逻辑的同伦与上同调解释

Thiago Alexandre*

Gabriel Bittencourt Rios†

Hugo Luiz Mariano‡

arXiv:2304.13786v1 [math.LO] 26 Apr 2023

摘要

基于 Ren´e Guitart 的一些思想，我们提出一个范畴框架，用于研究抽象逻辑中的若干偏离概念。

1 引言

从 Ren´e Guitart 的形式反射出发，我们希望提出一种对逻辑中满足概念的（上）同调/同伦解读。在 [10], [11] 和 [12], Guitart 概述了一个旨在几何化逻辑的计划。在那里，这一项目经过多方面的考量，最终促使 Guitart 为以下口号辩护：

逻辑 =同调代数。

具体而言，Guitart 利用 Ehresmann 图式 [7] 以及 Andr´e 的一些单纯形方法（例如参见[1]），在 [12] 中为给定语言 $\mathcal{L}$上的句子 φ 和结构 M 构造了（上）同调群 $H^{\varphi}_{\bullet}(M), H^{\bullet}_{\varphi}(M)$。这种归属方式使得当 $M \vDash \varphi$时，这些结构都是无圈的（即（上）同调群是平凡的）。从这个意义上说，我们得到了一个值得注意的事实：（上）同调群衡量了结构 M 成为句子 φ的一个模型时所面临的障碍。

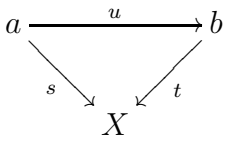
值得注意的是，Guitart 的方法可以推广。他的具体论证使用局部自由图表，以及与一阶语言相关的 sketch 的构造。然而，一般论证完全是范畴论的：给定某个局部小范畴 $\mathcal{C}$ 的一个小子范畴 A

*圣保罗大学，巴西，thiago2.alexandre@usp.br
†图卢兹大学，法国，gb.rios01@gmail.com
‡圣保罗大学，巴西，hugomar@ime.usp.br

以及函子 $T\colon\ A \longrightarrow \mathcal{A}b$ 从 A 到阿贝尔群[1], , 我们为 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 X 赋予小范畴 A/X 的同调与上同调，其系数取自 T:

$$\mathsf{H}_*(A/X;T), \qquad \mathsf{H}^*(A/X;T).$$

记住，范畴 A/X 由满足以下条件的对 $(a、\ s)$ 组成： a 是 A 的一个对象，并且 $s\colon\ a \to X$ 是 $\mathcal{C}$ 中从 a 到 X 的箭头，而 A/X 的态射则由交换三角形明确定义:



与上文类似，或者说，（上）同调群 $H_\bullet(A/X;\ T)$, $H^\bullet(A/X;\ T)$ 在 X 是 A 中的一个对象时都是平凡的。此外，这些群只取决于 A/X 的同伦型。我们注意到，如果考虑 $\mathcal{L}$-结构$\mathcal{L}_Str$ 范畴中由模型构成的全子范畴 Mod(φ)，以及常函子 $k_{\mathbb{Z}}\colon\ A \to \mathcal{A}b$ ，就可以还原 Guitart 的方案。尽管如此，这一框架的普遍性表明，Guitart 提出的（上）同调解释本质上并不依赖于一阶逻辑的特定语义。实质上，要使用我们的方法，只需选定一个充当结构的范畴，以及一个上述范畴的子范畴，用来充当某个句子的模型。

在 Diaconescu 于 [6] 中发展起来的机构理论中，可以找到一种良好的形式体系，为我们上述方法提供所需的要素。简而言之，它提出了一种抽象模型论，其中可满足性 $\models$ 的概念是原始概念。该项目的适用范围确实相当广泛，不仅能够很好地处理通常的一阶逻辑、模态逻辑和命题逻辑，还能够处理计算机科学中自然出现的更为晦涩的实例。此外，机构理论本身已经采用范畴语言来表述。因此，将 Guitart 的论证推广到机构框架中似乎是很自然的，并且可以证明，他最初的口号比乍看之下所呈现的含义要深刻得多：它能够在 Grothendieck 所推动的范畴同伦理论中获得精确的数学形式化（见 [14], [5], [4]）。

最后，我们试图提出一种初等等价的上同调（同时也是同伦）概念，该概念推广了传统定义，并可能产生相关的影响。

[1]在实践中，我们通常关注将给定的遗忘函子 $U\colon\ A \to Set$ 与自由阿贝尔群函子 $\mathbb{Z}[-]\colon\ Set \to \mathcal{A}b$复合

在逻辑中（另见 [2]）。进一步阐述这一点，我们旨在引入（余）同调技术，以弥补满足关系的僵化性质。事实上，塔斯基式的满足关系 ⊩ 是一种二元关系，不存在“可满足性”这一中间概念。（余）同调方法可以填补这一空白，从而建立一种更精细的初等等价关系。在本次报告中，我们将通过数学例子来阐释这一观点。

约定：我们固定两个宇宙 U 和 V，其中 $\omega \in \mathsf{U} \in \mathsf{V}$。宇宙 U 称为局部宇宙，而项集（分别为范畴、小范畴）这一术语将专用于 V-集合（分别为 V-范畴、V-小范畴）。更详细地说：设 U 为一个宇宙。若一个范畴 C 满足 $\mathsf{Ob}A$，$\mathsf{Fl}A \in \mathsf{U}$，则称其为 U-小范畴；若对于 A 中的任意一对对象 (a, b)，均有 $Hom_A(a, b) \in \mathsf{U}$，则称其为 U-局部小范畴。最后，若 A 是 U-局部小范畴，且 $\mathsf{Ob}A \subseteq \mathsf{U}$，则称其为 U-范畴。若一个集合 x 满足 $x \in \mathsf{U}$，则称其为 U-小集合。

