arXiv:2304.13711v1 [math.MG] 26 Apr 2023

Heisenberg群中的强几何引理

VASILEIOS CHOUSIONIS、SEAN LI 和 ROBERT YOUNG

摘要。我们证明，在第一海森堡群中，与欧几里得空间和高维 Heisenberg 群不同，内在 Lipschitz 图的强几何引理所能达到的最佳指数是 4，而不是 2。结合 [CLY22b] 和 [CLY22a]，的早期工作，我们的结果完成了 Heisenberg 群中强几何引理的证明。我们证明中的一个关键工具，也可能具有独立的研究价值，是对叶状冠状分解的一种适当改进；这种分解最早出现在 [NY22] 中。

1. 引言

根据 Rademacher定理， $\mathbb{R}^n$ Lipschitz曲面在无穷小尺度下类似于平面。然而，对于某些更为全局性的问题，例如奇异积分的有界性，Rademacher定理所提供的信息过于定性。要回答这些问题，我们需要知道，Lipschitz图可以在“至多处和至多尺度”上被仿射平面有效逼近。量化此类陈述的传统方法是引入 β-数的概念，该概念由 Jones 在 [Jon89、Jon90] 中提出。自 Jones 的工作以来， β-数及其若干变体在 $\mathbb{R}^n$ 中的几何调和分析和几何测度论，以及其他空间 [Oki92、Sch07、LS16a、LS16b、FFP07、CLZ19、Li19、DS17、CLY22b、CLY22a] 中发挥了重要作用。

给定 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和一个球 $B(x,r)$， m维 β数定义为

$$\beta_E(x,r) = \inf_L r^{-m} \int_{B(x,r)\cap E} \frac{d(y,L)}{r}\, \mathrm{d}\mathscr{H}^m(y)$$

其中，L 取遍所有 m 维平面， $\mathscr{H}^m$ 表示 m 维 Hausdorff 测度。因此， β_E(x,r) 是一个测量集合 E ∩B(x,r) 平均而言有多平坦的量。这个函数具有尺度不变性，即对所有 t > 0, β_{tE}(t x, tr) = β_E(x,r)。根据 Dorronsoro 的一项基本结果 [Dor85], , 若 E 是一个 m 维 Lipschitz连续图形，则 β数的平方满足以下 Carleson打包条件：存在一个 c > 0 , 它仅依赖于 Lipschitz连续常数，使得

$$\int_0^R \int_{E\cap B(x,R)} \beta_E(y,r)^2\, \mathrm{d}\mathscr{H}^m(y) \frac{dr}{r} \le cR^m, \quad \text{for } R>0, x\in E. \tag{1}$$

这称为指数为 2 的强几何引理。

Lipschitz图的强几何引理一直是一致可整流性理论的基石之一。该理论最初由David和Semmes于20世纪90年代初发展起来。特别地，一个Ahlfors m–正则子集 $\mathbb{R}^n$ 称为一致可m–整流的，当且仅当它满足（1），其中某个$c > 0$。David和Semmes在

日期：2023年4月27日。2020 数学主题分类。主要分类：28A75，53C17。V. C. 获得了西蒙斯基金会合作项目拨款 521845 的资助。R. Y. 获得了美国国家科学基金会拨款 2005609 的资助。

[DS91、DS93] 引入了一套广泛的几何和解析概念，以便为欧几里得空间中的一致可整流集提供各种刻画。他们由此为研究 $\mathbb{R}^n$的低维子集上的奇异积分算子奠定了丰富且影响深远的几何基础。

在过去20年中，人们一直系统地致力于发展次黎曼空间上的几何测度论，参见例如讲义 [SC16，Mat23] 以了解近期的一些综述。特别是，这一研究计划在Carnot群上取得了长足发展；Carnot群是一类具有膨胀的幂零李群，即存在将度量按常数进行缩放的映射。事实上，根据LeDonne[LD15], 的一个结果，Carnot群是唯一同时具有膨胀且等距齐性的局部紧测地空间。这使得这些群成为研究涉及许多不同尺度的几何与分析问题的理想环境。最简单的非阿贝尔Carnot群例子是$(2n+1)$维Heisenberg 群 $\mathbb{H}_n$。

为了在 $\mathbb{H}_n$（或任意其他Carnot群）中引入有意义的可整流性概念，首先应当提出该背景下Lipschitz图的类似概念。由于例如Heisenberg 群不能被视为子群的笛卡尔积，这一问题相当微妙。人们可能会考虑Lipschitz像 $\mathbb{R}^k \to \mathbb{H}_n$，但这种方法仅在$k \le n$时有效。Ambrosio和Kirchheim [AK00] 证明，任意Lipschitz像$f(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{H}_n$ 的k-测度在$k > n$时均为零。因此，应当引入一种符合次黎曼群结构的内在图。这由Franchi、Serapioni和 Serra Cassano在 [FSSC06]中实现。与欧几里得Lipschitz图类似，中的内在 Lipschitz 图 $\mathbb{H}_n$满足锥条件，该条件将在下一节中定义。

内在 Lipschitz 图在新近兴起的低余维可整流性理论中占据重要地位 [MSSC10、FSSC11、Vit22、SC16]。其中一个原因是，与 $\mathbb{R}^n$中的 Lipschitz 图一样， $\mathbb{H}_n$ 中的内在 Lipschitz 图满足 Rademacher 定理的某种形式；它们几乎处处在无穷小尺度下类似于平面[FSSC11]。正如在 $\mathbb{R}^n$中一样，要回答关于奇异积分和一致可整流性的问题， $\mathbb{H}_n$ 需要更强的定量界，这促成了对内在 Lipschitz 图中各种定量可整流性概念的研究 [CFO19b、NY18、NY22、FOR18、Rig19、CLY22b、CLY22a]。

概括而言，上述工作旨在获得关于内在 Lipschitz 图如何由竖直平面和垂直集合逼近的定量界。与欧氏情形一样，这些工作部分受到一种奇异积分算子的推动，该算子可被视为（欧氏）1余维 Riesz 变换的自然类比。值得注意的是，正如在 $\mathbb{R}^n$中一样，这种新的奇异积分与 $\mathbb{H}_n$中的 Lipschitz 调和函数的可去性有关，参见 [CFO19a、FO21、CLY22a]。

研究 Heisenberg 群中一致可整流性的关键对象之一，是以下 β–numbers 的余维–1 版本。对于 $E \subset \mathbb{H}_n$、$x \in \mathbb{H}_n$ 和 $r > 0$，我们定义

$$\beta_E(x,r) = \inf_{L \in \mathrm{VP}} r^{-2n-1} \int_{B(x,r)\cap E} \frac{d(y,L)}{r} \, \mathrm{d}\mathscr{H}^{2n+1}(y) \tag{2}$$

其中，VP 表示与 z 轴平行的余维 1 平面集合。注意，数量 β_E(x,r) 是尺度不变的，因为对于任意 t >0，都有 β_{δ_t}(E)(δ_t(x), tr) $= \beta_E$(x,r)。我们记录如下事实：Heisenberg群中余维–1 β–数量的 L∞ 版本由 [CFO19b]，引入，并在 $\mathbb{H}_n$ 中针对内在 Lipschitz 图获得了式（1）的一个较弱的定性（Heisenberg）类比，即弱几何引理。

在 [CLY22b] 中，我们针对 $\mathbb{H}_n$ 中的 $n \geq 2$ 建立了指数为 2 的强几何引理对于内在 Lipschitz 图的直接类比。

定理 1.1。 [CLY22b] 设 $n \geq 2$ 且设 Γ 是 $\mathbb{H}_n$中的内在 *L-Lipschitz* 图。那么，对任意 $y \in \Gamma$ 和任意 $R > 0$,

$$\int_0^R \int_{B(y,R)\cap\Gamma} \beta_\Gamma(x,r)^2 \, \mathrm{d}\mathscr{H}^{2n+1}(x) \frac{\mathrm{d}r}{r} \lesssim_L R^{2n+1}. \tag{3}$$

然而，在 [CLY22a] 我们证明了，与欧氏情形不同，强几何引理在 $\mathbb{H}_1$ 对所有指数 $s \in [2,4)$均不成立。

定理 1.2。 [CLY22a] 存在常数 $L > 0$、半径 $R > 0$以及一列 L-内在 *Lipschitz* 图 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$，位于 $\mathbb{H}_1$ 使得 $\mathbf{0} \in \Gamma_n$ 对所有 n 及

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^R \int_{B(0,R)\cap\Gamma_n} \beta_{\Gamma_n}(x,r)^s \, \mathrm{d}\mathscr{H}^3(x) \frac{\mathrm{d}r}{r} = +\infty \tag{4}$$

对所有 $s \in [2,4)$。

本文通过证明强几何引理在 $\mathbb{H}_1$ 中以指数 4 成立，完成了这一系列研究。我们的主要定理如下:

定理 1.3。 设 Γ 是 $\mathbb{H}_1$中的一个内在 *L–Lipschitz* 图。则对于任意 $y \in \Gamma$ 和任意 $R > 0$,

$$\int_{B(y,R)\cap\Gamma} \int_0^R \beta_\Gamma(x,r)^4 \frac{\mathrm{d}r}{r} \, \mathrm{d}\mathscr{H}^3(x) \lesssim_L R^3. \tag{5}$$

我们通过使用构造于[NY22]中的叶状日冕分解来证明定理 1.3 。这些分解将一个内在 Lipschitz 图分解为称为伪四边形的矩形区域，其纵横比取决于相应内在 Lipschitz 图的形状。在图形平坦的点和尺度处，伪四边形短而宽（纵横比较大）；而在图形起伏的点处，伪四边形高而窄（纵横比较小）。

该分解满足加权 Carleson 条件，该条件界定了分解中伪四边形的总大小，并按纵横比的四次方倒数进行加权（见定义 2.9）。这与 [NY22] 以及 [CLY22a], 中构造起伏曲面的方式相类似；在这些工作中，通过构造具有凸起且纵横比较大的曲面，证明了定理 1.2 。每个凸起都会使曲面面积按照其纵横比的四次方倒数增加，从而得到定理 1.2中的指数 4。定理 1.3 的证明将叶状冠分解的几何性质与相关图形的 β–数联系起来，并利用加权 Carleson 条件证明不等式（5）。

通过定义其他子集和其他 Carnot群的类似 β数，可以推广其中一些问题。例如，Carnot群中一维子集的定量可整性已在[Li19、CLZ19], 中得到研究，其中引入了相对 β 数，以研究旅行推销员问题及其与奇异积分的联系。然而，对于高维子集，甚至对于 $\mathbb{H}_n$ 拓扑维数介于 2 和 $2n-1$之间的曲面，其定量可整性仍知之甚少。

类似地，尽管可以在任意 Carnot群中定义内在 Lipschitz 图（参见 [SC16，第4节。5]），且这些对象在可整流性研究中发挥着重要作用，但这些图的

定量可整性的研究尚未得到系统开展。例如，给定 $p \in \mathbb{N}$，是否存在一个 Carnot群G，使得 G 中的内在 Lipschitz 图仅当指数大于或等于 5 时才满足（p）的类似结论?

1.1. **论文概要**。 在第 2 节中，我们给出将在本文其余部分使用的一些基本定义和定理。我们还回顾 [NY22] 关于叶状冠分解的结果。在第 3 节中，我们通过将（5）化归为涉及内在Lipschitz函数 ψ 的一个不等式，为证明定理 Γ 做准备。

为了使用叶状冠分解证明定理 1.3，我们必须改进 [NY22] 中的一些界。为此，我们首先（在第 4 节中）引入叶状冠状分解和参数单调停止的叶状冠化（PSFC），它们是在一些便于使用的附加界下进行的分解。然后，在第 5 节中，我们证明内在Lipschitz图中的伪四边形与平面之间的 L_4 距离的一个界。这改进了 L_1 中相应的 [NY22] 界。最后，在第 6 节中，我们证明定理 1.3。

2. 预备知识

2.1. **Heisenberg群**。Heisenberg群 $\mathbb{H}:=\mathbb{H}_1$ 是一个非阿贝尔李群，其元素是 $\mathbb{R}^3$ 中的点，群运算定义为

$$(x,y,z)(x',y',z')=\left(x+x',y+y',z+z'+\frac{xy'-x'y}{2}\right). \tag{6}$$

单位元为 0：=(0,0,0)，而 v =(x, y, z) 的逆元是元素 v^{-1} =(−x, −y, −z)。令 X =(1,0,0)、Y =(0,1,0)、Z =(0,0,1) ∈ ℍ，并令 x、y、z: ℍ → ℝ 为坐标函数。给定任意 p ∈ ℍ、p ≠ 0，我们将包含 p 的单参数子群记作 〈p〉；在这些坐标下，〈p〉是由 p 张成的子空间。这样，我们可以将 $w^t = tw$ 写作 w ∈ ℍ 和 t ∈ ℝ；当 t ∈ ℤ时，这与通常的指数运算概念一致。

该群的中心是〈Z〉 ={(0,0,z) | $z \in \mathbb{R}$}。若元素 $p \in \mathbb{H}$ 满足 $z(p) = 0$，则称其为一个水平向量，并用A表示水平向量的集合。令 π: ℍ →ℝ^2 为投影 $\pi(x, y,z) = (x, y)$。

ℍ 上的*Korányi*度量 是由下式定义的左不变度量

$$d_{\mathrm{Kor}}(p,p') := \|p^{-1}p'\|_{\mathrm{Kor}},$$

其中

$$\|(x,y,z)\|_{\mathrm{Kor}} := \sqrt[4]{(x^2+y^2)^2+16z^2}.$$

注意，自同构族：s_t: ℍ → ℍ,$t \in \mathbb{R}$,

$$s_t(x,y,z) = (tx, ty, t^2z),$$

对Korányi度量进行伸缩；对于$t \geq 0$和p,$q \in \mathbb{H}$,

$$d_{\mathrm{Kor}}(s_t(p), s_t(q)) = t\, d_{\mathrm{Kor}}(p,q).$$

设$I \subset \mathbb{R}$为一个开区间。映射 γ: I → ℍ是水平曲线，如果x ◦ γ、y ◦ γ、z ◦ γ: I → ℝ均为Lipschitz连续（因而 γ'几乎处处在I上有定义），并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\gamma(t)^{-1}\gamma(s)\right]\Big|_{s=t} \in A,$$

对于几乎所有的 $t \in I$。形如 $L = v\langle aX + bY\rangle$ 的陪集，其中 $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 且 $v \in \mathbb{H}$，称为水平直线。水平直线 L 的斜率 是其

投影 $\pi(L)$ 的斜率，即如果 $L = v\langle aX + bY\rangle$，那么当 $a \neq 0$ 时，$L =$ 的斜率为$\frac{b}{a}$；当 $a = 0$ 时，$L = \infty$ 的斜率为。

与z轴平行的平面称为竖直平面。注意，如果V是一个竖直平面，则投影 $\pi(V)$ 是一条直线，我们将V的斜率定义为 slope(V) :=slope$(\pi(V))$。我们将频繁使用竖直平面V_0 :=$\{y = 0\}$。

2.2. **内在 Lipschitz 图与特征曲线**。 内在图和内在 Lipschitz 图是 $\mathbb{H}$ 中的一类曲面，在可整流性的研究中发挥着重要作用。与 [CLY22a] 类似，我们将用从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数来定义内在图，这些函数在 $\langle Y\rangle$ 的陪集上为常数。特别地，若 ϕ: $\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 在 $\langle Y\rangle$ 的陪集上为常数，则 内在图 的 ϕ 是集合

$$\Gamma_\phi = \{v Y^{\phi(v)} \mid v \in V_0\} = \{p \in \mathbb{H} \mid \phi(p) = y(p)\}.$$

