$$

我们假设 $v_2 \in \Gamma(h_1)$。由于 v_2 是 h_1 和 h_2 的公共邻居，引理 53 推出 $\min \Gamma(h_2) \in \Gamma(h_1)$。因此

$$v_1 \in [\min \Gamma(h_2), v_2] \subseteq \Gamma(h_1),$$

这意味着 $h_1 \in \Gamma(v_1)$。

• 如果 h_1 和 h_2 不可比较，且 $\min \Gamma(h_2) \neq v_{\text{根}}$：由于 v_2 是 h_1 和 h_2 的公共邻居，引理 53 推出 $\min \Gamma(h_2) \in \Gamma(h_1)$。注意，$h_1$ 和 h_2 都是 v_2 与 $\min \Gamma(h_2)$ 的公共邻居。由于 v_2 和 $\min \Gamma(h_2)$ 的邻域在 T_H 中分别诱导出路径，根据引理 40，$\min \Gamma(v_2)$ 和 $\min \Gamma\Gamma(h_2)$ 可比较。然而，根据引理 41，它们之间不可能存在严格不等式，因此

$$\min \Gamma\Gamma(h_2) = \min \Gamma(v_2) \leq h_1, h_2.$$

由于 h_2 是 v_1 和 v_2 的公共邻居，根据引理 53，我们有 $\min \Gamma(v_1) \leq \min \Gamma(v_2)$。此外，$h_2 \in \Gamma(v_1)$ 等价于 $v_1 \in \Gamma(h_2)$，这意味着 $\min \Gamma(h_2) \leq v_1$。由此可得

$$\min \Gamma\Gamma(h_2) \leq \min \Gamma(v_1) \leq \min \Gamma(v_2),$$

因此我们必须有等式：

$$\min \Gamma(v_1) = \min \Gamma(v_2) = \min \Gamma\Gamma(h_2).$$

由此可得 $v_1, v_2 \in \Gamma(\min \Gamma\Gamma(h_2))$。

注意，$v_1, v_2 \in \Gamma(h_2)$ 意味着 $\min \Gamma(h_2) \leq v_1, v_2$。由于 $\min \Gamma(h_2) \neq v_{\text{root}}$，根据引理 47，我们有

$$\min \Gamma\Gamma\Gamma(h_2) < \min \Gamma(h_2) \leq v_1, v_2.$$

我们将引理 48 应用于 $s_0 = \min \Gamma\Gamma(h_2)$。由此可得，$v_1$ 和 v_2 是可比较的，因此

$$\min \Gamma(h_2) \leq v_1 \leq v_2.$$

与前一种情况一样，由此可得 $h_1 \in \Gamma(v_1)$。

□

引理 55 的证明。注意，$h_1, h_2 \in \Gamma(v_3)$ 且 $h_2 \in \Gamma(v_1)$；根据引理 54，可得 $h_1 \in \Gamma(v_1)$。换言之，$h_1, h_2, h_3 \in \Gamma(v_1)$ 且 $v_1, v_2, v_3 \in \Gamma(h_1)$。根据引理 53，我们有

$$\min \Gamma(h_1) \leq \min \Gamma(h_2) \leq \min \Gamma(h_3),\ \min \Gamma(v_1) \leq \min \Gamma(v_2) \leq \min \Gamma(v_3).$$

注意，$\min \Gamma(h_2) \leq v_3$ 和 $\min \Gamma(h_3) \leq v_2$。此外，$\min \Gamma(h_2)$、$\min \Gamma(h_3)$ v_2、$v_3 \in \Gamma(h_1)$。类似地，$\min \Gamma(v_2) \leq h_3$ 和 $\min \Gamma(v_3) \leq h_2$。

• 如果 v_2 和 v_3 可比较：因为 $v_2 \preceq v_3$，我们有 $v_2 \leq v_3$。

如果 v_1 与 v_2 可比较，则 $v_1 \leq v_2 \leq v_3$。最后一个不等式意味着 $v_2 \in [v_1, v_3] \subseteq \Gamma(h_2)$。