2 逻辑

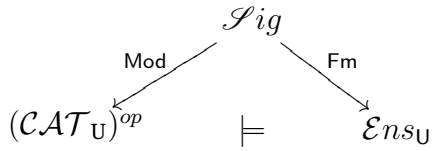
对我们而言，“逻辑”一词将与其两种抽象研究方法相对应：制度理论和 π-制度理论（[9], [6], [8], [13], [16]）。

制度这一概念由 J. A. Goguen 和 R. M. Burstall 提出（参见 [9]），旨在为形式逻辑系统这一概念提供统一的数学形式体系，即它提供了一种“.....范畴化抽象模型理论，用于形式化逻辑系统的直观概念，包括句法、语义以及它们之间的满足关系.....”（[6]）。这意味着，它涵盖了逻辑的普遍模型论这一抽象概念：它包含模型与句子之间的满足关系，且这种关系“在符号表示发生变化时保持稳定”。制度有若干自然的实例，而 Diaconescu 的著作 [6]则系统地介绍了基于制度这一一般概念的抽象模型论研究。

制度概念的一种证明论变体，即 π-制度的概念，由 Fiadeiro 和 Sernadas 在 [8] 中引入：它将演绎系统的概念形式化，并“.....用一个原始的后承算子（⊩ 塔斯基式）取代模型和满足关系的概念”。赋有自然的翻译态射概念的命题逻辑范畴提供了π-制度的实例。

定义 2.1. 局部制度 I 由一个四元组组成。

$$\mathbf{I} = (\mathscr{S}ig, \mathsf{Fm}, \mathsf{Mod}, \models)$$



其中

1. $\mathscr{S}ig$ 是一个小范畴，称为签名范畴。 $\mathscr{S}$的对象（分别地，箭头）将用符号 Σ、 Σ'、 Σ''...（分别地， σ、 σ'、 σ''...）表示。

2. Fm: $\mathscr{S}ig \to \mathcal{E}ns_{\mathsf{U}}$ 是一个从签名范畴到 U-集合范畴[2]的函子，它将每个签名 Σ 映射到一个由 Σ上的公式构成的 U-集合 $\mathsf{Fm}(\Sigma)$ ，称为 Σ-公式；并将每个签名态射 $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ 映射到一个函数

$$\sigma_\sharp =_{df} \mathsf{Fm}(\sigma) : \mathsf{Fm}(\Sigma) \longrightarrow \mathsf{Fm}(\Sigma').$$

3. Mod : $\mathscr{S}ig^{op} \to \mathcal{CAT}_{\mathsf{U}}$ 是一个从签名对偶范畴到 U-范畴范畴的函子，它将每个签名 Σ 映射到一个由 Σ-模型构成的 U-范畴 $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ ，并将每个签名态射 $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ 映射到一个函子

$$\sigma^\sharp =_{df} \mathsf{Mod}(\sigma) : \mathsf{Mod}(\Sigma') \longrightarrow \mathsf{Mod}(\Sigma).$$

4. $\models$ 是一个函数，为每个签名 Σ 分配一个关系

$$\models_\Sigma \subseteq Ob(\mathsf{Mod}(\Sigma)) \times \mathsf{Fm}(\Sigma)$$

称为 Σ-可满足性。给定一个模型 Σ-模型 M 和一个 Σ-公式 φ，我们写作 $M \models_\Sigma \varphi$ ，表示二元组 $(M、\varphi)$ 是 $\models_\Sigma$ 的一个元素。

此外，以下条件得到验证：

(I1). 如果 $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ 是一个签名态射， M' 是一个 Σ'-模型，且 φ 是一个 Σ-公式，那么 $M' \models_{\Sigma'} \sigma_\sharp(\varphi)$ 当且仅当 $\sigma^\sharp(M') \models_\Sigma \varphi$。

(I2). 如果 M 和 M' 是两个同构的 Σ-模型，那么对于每个 Σ-公式 φ， $M \models_\Sigma \varphi$ 当且仅当 $M' \models_\Sigma \varphi$。

[2]局部集合。

定义 2.2. 一个 π-制度 $J = \langle \mathbb{S}ig, Sen, \{C_\Sigma\}_{\Sigma \in |\mathbb{S}ig|} \rangle$ 是一个三元组，其前两个组成部分与一个制度的前两个组成部分完全相同，并且对于每个 $\Sigma \in |\mathbb{S}ig|$，都有一个闭包算子 C_Σ : $\mathcal{P}(Sen(\Sigma)) \to \mathcal{P}(Sen(\Sigma))$，满足以下相容条件，对于每个 $f\colon \Sigma_1 \to \Sigma_2 \in Mor(\mathbb{S}ig)$:

$$Sen(f)(C_{\Sigma_1}(\Gamma)) \subseteq C_{\Sigma_2}(Sen(f)(\Gamma)),\ for\ all\ \Gamma \subseteq Sen(\Sigma_1).$$