（许多作者称这些为整个内在图，并用“内在图”指代 Γ_ϕ的闭子集。）

请注意，内在图的左平移和膨胀仍然是内在图。我们通过映射 Ψ_ϕ 对 Γ_ϕ 进行参数化：$V_0 \to \Gamma_\phi$,

$$\Psi_\phi(p) = p Y^{\phi(p)-y(p)}.$$

该映射沿着 $\langle Y\rangle$ 的陪集将V_0 投影到 Γ_ϕ，并且如果 ϕ 连续，则它是从V_0 到 Γ_ϕ的同胚。

反之，我们令 Π: $\mathbb{H} \to V_0$ 为沿着 $\langle Y\rangle$ 的陪集给出的（非线性）投影，其定义为 $\Pi(v) = vY^{-y}(v)$，$v \in \mathbb{H}$。等价地，

$$\Pi(x, y, z) = \left(x, 0, z - \frac{1}{2}xy\right).$$

尽管 Π 不是同态，但它与膨胀 s_t 交换：

$$\Pi(s_t(v)) = s_t(\Pi(v))$$

对于所有的 $v \in \mathbb{H}$ 和 $t \in \mathbb{R}$。

对于 $0 < L < 1$，开双锥定义为

$$\mathrm{Cone}_L = \{p \in \mathbb{H} \mid d_{\mathrm{Kor}}(\mathbf{0}, p) < L^{-1}|y(p)|\}.$$

这是一个膨胀不变集；当 L 接近 1 时，它是〈Y〉\{0}的一个小邻域。L-内在 Lipschitz 图是满足以下条件的内在图 Γ_ϕ：对所有 p $\in \Gamma_\phi$，均有 p $\mathrm{Cone}_L \cap \Gamma_\phi =$。等价地，$\Gamma_\phi$ 是 L-内在 Lipschitz 图，当且仅当 $\mathrm{Lip}(y|_{\Gamma_\phi}) \le$ L。我们称函数 ϕ: $\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ 是 L-内在 Lipschitz 函数，若它在〈Y〉的陪集上为常数，且 Γ_ϕ 是一个 L-内在 Lipschitz 图。（同样，有些作者将 Γ_ϕ称为整个内在 Lipschitz 图。根据 [NY18], 的定理 27，任何满足上述锥条件的 $\mathbb{H}$ 子集都可以扩展为一个具有相同内在 Lipschitz 常数的整个内在 Lipschitz 图。）

若$A \subset V_0$ 是一个 Borel 集，且f: $A \to \mathbb{R}$ 是一个 Borel 函数，$|A|$ 表示A 的 Lebesgue 测度，且$\int_A f(x)\mathrm{d}x$ 表示关于 Lebesgue 测度的积分。我们用 $\mathscr{H}^3$ 表示 $\mathbb{H}$ 上基于 Korányi度量的 3 维 Hausdorff 测度。以下引理众所周知，参见例如 [FS16] 和[CLY22a, 引理 28]。

引理 2.1。 设 $0 < L < 1$ 和 Γ 为一个 L-内在 *Lipschitz* 图，且 $A \subset \Gamma$ 为一个可测子集。则 $|\Pi(A)| \approx_L \mathscr{H}^3(A)$。

以下引理将在我们的证明中被频繁使用。

引理 2.2 ([NY22，引理 2.3])。设 $0<L<1$，且设 $\Gamma=\Gamma_\psi$ 为函数 $\psi\colon U\to\mathbb{R}$ 的 L-内在 *Lipschitz* 图。则对于所有 v， $w\in U$，

$$|\psi(v)-\psi(w)|\le\frac{2}{1-L}d_{\mathrm{Kor}}(\Psi_\psi(v),w\langle Y\rangle). \tag{7}$$

特别地，对于任意 $v\in U$ 以及任意 $s\in\mathbb{R}$ 使得 $vZ^s\in U$，

$$|\psi(v)-\psi(vZ^s)|\le\frac{4}{1-L}\sqrt{|s|}. \tag{8}$$

给定一个函数 $\psi\colon\mathbb{H}\to\mathbb{R}$，它在 $\langle Y\rangle$ 的陪集上为常数，以及一个光滑函数 $f\colon V_0\to\mathbb{R}$，我们定义

$$\partial_\psi f=\frac{\partial f}{\partial x}-\psi\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{9}$$

微分算子 ∂_ψ 在 V_0 上定义了一个连续向量场，其 x 坐标为 1，因此 Peano 存在定理表明，经过 V_0 中每一点，至少存在一条 ∂_ψ 的流线。这样的流线可参数化为 $t\mapsto(t,0,g(t))$，其中 $g\colon I\to\mathbb{R}$（其中 I 是一个区间）满足

$$g'(t)+\psi(t,0,g(t))=0,\quad \text{for all } t\in I. \tag{10}$$

这些流线称为 Γ_ψ 的特征曲线，并且我们称 g 具有一个特征图。当 ψ 是内在Lipschitz时，Γ_ψ 的特征曲线恰好是水平曲线 $\gamma\colon I\to\Gamma_\psi$ 的Π–投影，其中这些曲线满足 $x(\gamma(t))=t$ 对所有 $t\in I$ 均成立，参见[NY22，引理 2.6]。此外，如果 ψ 光滑，则 Γ_ψ 的特征曲线将 V_0 叶状分解。然而，如果 ψ 不光滑，则情况并非如此，因为特征曲线可能发生分支并重新汇合，例如参见 [BCSC15]。

下面的引理给出了内在 Lipschitz 图中特征曲线的界。

引理 *2.3*（[*NY22*，引理 *2.7*]）。设 $0<L<1$，且 Γ 是一个 L-内在 *Lipschitz* 图。若 $\gamma\colon I\to V_0$ 是 Γ 的一条特征曲线，并按如下方式参数化：$x(\gamma(t))=t$，则令 $g(t)=z(\gamma(t))$，我们有：

$$|g(t)-g(s)-g'(s)\cdot(t-s)|\le\frac{L}{\sqrt{1-L^2}}\frac{(t-s)^2}{2},\qquad\forall s,t\in I. \tag{11}$$

2.3. **叶状冠分解**。叶状冠分解最近在 [NY22] 中被引入，用于分析 $\mathbb{H}$中的内在 Lipschitz 图的结构。这些分解将内在 Lipschitz 图 Γ_f 划分为矩形区域，称为伪四边形，在这些区域上 f 接近一个仿射函数。本节概述本文所需的 [NY22] 中的结果。

设 Γ 是一个内在 Lipschitz 图。伪四边形 Q 是由两条竖直直线和 Γ的两条特征曲线围成的 V_0 中的一个区域，即形如以下形式的区域

$$\{(x,z)\in V_0\mid x\in I,g_1(x)\le z\le g_2(x)\},$$

其中，$I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ 是一个闭区间，而 g_i 是具有特征图的函数。我们称 I 为底边 Q，并称 g_1 和 g_2 分别为 Q 的下界和上界曲线。

设 V 为一个竖直平面。V 的水平曲线是平行直线，它们在 V_0 上的投影是平行抛物线。我们称 V 的抛物矩形为 V 的伪四边形；它们由两条平行抛物线和两条垂直线围成。如果

$$R=\{(x,z)\in V_0\mid x\in I,h_1(x)\le z\le h_2(x)\}$$

它是一个抛物矩形，我们定义 R 的宽度为 $\delta_x(\mathrm{R}) = \ell(\mathrm{I})$，高度为 $\delta_z(\mathrm{R}) = \mathrm{h}_2 - \mathrm{h}_1$；由于 h_1 和 h_2 的图像是平行抛物线，这些函数相差一个常数。R 的斜率记为 slope(R)，即 slope(V)；注意，根据 (10)，我们有

$$h_i''(x) = -\operatorname{slope}(R) \tag{12}$$

对所有 i 和 x。

对于 $r > 0$ 和区间 $I = [a、b]$, ，令 rI 表示以其中心为中心、按 r 倍进行缩放后的 I，即：

$$rI = \left[\frac{a+b}{2} - \frac{r\ell(I)}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{r\ell(I)}{2}\right].$$

对于任意 $\rho > 0$，令

$$\begin{aligned}\rho R &= \{(x,z) \in V_0 : x \in \rho I, z \in \rho^2[h_1(x), h_2(x)]\} \\ &= \left\{(x,z) \in V_0 : x \in \rho I, \left|z - \frac{h_1(x)+h_2(x)}{2}\right| \le \frac{\rho^2\delta_z(R)}{2}\right\};\end{aligned}$$

这是同心抛物矩形，其宽度为 $\delta_x(\rho R) = \rho\delta_x(R)$，高度为 $\delta_z(\rho R) = \rho^2\delta_z(R)$。

对于 $0 < \mu \le \frac{1}{32}$，一个 μ–直线型伪四边形是一个二元组 (Q, R)，其中 Q 是伪四边形，R 是与其具有相同底边 I 的抛物矩形，并且如果 g_1 和 g_2（分别为 h_1 和 h_2）是 Q（分别为 R）的下界和上界，则

$$\|g_i - h_i\|_{L_\infty(4I)} \le \mu\delta_z(R) \tag{13}$$

对于 $i = 1,2$。我们通常从记号中省略 R，将（Q，R）简单记作 Q。我们定义斜率 Q = 斜率 R，δ_x（Q）$= \delta_x$（R），δ_z（Q）$= \delta_z$（R），以及 $\rho Q = \rho R$。注意，$1Q = R$，因此一般而言 $1Q \neq Q$。当 $\mu = \frac{1}{32}$ 时，我们就称 Q 是直线型伪四边形。

对于任意直线型伪四边形 Q，令 α（Q）$= \frac{\delta_x(Q)}{\delta_z(Q)}$ 为其纵横比。这里使用平方根，是因为 Q 的顶部与底部之间在海森堡度量下的距离与 $\sqrt{\delta_z}$（Q）成正比；这个纵横比是尺度不变的。

根据以下来自 [NY22], 的引理，任何足够高且狭长的伪四边形都是直线型的。

引理 2.4 （[NY22，引理 5。3]）。令 $\mu > 0$，令 $0 < L < 1$，并令 $\Gamma = \Gamma_f$ 为一个内在 L–*Lipschitz* 图。存在一个 $A > 0$，具有以下性质。令 Q 为 Γ 的一个伪四边形，并令 $r = \delta_x$（Q）。假设 Q 的下边界上存在一点 v，且上边界上存在一点 $v\,Z\,s$，使得 $r\sqrt{s} \le A$。那么存在一个抛物矩形 R，使得（Q，R）是 μ–直线型的。

图 Γ 的叶状冠分解基于一组 μ–直线型叶状拼接。这些拼接与二分划分或立方拼接类似，因为它们都由将 Γ 划分为伪四边形的一系列层级划分构成，但一个重要区别是，不同部分可以具有不同的纵横比。

定义 2.5。设 Q 为一个 μ–直线型伪四边形。对于 Q，一个 μ–直线型叶状拼接是一个完全有根二叉树 (Δ, v_0)，满足其顶点集 $\mathcal{V}(\Delta)$ 中的每个 v 都与一个 μ–直线型伪四边形 $(Q_v, R_v) \subset V_0$，$Q_{v_0} = Q$ 相关联，并且每个顶点 $v \in \mathcal{V}(\Delta)$ 都按以下意义进行垂直切分 或水平切割 。

令 w 和 w' 为 v 的子节点，令 $I = [a,b]$ 为 Q_v 的底边，并令 g_1 和 g_2（分别为 Q_v 的下界和上界曲线）以及 h_1 和 h_2（分别为 R_v 的下界和上界曲线）。

（1）若v被垂直切分，则Q_w和$Q_{w'}$是Q_v的左右两半，由垂直线$x = a+b$ 2分隔。也就是说，

$$Q_w = \left\{(x,z) \in V_0 \mid a \le x \le \frac{a+b}{2}, g_1(x) \le z \le g_2(x)\right\}$$

$$Q_{w'} = \left\{(x,z) \in V_0 \mid \frac{a+b}{2} \le x \le b, g_1(x) \le z \le g_2(x)\right\}.$$

类似地，$R_w = ([a、\frac{a+b}{2}] \times \mathbb{R}) \cap R_v$，$R_{w'} = ([a+b\ 2,\ b] \times \mathbb{R}) \cap R_v$。于是，$\delta_x(Q_w) = \delta_x(Q_{w'}) = \delta_x(Q_v)\ 2$，且 $\delta_z(Q_w) = \delta_z(Q_{w'}) = \delta_z(Q_v)$。

(2) 如果v被水平切割，那么Q_w和$Q_{w'}$分别是Q_v的上下两半，并由一条特征曲线分隔。也就是说，存在一个函数c: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其具有特征图；存在一个二次函数$k$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，以及一个$d > 0$，使得

$$Q_w = \{(x,z) \in V_0 \mid a \le x \le b, g_1(x) \le z \le c(x)\}$$

$$Q_{w'} = \{(x,z) \in V_0 \mid a \le x \le b, c(x) \le z \le g_2(x)\}$$

$$R_w = \{(x,z) \in V_0 \mid a \le x \le b, k(x) - d \le z \le k(x)\}$$

$$R_{w'} = \{(x,z) \in V_0 \mid a \le x \le b, k(x) \le z \le k(x) + d\}.$$

于是，$\delta_x(Q_w) = \delta_x(Q_{w'}) = \delta_x(Q_v)$，且 $\delta_z(Q_w) = \delta_z(Q_{w'}) = d$。此外，根据$Q_w$和$Q_{w'}$的 μ–直线性，

$$\max\left\{\|(k-d) - g_1\|_{L_\infty(4I)}, \|k-c\|_{L_\infty(4I)}, \|(k+d) - g_2\|_{L_\infty(4I)}\right\} \le \mu d. \tag{14}$$

无论哪种情况，$Q_v = Q_w \cup Q_{w'}$与两个半部 Q_w和 $Q_{w'}$的内部均不相交。令 $\mathcal{V}_v(\Delta) \subset \mathcal{V}(\Delta)$ 为垂直切分顶点的集合，令 $\mathcal{V}_h(\Delta) \subset \mathcal{V}(\Delta)$ 为水平切分顶点的集合。

与伪四边形一样，当省略 μ 时，我们取 $\mu = \frac{1}{32}$，因此任何直线叶状拼接至少是 1 32–直线型的。

引理 2.6。设 Q 为一个直线型伪四边形。则 $2\ 3Q \subseteq Q \subseteq 2Q$。

证明。上界由 [NY22] 中的引理4.1给出。

为证明下界，设 R 为与 Q 对应的抛物矩形，设 g_1, g_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$、$h_1, h_2$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 k_1，k_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为其图像分别构成 Q、R 和 2 3Q 的下界和上界的函数，并设 I 为 Q 的底边。则 h_i 和 k_i 是二次函数，它们彼此只相差加性常数，且对于每个 $x \in I$ 和 $i \in \{1,2\}$，$|g_i(x) - h_i(x)| \le \frac{1}{32}\delta_z(Q)$。