假设 v_1 与 v_2 不可比较。那么，根据推论 42，有 $\min \Gamma(h_1) = \min \Gamma(h_2)$。由于 $v_2 \in \Gamma(h_1)$，我们有

$$\min \Gamma(h_1) \leq v_2 \leq v_3.$$

由此可得

$$v_2 \in [\min \Gamma(h_1), v_3] = [\min \Gamma(h_2), v_3] \subseteq \Gamma(h_2),$$

这意味着 $h_2 \in \Gamma(v_2)$。

- 如果 h_2 和 h_3 可比较，那么根据对称性，前面的推理同样成立，因此可以得出 $h_2 \in \Gamma(v_2)$，这正是我们想要的结果。

从现在起，假设 h_2, h_3 不可比较，且 v_2, v_3 也不可比较。注意，推论 42 意味着 $\min \Gamma(h_1) = \min \Gamma(h_2)$，且 $\min \Gamma(v_1) = \min \Gamma(v_2)$。由此可得 $h_2 \in \min \Gamma(h_1)$。

由于 $h_1 \in \Gamma(v_1)$ 和 $v_1 \in \Gamma(h_2)$，我们还有 $\min \Gamma(h_1) \preceq v_1$，且 $\min \Gamma(v_1) \preceq h_2$。由于 $v_1 \in \Gamma(\min \Gamma(v_1))$，且 $h_1 \in \Gamma(\min \Gamma(h_1))$，引理 54 意味着 $\min \Gamma(v_1) \in \Gamma(\min \Gamma(h_1))$。此外，根据推论 46，$\min \Gamma\Gamma(h_1) \preceq \min \Gamma(v_1)$。

总而言之，$h_1, h_2, \min \Gamma(v_1) \in \Gamma(\min \Gamma(h_1))$。由于 $h_2, h_3 \in \Gamma(v_1)$，我们有

$$\min \Gamma\Gamma(h_1) \preceq \min \Gamma(v_1) \preceq h_2, h_3.$$

现在，引理 48 表明第一个不等式不能是严格不等式，因此

$$\min \Gamma\Gamma(h_1) = \min \Gamma(v_1).$$

根据对称性，我们也可以得到

$$\min \Gamma\Gamma(v_1) = \min \Gamma(h_1).$$

将两个方程合并，我们得到

$$\min \Gamma(h_1) = \min \Gamma\Gamma(v_1) = \min \Gamma(\min \Gamma(v_1)) = \min \Gamma(\min \Gamma\Gamma(h_1)) = \min \Gamma\Gamma\Gamma(h_1).$$

根据引理 47，这只有在 $\min \Gamma(h_1) = v_{\text{root}}$ 时才有可能。于是引理 39 表明，$v_2, v_3 \in \Gamma(h_1)$ 两两可比较，这与结论矛盾。 □

B 第 7 节中延后的证明

下面的论证是一个相当复杂的归纳证明。算法 1 和 2 的主循环分别按 i 递增和递减运行，很容易因此迷失思路。

引理 85 的证明。对递增的 i 进行归纳。我们区分四种主要情况。前面三种情况相对容易处理，而最后一种情况则会引出更为复杂的分析，其中包含若干层嵌套的子情况。

情况 1：$\boldsymbol{W_i = W_{i-1}}$。于是 $t_i = \emptyset$，因此 $I_i = I_{i+1}$，结论由归纳法得出。

情况 2：$\boldsymbol{W_i = W_{i-1} + (t_i, s_i)}$。注意，这正是 $i = 1$ 的情况。我们有两种子情况。

- 如果 $\exists t_n s_n \in I_{i+1}$，也就是说 r 依赖于 $t_i s_i$：根据算法 2，我们有 $I_{i+1} = I_i$。根据引理 83，我们有 $n > i$，因此 $s_n \prec s_i$。

  – 若 $t_n \preceq t_i$：则根据引理 61，(t_i, s_i) 覆盖 $t_n s_n$。– 若 $t_i \prec t_n$：则根据 r-依赖性，$\min \Gamma(s_i) \in \Gamma(s_n)$，且 $\min \Gamma(t_n) \in \Gamma(t_i)$。注意，$\min \Gamma(s_i) \preceq t_i \preceq t_n$，且 $\min \Gamma(t_n) \preceq s_n \preceq s_i$。由引理 55 可得 $t_i \in \Gamma(s_n)$。