在 [13] 和 [16] 中，表示了范畴之间的关系：其对象由制度（位于某个宇宙中）给出；此外，还表示了由 π-制度构成的范畴。

记号与术语：给定一个签名 Σ 和一个由 Σ-公式组成的集合 Γ，我们用 $\overline{\Gamma}$ 表示 $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ 中满足以下条件的对象集合 M：对所有 $\varphi \in \Gamma$，均有 $M \models_\Sigma \varphi$；用 $\mathbf{Mod}_\Sigma[\Gamma]$ 表示由 $\overline{\Gamma}$生成的 $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ 的全子范畴。特别地，当 $\Gamma = \{\varphi\}$ 对于一个 Σ-公式 φ成立时，我们仅用 $\mathbf{Mod}_\Sigma[\varphi]$（分别为 $\overline{\varphi}$）表示范畴 $\mathbf{Mod}[\Gamma]$ （分别为集合 $\overline{\Gamma}$）。给定一个 Σ-模型 M 和一个 Σ-公式 φ，我们总可以构造一个投影函子

$$\delta_{M,\varphi} : \mathsf{Mod}_\Sigma[\varphi]/M \longrightarrow \mathsf{Mod}_\Sigma[\varphi], \quad (I, p) \mapsto I.$$

它称为从 M 到 φ的偏离函子。更一般地，给定一个由 Σ-公式组成的集合 Γ，我们可以构造偏离函子:

$$\delta_{M,\Gamma} : \mathsf{Mod}_\Sigma[\Gamma]/M \longrightarrow \mathsf{Mod}_\Sigma[\Gamma].$$

我们也用记号 $M \models_\Sigma \Gamma$ 表示对每个 $\varphi \in \Gamma$都有 $M \models_\Sigma \varphi$；并用 Γ, φ 表示：对于每个满足 $M \models_\Sigma \Gamma$的 Σ-模型 M，都有 $M \models_\Sigma \varphi$。最后，对于每个 Σ-模型M，我们定义集合

$$\overline{M} =_{df} \{\varphi \in \mathsf{Fm}(\Sigma) : M \models_\Sigma \varphi\},$$

并注意到，按照前述记号和定义，我们有

$$\overline{\Gamma} = \{M \in Ob(\mathsf{Mod}(\Sigma)) : M \models_\Sigma \Gamma\}$$

and

$$\Gamma \Vdash \varphi \quad \text{iff} \quad \overline{\Gamma} \subseteq \overline{\varphi}.$$

更一般地，给定一类 $\mathcal{M}$ Σ模型，我们定义集合 $\overline{\mathcal{M}}$，其元素为满足以下条件的 Σ公式 φ：对于所有 $M \in \mathcal{M}$，都有 $M \models_\Sigma \varphi$。

命题 2.3. 设 I $= (\mathscr{S}ig, \mathrm{Fm}, \mathrm{Mod}, \models)$ 是一个制度。

1. $\Gamma \subseteq \overline{\overline{\Gamma}}$2. $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$3. 如果 $\Gamma \subseteq \Gamma'$，那么 $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma'}$4. 如果 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$，那么 $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \overline{\mathcal{M}'}$。

定义 2.4. 设 I $= (\mathscr{S}ig, \mathrm{Fm}, \mathrm{Mod}, \models)$ 是一个制度，Σ 是 I 的一个签名，且 Γ（分别为 $\mathcal{M}$）是 Σ-公式（分别为 Σ-模型）的一个集合（分别为一个类）。如果 $\Gamma = \overline{\Gamma}$（分别为 $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$），我们称 Γ（分别为 $\mathcal{M}$）是一个理论（分别是初等的）。

如果 $\overline{\Gamma} \neq \varnothing$，则称一个 Σ-理论 Γ 是相容的。否则，我们称 Γ 是不相容的。我们称两个 Σ-模型 M 和 M' 初等等价，并记作 $M \equiv M'$，如果 $\overline{M} = \overline{M'}$。由 (2.1) 的 (I2) 可知，任意两个同构的 Σ-模型都初等等价，但反之则不一定成立。

代数几何的记号在模型论中极具启发性。可以将签名视为含幺交换环，将 Σ-公式视为系数在 Σ 中的多项式，并将 Σ-模型视为 Σ-空间中的点，而该空间是范畴 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 中对象的集合 $Spec(\Sigma)$。对于每个 Σ-公式 φ，我们随后可以定义一个函数

$$[\varphi] : Spec(\Sigma) \longrightarrow \{0, 1\}$$

使得 $[\varphi]_M = 0$ 若 $M \models_\Sigma \varphi$，否则为 $[\varphi]_M = 1$。我们可以定义这些符号

$$V(\varphi) =_{df} \{M \in Spec(\Sigma) : [\varphi]_M = 0\}$$

$$D(\varphi) = Spec(\Sigma) - V(\varphi)$$

$$V(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} V(\varphi)$$

$$D(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} D(\varphi)$$

$$\mathcal{O}_{\Sigma,M} = \{\varphi \in \mathsf{Fm}(\Sigma) : [\varphi]_M = 0\}$$

$$I(\mathcal{U}) = \bigcap_{M \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_{\Sigma,M}$$

采用上述记号，我们有

$$\mathcal{U} \subseteq V(I(\mathcal{U})), \quad \Gamma \subseteq I(V(\Gamma)).$$

我们将 $Spec(\Sigma)$ 视为一个空间，其中的点是 Σ-模型；对于一个 Σ-句子集合 Γ，我们将 $V(\Gamma)$ 视为 $Spec(\Sigma)$的一个（闭）子空间，由满足 Γ中句子的模型构成。于是，如果对于每个满足 Γ 的 Σ-句子 φ， φ，都存在一个有限子集$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 使得 Γ_0， φ，那么我们就可以说 Γ 是紧致的。