我们有 $k_1 - h_1 = \frac{5}{18}\delta_z(Q) = h_2 - k_2$。因此，对于每个 $x \in I$，我们得到

$$k_1(x) - g_1(x) \ge k_1(x) - h_1(x) - |g_1(x) - h_1(x)| > 0.$$

同样，对于所有$k_2(x) < g_2(x)$，$x \in I$，因此 2 3Q $\subseteq Q$。 □

对于任意有根树（T, v_0）以及任意 $v \in \mathcal{V}(T)$，令 $\mathscr{C}(v) = \mathscr{C}^1(v)$ 表示 v 的子节点集合，并令

$$\mathscr{C}^n(v) = \bigcup_{w \in \mathscr{C}^{n-1}(v)} \mathscr{C}(w)$$

为第n代后代节点的集合，令 $\mathscr{C}^0(v) = \{v\}$。令

$$\mathscr{C}^{\le n}(v) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{C}^i(v)$$

并令 $\mathscr{D}(v)$ 表示 v 的所有后代节点（包括 v 本身）构成的集合。我们在 $\mathcal{V}(T)$ 上赋予通常的偏序，使得 $v \le w$ 当且仅当 v 是 w 的后代节点。

我们记录以下界；参见 [NY22，引理 4。5]

引理 2.7。 设 $\epsilon > 0$。存在一个 $\mu > 0$，使得如果 Q 是一个 μ–直线型伪四边形，则

$$1 - \epsilon \le \frac{\delta_x(Q) \cdot \delta_z(Q)}{|Q|} \le 1 + \epsilon. \tag{15}$$

此外，如果 Q 按照定义 *2.5* 进行水平或垂直切分，并且 Q' 是 Q 的一个子节点，则

$$\frac{1}{2} - \epsilon \le \frac{|Q'|}{|Q|} < \frac{1}{2} + \epsilon.$$

如果 Q 进行水平切割，则 $\delta_z(Q') = \frac{\delta_z(Q)}{2}$，且 $\alpha(Q') = \sqrt{2}\alpha(Q)$。如果 Q 进行垂直切分，则 $\delta_x(Q') = \frac{\delta_x(Q)}{2}$，且

$$\frac{1}{2} - \epsilon \le \frac{\alpha(Q')}{\alpha(Q)} \le \frac{1}{2} + \epsilon.$$

特别地，当 Q 是一个直线型伪四边形（即 $\mu = \frac{1}{32}$）时，这些不等式对 $\epsilon = \frac{1}{4}$ 成立。

我们通过反复将直线型伪四边形切割成更小的伪四边形，构造直线叶状拼接。任何直线型伪四边形 Q 都可以垂直切分为两个 μ–直线型伪四边形，它们具有相同的高度和一半的宽度，但并非每个伪四边形都可以进行水平切割。沿着穿过中心的特征曲线切割 Q 可能无法生成两个直线型伪四边形，因为新伪四边形的上界和下界曲线不一定满足（13）。

NY [NY22] 的主要技术结果表明，若一个直线型伪四边形是平行单调的，则可以沿水平方向将其切分为两个直线型伪四边形。平行单调性是基于CK [中引入的单调性的一种条件。对于任意内在 Lipschitz 图 Γ 和任意 $R > 0$，都存在一个定义在 V_0 上的测度 $\Omega^P_{\Gamma^+,R}$，称为 R–扩展参数归一化非单调性。$\Omega^P_{\Gamma^+,R}$ 的完整定义见NY [的第 8 节；但对于 $U \subset V0$，$\Omega^P_{\Gamma^+,R}(U)$ 测量的是在 $\Pi^{-1}(U)$ 的 R–邻域内与 Γ 相交多次的水平直线 L。

这满足运动学公式

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Omega^P_{\Gamma^+,2^{-i}}(U) \lesssim_L |U| \tag{16}$$

对于任意可测的 $U \subset V_0$ [NY22，引理 9。2]。此外，直接检查定义 [NY22，(155)]，

$$\Omega^P_{\Gamma^+,R} \le \frac{R'}{R} \Omega^P_{\Gamma^+,R'} \tag{17}$$

对所有 $R < R'$。

设 Q 是 Γ 的一个伪四边形。若 Γ 在 rQ 上满足 (η,R)–参数单调，则 $\Omega^P_{\Gamma^+,R}$ 在 rQ 上的密度满足

$$\frac{\Omega^P_{\Gamma^+,R\delta_x(Q)}(rQ)}{|Q|} \le \eta \alpha(Q)^{-4}. \tag{18}$$

该条件在缩放、拉伸映射和剪切映射下保持不变。NY22] 的结果表明，参数单调伪四边形的特征曲线满足强有界性。

命题 2.8([NY22，命题 7。2])。 存在一个通用常数 $r > 10$，使得对于任意$\lambda > 0$和 $0 < \zeta \le \frac{1}{32}$，存在 η，$R > 0$，使得如果 $\Gamma = \Gamma_f$是f的内在 *Lipschitz* 图： $V_0 \to \mathbb{R}$，并且 Q 是关于 Γ 的直线型伪四边形，使得 Γ 在 (η, R)–参数单调于 rQ 上，则：

(1) 存在一个竖直平面 $P \subset \mathbb{H}$（一个 λ逼近平面）和一个仿射函数 F： $V_0 \to \mathbb{R}$，使得 P 是 F 的内在图，并且

$$\frac{\|F - f\|_{L_1(10Q)}}{|Q|} \le \lambda \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}. \tag{19}$$

(2) 令 $u \in 4Q$，并令 g_Γ，g_P： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\{z = g_\Gamma(x)\}$（分别为 $\{z = g_P(x)\}$）是特征曲线 f或 Γ（分别p地 $y^{P)}$，使得 p穿过 gu。然后

$$\|g_P - g_\Gamma\|_{L_\infty(4I)} \le \zeta \delta_z(Q).$$

因此，我们可以通过递归地将Q切割成越来越小的伪四边形，为伪四边形Q构造直线叶状拼接。如果一个伪四边形是参数单调的，我们就将其水平切割；否则，就将其垂直切割。然后对新得到的两个伪四边形重复这一过程。

所得的分解满足某些界限，下面将对此进行描述。

定义 2.9。 对于$S \subset \mathcal{V}(\Delta)$，令$W(S) = \sum_{w \in S} \alpha(Q_w)^{-4}|Q_w|$；我们称其为$S$ 的权重。我们称一个直线叶状拼接 Δ 满足加权 *Carleson* 打包条件，或者称 Δ 为C–加权 *Carleson*，如果每个$v \in \mathcal{V}(\Delta)$满足

$$W(\{w \in \mathcal{V}_v(\Delta) \mid w \le v\}) \le C|Q_v|. \tag{20}$$

对于任意直线型伪四边形R，$|R| \approx \delta_x(R)\delta_z(R)$，因此

$$W(\{R\}) = \alpha(R)^{-4}|R| \approx \left(\frac{\delta_x(R)}{\sqrt{\delta_z(R)}}\right)^{-4} |R| \approx \frac{\delta_z(R)^3}{\delta_x(R)^3}. \tag{21}$$

定义 2.10。 λ逼近平面 是指一组竖直平面P_v及其对应的竖直仿射函数l_v： $V_0 \to \mathbb{R}$，每个 $v \in \mathcal{V}_h(\Delta)$对应一个，且满足

$$|Q_v|^{-1}\|l_v - f\|_{L_1(10Q_v)} \le \lambda \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)}. \tag{22}$$

定义 2.11。 设 $\mu_0 > 0$，并设D： $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$。若一个内在Lipschitz图 Γ 满足：对于每个 $0 < \mu \le \mu_0$、每个 $\lambda > 0$ 以及每个 μ直线型伪四边形$Q_0 \subset V_0$，，都存在一个 μ直线型叶状拼接体 Δ，使得 Δ 是$D(\mu, \lambda)$加权 Carleson，并且具有一组 λ逼近平面，则称其 admits a (D, μ_0)叶状冠分解。当D 和 μ_0 无关紧要时，我们简称 Γ 具有叶状冠分解。

定理 2.12 ([NY22，定理 7。5])。 任何内在*Lipschitz*图都具有叶状冠分解。

也就是说，令 $r > 10$ 如命题 *2.8* 中所述。对于每个 $0 < L < 1$ 以及每个 $0 < \mu \le \frac{1}{32}$和 $\lambda > 0$，存在 $D = D(L, \mu, \lambda)$、 $\eta = \eta(\mu, \lambda)$ 和 $R = R(\mu, \lambda)$，它们均为正数，并满足以下性质。设 $\Gamma \subset \mathbb{H}$ 是一个内在 *L-Lipschitz* 图，且 $Q \subset V_0$ 是一个关于 Γ的μ–直线型伪四边形。那么，存在一个关于 Q 的 μ–直线叶状拼接 Δ，使得 Δ 是 D–加权 *Carleson* 的，并具有一组 λ–逼近平面。此外，对于所有顶点 $v \in \mathcal{V}(\Delta)$，相应的伪四边形 Q_v 是水平切割的，当且仅当 Γ在 rQ 上是 (η, R)–参数单调的。

此外，η 和 R 对于 $\zeta = \frac{1}{32} r^2$ 满足命题 *2.8*。

（ η 和 R 满足命题 2.8 并非定理 7.5 的陈述内容，定理 7.5 出自 [NY22], ，但在证明中， η 和 R 被选取为满足命题 2.8 ，其中 ζ 和 λ 适当。（

3. 初步约化

在本节中，我们将定理1.3 归结为对定义在伪四边形$_4$ 上的 β_Γ的参数化 Γ版本的一个上界，其中L_p β–数的定义如下。对于$E \subset \mathbb{H}$， $x \in E$， $r > 0$， 以及$p \in [1,\infty)$， 令

$$\beta_{p,E}(x,r) := \inf_{L\in \mathsf{VP}} \left[r^{-3} \int_{B(x,r)\cap E} \left(\frac{d(y,L)}{r} \right)^p \, \mathrm{d}\mathscr{H}^3(y) \right]^{1/p}. \tag{23}$$

回顾（2），注意到 $\beta_E = \beta_{1,E}$。利用 Hölder 不等式，容易看出，若$1 \le p < q$，则

$$\beta_{p,E}(x,r) \le \left(\frac{\mathscr{H}^3(E\cap B(x,r))}{r^3} \right)^{1/p-1/q} \beta_{q,E}(x,r). \tag{24}$$

特别地，若E是 Ahlfors 3-正则的，则 $\beta_{p,E}(x,r) \lesssim \beta_{q,E}(x,r)$。因此，当$p > 1$时，将$\beta_{1,\Gamma}$替换为$\beta_{p,\Gamma}$，式（4）仍成立。

对于任意可测函数 $\psi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$，若其在〈$Y$〉的陪集上为常数，且任意$p \ge 1$，我们定义 β 的参数化版本如下:

$$\gamma_{p,\psi}(v,r) = r^{\frac{-3-p}{p}} \inf_{h\in \mathsf{Aff}} \|\psi - h\|_{L_p(V(\Psi_\psi(v),r))} \tag{25}$$

其中

$$V(v,r) := \Pi(B(v,r)),$$

并且 Aff 表示所有形如 $h(v) = ax(v)+b$ 的函数 $h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$，其中 $a,b \in \mathbb{R}$。注意，每个具有有限斜率的竖直平面都是 Aff 中某个函数的图像。还要注意，$\gamma_{p,\psi}(\cdot,r)$ 在 Y 的陪集上为常数。

集合 $V(v,r)$ 在 V_0，中呈平行四边形形状，其斜率取决于 $y(v)$。

引理 3.1。 对于任意 $r > 0$ 和 $p \in \mathbb{H}$， 令 $(x_0,0,z_0) = \Pi(p)$。则

$$V(p,r) \subset \{(x,0,z) \mid |x-x_0| \le r, |z-z_0+y(p)(x-x_0)| \le r^2\}. \tag{26}$$

证明。我们首先考虑 $p = \mathbf{0}$ 的情形。如果 $q \in B(0,r)$， 则 $\Pi(q) = qY^{-y(q)} \in B(0,2r)\cap V_0$。特别地， $|z(\Pi(q))| \le r^2$。由于 $x(\Pi(q)) = x(q) \in [-r,r]$，这意味着 $V(0,r) \subset R_r$，其中 $R_r = [-r,r]\times 0 \times [-r^2,r^2]$。

现在考虑任意一个 $p \in \mathbb{H}$。那么对于任意$q \in \mathbb{H}$， $\Pi(pq) = pqY^{-y(p)-y(q)} = \Pi(p\Pi(q))$，所以

$$V(p,r) = \Pi(B(p,r)) = \Pi(pB(\mathbf{0},r)) = \Pi(pV(\mathbf{0},r)) \subset \Pi(pR_r).$$

我们记作 $p = (x_0,0,z_0)Y^{y(p)}$；然后

$$V(p,r) \subset \Pi(pR_r) = (x_0,0,z_0)Y^{y(p)}R_rY^{-y(p)}.$$

根据（6）， $Y^{-y(p)} = (x,0,z-xy(p))$ ），因此这意味着（26）。 □

当 ψ 是内在Lipschitz连续时， $V(x,r)$ 与 $\Pi(B(x,r)\cap\Gamma_\psi)$ 可比，且 β_{Γ_ψ}与 γ_ψ 可比。

引理 3.2 ([CLY22a，引理 2。7])。 设 ψ 是一个 L-内在*Lipschitz*函数，设 $p \in \Gamma_\psi$，并设 $r > 0$。存在一个常数 $c > 1$，它依赖于 L，使得

$$V(p, c^{-1}r) \subseteq \Pi(B(p,r) \cap \Gamma_\psi) \subset V(p,r). \tag{27}$$

特别地，如果 $x, y \in V_0$ 且 $y \in V$（Ψ_ψ（x），r），那么 $x \in V$（Ψ_ψ（y），cr）。

引理 3.3。 设 $0 < L < 1$ 且 $p \geq 1$。存在一个 $C := C(L) > 1$，使得对于任意 L-内在 *Lipschitz* 函数 $\psi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$、任意 $x \in \mathbb{H}$ 以及任意 $r > 0$,

$$\gamma_{p,\psi}(x, r/C) \lesssim_{L,p} \beta_{p,\Gamma_\psi}(\Psi_\psi(x), r) \lesssim_{L,p} \gamma_{p,\psi}(x, Cr). \tag{28}$$

对于 $p = 1$，前一个引理实质上已在 [CLY22a，引理 4 中得到证明。2]对于$p > 1$，证明非常相似，故略去。

于是定理 1.3 是下述定理的一个特例。

定理 3.4。 设 Γ 是 $\mathbb{H}$ 中的一个内在 L-*Lipschitz* 图，且 $p \in [1,4]$。那么对于任意 $y \in \Gamma$ 以及任意 $R > 0$,

$$\int_{B(y,R)\cap\Gamma} \int_0^R \beta_{p,\Gamma}(x,r)^4 \frac{\mathrm{d}r}{r} \mathrm{d}\mathscr{H}^3(x) \lesssim_L R^3. \tag{29}$$

我们尚未考虑范围 $[1,4]$ 是否是尖锐的，而且它很可能并非如此。根据 Dorronsoro 的工作 [Dor85]，对于 m 维 Lipschitz 图（或定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的 Lipschitz 函数），强几何引理在 β_p 且 $\mathrm{p} < \infty$ 属于 $\mathbb{R}^2$ 的情形下成立；对于 $\mathrm{p} < {}^2\mathrm{m}\overline{\mathrm{m}}{}_{-2}$ 属于 $\mathbb{R}^n$、$\mathrm{n} > 2$ 的情形也成立。Fang 和 Jones 未发表的例子表明，这些范围是尖锐的。最近，Fässler 和 Orponen [FO20] 将 Dorronsoro 的方法推广到了从 $\mathbb{H}_n$ 到 $\mathbb{R}$ 的 Lipschitz 函数。他们的方法表明，(29) 对于 $1 \leq \mathrm{p} < 6$ 可能成立，但我们在此不再深入探讨。[1]