无论哪种情况，$(t_i, s_i) \in W_i$ 满足归纳假设，而我们只需对 W_{i-1} 的元素进行归纳即可（当 $i = 1$ 时该集合为空）。

- 若 $t_i s_i$ 对 I_{i+1}中的任何一条边都不依赖于 r：根据算法 2，我们有 $t_i s_i \in I_i$ 和 $I_{i+1} = I_i \setminus \{t_i s_i\}$。

  根据定义， W_{i-1} 不覆盖 $t_i s_i$。

  若 $\exists (h, v) \in W_{i-1}$ 使得 $h \in \Gamma(s_i)$ 且 $h \prec t_i$，那么 $W_{i-1} \setminus W_i$ 不可能为空（见算法 1 的第 7 行），这与此情况的初始假设矛盾。

  因此，任意 $(h, v) \in W_i \setminus \{(t_i, s_i)\}$ 都满足关于 W_i 的归纳假设，这是基于对 W_{i-1} 的归纳假设（对于 $i = 1$，它为空）。由 (2)，我们有 $t_i s_i \in I_i \subseteq I_1$。总之， W_i 中的每个元素都满足归纳假设。

情况 3： $\boldsymbol{W_i = W_{i-1} - (t_m, s_j) + (t_i, s_j)}$，且 $\boldsymbol{t_i s_i}$与 $\boldsymbol{I_{i+1}}$中的每条边都 $\boldsymbol{r}$-独立。根据算法 2 的明确设计，通过归纳法我们几乎不费吹灰之力便可完成证明。

- 若 $t_i s_i \in I_i$：由（2）可得 $t_i s_i \in I_i \subseteq I_1$。根据归纳法，得证。
- 若 $t_i s_i \notin I_i$：根据算法 2，有 $I_{i+1} = I_i$。此外，(t_m, s_j) 不覆盖 I_{i+1} 的任何元素，并且 $\nexists t_n s_n \in I_{i+1}$ 使得 $t_m \in \Gamma(s_n)$ 且 $t_m \prec t_n$。因此，根据关于 (t_m, s_j) 的归纳假设 $\in W_{i-1}$，存在 $\exists q \in \mathbb{N}$使得 $1 \leq q \leq i-1$、 $t_q s_q \in I_1$且 $(t_q, s_j) \in W_q$。这个q 也是 $(t_i, s_j) \in W_i$的一个合适选择；对于 W_i的其余元素，应用归纳法即可得证。

情况 4： $\boldsymbol{W_i = W_{i-1} - (t_m, s_j) + (t_i, s_j)}$，并且 $\boldsymbol{\exists t_p s_p \in I_{i+1}}$ 是对 $\boldsymbol{t_i s_i}$ $\boldsymbol{r}$-依赖的。根据算法 2，有 $I_{i+1} = I_i$。根据推论 79，有 $j \leq m < i$。注意，根据引理 73，有 $t_m \in \Gamma(s_i)$、 $t_m \prec t_i$、 $\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(t_m)$，以及 $\min \Gamma(s_j) \in \Gamma(s_i)$。根据引理 72，有 $\min \Gamma(s_j) \preceq t_i$ 以及 $\min \Gamma(s_j) \in \Gamma(s_i)$。根据引理 83，有 $p > i$，因此 $s_p \prec s_i$。首先，我们处理两种可以轻松使用归纳假设的情况。

- 若 $t_i \prec t_p$：那么根据 r-依赖性，$\min \Gamma(s_i) \in \Gamma(s_p)$，且 $\min \Gamma(t_p) \in \Gamma(t_i)$。因此，引理 55 适用于 $\min \Gamma(s_i) \leq t_i \preceq t_p$和 $\min \Gamma(t_p) \leq s_p \preceq s_i$，所以 $t_i \in \Gamma(s_p)$。由此可知，$(t_i, s_j) \in W_i$满足归纳假设，其余结论由归纳法得出。