定义 2.5. 制度 **I** 的句法后承关系 $\vdash$ 是一个映射：为 **I** 的每个签名 Σ 指定一个关系 $\vdash_\Sigma$，该关系存在于 Σ-公式集合 Γ 与 Σ-公式集合 φ 之间：

$$\Gamma \vdash_\Sigma \varphi.$$

我们称 $\vdash$ 可靠，如果关系 $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ 总是意味着关系 Γ, φ；如果 $\vdash$ 可靠，且关系 Γ, φ 总是意味着 $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$，则称 $\vdash$ 完备。

因此，如果 $\vdash$ 是制度 **I** 上的完备句法后承关系，那么说 $\Gamma \vdash_\Sigma \varphi$ 就等同于说 Γ、 φ，这意味着我们可以将关系 看作某种来自语义的句法后承关系。事实上，如果 Γ 是一个理论，那么 $\varphi \in \Gamma$ 当且仅当 Γ、 φ。

受上述推理的启发，我们可以从语义层面表述独立性的概念。事实上，设 Γ 是签名为 Σ 的一个理论， φ 是一个 Σ-句子。如果 φ 可由 Γ 反驳，那么 $V(\Gamma) \cap V(\varphi) = \varnothing$；否则， φ 可由 Γ 不可反驳，这意味着 $V(\Gamma) \cap V(\varphi) \neq \varnothing$。当 φ， Γ 时，我们称 φ 可由 Γ 证明，这意味着 $V(\Gamma) \subseteq V(\varphi)$。否则，我们称 φ 无法由 Γ 证明，这意味着在 $V(\Gamma)$ 中至少存在一个 Σ-模型 M，它不属于 $V(\varphi)$，即 $V(\Gamma) \cap D(\varphi) \neq \varnothing$。如果 φ 既不能由 Γ 反驳，也不能由 Γ 证明，那么我们称 φ 独立于 Γ:

$$\text{(Irrefutable)} \quad V(\Gamma) \cap V(\varphi) \neq \varnothing, \qquad \text{(Unprovable)} \quad V(\Gamma) \cap D(\varphi) \neq \varnothing.$$

现在，假设 M 是理论 $\mathbb{T}$的一个 Σ-模型，即 $M \in V(\mathbb{T})$，这意味着对于每一个 $\phi \in \mathbb{T}$，都有 $M \models_\Sigma \phi$。令 φ 为一个任意的 Σ-句子。为了判断 φ 是否是 $\mathbb{T}$的一个元素，也就是说，是否有 $\mathbb{T}$, φ （因为 $\mathbb{T}$ 是一个理论），我们必须考察投影函子。

2.6. 设 I 是一个制度， Σ 是 I 的一个签名， $\mathbb{T}$ 是一个 Σ-理论， T 是一个 Σ-模型。 T 的一个 $\mathbb{T}$-图（如果存在）由以下数据给出：

(i). 一个小范畴 A

(ii)。一个函子 $D:\ A \to$ 模$[\mathbb{T}]$

(iii). 一个归纳锥 $d = (d_a:\ D_a \to T)_{a \in Ob(A)}$，使得对于该 Σ-理论$\mathbb{T}$的每个 Σ-模型 M，都存在一个典范同构：

$$Hom_{\mathsf{Mod}(\Sigma)}(T, M) \cong \varprojlim_{a \in Ob(A)} Hom_{\mathsf{Mod}[\mathbb{T}]}(D_a, M)$$

由这些箭头诱导而来

$$Hom_{\mathsf{Mod}(\Sigma)}(T, M) \longrightarrow Hom_{\mathsf{Mod}[\mathbb{T}]}(D_a, M), \quad f \mapsto f \circ d_a$$

针对 $a \in Ob(A)$。

特别地，如果范畴 $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ admits 小归纳极限，那么存在一个同构大小规律

$$\varinjlim_{a \in Ob(A)} D_a \longrightarrow T$$

在 $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ 中，这意味着 T 是 Σ-理论 $\mathbb{T}$ 的模型的归纳极限。显然，如果 $\mathsf{Mod}[\mathbb{T}]$ 在小归纳极限下封闭，并且存在一个关于 T 的 $\mathbb{T}$-图表，那么 T 是 $\mathsf{Mod}[\mathbb{T}]$ 中的一个对象。然而，我们既不假设 $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ 具有小归纳极限，也不假设 $\mathsf{Mod}[\mathbb{T}]$ 在小归纳极限下封闭。

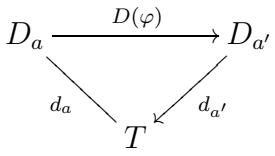
由 $\mathbb{T}$-图式对于 T 的存在性，我们可以推导出一个函子

$$\Omega : A \longrightarrow \mathsf{Mod}[\mathbb{T}]/T$$

使得,

$$\Omega_a = (D_a, D_a \xrightarrow{d_a} T), \qquad a \in Ob(A)$$

对于一个箭头 $\varphi: a' \to a$ in A，$\Omega\varphi$ 是 $\mathbf{Mod}[\mathbb{T}]/T$ 中由交换三角形定义的箭头:



函子 Ω 满足以下性质：对于 $\mathbf{Mod}[\mathbb{T}]/M$, 中的每一对对象 (M,p)，其中 p：$M \to T$ 是 Σ-模型的一个箭头，范畴 $A/(M,p)$ 由满足 $p \circ f = d_a$ 的各对 (a,f) 构成，其中 $a \in Ob(A)$，且 f：$D_a \to M$ 是 Σ-模型的一个箭头。