本节余下部分将证明，定理 3.4 是以下界的推论。

命题 3.5. 设 $0 < L < 1$。存在 $\tau > 0$ 和 $c > 0$，使得若 $\Gamma = \Gamma_f$ 是一个 L–内在 *Lipschitz* 图，且 $Q \subseteq V_0$ 是一个直线型伪四边形，满足 $\alpha(Q) \leq c$，则

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \int_0^{\tau\delta_x(Q)} \gamma_{4,f}(x,r)^4 \frac{\mathrm{d}r}{r} \mathrm{d}x \lesssim_L |Q|. \tag{30}$$

为了证明命题 3.5 推出定理 3.4，我们需要以下引理。

引理 3.6. 设 $0 < \kappa < 1$ 且 $0 < L < 1$。存在一个依赖于 κ 和 L 的 $c > 1$，使得对于任意 L-内在 *Lipschitz* 图 $\Gamma = \Gamma_\psi$、任意 $x \in \Gamma$以及任意 $r > 0$，都存在一个直线型伪四边形 Q，使得 $V(x,r) \subset \kappa Q$，$\delta_x(Q) = 2\kappa^{-1}r$，且 $\delta_z(Q) \leq cr^2$。

证明。 经过一次左平移后，我们可以假设 $x = \mathbf{0}$。令 $a = a(L) \in (0,1)$ 为稍后选取的一个小数，并令 $s = 2\kappa^{-2}a^{-2}r^2$。令 $g_1, g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为具有特征图的函数，使得 $g_1(0) = -s$ 且 $g_2(0) = s$，令

$$Q = \{(x,0,z) : |x| \leq \kappa^{-1}r \text{ and } z \in [g_1(x), g_2(x)]\},$$

并令 $R = [-\kappa^{-1}r, \kappa^{-1}r] \times [-s, s]$ 使得 $\alpha(R) = \frac{2\kappa^{-1}r}{\sqrt{2}s} = a$。我们断言，$(Q, R)$ 是整线性的，并且 $V(x, r) \subset Q$。

[1]在 [CLY22b], 中，我们证明了定理 1.1 适用于 $\beta_{2,\Gamma}$，因此当 $\beta_{1,\Gamma}$ 被 $\beta_{p,\Gamma}$ 替换为 $p \in [1,2]$时，(3)成立。同样，这个范围并不精确，出于相同的原因，(3)很可能对 $\beta_{p,\Gamma}$ 成立，其中 $1 \leq p < 2(2n+1)(2n+1-2) = \frac{4}{n^2+2n-1}$。

由（10）和引理 2.2,

$$|g_i'(0)| = |\psi(0,0,g_i(0))| \le \frac{4}{1-L}\sqrt{s} \le \frac{8r\kappa^{-1}a^{-1}}{1-L}.$$

根据引理2.3，对于$t \in [-4\kappa^{-1}r,\ 4\kappa^{-1}r]$,

$$\frac{|g_i(t)-g_i(0)|}{s} \le \frac{1}{2\kappa^{-2}a^{-2}r^2}\left(|g_i'(0)|4\kappa^{-1}r + \frac{16L\kappa^{-2}}{\sqrt{1-L^2}}r^2\right) \le \frac{16a}{1-L} + \frac{8La^2}{\sqrt{1-L^2}}.$$

我们取足够小的$a(L)\in(0,1)$，使得

$$|g_i(t)-g_i(0)| \le \frac{s}{16} = \frac{1}{32}\delta_z(R),$$

于是（Q，R）是直线型的。根据引理3.1，$V(x,r)\subset[-r,\ r]\times[-r2,\ r^2]$,因此

$$V(x,r)\subset[-r,r]\times[-2a^{-2}r^2,-2a^{-2}r^2]=\kappa Q,$$

并且 $\delta_z(Q)=4\kappa^{-2}a^{-2}r^2 \lesssim_\kappa {}_L r^2$。 □

这使我们能够证明定理3.4，假设命题3.5成立。

定理的证明 3.4。 设 $\Gamma=\Gamma_f$是一个 L-内在Lipschitz图，$y\in\Gamma$，且 $R>0$。我们先证明

$$\int_{V(y,R)}\int_0^R \gamma_{4,f}(x,r)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}x \lesssim_L R^3. \tag{31}$$

设 $c,\tau>0$ 为命题 3.5 中的常数。由引理 3.6，存在一个直线型伪四边形 Q，使得 $\delta_x(Q)\lesssim_L R$ 且 $\delta_z(Q)\lesssim_L R^2$，并且 $V(y,R)\subset\frac{1}{3}Q$ 且 $\tau\delta_x(Q)\ge R$。于是

$$\begin{aligned}\int_{V(y,R)}\int_0^R \gamma_{4,f}(x,r)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}x &\le \int_{\frac{1}{3}Q}\int_0^{\tau\delta_x(Q)}\gamma_{4,f}(x,r)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}x\\ &\overset{(30)}{\lesssim_L} |Q| \approx_L R^3.\end{aligned}$$

设 $C=C(L)>1$ 为引理 3.3中的常数。引理 2.1 告诉我们 $(\Psi_f)_*(|\cdot|)\approx_L \mathscr{H}^3$ 在 Γ上，因此

$$\begin{aligned}&\int_{B(y,R)\cap\Gamma}\int_0^R \beta_{4,\Gamma}(x,r)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}\mathscr{H}^3(x)\\ &\quad\lesssim_L \int_{\Pi(B(y,R)\cap\Gamma)}\int_0^R \beta_{4,\Gamma}(\Psi_f(x),r)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}x\\ &\quad\overset{(28)}{\lesssim_L}\int_{V(y,R)}\int_0^R\gamma_{4,f}(x,Cr)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}x\\ &\quad\le\int_{V(y,CR)}\int_0^{CR}\gamma_{4,f}(x,r)^4\frac{\mathrm{d}r}{r}\mathrm{d}x\\ &\quad\overset{(31)}{\lesssim_L} R^3.\end{aligned}$$

由（24），这就推出了关于 $p\in[1,4]$ 的定理。

□

4. 叶状冠状分解

在本节中，我们将使用叶状冠分解来定义叶状冠化。叶状冠化是具有某些改进性质的直线叶状拼接结构，因此更便于用于本文的论证。

定义 4.1. 令 $\lambda > 0$，令 $\mathrm{r} > 10$ 为命题 2.8 中的通用常数，并令 $0 < \mu \leq \frac{1}{32}\,\mathrm{r}^{2}$。如果 Δ 是一个具有水平切割根、为 D_0–加权 Carleson 且具有一组 λ–逼近平面的 μ–直线叶状拼接，我们称 Δ 为叶状冠状分解。当常数很重要时，我们将 Δ 记为一个 $(\mathrm{D}0,\mu,\lambda)$–叶状冠状分解。此外，如果存在满足命题 2.8 的 $\eta,\mathrm{R} > 0$，使得对于所有 $\mathrm{v} \in \mathcal{V}(\Delta)$，当且仅当 Γ 在 $\mathrm{r}\,\mathrm{Q}_v$ 上是 (η,R)–参数单调时，Q_v 是水平切割的，那么我们称 Δ 是 (η,R)–参数单调停止的。我们将参数单调停止叶状冠化缩写为 PSFC。

我们可以利用以下引理构造这样的冠状分解。

引理 4.2。设 $0 < L < 1$，并令 η，r，R，$\mu > 0$。存在一个 $\alpha_{\min} \in (0,1)$，使得对于任意 L-内在 *Lipschitz* 图 Γ，若 Q 是关于 Γ 且 $\alpha(Q) \leq \alpha_{\min}$ 的直线型伪四边形，则 Q 是 μ-直线型的，并且 Γ 在 rQ 上是 $(\eta,\ R)$-参数单调的。

证明。令 A 如引理 2.4 中所述，因此若 $\alpha(Q) \leq A\,2$，则 Q 是 μ-直线型的。

令 $i > 0$ 使得 $2^{i-1} \leq R\delta_x(Q) < 2^{i}$。由（16）和（17），存在一个 $b > 0$ 使得

$$\Omega^{P}_{\Gamma^+,R\delta_x(Q)}(rQ) \leq 2\Omega^{P}_{\Gamma^+,2^i}(rQ) \leq b|rQ|.$$

Let

$$\alpha_{\min} = \min\{\frac{A}{2}, (4br^{3}\eta^{-1})^{-\frac{1}{4}}\}.$$

由引理 2.7，$|rQ| \leq 2r^{3}|Q|$，因此若 $\alpha(Q) > \alpha_{\min}$，则

$$\Omega^{P}_{\Gamma^+,R\delta_x(Q)}(rQ) \leq 2br^{3}|Q| \leq \eta\alpha(Q)^{-4}|Q|,$$

并且 Γ 在 R–参数单调意义下作用于 rQ。 □

结合引理 4.2 和定理 2.12 可得如下结论。

引理 4.3。设 $0 < L < 1$。存在一个 $\alpha_{\min} \in (0,1)$，使得对于任意内在 L–*Lipschitz* 图 Γ以及任意直线型伪四边形 $Q \subset V_0$，满足 $\alpha(Q) \leq \alpha_{\min}$，都存在一个根为 Q 的 *PSFC*。

具体地，令 r 如命题 *2.8* 中所述。令 $\lambda > 0$，并令 $0 < \mu \leq \frac{1}{32}\,r^{2}$。令 $D = D(L,\mu,\lambda)$，$\eta = \eta(\mu,\lambda)$，以及 $R = R(\mu,\lambda)$ 如定理 *2.12* 中所述。令 $\alpha_{\min} = \alpha_{\min}(\eta,\mu,r,R,L)$ 如引理 *4.2* 中所述。则 η 和 R 对于 $\zeta = \frac{1}{32}\,r^{2}$满足命题 *2.8*。此外，对于任意内在 L–*Lipschitz* 图 Γ以及任意直线型伪四边形 $Q \subset V_0$，满足 $\alpha(Q) \leq \alpha_{\min}$，都存在一个 Q 的 (D,μ,λ)–叶状冠状分解 Δ，其是 (η,R,r)–参数单调停止的。

证明。令 $Q \subset V_0$ 如上所述。根据引理 4.2，Γ 在 η，R)–参数单调于 rQ上，并且根据定理 2.12，存在一个 μ–直线叶状拼接 Δ，它对应于 Q，且是 D–加权 Carleson，具有一组 λ–逼近平面，并且是 $(\eta,\ R,\ r)$–参数单调停止的。特别地，Q 是水平切割的，因此 Δ 是所需的 PSFC。 □

这些分解满足若干良好性质。首先，PSFC 的伪四边形的纵横比具有正的下界。

引理4.4。设 $0 < L < 1$，设 Γ 是一个内在 L-*Lipschitz* 图 Γ，且设 $Q \subset V_0$ 是 Γ的一个伪四边形。设 Δ 是 Q 的一个 *PSFC*，且设 $\alpha_{\min}$ 如引理 *4.2*中所述。则：

- *for all* $v \in \mathcal{V}(\Delta)$, $\alpha(Q_v) \geq \min\{\alpha(Q), \frac{\alpha_{\min}}{4}\}$,
- *there are only finitely many* $v \in \mathcal{V}(\Delta)$ *such that* $\alpha(Q_v) < \frac{\alpha_{\min}}{4}$, *and*
- *if* $\delta_z(Q_v) \leq \frac{16\delta_x(Q)^2}{\alpha_{\min}^2}$, *then* $\alpha(Q_v) \geq \frac{\alpha_{\min}}{4}$.

证明。设 v_0 是 Δ的根。

假设 $\mathrm{v} \neq \mathrm{v}_0$ 且 $\alpha(\mathrm{Q}v) < \frac{\alpha_{\min}}{4}$。令 p 为 v 的父节点。由引理 2.7，$\alpha(\mathrm{Q}v) < \alpha_{\min}$。因此，由引理 4.2，$\Gamma$ 在 r $\mathrm{Q}p$ 上是 (η,R)–参数单调的，并且 $\mathrm{Q}p$ 是水平切割的。因此，$\alpha(\mathrm{Q}p) < \alpha(\mathrm{Q}v) < \frac{\alpha_{\min}}{4}$。于是，对 $\mathrm{Q}p$ 同样成立。通过归纳，v 的每个祖先节点 a 都是水平切割的，并且 $\alpha(\mathrm{Q}a) < \frac{\alpha_{\min}}{4}$。因此，$\alpha(\mathrm{Q}v) \geq \alpha(\mathrm{Q})$。这就证明了引理的第一部分。

此外，如果 $\alpha(Q_v) < \frac{\alpha_{\min}}{4}$，那么 $\delta_x(Q_v) = \delta_x(Q)$，因此

$$\delta_z(Q_v) = \frac{\delta_x(Q_v)^2}{\alpha(Q_v)^2} > \frac{16\delta_x(Q)^2}{\alpha_{\min}^2}.$$

Δ 中这样的伪四边形只有有限多个，因此这就证明了引理的其余部分。

□

第二，伪四边形的扩张是嵌套的。

引理 4.5（[NY22，引理 4。7]）。设 Δ 为一个 *PSFC*，并假设 v，$w \in \mathcal{V}(\Delta)$ 满足 $w \leq v$。令 $0 < r' \leq r$。则 $r'Q_w \subset r'Q_v$。

（该结果是在 [NY22], 中对充分小的 μ 证明的，但检查证明可知，$\mu \leq \frac{1}{32}r^2$ 就足够了。）

第三，每个伪四边形都有一个满足命题 2.8的逼近平面。

引理 *4.6*。设 Δ 为上述一个 *PSFC*。对于 $w \in \mathcal{V}(\Delta)$，令 m 为 w 的极小水平切割祖先节点，其中当 $w \in \mathcal{V}h(\Delta)$ 时，$m = w$。由于 Δ 的根是水平切割的，因此这样的祖先节点存在。令 $l_w := l_m$ 以及 $P_m := P_m$，其中 l_m 和 P_m 如定义 *2.10* 中所述，并令 I 为 Q_w的底边。则 Q_w 和 P_w 满足命题 *2.8*，即，

$$\|l_w - f\|_{L_1(10Q_w)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}|Q_w|, \tag{32}$$

并且对于任意 $u \in 4Q$，若 g_Γ，g^{P_w}：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满足下述条件的函数：$\{z = g_\Gamma(x)\}$（分别地$\{z = g^{P_w}(x)\}$）是 Γ（分别地，P_w）的特征曲线，且经过 u，那么

$$\|g_{P_w} - g_\Gamma\|_{L_\infty(4I)} \leq \frac{1}{32r^2}\delta_z(Q). \tag{33}$$

证明。对于 $w \in \mathcal{V}\mathrm{h}(\Delta)$，该引理由命题 2.8得出。因此我们考虑 $w \in \mathcal{V}_\mathrm{v}$。由于 Q_m是直线型的，$\delta_z(Q_w) \approx \delta_z(Q_m)$。由（22），

$$\begin{aligned}\|l_w - f\|_{L_1(10Q_w)} \leq \|l_m - f\|_{L_1(10Q_m)} &\leq \lambda \frac{\delta_z(Q_m)}{\delta_x(Q_m)}|Q_m| \\ &\approx \lambda\delta_z(Q_m)^2 \approx \lambda\delta_z(Q_w)^2 \approx \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}|Q_w|.\end{aligned}$$