- 若 $\min \Gamma(s_j) \preceq t_p \preceq t_i$：根据 r-依赖性，$\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(t_p)$。注意，$\min \Gamma(s_i) \leq \min \Gamma(s_j) \preceq t_m$。

  – 若 $\min \Gamma(t_i) \preceq s_p$：我们有 $\min \Gamma(s_i) \preceq \min \Gamma(s_j) \preceq t_p$，且 $\min \Gamma(t_i) \preceq s_p \preceq s_i$。根据引理 55，我们有 $\min \Gamma(s_j) \in \Gamma(s_p)$。– 若 $s_p \preceq \min \Gamma(t_i)$：注意，$\min \Gamma(s_j) \preceq t_p$ 且 $s_p \preceq \min \Gamma(t_i)$，因此根据引理 54，我们有 $\min \Gamma(s_j) \in \Gamma(s_p)$。

无论如何，(t_i, s_j)覆盖了 $t_p s_p \in I_{i+1}$，根据归纳法即可完成证明。

从现在起，设 $t_p \prec \min \Gamma(s_j)$。根据 r-依赖性，$\min \Gamma(s_i) \in \Gamma(s_p)$，$\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(t_p)$。由于$\min \Gamma(s_j) \preceq t_m$，我们有 $t_p \prec t_m \prec t_i$。

将引理 54 应用于 $t_p \prec t_m$ and $\min \Gamma(t_m) \leq \min \Gamma(t_i)$后，我们得到

$$\min \Gamma(t_m) \in \Gamma(t_p).$$

我们还有三个子情形。回想一下，在这种情况下 $I_{i+1} = I_i$。注意，$(t_m, s_j) \in W_{i-1}$满足归纳假设。

• 若 $\exists t_n s_n \in I_i$ 使得 (t_m, s_j) 覆盖 $t_n s_n$：则 $\min\ \Gamma(t_m) \in \Gamma(t_n)$ 且 $\min\ \Gamma(s_j) \in \Gamma(s_n)$。注意，$\min\ \Gamma(s_i) \leq \min\ \Gamma(s_j)$ 且 $s_n \prec s_i$。由引理 54，得 $\min \Gamma(s_i) \in \Gamma(s_n)$。因此，$\min\ \Gamma(s_i) \in \Gamma(s_n) \cap \Gamma(s_p)$ 且 $\min \Gamma(t_m) \in \Gamma(t_n) \cap \Gamma(t_p)$。由引理 84，$I_{i+1}$ 是一组两两 r-独立的边，因此必有 $p = n$。所以 (t_m, s_j) 覆盖 $t_p s_p$，这意味着 $\min\ \Gamma(s_j) \in \Gamma(s_p)$。因此，$(t_i, s_j)$ 也覆盖 $t_p s_p$，故由归纳法即可完成证明。

• 如果 $\exists t_n s_n \in I_i$ 使得 $t_m \in \Gamma(s_n)$ 且 $t_m \prec t_n$：注意，引理 54 适用于 $t_m \prec t_n$以及 $\min \Gamma(t_n) \leq s_n$，因此 $\min\ \Gamma(t_n) \in \Gamma(t_m)$。引理 54 也适用于 $s_n \preceq s_i$ 以及 $\min \Gamma(s_i) \leq t_m$，于是

$$\min \Gamma(s_i) \in \Gamma(s_n).$$

我们有三个子情形。

– 如果 $\min\ \Gamma(t_n) \preceq \min\ \Gamma(t_i)$：注意，$t_p \preceq t_m$，因此根据引理 54，有 $\min \Gamma(t_n) \in \Gamma(t_p)$。于是 $t_n s_n$ 和 $t_p s_p$ 是 r- 相关的，因此根据引理 84，必须有 $p = n$。这与 $t_p \preceq t_m \prec t_n$ 矛盾。