我们可以用一个小指标范畴 $I_\Sigma(\mathbb{T},T)$ 替换 $\mathbf{Mod}[\mathbb{T}]/T$，并考虑该范畴

接下来，我们将给出几个制度的主要示例，以向读者说明这一概念的普遍性（2.1）。

例 2.7。我们简要回顾命题逻辑的语言，并展示经典命题逻辑如何成为一种制度。首先，我们考虑有限序数的集合 ω 、逻辑连接词符号的集合 $C = \{\Longrightarrow、\neg、\vee、\wedge\}$，以及语言符号的集合 $L = \{[、]\}$。然后，我们按照通常的递归方式定义命题逻辑的公式集 F。ω 的有限子集按照包含关系构成一个偏序集，因此，它们也定义了一个范畴 $\mathscr{S}$，该范畴将作为签名范畴。对于每个签名 Σ，令 $\mathbf{Fm}(\Sigma)$ 为满足 $FV(\varphi) \subseteq \Sigma$ 的公式集 $\varphi \in F$，其中 $FV(\varphi)$ 是 φ 的通常自由变量集，也通过递归方式定义[3]；令 $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ 为由从 Σ 到 $\{0、1\}$ 的函数集 2^Σ 生成的离散范畴。如果 $\sigma: \Sigma \to \Sigma'$ 是一个签名态射，那么 $\Sigma \subseteq \Sigma'$，因此，它定义了一个态射 $\sigma_\sharp: \mathbf{Fm}(\Sigma) \to \mathbf{Fm}(\Sigma')$，由包含映射 $\mathbf{Fm}(\Sigma) \subseteq \mathbf{Fm}(\Sigma')$ 给出。此外，我们还可以定义一个唯一的态射 $\sigma^\sharp: 2^{\Sigma'} \to 2^\Sigma$，将每个形如 $f: \Sigma' \to \{0,1\}$ 的函数限制到 Σ，即 $\sigma^\sharp(f) = f|_\Sigma$。最后，对于每个签名 Σ，我们定义一个关系 $f \models_\Sigma \varphi$，其中 $f \in Ob(\mathbf{Mod}(\Sigma))$ 且 $\varphi \in \mathbf{Fm}(\varphi)$，如下：如果 $\varphi \in \Sigma$，则 $f \models_\Sigma \varphi$ 当且仅当 $f(\varphi) = 1$；如果 φ 是 φ。

示例 2.8. 每种一阶逻辑 $L_{\kappa,\lambda}$ 的语义都可以组织在一个制度中。

令 $Lang$ 表示语言 $L = ((F_n)_{n\in\mathbf{N}}, (R_n)_{n\in\mathbf{N}})$ 的范畴——其中 F_n 是 n元函数符号的符号集合，R_n 是 n元关系符号的符号集合，$n \geqslant 0$ ——以及语言

[3]我们为原子公式 p 定义 $FV(p) = p$，它只是 ω 的一个元素，$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$ 和 $FV(\varphi \Diamond \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ 对于 $\Diamond \in \{\Longrightarrow、\vee、\wedge\}$。

态射[4]。对于每一对基数 $\aleph_0 \leqslant \kappa$、 $\lambda \leqslant \infty$，赋予通常的 $L_{\kappa,\lambda}$-语句（即没有自由变量的 $= L_{\kappa,\lambda}$-公式）的范畴 $Lang$，结合通常的结构范畴关联以及通常的（塔斯基式）满足关系，便构成一个制度 $I(\kappa, \lambda)$。例 2.9。Ehresmann 图式（esquisses）的模型可以组织成一个制度。

例 2.10. 设 $Comm$ 为含幺交换环的范畴，? -Mod : $Comm^o \to \mathcal{CAT}$ 为一个函子，它将 $Comm$ 中的每个对象 Λ 关联到其 Λ-Mod 范畴，即 Λ-模的范畴，并将 $Comm$ 中的每个态射 σ : $\Lambda \to \Lambda'$ 关联到相应的 Λ'-线性态射。

$$\sigma^\sharp : \Lambda'\text{-}Mod \longrightarrow \Lambda\text{-}Mod, \quad x \mapsto$$

用 $Lin(\Lambda)$ 表示系数取自 Λ 的线性方程组集合。众所周知， $Lin(\Lambda)$ 的一个典型元素是 $\Lambda[X_1$ 的一个子集 L，....., $X_n]$（对于某个 $n \in \omega$），其中只包含形如.....的多项式。

$$a_1X_1 + ... + a_nX_n, \qquad a_i \in \Lambda.$$

沿用前面的记号，这个四元组

$$(Comm, Lin, ?\text{-}Mod, \models)$$

是一个制度，称为线性代数。

3 上同调

引言

在 Grothendieck 和 Verdier 引入导出范畴与导出函子之后，Quillen 又发明了模型范畴与同伦代数，数学家由此开始深入理解上同调现象。首先，将几何对象 X 在以阿贝尔群层$\mathscr{F}$为系数时的传统上同调群 $H^n(X; \mathscr{F})$ 替换为总体上同调 R$\Gamma(X; \mathscr{F})$，然后通过运算形式体系定义 R$\Gamma(X; \mathscr{F})$（在完备的图景中，即 Grothendieck 六运算形式体系）。

[4]可以选择为“严格”（即 $F_n \mapsto F'_n$、 $R_n \mapsto R'_n$），也可以选择为“灵活”（即 $F_n \mapsto \{n-ary-terms(L')\}$、$R_n \mapsto \{n-ary-atomic-formulas(L')\}$）。