设 $u \in 4Q_w$，并且 $\{z = g_\Gamma(x)\}$ 和 $\{z = g^{P_w}(x)\}$ 是经过 u 的特征曲线。根据引理 4.5，$u \in 4Q_m$，因此（33）由将命题 2.8 应用于 Q_m 即可得到。□

5. L^p 分段仿射函数 数

现在我们证明 L^p 叶状冠状分解中伪四边形的界，其中 Γ_f。根据引理 4.6，这些伪四边形具有 λ–逼近平面，但这些平面只能在 f 的 L_1 中进行逼近。在本节中，我们将构造一族分段仿射函数 g_S，它们逼近 f，并且我们将给出 $\|f - g_S\|^p$ 关于 $1 \le p < 5$ 的界。

我们将证明以下命题。

命题 5.1. 设 $\Gamma = \Gamma_f$ 是一个 L-内在 *Lipschitz* 图。设 Q 是 Γ 的一个伪四边形，Δ 是一个以 Q 为根的 *PSFC*。设 $l_v, v \in \mathcal{V}(\Delta)$ 是 Δ 的逼近平面。存在一个常数 $c > 0$，它依赖于 L 和 Δ 的参数，使得对于每个 $v \in \mathcal{V}_h(\Delta)$ 以及$1 \le p < 5$,

$$\|l_v - f\|_{L_p(Q_v)} \le \frac{c}{5-p} \lambda \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)} |Q_v|^{\frac{1}{p}}. \tag{34}$$

我们通过用分段仿射函数逼近 f 来证明 函数 命题 5.1。

我们将需要一些定义。设 Δ 为一棵有根树。一个相干集合$S \subset \mathcal{V}(\Delta)$是一个满足以下性质的子集：

(1) S具有唯一的极大元素 $M = \max(S) \in S$。(2) 如果 $v \in S$且 $w \in \mathcal{V}(\Delta)$ 满足 $v < w < M$，那么 $w \in S$。(3) 如果 $v \in S$，那么要么 v 的所有子节点都包含在 S 中，要么一个也不包含。

一个划分子集$U \subset V_0$为伪四边形的划分，是指由有限个$Q_1,...Q_k$伪四边形组成的集合，满足$\bigcup Q_i = U$，且这些Q_i的内部两两不相交。叶状拼接结构的相干子集对应于一个集合的伪四边形划分。以下引理是 [NY22]中的引理 6.3。

引理 5.2。设 Δ 为一个直线叶状拼接，且 $S \subset \mathcal{V}(\Delta)$ 为相干集。令 $M = \max S$ 为 S 的极大元素，并令 $\min S$ 为 S 的极小元集合。令

$$F_1 = F_1(S) = \{p \in Q_M \mid \text{there are infinitely many } v \in S \text{ such that } p \in Q_v\}$$

并令 $F_2 = F_2(S) = Q_M \setminus F_1$。则

$$Q_M = F_1 \cup \bigcup_{w \in \min S} Q_w, \tag{35}$$

且各个 Q_w's 的内部两两不相交，并且与 F_1不相交。如果 S 是有限集，则$\min S$ 是 Q_M的一个划分。

我们利用这些划分来定义 f的近似。

定义 5.3（分片仿射近似）。设 Δ 是 Γ_f的参数单调停止叶状冠化（PSFC）。根据引理 4.6，存在一个与之关联的仿射函数集合 l_w、$w \in \mathcal{V}(\Delta)$。对于任意相干集 $S \subset \mathcal{V}(\Delta)$，我们如下定义函数 $g_S \in L^\infty(Q_{\max(S)})$。令 F_1, F_2 如引理 5.2 中所述，并定义 g_S，使得对于所有 $w \in \min(S)$，$g_S|_{F_1} = f|_{F_1}$且 $g_S|_{Q_w} = l_w|_{Q_w}$；除了 Q_w的边界之外，该定义是良定义的。

我们断言，随着T 越来越大，g_T 在L^p中收敛到f。我们首先证明在L_1中的收敛性。

引理 5.4。 设 Δ 是伪四边形 Q 的一个 *PSFC*。设 $v \in \mathcal{V}(\Delta)$，并设 $S \subset \mathcal{V}(\Delta)$ 是一个相干子集，且 $\max S = v$。设 $T_1, T_2, \cdots \subset S$ 是一列相干集，满足$\max T_i = v$，且 $T_1 \subset T_2 \subset \ldots$ 以及 $\bigcup T_i = S$。那么

$$\lim_{i\to\infty} \|g_{T_i} - g_S\|_{L_1(Q_v)} = 0.$$

证明。 设T是一个相干集，且$u = \max T$。我们首先证明

$$\|g_T - f\|_{L_1(Q_u)} \lesssim |Q_u|^{\frac{4}{3}}, \tag{36}$$

其中隐含常数取决于 Δ的参数。令 $C = \min\{\frac{\alpha_{\min}}{4}, \alpha(Q_{v_0})\}$，使得对所有 $w \in \mathcal{V}(\Delta)$，都有 $\alpha(Q_w) \geq C$（由引理4.4）。由于 Q_w是直线型的，我们有 $|Q_w| \approx \delta_z(Q_w)\delta_x(Q_w)$，因此

$$\delta_z(Q_w) \approx \alpha(Q_w)^{-\frac{2}{3}} |Q_w|^{\frac{2}{3}} \leq C^{-\frac{2}{3}} |Q_w|^{\frac{2}{3}}$$

and

$$\delta_x(Q_w) \approx \alpha(Q_w)^{\frac{2}{3}} |Q_w|^{\frac{1}{3}} \geq C^{\frac{2}{3}} |Q_w|^{\frac{1}{3}}.$$

令 l_w为 λ 的逼近平面 Δ。那么，根据引理 4.6,

$$\|l_w - f\|_{L_1(Q_w)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)} |Q_w| \lesssim \lambda C^{-\frac{4}{3}} |Q_w|^{\frac{4}{3}}.$$

由引理 5.2,

$$\|g_T - f\|_{L_1(Q_u)} = \sum_{m \in \min T} \|g_T - f\|_{L_1(Q_m)} \lesssim \sum_{m \in \min T} \lambda C^{-\frac{4}{3}} |Q_u|^{\frac{1}{3}} |Q_m| \leq \lambda C^{-\frac{4}{3}} |Q_u|^{\frac{1}{3}} |Q_u|,$$

这意味着（36）。

现在考虑 g_S 和 g^{T_i}。令 $F_1(S)$ 和 $F_1(T_i)$ 如引理5.2 中关于 S 和 T_i 的定义；注意，$F_1(T) \subset F_1(S)$，因此 $g^{T_i} = g_S = f$ 在 $F_1(T)$ 上成立。令 $M_i =$ 为 $\min T_i$。若 $u \in M_i \cap \min S$，则 $g_S = g^{T_i} = l_u$ 在 $\operatorname{int} Q_u$ 上成立。令 $N_i = M_i \backslash \min S$。那么对每个 $u \in N_i$，交集 $T_i \cap \mathscr{D}(u)$ 和 $S \cap \mathscr{D}(u)$ 是包含 u 的相干集，并且

$$\|g_{T_i} - g_S\|_{L_1(Q_v)} = \sum_{u \in N_i} \|g_{T_i} - g_S\|_{L_1(Q_u)} = \sum_{u \in N_i} \|g_{T_i \cap \mathscr{D}(u)} - g_{S \cap \mathscr{D}(u)}\|_{L_1(Q_u)}.$$

令 $a_i = \max_{u \in N_i} |Q_u|$。由（36），

$$\|g_{T_i} - g_S\|_{L_1(Q_v)} \lesssim a_i^{\frac{1}{3}} \sum_{u \in N_i} |Q_u| \leq a_i^{\frac{1}{3}} |Q_v|,$$

因此，只需证明 $\lim_i a_i = 0$。

令 $\epsilon > 0$。由引理 2.7，对任意 $\epsilon > 0$，满足条件$|Q_w| > \epsilon$的 $w \in S$ 只有有限多个。设 i 足够大，使得 T_i包含所有这样的 w。那么任意 $u \in N_i$都有一个子节点 $u' \in S$ 满足 $|Q_{u'}| \leq \epsilon$。由引理 2.7， $|Q_u| \leq 4\epsilon$，因此 $a_i \leq 4\epsilon$。令 ϵ 趋于零，我们得到 $\lim_i a_i = 0$，从而 $\lim_i k g^{T_i} - g_S k_{L_1(Q_v)} = 0$。□

因此，我们考察当扩大g_S时S会如何变化。首先，我们考虑将$w \in \min(S)$的一个顶点的子节点添加到S中。这相当于将相应划分中的一个伪四边形切分为两部分。

引理 5.5。 设 S 是一个相干集，且 $w \in \min(S)$。则 $S' = S \cup \mathscr{C}(w)$ 是相干的，$\operatorname{supp}(g_S - g_{S'}) \subset Q_w$，并且

$$\|g_S - g_{S'}\|_{L_\infty(Q_w)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_u)}{\delta_x(Q_u)}.$$

证明。 根据定义可知，g_S 和$g_{S'}$ 在Q_w之外一致。设u的一个子节点为 u。则 $\delta_x(Q_u) \approx \delta_x(Q_w)$， $\delta_z(Q_u) \approx \delta_z(Q_u)$，且 $|Q_u| \approx |Q_w|$，因此

$$\|l_w - l_u\|_{L_1(10Q_u)} \le \|l_w - f\|_{L_1(10Q_u)} + \|f - l_u\|_{L_1(10Q_u)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)} |Q_w|.$$

由于 $Q_w \subset 10Q_u$，且 l_w 和 l_u 是仿射函数，

$$\|l_w - l_u\|_{L_\infty(Q_w)} \le \|l_w - l_u\|_{L_\infty(10Q_u)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}. \tag{37}$$

令 u 和 u' 为 w 的子节点。则

$$\|g_S - g_{S'}\|_{L_\infty(Q_w)} \le \max\{\|l_w - l_u\|_{L_\infty(Q_w)}, \|l_w - l_{u'}\|_{L_\infty(Q_w)}\} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)},$$

如所需。 □

接下来，我们考虑向 S 中添加相干子集。对于水平切割顶点 $w \in \mathcal{V}_h(\Delta)$ 及其后代节点 $v \in \mathcal{D}(w)$，如果从 w 到 v 的路径上，除 v 本身外的每个顶点都是水平切割顶点，则称 v 是 w 的 h–后代节点。我们定义 h–子树 $D^h(w) \subset \mathcal{D}(w)$ 为 w 的 h–后代节点的集合。注意，$D^h(w)$ 是相干的，并且它对应于将 Q_w 划分为一叠伪四边形，所有伪四边形的宽度都与 Q_w 相同。

引理 5.6。 令 $S \subset \mathcal{V}(\Delta)$ 为一个相干集，并令 $w \in \min(S) \cap \mathcal{V}_h(\Delta)$。令 $S' = S \cup D^h(w)$。则 $\operatorname{supp}(g_S - g_{S'}) \subset Q_w$，且

$$\|g_{S'} - g_S\|_{L_\infty(Q_w)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}.$$

证明。由定义可知，g_S 和 $g_{S'}$ 在 Q_w 之外一致。对于 $i \ge 0$，令 $D^h_i(w) = D^h(w) \cap \mathcal{C}_i(w)$，$D^h_{\le i}(w) = D^h(w) \cap \mathcal{C}^{\le i}(w)$，以及 $h_i = g_{S \cup D^h_i(w)}$。于是 $h_0 = g_S$。根据引理 5.4，h_i 几乎处处逐点收敛到 g_S。

每个 $D^h_i(w)$ 中的伪四边形的宽度为 $\delta_x(Q_w)$，根据引理 2.7，对于任意 $i \ge 0$ 和 $v \in D^h_i(w)$，

$$\delta_z(Q_v) \le \left(\frac{3}{4}\right)^i \delta_z(Q_w).$$

根据引理 5.5，

$$\|h_i - h_{i+1}\|_{L_\infty(Q)} \lesssim \lambda \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}.$$

Thus

$$\|g_S - g_{S'}\|_{L_\infty(Q)} \le \lim_i \|h_i - h_0\|_{L_\infty(Q)} \lesssim \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}.$$

□

利用这些界，我们来构造 f 的逼近序列，使其在 L^p 中收敛。对于 $v \in \mathcal{V}(\Delta)$ 和 $j \ge 0$，令

$$R_j(v) = \left\{ w \in \mathcal{D}(v) \mid \delta_x(Q_w) \ge 2^{-j} \delta_x(Q_v) \right\}. \tag{38}$$

根据引理 5.4，$g_{R_j(v)}$ 在 $L_1(Q_v)$ 中收敛到 f；我们将证明它们在 $L^p(Q_v)$ 中也收敛。

我们需要估计v的后代节点的权重。令$P_j(v) = \min R_j(v)$。那么

$$P_j(v) = \left\{ w \in \mathcal{D}_v(v) \mid \delta_x(Q_w) = 2^{-j} \delta_x(Q_v) \right\}.$$

以下 Vitali 型覆盖引理证明见 [NY22]。（在 [NY22], 中，该引理针对 1 32r^2–直线型叶状~~拼~~接提出，但所有 PSFC 都是 1 32r^2–直线型。）

引理 5.7 ([NY22, 引理 9。4])。 设 Δ 是一个 *PSFC*。对于任意 $j \geq 0$，存在一个子集 $Vj(v) \subset Pj(v)$，使得集合 $r\,Q_w$， $w \in Vj(v)$ 两两不交，且 $W(Vj(v)) \approx W(Q\,j\,(v))$。由此可得

$$W(\mathscr{D}_{\mathrm{V}}(v)) \approx_r \sum_j W(V_j(v)). \tag{39}$$

这使我们能够对 $W(P_i(v))$ 在 $v \in \mathcal{V}\mathrm{h}(\Delta)$ 时进行估计。

推论 5.8。 设 Δ 是一个 *PSFC*，且 $v \in \mathcal{V}\mathrm{h}(\Delta)$。对于所有 $i \geq 0$,

$$W(P_i(v)) \lesssim 2^i \alpha(Q_v)^{-4}|Q_v| = 2^i W(\{v\}).$$

证明。 对于每个 $w \in P_i(v)$，伪四边形 Q_w 被垂直切分，因此 Γ 不是 (η,R)– 参数单调的于 rQ_v。也就是说，

$$\Omega^P_{\Gamma^+,2^{-i}R\delta_x(Q_v)}(rQ_w) \geq \eta\alpha(Q_w)^{-4}|Q_w| = \eta W(\{Q_w\}).$$

那么，根据引理 5.7，

$$W(P_i(v)) \approx W(V_i(v)) \leq \eta^{-1} \sum_{w\in V_i(v)} \Omega^P_{\Gamma^+,2^{-i}R\delta_x(Q_v)}(rQ_w).$$

这些 rQ_w两两不相交，并且根据引理 4.5，它们包含于 rQ_v，因此

$$\begin{aligned} W(P_i(v)) &\lesssim \eta^{-1}\Omega^P_{\Gamma^+,2^{-i}R\delta_x(Q_v)}(rQ_v) \\ &\overset{(17)}{\leq} 2^i\eta^{-1}\Omega^P_{\Gamma^+,R\delta_x(Q_v)}(rQ_v). \end{aligned}$$