– 如果 $\min\ \Gamma(t_i) \prec \min \Gamma(t_n)$ 且 $s_n \leq s_i$：则 $\min\ \Gamma(t_n) \leq s_n \leq s_i$，且 $\min\ \Gamma(t_i) \leq s_i$。根据引理 33，$\min\ \Gamma(t_i)$ 和 $\min\ \Gamma(t_n)$ 是可比较的，因此必须有 $\min \Gamma(t_i) < \min \Gamma(t_n)$。这意味着 $t_i \prec t_n$ 和

$$s_n \in [\min \Gamma(t_n), s_i] \subseteq [\min \Gamma(t_i), s_i] \subseteq \Gamma(t_i),$$

即，$t_i \in \Gamma(s_n)$。因此，(t_i, s_j)满足关于 I_{i+1} 的归纳假设，依据归纳法即可得证。

– 如果 $\min\ \Gamma(t_i) \prec \min\ \Gamma(t_n)$，且 s_n 与 s_i不可比较：注意，s_i，$s_n \in \Gamma(t_m)$。观察到，引理 54适用于 $\min \Gamma(s_i) \leq t_m$ 和 $s_n \preceq s_m$，因此

$$s_i, s_n \in \Gamma(\min \Gamma(s_i)).$$

注意，$\min\ \Gamma(s_i) \leq t_m$ 和 $\min \Gamma(t_n) \leq s_n$，且引理 54适用，因此

$$\min \Gamma(t_n) \in \Gamma(\min \Gamma(s_i)).$$

类似地，由于 $\min \Gamma(t_i) \leq s_i$,

$$\min \Gamma(t_i) \in \Gamma(\min \Gamma(s_i)).$$

由此可得 $\min\ \Gamma(t_n) \in [\min\ \Gamma(t_i)\ \ s_n]$。我们还有 $s_p \in \Gamma(\min \Gamma(s_i))$。注意，$s_i$ 和 s_n 将 $\Gamma(\min \Gamma(s_i))$ 分割成三部分。由于 $s_p \prec s_i$，$s_n < s_p$或 $s_p \leq s_n$ 或 $s_p \leq s_i$ 必有一个成立。

如果 $s_n < s_p$，那么根据引理 33，$\min\ \Gamma(t_n)$ 和 $\min\ \Gamma(t_p) \leq s_p$是可比较的，因此

$$\min \Gamma(t_n) \in [\min \Gamma(t_i), s_n] \subseteq [\min \Gamma(t_i), s_p] \subseteq \Gamma(t_p).$$

因此，若 $s_n < s_p$，则 $t_n s_n$ 和 $t_p s_p$ 是 r-相关的，所以根据引理 84，必有 $p = n$。然而，$p = n$ 与 $t_p \preceq t_m \prec t_n$矛盾。

由此可知，$s_p \leq s_i$ 或 $s_p \leq s_n$ 成立。由于 s_i 与 s_n不可比较，且 s_i、s_n、$s_p \in \Gamma(\min\ \Gamma(s_i))$，因此

$$s_p \in [s_i, s_n] \subseteq \Gamma(\min \Gamma(s_i)).$$

我们有 s_i、$s_n \in \Gamma(t_m)$。注意，$\min\ \Gamma(s_j) \preceq t_m$ 且 s_n、$s_i \preceq s_m$。根据引理 72，$\min\ \Gamma(s_j)\ t_m \in \Gamma(s_m)$。根据引理 54，可得 s_n、$s_i \in \Gamma(\min\ \Gamma(s_j))$。于是

$$s_p \in [s_i, s_n] \subseteq \Gamma(\min \Gamma(s_j)).$$

因此，我们已经证明了（t_i，s_j）覆盖 $t_p s_p$，根据归纳法即可完成证明。

• 如果存在 $\nexists t_n s_n \in I_i$ 使得（t_m，s_j）覆盖 $t_n s_n$，并且存在 $\nexists t_n s_n \in I_i$ 使得 $t_m \in \Gamma(s_n)$ 以及 $t_m \prec t_n$：根据归纳法，存在 $\exists q \in \mathbb{N}$ 使得 $1 \leq q \leq i-1$、$t_q s_q \in I_1$ 以及（t_q，s_j）$\in W_q$。由于 q 也是（t_i，s_j）的一个良好选择，因此对于 W_i，归纳假设同样成立。

□