如果 $F:\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ 是 Grothendieck 阿贝尔范畴之间的一个加性函子（不一定是正合函子），那么存在一个全右导出函子:

$$\mathsf{R}F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'.$$

经典的 n 阶导出函子 R^nF，由单射（或投射）分解构造而成，可以通过 $\mathsf{R}F$ 由以下公式求得:

$$\mathsf{R}^nF(X)=H^n(\mathsf{R}F(X)).$$

例如，若 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，那么我们可以构造 $\mathcal{E}$ 中的阿贝尔层拓扑斯 $\mathcal{E}_{ab}$。 G 这个对象属于 $\mathcal{E}_{ab}$，它是 $\mathcal{E}$ 中的一个层，并带有两个态射

$$\mu:G\times G\to G,\qquad e:*\to G$$

使得对于 $\mathcal{E}$ 中的每个对象 X，集合 $Hom_{\mathcal{E}}(X,\ G)$ 都是一个阿贝尔群，其中加法

$$+:Hom_{\mathcal{E}}(X,G)\times Hom_{\mathcal{E}}(X,G)\longrightarrow Hom_{\mathcal{E}}(X,G)$$

由以下典范函数的复合给出:

$$Hom_{\mathcal{E}}(X,G)\times Hom_{\mathcal{E}}(X,G)\longrightarrow Hom_{\mathcal{E}}(X,G\times G),\quad (f,g)\mapsto f\times g$$

（由积 $G\times G$ 的泛性质诱导）与函数

$$Hom_{\mathcal{E}}(X,G\times G)\longrightarrow Hom_{\mathcal{E}}(X,G),\quad f\mapsto\mu\circ f,$$

而零元 $\mathbf{0}:\ X\to G$ 由以下复合给出

$$X\xrightarrow{p_X}*\xrightarrow{e}G.$$

然后，我们可以定义整体截面函子:

$$\Gamma(\mathcal{E};?):\mathcal{E}_{ab}\longrightarrow\mathcal{A}b,\quad \mathscr{F}\mapsto\Gamma(\mathcal{E};\mathscr{F})=_{df}Hom_{\mathcal{E}}(*,\mathscr{F}).$$

In p特别地，如果 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间 X 上的层拓扑斯，那么我们有

$$Hom_{\mathcal{E}}(*, \mathscr{F}) \cong Hom_{\mathcal{E}}(h_X, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(X).$$

因此，对于拓扑空间 X 上的每个阿贝尔群层 $\mathscr{F}$，我们可以通过公式定义上同调 $\mathsf{H}^*(X;\ \mathscr{F})$

$$\mathsf{H}^*(X; \mathscr{F}) =_{df} \mathsf{R}\Gamma(X; \mathscr{F}) = \mathsf{R}(\pi_X)_*(\mathscr{F}),$$

以及通过公式得到的第 n 个上同调群

$$H^n(X; \mathscr{F}) =_{df} \mathsf{R}^n\Gamma(X; \mathscr{F}) = H^n(\mathsf{R}\Gamma(X; \mathscr{F})) = H^n(\mathsf{R}(\pi_X)_*(\mathscr{F})).$$

如果 Λ是一个 阿贝尔群，被视为 $\mathsf{C}(\mathcal{A}b)$ 中集中于零次的复形，然后
a

$$H^n(X; \Lambda) =_{df} H^n(\mathsf{R}(\pi_X)_*(\Lambda_X)) = H^n(\mathsf{R}(\pi_X)_*(\pi_X)^*(\Lambda)).$$

如果拓扑空间 X 局部可缩，那么这些上同调群 $H^n(X;\Lambda)$ 与系数取为 Λ 的奇异上同调群 $H^n_{Sing}(X;\Lambda)$ 自然同构。

现在，不再用拓扑空间而是用小范畴对空间建模，拓扑斯 $Sh(X)$ is^由小范畴 A上的预层分类拓扑斯 A 取代，而此情形下的上同调由以下公式描述：

$$\mathsf{H}^*(A; \Lambda) = \mathsf{R}(p_A)_*(\Lambda_A) = \mathsf{R}(p_A)_*(p_A)^*(\Lambda), \qquad H^n(A; \Lambda) = H^n(\mathsf{H}^*(A; \Lambda)),$$

对于每个阿贝尔群 Λ。将空间视为小范畴与将空间视为拓扑空间之间的联系，是通过拓扑斯的一个自然几何态射给出的

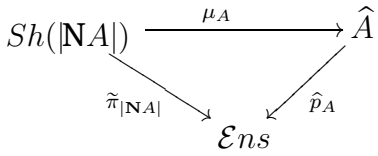
$$\mu_A : Sh(|\mathbf{N}A|) \longrightarrow \widehat{A}$$

由于 Moerdjik 提出的理论具有以下性质：对于每个局部常值的阿贝尔群层 $\mathscr{F}$

$\widehat{}$在 A 中，典范态射

$$\mathsf{R}\Gamma(|\mathbf{N}A|;(\mu_A)^*(\mathscr{F})) \longrightarrow \mathsf{R}\Gamma(A;\mathscr{F})$$

通过几何态射的交换三角形从 $1 \to (\mu_A)_*(\mu_A)^*$ 诱导得到



（由于 $\widetilde{*} \simeq \mathcal{E}ns \simeq \widehat{e}$），是一个同构，这意味着

$$\mathsf{H}^*(A;\Lambda) \cong \mathsf{H}^*(|\mathbf{N}A|;\Lambda),$$

and

$$H^n(A;\Lambda) \cong H^n(|\mathbf{N}A|;\Lambda), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

对于每个阿贝尔群 Λ。此外，由于 $|\mathbf{N}A|$ 始终是一个局部可缩拓扑空间，因此可知， $H^n(A;\Lambda)$ 与拓扑空间 $|\mathbf{N}A|$ 的系数取自 Λ 的第 n 阶奇异上同调群同构。

因此，小范畴的上同调的一般形式可以正式表述如下：

(i). 为每个小范畴 A a 分配一个导出范畴 $\mathbb{D}(A)$，它是阿贝尔范畴 A_{ab} 的导出范畴$\widehat{}$

(ii). 将小范畴的每个态射 $u:\ A \to B$ 对应到一个态射.....