由于Q_v是水平切割的， Γ 在rQ_v上是（η， R）参数单调的，因此

$$\Omega^P_{\Gamma^+,R\delta_x(Q_v)}(rQ_v) \leq \eta\alpha(Q_v)^{-4}|Q_v|$$

从而

$$W(P_i(v)) \lesssim 2^i\alpha(Q_v)^{-4}|Q_v|,$$

如所需。 □

由此得到所需的L^p 界。

命题5.1的证明。 设 Δ 为一个 PSFC，且设 $D_0, \mu, \lambda, \eta, R$以及 r 为定义 4.1中的参数。设 $2 \leq p < 5$。

令 $\mathrm{v} \in \mathcal{V}\mathrm{h}(\Delta)$。令 $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_v$。令 $\mathrm{w} = \delta_x(\mathrm{Q})$，$\mathrm{h} = \delta_z(\mathrm{Q})$。（事实上，该问题具有足够的对称性，因此只需在 $\delta_x(\mathrm{Q}) = \delta_z(\mathrm{Q}) = \alpha(\mathrm{Q}) = 1$ 时证明该命题。）对于 $\mathrm{i} \geq 0$，令 $\mathrm{R}_i = \{\mathrm{u} \in \mathscr{D}(\mathrm{v}) \mid \delta_x(\mathrm{Q}_u) \geq 2^{-i}\mathrm{w}\}$，如 (38) 所示。我们考虑近似 g^{R_i}。

由引理 5.4，函数 g^{R_i} 逐点收敛到 f，因此由 Fatou 引理,

$$\|f - l_v\|_{L_p(Q)} \leq \liminf_i \|g_{R_i} - l_v\|_{L_p(Q)} \leq \|g_{R_0} - l_v\|_{L_p(Q)} + \liminf_i \|g_{R_i} - g_{R_0}\|_{L_p(Q)}.$$

首先，注意到 $D^h(v) = R_0$, 因此由引理 5.6,

$$\|g_{R_0} - l_v\|_{L_\infty(Q)} = \|g_{R_0} - g_{\{v\}}\|_{L_\infty(Q)} \lesssim \lambda \cdot \frac{h}{w},$$

so

$$\|g_{R_0} - l_v\|_{L_p(Q)} \lesssim \lambda^p \frac{h^p}{w^p}|Q|.$$

同样，对于每个 $u \in \min(R_i)$，引理 5.6 推出

$$\|g_{R_{i+1}} - g_{R_i}\|_{L_\infty(Q_u)} \lesssim \lambda \frac{\delta_z(Q_u)}{\delta_x(Q_u)}.$$

由于 $\delta_x(Q_u) = 2^{-i} w$对所有 $u \in \min(R_i)$ 都成立，

(40)

$$\|g_{R_{i+1}} - g_{R_i}\|^p_{L_p(Q)} \lesssim \sum_{u \in \min(R_i)} \lambda^p \frac{\delta_z(Q_u)^p}{\delta_x(Q_u)^p} |Q_u| \approx \lambda^p w^{-p+1} 2^{i(p-1)} \sum_{u \in \min(R_i)} \delta_z(Q_u)^{p+1}.$$

我们利用推论 $\delta_z(Q_u)$ 的界，并使用推论 5.8。对所有 $i \geq 0$，式（21）意味着

$$W(\min(R_i)) \approx 2^{3i} w^{-3} \sum_{u \in \min(R_i)} \delta_z(Q_u)^3.$$

于是，由推论 5.8，

$$\sum_{u \in \min(R_i)} \delta_z(Q_u)^3 \approx 2^{-3i} w^3 W(\min(R_i)) \lesssim 2^{-3i} w^3 \cdot 2^i \alpha(Q)^{-4} |Q| \overset{(21)}{\approx} 2^{-2i} h^3.$$

由于 $p \geq 2$，凸性意味着

$$\sum_{u \in \min(R_i)} \delta_z(Q_u)^{p+1} \leq \left(\sum_{u \in \min(R_i)} \delta_z(Q_u)^3 \right)^{\frac{p+1}{3}} \lesssim 2^{-2i \cdot \frac{p+1}{3}} h^{p+1}.$$

Then

$$\begin{aligned} \|g_{R_{i+1}} - g_{R_i}\|^p_{L_p(Q)} &\lesssim \lambda^p w^{-p+1} 2^{i(p-1)} \cdot 2^{-2i \cdot \frac{p+1}{3}} h^{p+1} \\ &= \lambda^p w^{-p+1} h^{p+1} 2^{\frac{ip}{3} - \frac{5i}{3}}, \end{aligned}$$

因此由式（40），

$$\|g_{R_{i+1}} - g_{R_i}\|_{L_p(Q)} \lesssim \lambda 2^{i \cdot \frac{p-5}{3p}} \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)} |Q|^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $p < 5$，该量关于 i 指数地衰减，因此对于任意 n,

$$\begin{aligned} \|g_{R_n} - l_v\|_{L_p(Q)} &\leq \|g_{R_0} - l_v\|_{L_p(Q)} + \sum_{i=0}^{j} \|g_{R_{i+1}} - g_{R_i}\|_{L_p(Q)} \\ &\lesssim \frac{1}{1 - 2^{\frac{p-5}{3}}} \cdot \lambda \cdot \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)} |Q|^{\frac{1}{p}} \\ &\approx \frac{\lambda}{5-p} \cdot \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)} |Q|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

因此，当 $v \in \mathcal{V}_h(\Delta)$ 时，

$$\|f - l_v\|_{L_p(Q)} \lesssim \frac{1}{5-p} \lambda \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)} |Q|^{\frac{1}{p}}.$$

当 $v \in \mathcal{V}_v(\Delta)$ 时，我们采用与引理 4.6 类似的处理。设 $m \in \mathcal{V}_h(\Delta)$ 是 v 的最小水平切割祖先。那么 $l_m = l_v$, $\delta_z(Q_m) \approx \delta_z(Q_v)$，且 $\delta_x(Q_m) \gtrsim \delta_x(Q_v)$。根据水平切割情形，

$$\|f - l_m\|_{L_p(Q_m)} \lesssim \lambda \frac{1}{5-p} \frac{\delta_z(Q_m)}{\delta_x(Q_m)} |Q_m|^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $p \geq 1$，我们有

$$\frac{\delta_z(Q_m)}{\delta_x(Q_m)} |Q_m|^{\frac{1}{p}} \approx \frac{\delta_z(Q_m)^{\frac{p+1}{p}}}{\delta_x(Q_m)^{\frac{p-1}{p}}} \lesssim \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)} |Q_v|^{\frac{1}{p}},$$

so

$$\|l_v - f\|_{L_p(Q_v)} \le \|l_m - f\|_{L_p(Q_m)} \lesssim \lambda \frac{1}{5-p} \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)} |Q_v|^{\frac{1}{p}}.$$

这就证明了 $2 \le p < 5$ 时的命题。如果 $p = 1+\theta$ 对于 $\theta \in (0,1)$，则根据 Lyapunov不等式和（22），

$$\|l_v - f\|_{L_p(Q_v)} \le \|l_v - f\|_{L_1(Q_v)}^{\frac{1-\theta}{p}} \|l_v - f\|_{L_2(Q_v)}^{\frac{2\theta}{p}}$$
$$\lesssim \left(\lambda \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)} |Q_v|\right)^{\frac{1-\theta}{p}} \left(\lambda \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)} |Q_v|^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2\theta}{p}} = \lambda \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)} |Q_v|^{\frac{1}{p}},$$

因此命题对 $p \in [1,5$ 成立）。 □

6. 命题 3.5 的证明

在本节中，我们将证明命题 3.5。回顾该命题，其结论是存在 $\tau > 0$，它只取决于 L（即 $\Gamma = \Gamma_f$的内在 Lipschitz 常数），使得当α_0 充分小时（同样取决于 L），且Q 是一个直线型伪四边形，并满足$\alpha(Q) = \alpha_0$时，有

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \int_0^{\tau\delta_x(Q)} \gamma_{4,f}(x,r)^4 \frac{\mathrm{d}r}{r} \mathrm{d}x \lesssim |Q| \tag{41}$$

其中 $\gamma_{4,f}(x,r) = r^{-\frac{7}{4}} \inf_{h \in \mathrm{Aff}} \|f - h\|_{L_4(V(\Psi_f(x),r))}$。本节中的大多数隐含常数都取决于 Γ 的内在 Lipschitz 常数，因此为简洁起见，我们将。 写作 $\lesssim_L$，其他情况同理。

我们取 $\alpha_{\min}$ 如引理 4.3中所述，令 $0 < \alpha_0 < \alpha_{\min}$，并令 Q 为一个直线型伪四边形，满足 $\alpha(Q) = \alpha_0$。由于命题 3.5 的结论在缩放下保持不变，我们进行缩放，使得 $\delta_z(Q) = 1$ 且 $\delta_x(Q) = \alpha(Q) < 1$。根据引理 4.3，存在一个以$Q$为根的 PSFC，我们将其记为 Δ。

我们通过使用该 PSFC 构造 3.5 命题中 f的近似序列来证明 $i \ge 0$，令

$$S_i := \{w \in \mathcal{V}(\Delta) \mid \delta_z(Q_w) \ge 2^{-2i}\}. \tag{42}$$

若 w与 w'是同层节点，则 $\delta_z(Q_w) = \delta_z(Q_{w'})$；若 v是 w的父节点，则 $\delta_z(Q_v) \ge \delta_z(Q_w)$，因此 S_i是一个相干集。此外，根据 4.4引理，有

$$\delta_x(Q_v) \ge \frac{\alpha_{\min}}{4} \sqrt{\delta_z(Q_v)} \ge \frac{\alpha_{\min}}{4} 2^{-i}$$

对除有限多个 $v \in S_i$以外的所有情形均成立，因此 S_i是有限集。令 $F_i := \min(S_i)$；这是 S_i 的一个划分，Q_v。根据 2.7引理，若 $\delta_z(Q_v) \ge 4 \cdot 2^{-2i}$，则 Q_v的子节点高度大于 2^{-2i}，因此 $v \notin F_i$。也就是说，

$$\delta_z(Q_w) \in [2^{-2i}, 4 \cdot 2^{-2i}) \text{ for all } w \in F_i. \tag{43}$$

对于每个 i，令 g^{S_i}为定义 5.3中的近似，它在 l_w上与 Q_w一致，对于每个 $w \in F_i$。

对于 $x \in V_0$, let

$$\sigma_i(x,r) = r^{-\frac{7}{4}} \inf_{h \in \mathrm{Aff}} \|g_{S_i} - h\|_{L_4(V(\Psi_f(x),r))}.$$

这与 $\gamma_{4,g^{S_i}}$ 类似，只不过范数取在 $L_4(V(\Psi_f(x),r))$ 上。根据三角不等式，对于任意满足 $V(\Psi_f(x),r) \subset Q$ 的 x 和 r，

$$\gamma_{4,f}(x,r) \le r^{-\frac{7}{4}} \|g_{S_i} - f\|_{L_4(V(\Psi_f(x),r))} + \sigma_i(x,r). \tag{44}$$

我们将先陈述并证明上述各项的界，然后证明命题 3.5。我们可以利用命题 5.1 来给 $g^{S_i} - f$ 作界。由于 F_i 是 S_i 的极小元，F_i 中的每个元素都是水平切割。因此，根据命题 5.1，

$$\|l_w - f\|_{L_4(Q_w)} \lesssim \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)} |Q_w|^{\frac{1}{4}} \tag{45}$$

对于所有 $w \in F_i$。于是，由于 $\delta_z(Q_w) \approx 2^{-2i}$，

$$\left(\frac{\|g_{S_i} - f\|_{L_4(Q)}}{2^{-i}}\right)^4 \lesssim \sum_{w \in F_i} \frac{2^{4i}\delta_z(Q_w)^4}{\delta_x(Q_w)^4} |Q_w| \approx W(F_i), \tag{46}$$

其中 $W(F_i) = \sum_{w \in F_i} \alpha(Q_w)^{-4} |Q_w|$ 如定义 2.9中所述。

我们可以使用下面的引理来界定 $\sigma_i(x、r)$。

引理 6.1。 存在一个仅依赖于 L 的常数 $\nu > 0$，使得 $V(\Psi_f(x)、\nu) \subset Q$ 对所有 $x \in \frac{1}{3}Q$ 成立，并且对于任意满足 $2^{-i} \leq {}^{\delta_x(Q)}\alpha_{\min}$ 的 $i \geq 0$，我们有——

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \sigma_i\big(x, \nu 2^{-i}\big)^4 \, \mathrm{d}x \lesssim W(F_i). \tag{47}$$

这两个界将推出该命题。

在证明引理 6.1之前，我们先陈述一些将在第 6.1节证明的引理。

引理 6.2。 对于任意 $0 < L < 1$ 和 $0 < a < b \leq 4$，存在 $0 < \eta < 1$ 使得以下结论成立。设 $\Gamma = \Gamma_f$ 为一个 L-内在 *Lipschitz* 图，且 Q 是关于 Γ的直线型伪四边形。令 $r = \min\{\sqrt{\delta_z(Q)}, \delta_x(Q)\}$。如果 $V(p, \eta r)$ 与某个 $p \in \Gamma$处的 aQ 相交，则 $V(p, \eta r) \subseteq bQ$。

引理 6.3。 设 v，$w \in F_i$。如果 $\delta_x(Q_w) \leq \delta_x(Q_v)$ 且 $Q_w \cap 3Q_v \neq$；，那么 $Q_w \subset 10Q_v$。

利用这个引理，我们可以证明以下界。

引理 6.4. 设 v，$w \in F_i$。若 $\delta_x(Q_w) \leq \delta_x(Q_v)$ 且 $Q_w \cap 3Q_v \neq$；，则

$$\|l_w - l_v\|_{L_\infty(Q_w)} \lesssim \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}. \tag{48}$$

证明。 由引理 6.3，$Q_w \subset 10Q_v$，因此

$$\frac{1}{|Q_w|}\|f - l_{Q_v}\|_{L_1(Q_w)} \leq \frac{1}{|Q_w|}\|f - l_{Q_v}\|_{L_1(10Q_v)} \overset{(32)}{\leq} \frac{1}{|Q_w|}\lambda \frac{\delta_z(Q_v)}{\delta_x(Q_v)}|Q_v| \lesssim \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}.$$

在最后一个不等式中，我们用到了以下事实：$\delta_z(Q_v) \approx \delta_z(Q_w)$，因此引理 2.7可得$|Q_v|/|Q_w| \approx \delta_x(Q_v)/\delta_x(Q_w)$。

同理，

$$\frac{1}{|Q_w|}\|f - l_{Q_w}\|_{L_1(Q_w)} \overset{(32)}{\leq} \lambda \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)},$$

因此由三角不等式，

$$\frac{1}{|Q_w|}\|l_{Q_w} - l_{Q_v}\|_{L_1(Q_w)} \lesssim \frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}.$$

尚需证明 $|Q_w|\mathrm{k}l_v - l_w\mathrm{k}_{L_\infty(Q_w)} \lesssim \mathrm{k}l_v - l_w\mathrm{k}_{L_1(Q_w)}$。事实上，我们声称，若$L$ 是任意仿射函数，且Q 是直线型伪四边形，那么

$$\|L\|_{L_\infty(Q)} \leq 24 \frac{\|L\|_{L_1(Q)}}{|Q|}. \tag{49}$$

设 I $=$x(Q) 为 Q 的底边。经过缩放和平移后，我们可以假设 I $=[-1,1]$。由于 Q 是直线型的，存在函数 g$_1$,g$_2$: I $\to\mathbb{R}$，使得 Q $=\{$(x,0, z)|x $\in$I , z $\in[$g$_1$(x), g$_2$(x)$]\}$；并且存在二次多项式 h$_1$,h$_2$: I $\to\mathbb{R}$，使得 h$_2=$h$_1+\delta_z$(Q) 且 kg_i-h$_i$k$_\infty\le\frac{1}{32}\delta_z$(Q)。特别地， |Q| $\le 3\delta_z$(Q)。

设$M=$kLk$_{L_\infty}(Q)$。由于$L(x,0,z)=ax+b$对某些a和b成立，因此有$M=|L(1,0,0)|$或$M=|L(-1,0,0)|$；假设$M=|L(1,0,0)|$。（另一种情形类似。）

于是，对于$x\ge\frac{1}{2}$，有 $|L(x,0,0)|\ge M2$，因此

$$\|L\|_{L_1(Q)}\ge\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\frac{M}{2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\ge\frac{M}{8}\delta_z(Q)\ge\frac{M}{24}|Q|.$$

这就证明了该引理。 □

现在我们证明引理6.1。

引理的证明*6.1*。 令 ζ: $Q\to\mathbb{R}$ 为满足以下条件的函数：对任意$w\in F_i$和$x\in Q_w$，有$\zeta(x)=\frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}$。如果$w\ne w'$，那么$Q_w$和$Q_{w'}$的交集是一个零测集，因此我们可以任意处理平局。我们将用kζk$_4$来界定γ_4和g_{S_i}。

对于所有 $v\in F_i$，我们有 $\delta_z(Q_v)\in[2^{-2i},4\cdot 2^{-2i}]$。由引理 4.4，这意味着 $\alpha(Q_v)\ge\frac{\alpha_{\min}}{4}$，因此 $\delta_x(Q_v)\ge\frac{\alpha_{\min}}{4}2^{-i}$。然后

$$\frac{\alpha_{\min}}{4}2^{-i}\le\min\{\delta_x(Q_v),\sqrt{\delta_z(Q_v)}\}.$$

由引理 2.6 和引理 6.2，存在一个 $0<\eta_0<1$，使得若 v $\in$ F$_i$、p $\in\Gamma$，且 Q$_v\cap$V (p, $\frac{\alpha_{\min}}{4}\eta_0 2^{-i}$) $\ne$;，则 V (p, $\frac{\alpha_{\min}}{4}\eta_0 2^{-i}$) $\subset$ 3Q$_v$。同样，存在一个 $0<\eta_1<1$，使得若 x $\in\frac{1}{3}$ Q$_v$，则

$$V(\Psi_f(x),\frac{\alpha_{\min}}{4}\eta_1 2^{-i})\subset\frac{2}{3}Q_v\subset Q_v.$$

令 $\nu=\frac{\alpha_{\min}}{4}\min\{\eta_0,\eta_1\}$;；我们可以选择 ν，使其仅依赖于 L。那么，对于所有$x\in\frac{1}{3}Q$，$V(\Psi_f(x),\nu)\subset Q$。

令 x $\in\frac{1}{3}$Q，且令 D(x) $=$V (Ψ_f(x),ν2^{-i})。令 v$_1$,...、 v$_n\in$F$_i$为满足 Q$_{v_i}$与 D(x) 相交的元素，并假设对于所有 i，都有 δ_x(Q$_{v_1}$) $\ge\delta_x$(Q$_{v_i}$)。对于任意 y $\in$D(x)，我们有 y $\in$3 Q$_{v_1}$，并且存在某个 j 使得 y $\in$Q$_{v_j}$。根据引理 6.4，

$$|g_{S_i}(y)-l_{v_1}(y)|=|l_{v_j}(y)-l_{v_1}(y)|\lesssim\zeta(y).$$

因此，

$$\sigma_i(x,\nu 2^{-i})\le(\nu 2^{-i})^{-\frac{7}{4}}\|g_{S_i}-l_{v_1}\|_{L_4(D(x))}\lesssim 2^{\frac{7i}{4}}\|\zeta\|_{L_4(D(x))}\tag{50}$$

and

$$\int_{\frac{1}{3}Q}\sigma_i(x,\nu 2^{-i})^4\,\mathrm{d}x\lesssim 2^{7i}\int_{\frac{1}{3}Q}\int_{D(x)}\zeta^4(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=:I.$$

令c 如引理 3.2 中所述。则对于每个 $x\in\frac{1}{3}Q$ 以及 $y\in D(x)$，都有 $x\in V(\Psi_f(y),c\nu 2^{-i})$。我们对 ν的选择意味着 $y\in Q$，因此根据富比尼定理，

$$I\le 2^{7i}\int_Q\int_{V(\Psi_f(y),c\nu 2^{-i})}\zeta^4(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\lesssim 2^{4i}\|\zeta\|_{L_4(Q)}^4.$$

此外，由于对所有$Q_w\approx 2^{-2i}$ $w\in F_i$均成立，

$$\|\zeta\|_{L_4(Q)}^4=\sum_{w\in F_i}|Q_w|\frac{\delta_z(Q_w)^4}{\delta_x(Q_w)^4}=\sum_{w\in F_i}\frac{|Q_w|\delta_z(Q_w)^2}{\alpha^4(Q_w)}\approx 2^{-4i}W(F_i),$$

so

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \sigma_i(x, \nu 2^{-i})^4 \, \mathrm{d}x \lesssim 2^{4i} \|\zeta\|_{L_4(Q)}^4 \lesssim W(F_i)$$

正如所需。 □

最后，我们证明命题 3.5。

命题 *3.5*的证明。 令 Δ、S_i 和 F_i如上，并令 ν 如引理 6.1 中所述。令$\tau = \frac{\nu}{2\alpha_{\min}}$和 $i_0 = \left\lceil \log_2 \frac{\alpha_{\min}}{\delta_x(Q)} \right\rceil$ 使得 $2^{-i_0} \le \delta_x(Q)\, \alpha_{\min}$和 $\nu 2^{-i_0} \ge \tau \delta_x(Q)$。

假设 $i \ge i_0$，并令 $r_i = \nu 2^{-i}$。由（44）和引理 6.1，

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \gamma_{4,f}(x, r_i)^4 \, \mathrm{d}x \lesssim \int_{\frac{1}{3}Q} r_i^{-7} \|g_{S_i} - f\|_{L_4(V(\Psi_f(x), r_i))}^4 \, \mathrm{d}x + W(F_i).$$

如引理 6.1的证明中所示，富比尼定理表明

$$r_i^{-7} \int_{\frac{1}{3}Q} \|g_{S_i} - f\|_{L_4(V(\Psi_f(x), r_i))}^4 \, \mathrm{d}x \lesssim r_i^{-4} \|g_{S_i}(y) - f(y))\|_{L_4(Q)}^4,$$

并由（46），

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \gamma_{4,f}(x, r_i)^4 \, \mathrm{d}x \lesssim W(F_i) + W(F_i) \lesssim W(F_i).$$

对于 $r \in [\frac{r_i}{2}, r]$，，我们有 $\gamma_{4,f}(x,r) \lesssim \gamma_{4,f}(x,r_i)$，因此

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \int_{\frac{r_i}{2}}^{r_i} \gamma_{4,f}(x, r)^4 \frac{\mathrm{d}r}{r} \, \mathrm{d}x \lesssim \int_{\frac{1}{3}Q} \gamma_{4,f}(x, r)^4 \, \mathrm{d}x \lesssim W(F_i).$$

根据 (43)，若 $w \in F_i$，则 $\delta_z(Qw) \in [2^{-2i}, 4 \cdot 2^{-2i})$。由此可知，各个 F_i互不相交，因此我们可以对 $i \ge i_0$ 求和，得到

$$\int_{\frac{1}{3}Q} \int_0^{\nu 2^{-i_0}} \gamma_{4,f}(x, r)^4 \frac{\mathrm{d}r}{r} \, \mathrm{d}x \lesssim \sum_{i=i_0}^{\infty} W(F_i) \le W(\mathcal{V}(\Delta)) \lesssim |Q|.$$

这就证明了该命题。 □

6.1. **直线型伪四边形的几何性质**。 本节将证明内在Lipschitz图的直线型伪四边形的一些基本结果和界。回顾一下，$\Gamma = \Gamma_f$的直线型伪四边形是一个三元组 (Q, R_Q)，其中 Q 是一个伪四边形，R_Q 是一个逼近Q的抛物矩形。那么，R_Q 是斜率为 slope(Q) 的竖直平面中的一个伪四边形，我们将该平面记为 P_Q。

我们的第一组结果讨论一般的直线型伪四边形，不对参数单调性作任何假设；我们的目标是证明引理 6.2。我们首先用内在Lipschitz常数来界定直线型伪四边形的斜率。

引理 6.5. 设 (Q, R) 是一个 L-内在 *Lipschitz* 图的直线型伪四边形。那么

$$|\operatorname{slope} Q| \le \frac{L}{\sqrt{1 - L^2}} + \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)^2} = \frac{L}{\sqrt{1 - L^2}} + \alpha(Q)^{-2}. \tag{51}$$

证明。 令I 表示Q的底边。经过平移和缩放后，不妨设$I = [-\delta_x(Q)/2, \delta_x(Q)/2]$。令$W = 2\delta_x(Q)$，于是$4I = [-W, W]$。令$g$和$h$ 分别为其图像构成Q 和

R上边界的特征曲线对应的函数。由于h是二次函数，且$Q = -h''(x)$，故存在$b,c \in \mathbb{R}$，使得$h(x) = -$斜率$(Q)\frac{x^2}{2} + bx + c$。因此，

$$|\mathrm{slope}(Q)| = \frac{|h(-W) - 2h(0) + h(W)|}{W^2}.$$

根据引理 2.3，

$$\begin{aligned}
&|g(-W) - 2g(0) + g(W)| \\
&\qquad \le |g(-W) - g(0) + g'(0)W| + |g(W) - g(0) - g'(0)W| \\
&\qquad \overset{(11)}{\le} \frac{L}{\sqrt{1-L^2}} W^2.
\end{aligned}$$

根据Q的直线性，

$$\max_{t\in[-W,W]} |g(t) - h(t)| \le \frac{1}{32}\delta_z(Q),$$

so

$$|\mathrm{slope}(Q)| = \frac{|h(-W) - 2h(0) + h(W)|}{W^2} \le \frac{L}{\sqrt{1-L^2}} + \frac{1}{32}\frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)^2}.$$

□

我们利用这一点来界定P_Q到 Γ_f的距离。

引理 6.6。 对于任意 $0 < L < 1$，存在一个 $\eta > 0$，使得以下结论成立。设 Γ_f为一个 L-内在 *Lipschitz* 图，并设 Q 是关于 Γ_f 的直线型伪四边形。设 λ 为仿射函数，使得 $P_Q = \Gamma_\lambda$。那么对于所有 $p \in 4Q$，

$$|f(p) - \lambda(p)| \le \eta \max\left\{\sqrt{\delta_z(Q)}, \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}\right\}. \tag{52}$$

证明。 令I为Q的底边，并令g_Q、g_R：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$为函数，其图像分别是经过$Q$和$R$顶点的特征曲线。经过左平移后，不妨设$I = [-\delta_x(Q)/2, \delta_x(Q)/2]$，且$P_Q$经过$\mathbf{0}$。于是$\lambda(x,z) = mx$，而$g_R(x) = g_R(0) - \frac{1}{2}mx^2$,，其中$m =$为$Q$的斜率。

我们首先证明，如果 $\tau = \frac{3L}{\sqrt{1-L^2}} + 2$，那么

$$\max_{t\in 4I} |f(t, 0, g_Q(t)) - mt| \le \tau \max\left\{\sqrt{\delta_z(Q)}, \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}\right\}. \tag{53}$$

令 $s \in 4I$，$q = (s, 0, g_1(s))$，并令 $h = \min\{\sqrt{\delta_z(Q)}, \delta_x(Q)\}$。不妨设 $s + h \in 4I$。由直线性，$|g_Q(x) - g_R(x)| \le \frac{1}{32}\delta_z(Q)$ 对所有 $x \in 4I$ 都成立。由引理 2.3，

$$|g_Q(s+h) - g_Q(s) - hg_Q'(s)| \le \frac{L}{\sqrt{1-L^2}}\frac{h^2}{2},$$

并由引理 6.5，

$$|g_R(s+h) - g_R(s) - hg_R'(s)| = \frac{1}{2}|m|h^2 \le \frac{2L}{\sqrt{1-L^2}}h^2 + \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)^2}h^2.$$

由于 $|(g_R(s+h) - g_R(s)) - (g_Q(s+h) - g_Q(s))| \le \frac{1}{16}\delta_z(Q)$，由此可得

$$|hg_Q'(s) - hg_R'(s)| \le \frac{3L}{\sqrt{1-L^2}}h^2 + \frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)^2}h^2 + \frac{1}{16}\delta_z(Q).$$

我们将两边同时除以 h，得到

$$|g_Q'(s)+ms| \le \frac{3L}{\sqrt{1-L^2}}\sqrt{\delta_z(Q)}+\frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}+\max\left\{\sqrt{\delta_z(Q)},\frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}\right\}$$
$$\le \tau\max\left\{\sqrt{\delta_z(Q)},\frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}\right\}.$$

由（10），$f(s,0,g_Q(s))=-g_Q'(s)$，这证明了（53）。

最后，设 $(x,0,z)\in 4Q$。则 $x\in 4I$ 且 $|z-g_Q(x)|\le 16\delta_z(Q)$，因此

$$|f(x,0,z)-mx| \le |f(x,0,z)-f(x,0,g_Q(x))|+|f(x,0,g_Q(x))-mx|$$
$$\overset{(8)\wedge(53)}{\le} \frac{16}{1-L}\sqrt{\delta_z(Q)}+\tau\max\left\{\sqrt{\delta_z(Q)},\frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}\right\}.$$

取 $\eta=\tau+\frac{16}{1-L}$ 即可得到该引理。 □

最后，我们可以证明引理 6.2。

引理 6.2 的证明。设 $x\in\Gamma$ 且 $\rho>0$ 使得 $V(x,\rho)$ 与 aQ 相交。设 $p\in V(x,\rho)\cap aQ$。由引理 3.2，存在 $c>0$ 使得

$$V(x,\rho)\subset\Pi(B(x,c\rho)\cap\Gamma)\subset\Pi(B(\Psi_f(p),2c\rho)\cap\Gamma)\subset V(p,2c\rho). \tag{54}$$

我们断言存在某个 $\eta'>0$，使得对每个 $p\in\Psi_f(aQ)$，都有 $V(p,\eta' r)\subset bQ$。取 $\eta=(2c)^{-1}\eta'$，即可得到完整的断言。

令 I 为 Q 的底边，并令 m =为 Q 的斜率。经过左平移后，不妨设 $I=[-\delta_x(Q)/2,\delta_x(Q)/2],$，且 $P_Q=\Gamma_\lambda$，其中 $\lambda(x)=mx$，并且

$$R_Q=\left\{(x,0,z):x\in I,\left|z+\frac{m}{2}x^2\right|\le\frac{\delta_z(Q)}{2}\right\}.$$