计算（余）同调的单纯形方法

小范畴的上同调可以使用 Andr´e 在[1]中开发的单纯形方法来计算。如果 $T : S \to \mathcal{A}$ 是从小范畴 S 到 Grothendieck 阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$的一个函子，并且

存在一个包含函子

$$\jmath : S \longrightarrow \mathcal{E}$$

从 S 到局部小范畴 $\mathcal{E}$，于是我们可以构造小范畴 $S/X,$，它是函子的求值

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\jmath^*} \widehat{S} \xrightarrow{i_S} \mathcal{C}at$$

在对象 X处。然后，我们可以构造神经

$$\mathbf{N}(S/X) = \mathbf{N}i_C\jmath^*(X)$$

并且，对于每个 $n \in \omega$，集合 $S_n(X) = (\mathbf{N}(S/X))_{n\circ}$ 由于 $\mathcal{A}$ 具有小余积，因此存在对象

$$C_n(X;T) = \sum_{\alpha \in S_n(X)} T[\alpha]$$

在 $\mathcal{A}$中，其中，对于 $\alpha \in S_n(X)$,

$$T[\alpha] =_{df} T(dom(\alpha_n))$$

其中 α 表示

$$s_n \xrightarrow{\alpha_n} s_{n-1} \to ... \to s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_0 \xrightarrow{\alpha_0} X.$$

我们可以说， $S_n(X)$是 X的维数为 n 的 S-分解集合。

对于 $0 \leqslant i \leqslant n$，令

$$\varepsilon_0(s_n \xrightarrow{\alpha_n} s_{n-1} \to ... \to s_1 \xrightarrow{\alpha_n} s_0 \xrightarrow{\alpha_0} X) = (s_n \xrightarrow{\alpha_n} s_{n-1} \to ...s_1 \xrightarrow{\alpha_0\alpha_1} X)$$

$$\varepsilon_i(s_n \to ... \to s_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+i}} s_i \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \to x) = (s_n \to ... \to s_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\alpha_i} s_{i-1} \cdots \to X)$$

$$\varepsilon_n(s_n \xrightarrow{\alpha_n} s_{n-1} \to ... \to s_1 \xrightarrow{\alpha_n} s_0 \xrightarrow{\alpha_0} X) = (s_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} ... \to s_0 \xrightarrow{\alpha_0} X)$$

第二种情况仅对 $0 < i < n$ 有定义。然后，每个 $\varepsilon_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ 都诱导出一个态射

$$d_i : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

由此我们推导出箭头

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X).$$

我们将前面的箭头表述得更加明确。对于每个 $\alpha \in S_n(X)$，以及

$$\alpha = (\alpha_n, ..., \alpha_1, \alpha_0) = (s_n \xrightarrow{\alpha_n} s_{n-1} \to ... \to s_1 \xrightarrow{\alpha_1} s_0 \xrightarrow{\alpha_0} X)$$

我们可以构造态射

$$\langle \alpha_n, ..., \alpha_1, \alpha_0 \rangle : T[\alpha_n, ..., \alpha_1, \alpha_0] \longrightarrow C_n(X;T).$$

为了定义 $\mathcal{A}$ 中的箭头 d_i： $C_n(X;\ T) \to C_{n-1}(X;\ T)$，只需为每个 $\alpha \in S_n(X)$ 定义 $d_i\langle \alpha_n$、...、α_1、$\alpha_0\rangle$。

Dually, X be 在 S 中的偏差也可以表示为同调群，给定 b y:

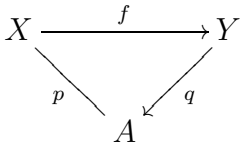
$$\beta : X \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_{n-1} \to M_n$$

空间的同伦与上同调

3.1. 每当 A是一个 U-小范畴时，我们将 A 记作通常的函子范畴，其函子定义在 A 上，且取值于 U-小集合范畴以及这些集合之间的函数。范畴 A称为 A 上的预层范畴，也可以仅从范畴论的角度作如下理解： A 的对象是函子 p: $X \to A$，其中其定义域为 U-小范畴，并且对于每个对象 $x \in \mathrm{Ob}X$，相应的显然函子

$$X/x \longrightarrow A/p(x), \quad (x', \alpha) \mapsto (p(x'), p(\alpha))$$

是一个同构。一个态射 f: $(X,p) \to (Y,q)$（属于 A）是一个函子 f: $X \to Y$，使得该图示commutes。



可交换。显然，点 e 上的预层范畴 $\hat{e}$（仅包含一个对象及其恒等箭头的范畴）对应于 U-小集合的范畴，该范畴将记为 $\mathcal{P}_{\mathbf{U}}$。

定义 3.2. 设 U 为一个宇宙，$\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 为 U-小范畴组成的范畴，即满足 ObA、Fl$A \in$ U 的范畴A 。若箭头集合 $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 满足以下性质，则称其为弱饱和的:

WS1 所有恒等箭头都属于 $\mathcal{W}$

WS2 如果三个箭头中任意两个 属于交换三角形中的 $\mathcal{W}$，那么第三个箭头也属于 $\mathcal{W}$。

WS3 若 $i : A \to X$ 和 $r : X \to A$ 是 $\mathcal{C}at$ 中的两个态射，且 $ri = 1_A$ 和 $ir \in \mathcal{W}$，则 $r \in \mathcal{W}$。