令 $v=(x_0,0,z_0)\in aQ$。则

$$\left|z_0+\frac{m}{2}x_0^2\right|\le\frac{a^2}{2}\delta_z(Q).$$

令 $c=z_0+\frac{m}{2}x_0^2$，并令 $g(x)=c-\frac{m}{2}x^2,$，使得 g 的图像是经过 v 的 PQ 的特征曲线。令 $d=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$，并令

$$T:=\{(x,0,z)|x\in bI,|z-g(x)|\le d\delta_z(Q)\}.$$

若 $(x,0,z)\in T$，则

$$\left|z+\frac{m}{2}x^2\right|\le|c|+d\delta_z(Q)\le\frac{b^2}{2}\delta_z(Q),$$

所以 $T\subset bQ$。我们断言存在一个 ν 仅取决于L的量，使得 $V(p,\nu r)\subset T$。由引理 3.1，

$$V(p,\nu r)\subset\left\{(x,0,z)||x-x_0|\le\nu r,|z-z_0+(x-x_0)f(v)|\le(\nu r)^2\right\}.$$

若 $(x,0,z)\in V(p,\nu r)$，则

$$|z-g(x)|\le(\nu r)^2+|g(x)-z_0+(x-x_0)f(v)|\le\nu^2\delta_z(Q)+|\ell(x)|, \tag{55}$$

其中 $\ell(x)=g(x)-z_0+(x-x_0)f(v)$。注意，$\ell(x_0)=0$。根据引理 6.6，

$$|\ell'(x_0)|=|g'(x_0)+f(v)|\overset{(10)}{=}|f(v)-\lambda(v)|\le\eta\max\left\{\sqrt{\delta_z(Q)},\frac{\delta_z(Q)}{\delta_x(Q)}\right\}=\eta\frac{\delta_z(Q)}{r}.$$

最后，$\ell''(x_0)=-m$。因此，对于 $|x-x_0|\le\nu r$，

$$|\ell(x)|\le\nu r\eta\frac{\delta_z(Q)}{r}+(\nu r)^2\frac{|m|}{2}\overset{(51)}{\le}\nu\eta\delta_z(Q)+\nu^2\delta_z(Q)\left(\frac{L}{\sqrt{1-L^2}}+1\right). \tag{56}$$

如果 $0<\nu<\mathrm{b}-\mathrm{a}$ 足够小，并且 $(\mathrm{x},0,\mathrm{z})\in\mathrm{V}(\mathrm{p},\nu\mathrm{r})$，则 (55) 和 (56) 蕴含 $|\mathrm{z}-\mathrm{g}(\mathrm{x})|\le \mathrm{d}\delta_z(\mathrm{Q})$，从而 $(\mathrm{x},0,\mathrm{z})\in\mathrm{T}$。因此，$\mathrm{V}(\mathrm{p},\nu\mathrm{r})\subset\mathrm{bQ}$，所求得证。

□

接下来，我们考虑属于 PSFC 的伪四边形，并证明引理 6.3。设 Δ 为一个 PSFC，设 S_i 如（42）所示，并令 $\mathrm{F}_i=\min\mathrm{S}_i$。对于 $\mathrm{p}\in\mathrm{V}_0,$，令 $\kappa_{\Gamma、p}$ 为一个函数，其图像是经过 p 的 Γ 的特征曲线，即满足初始条件 $\kappa_{\Gamma、p}(\mathrm{x}(\mathrm{p}))=\mathrm{z}(\mathrm{p})$ 的（10）的一个解。对于 $\mathrm{w}\in\mathrm{F}_i$，令 $\mathrm{R}_w=\mathrm{R}^{Q_w}$ 且 $\mathrm{P}_w=\mathrm{P}^{Q_w}$。令 ρ_w 为满足 $\mathrm{R}_w=\Gamma_{\rho_w}$ 的仿射函数。由于 $\mathrm{Q}w$ 是 PSFC 的一部分，它具有一个满足命题 2.8 的 λ–逼近平面Λ_w，我们令 $\mathrm{l}w$ 为相应的仿射函数。$\mathrm{P}w$ 和 Λ_w 的构造不同，因此它们不必是同一个平面，但它们必须彼此接近，具体如下述引理所示。

引理 6.7。令 Δ 为一个 *PSFC*，且令 $w\in\mathcal{V}(\Delta)$。令 $I=x(Q_w)$。那么，对于任意 $q\in 4Q_w$,

$$\|\kappa_{P_w,q}-\kappa_{\Lambda_w,q}\|_{L_\infty(4I)}\le\frac{3}{32}\delta_z(Q_w)$$

and

$$\|\kappa_{P_w,q}-\kappa_{\Gamma,q}\|_{L_\infty(4I)}\le\frac{1}{8}\delta_z(Q_w).$$

事实上，对于满足命题 Q 的任意伪四边形，该引理 2.8均成立。

证明。令 $\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2,\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2:4\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ 为参数化 $\mathrm{Q}w$边界的函数，使得 $\mathrm{Q}_w=\{(\mathrm{x},0,\mathrm{z})|\mathrm{x}\in\mathrm{I},\mathrm{z}\in[\mathrm{g}_1(\mathrm{x}),\mathrm{g}_2(\mathrm{x})]\}$ 和 $\mathrm{R}_w=\{(\mathrm{x},0,\mathrm{z})|\mathrm{x}\in\mathrm{I},\mathrm{z}\in[\mathrm{h}_1(\mathrm{x}),\mathrm{h}_2(\mathrm{x})]\}$。

令 $q\in 4Q_w$，并令 $p=(x(q),0,g_1(q))$，使得 p 位于 g_1的图像上；我们可以取$g_1=\kappa_{\Gamma,p}$。由于 Λ_w和 P_w是竖直平面，

$$\kappa_{\Lambda_w,p}-\kappa_{P_w,p}=\kappa_{\Lambda_w,q}-\kappa_{P_w,q},$$

并且我们有

$$\|\kappa_{P_w,p}-\kappa_{\Lambda_w,p}\|_\infty\le\|\kappa_{P_w,p}-h_1\|_\infty+\|h_1-g_1\|_\infty+\|g_1-\kappa_{\Lambda_w,p}\|_\infty \tag{57}$$

其中所有范数均取于 $L_\infty(4I)$ 中。由 Q_w 的直线性，前两项分别至多为 $\frac{1}{32}\delta_z(Q)$；根据命题 2.8，最后一项至多为 $\frac{1}{32}\delta_z(Q)$。这就证明了第一个不等式。

因此，由（57）和命题 2.8,

$$\begin{aligned}\|\kappa_{P_w,q}-\kappa_{\Gamma,q}\|_\infty&\le\|\kappa_{P_w,q}-\kappa_{\Lambda_w,q}\|_\infty+\|\kappa_{\Lambda_w,q}-\kappa_{\Gamma,q}\|_\infty\\&\le\frac{3}{32}\delta_z(Q_w)+\frac{1}{32}\delta_z(Q_w).\end{aligned}$$

这就证明了该引理。

□

注意，由（10），这意味着

$$\|\rho_w-l_w\|_{L_\infty(4Q_w)}\lesssim\frac{\delta_z(Q_w)}{\delta_x(Q_w)}.$$

我们使用引理 6.7来证明引理 6.3，该引理表明：如果 $\nu、w\in F_i$，$\delta_x(Q_w)\le\delta_x(Q_\nu)$，并且 $Q_w\cap 3Q_\nu\neq;$，，那么 $Q_w\subset 10Q_\nu$。

引理的证明 6.3.设 $I_\nu=x(Q_\nu)$ 和 $I_w=x(Q_w)$ 分别为 Q_ν 和 Q_w 的底边。由于$Q_w\cap 3Q_\nu$非空，$I_w\subset 4I_\nu$。设c_ν为R_ν的中心，并令 $\gamma_\nu=\kappa_{P_\nu,c_\nu}$，使得若$\ell=\delta_z(Q_\nu)2$，则

$$rQ_\nu=\left\{(x,z)\mid x\in I_\nu,|z-\gamma_\nu(x)|\le r^2\ell\right\}.$$

同样，设c_v为Q_w的中心，并令$\gamma_w = \kappa_{P_w,c_v}$。我们声称，对于$x \in I_w$，$|\gamma_v(x)-\gamma_w(x)| \le 20\ell$。

设$q = (x_0, z_0) \in Q_w \cap 3Q_v$。由于$\gamma_v$和$\kappa_{P_v,q}$平行，因此对所有$x$，都有$\gamma_v(x) = \kappa_{P_v,q}(x)+d$，其中$d = \gamma_v(x_0) - z_0$。由于$q \in 3Q_v$，故有$|d| \le 9\ell$。

类似地，$\gamma_w(x) = \kappa_{P_w,q}(x) + d'$，并且由于$q \in Q_w$且$\delta_z(Q_w) \le 4\delta_z(Q_v)$，

$$|d'| = |\gamma_w(x_0) - z_0| \le \delta_z(Q_w) \le 8\ell.$$

因此，由引理6.7，对所有$x \in I_w$，

$$\begin{aligned}|\gamma_v(x) - \gamma_w(x)| &\le |d| + |d'| + |\kappa_{P_w,q}(x) - \kappa_{P_v,q}(x)| \\ &\le 17\ell + |\kappa_{P_w,q}(x) - \kappa_{\Gamma,q}(x)| + |\kappa_{\Gamma,q}(x) - \kappa_{P_v,q}(x)| \\ &\le 17\ell + \frac{\delta_z(Q_w)}{8} + \frac{\delta_z(Q_v)}{8} \le 20\ell.\end{aligned}$$

设$p = (x,0,z) \in Q_w$。那么$x \in I_w$且$|z - \gamma_w(x)| \le \delta_z(Q_w) \le 8\ell$，因此$|z - \gamma_v(x)| \le 28\ell$。于是$p \in 10Q_v$，从而$Q_w \subset 10Q_v$。□

参考文献

[AK00] Luigi Ambrosio 和 Bernd Kirchheim。度量空间和 Banach 空间中的可整流集。Math. Ann., 318(3):527–555, 2000。[BCSC15] F. Bigolin、L. Caravenna 和 F. Serra Cassano。Heisenberg 群中的内在 Lipschitz图与平衡方程的连续解。Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire, 32(5):925– 963, 2015。[CFO19a] Vasileios Chousionis、Katrin Fässler 和 Tuomas Orponen。Heisenberg 群中 $C^{1,\alpha}$ 内在图上奇异积分的有界性。Adv. Math., 354:106745, 45, 2019。[CFO19b] Vasileios Chousionis、Katrin Fässler 和 Tuomas Orponen。Heisenberg 群中的内在Lipschitz图与垂直β-数。Amer. J. Math., 141(4):1087–1147, 2019。[CK10] Jeff Cheeger 和 Bruce Kleiner。度量微分、单调性以及到 L^1 的映射。Invent.Math., 182(2):335–370, 2010。[CLY22a] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 ROBERT YOUNG。Heisenberg 群中内在Lipschitz图上的 Riesz 变换。预印本，arXiv:2207.03013, 2022。[CLY22b] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 ROBERT YOUNG。Heisenberg 群中内在Lips- chitz 图的强几何引理。J. Reine Angew. Math., 784:251–274, 2022。[CLZ19] Vasileios Chousionis、Sean Li 和 Scott Zimmerman。Carnot群中的旅行推销员定理。Calc. Var. Partial Differential Equations, 58(1):Art. 14, 35, 2019。[Dor85] José R. Dorronsoro。势空间的刻画。Proc. Amer. Math. Soc., 95(1):21–31, 1985。[DS91] G. David 和 S. Semmes。 $\mathbb{R}^n$ 中的奇异积分与可整流集：超越 Lipschitz图。Astérisque, (193):152, 1991。[DS93] Guy David 和 Stephen Semmes。一致可整流集的分析及其上的分析，Math- ematical Surveys and Monographs 第 38 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993。[DS17] Guy C. David 和 Raanan Schul。图逆极限中的分析师旅行推销员定理。Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 42:649–692, 2017。[FFP07] Fausto Ferrari、Bruno Franchi 和 Hervé Pajot。Heisenberg 群中的几何旅行推销员问题。Rev. Mat. Iberoam., 23(2):437–480, 2007。[FO20] Katrin Fässler 和 Tuomas Orponen。Carnot群中的 Dorronsoro 定理。Bull. Lond. Math. Soc., 52(3):472–488, 2020。[FO21] Katrin Fässler 和 Tuomas Orponen。Heisenberg 群中的 Riesz 变换与垂直振荡。Anal. PDE, 2021。即将出版。[FOR18] Katrin Fässler、Tuomas Orponen 和 Severine Rigot。Heisenberg 群中的 Semmes 曲面与内在 Lipschitz 图。Trans. Amer. Math. Soc., 2018。即将出版。[FS16] Bruno Franchi 和 Raul Paolo Serapioni。Carnot群中的内在Lipschitz图。J. Geom. Anal., 26(3):1946–1994, 2016。[FSSC06] Bruno Franchi、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano。Heisenberg 群中的内在Lipschitz图。J. Nonlinear Convex Anal., 7(3):423–441, 2006。

[FSSC11] Bruno Franchi、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano。Heisenberg 群中内在Lipschitz函数的可微性。J. Geom. Anal., 21(4):1044–1084, 2011。[Jon89] Peter W. Jones。平方函数、Cauchy积分、解析容量与调和测度。载于《调和分析与偏微分方程》（El Escorial，1987），Lecture Notes in Math. 第 1384 卷，第 24–68 页。Springer，柏林，1989。[Jon90] Peter W. Jones。可整流集与旅行商问题。Invent. Math., 102(1):1–15, 1990。[LD15] Enrico Le Donne。Carnot群的度量刻画。Proc. Amer. Math. Soc., 143(2):845– 849, 2015。[Li19] Sean Li。分层 β-数与 Carnot群中的旅行推销员问题。预印本，arXiv:1902.03268, 2019。[LS16a] Sean Li 和 Raanan Schul。Heisenberg 群中的旅行商问题：曲率的上界。Trans. Amer. Math. Soc., 368(7):4585–4620, 2016。[LS16b] Sean Li 和 Raanan Schul。Heisenberg 群中旅行商路径长度的一个上界。Rev. Mat. Iberoam., 32(2):391–417, 2016。[Mat23] Pertti Mattila。可整流性：综述。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，2023。[MSSC10] Pertti Mattila、Raul Serapioni 和 Francesco Serra Cassano。Heisenberg 群中内在可整流性的刻画。Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 9(4):687–723, 2010。[NY18] Assaf Naor 和 ROBERT YOUNG。垂直周长与水平周长。Ann. of Math. (2), 188(1):171–279, 2018。[NY22] Assaf Naor 和 ROBERT YOUNG。叶状日冕分解。Acta Math., 229(1):55–200, 2022。[Oki92] Kate Okikiolu。R[n 中可整流曲线子集的刻画。J. London Math. Soc. (2), 46(2):336–348, 1992。19] Rig[Severine Rigot。Heisenberg 群中可整流性的定量概念。预印本，arXiv:1904.06904, 2019。16] SC[Francesco Serra Cassano。Carnot群中的几何测度论若干主题。载于《次黎曼流形上的几何、分析与动力学》第 1 卷，EMS Ser. Lect. Math.，第 1–121 页。Eur. Math. Soc.，苏黎世，2016。07] Sch[Raanan Schul。Hilbert空间中的可整流曲线子集——分析师旅行商问题。J. Anal. Math., 103:331–375, 2007。22] VitDavideVittone。Heisenberg 群中的 Lipschitz图与流。Forum Math. Sigma, 10:Paper No. e6, 104, 2022。

数学系，康涅狄格大学，电子邮箱： vasileios.chousionis@uconn.edu

数学系，康涅狄格大学，电子邮箱： sean.li@uconn.edu

库朗研究所，数学科学，纽约大学电子邮箱： ryoung@cims.nyu.edu