U-基本局部化子 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 中的一个箭头集合，满足以下条件:

L1 $\mathcal{W}$ 是弱饱和的

L2 如果 A 具有终对象 e，那么典范函子 $p_A : A \to e$ 从 A 到点范畴 e 属于 $\mathcal{W}$。

L3 如果

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & C & \end{array}$$

在 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 中是一个交换三角形，并且对于每个对象 $c \in$ ObC，函子 $u/c : A/c \to B/c$ 属于$\mathcal{W}$，那么 u属于 $\mathcal{W}$。

术语——设 $\mathcal{W}$ 为一个 U-基本局部化器。$\mathcal{W}$ 的元素称为 $\mathcal{W}$-等价。若 U-小范畴 A 满足态射 $p_A : A \to e$ 是一个 $\mathcal{W}$-等价，则称其为 $\mathcal{W}$-非球面的。若 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 的一个箭头 $u : A \to B$ 满足对于每个 $b \in$ ObB，态射 $u/b : A/b \to B/b$是一个 $\mathcal{W}$-等价，则称该箭头为 $\mathcal{W}$-非球面的；当它在基变换下稳定时，即对于每个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{v'} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

箭头 $u' : A' \to B'$ 是一个 $\mathcal{W}$-等价。

定义 3.3. 固定一个宇宙 U，我们将 U-同伦类型的范畴定义为:

$$\mathsf{Hot}_{\mathbf{U}} =_{df} (\mathcal{W}_\infty)^{-1}\mathcal{C}at.$$

定义 3.4. 同伦不变量是一个函子

$$\mathsf{T} : \mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathcal{A}$$

将 $\mathcal{W}$-等价映为同构，对任意 U-基本局部化器 $\mathcal{W}$ 均成立。

数学文献中出现了大量同伦不变量。本文聚焦于上同调。接下来，我们固定两个宇宙 U 和 V，使得 $\omega \in$U $\in$V。

3.5. 令 $\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}$ 为 U-小阿贝尔群所成的 U-范畴，令 $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 为采用上同调记号的 U-阿贝尔群复形范畴。$\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 的一个对象是如下形式的阿贝尔群图表 f

$$..... \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} ....$$

在 $\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}$ 中，使得 $d^{n+1} \circ d^n = 0$。更确切地说，对于每个 U-小范畴 I，我们可以指定函子范畴的全子范畴 $\mathsf{C}^*(I, \mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$，其中的函子 F从 I到 $\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}$，满足：对于 I 中每一对可复合箭头 (α, β)，$F(\beta) \circ F(\alpha) = 0$，即 $\beta \circ \alpha$ 有定义。然后，取由图 $I_{\mathbb{Z}}$ 生成的范畴

$$.... \to -1 \to 0 \to 1 \to ... \to n \to ...$$

可以定义 $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}) =_{df} \mathsf{C}^*(I_{\mathbb{Z}}, \mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$。如果 $C^\bullet$ 是 $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 中的一个对象，那么 $im(d^n) \subset ker(d^{n+1})$，并且我们可以构造阿贝尔群

$$H^n(C^\bullet) =_{df} ker(d^{n+1})/im(d^n), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

称为 $C^\bullet$ 的第 n 个上同调群。如果 $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ 是 $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 的一个态射，那么对每个 $n \in \mathbb{Z}$，它都会诱导出一个规范群同态。

$$H^n(f^\bullet) : H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^n(D^\bullet)$$

相应的 n 阶上同调群之间。当且仅当对于所有 $n \in \mathbb{Z}$， $f^\bullet$ of $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 中的箭头是拟同构，其中 $H^n(f^\bullet)$ 是 U-阿贝尔群的一个同构。我们用 $\mathcal{Q}$ 表示 $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 中拟同构的类。U-阿贝尔群的导出范畴定义为.....

C 关于准同构的局部化:

$$\mathsf{D}(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}) =_{df} \mathcal{Q}^{-1}\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}).$$

因此，范畴 $\mathsf{D}(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 可以通过以下泛性质来刻画：存在一个函子

$$\gamma : \mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$$

其在对象上为恒等，将所有拟同构映为同构；并且对于任何满足相同条件的函子 $F : \mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}) \to \mathcal{M}$ ，存在唯一的函子 $\overline{F} : \mathbf{D}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}) \to \mathcal{M}$ ，使得 $F = \overline{F} \circ \gamma$。

3.6. 对于每个 U-小范畴 A，都可以构造一个范畴 $\mathsf{Comp}(A)$ ，其对象是取值于范畴 $\mathsf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 的、定义在 A 上的预层，并定义箭头集合 $\mathcal{Q}_A$ ，其中的箭头 $f : X \to Y$ 属于 $\mathsf{Comp}(A)$ ，且满足 $f_a : X_a \to Y_a$ 对每个对象 $a \in \mathsf{Ob}A$ 都是一个拟同构，由此得到一个范畴:

$$\mathbf{D}(A) =_{df} (\mathcal{Q}_A)^{-1}\mathsf{Comp}(A).$$

态射 $u : A \to B$ 在 U-小范畴之间通过复合诱导出函子:

$$u^* : \mathsf{Comp}(B) \longrightarrow \mathsf{Comp}(A), \quad F \mapsto F \circ u,$$

而它们又存在右伴随。

$$u_* : \mathsf{Comp}(A) \longrightarrow \mathsf{Comp}(B)$$

下降为伴随:

$$u^* : \mathbf{D}(B) \longrightarrow \mathbf{D}(A), \quad \mathsf{R}u_* : \mathbf{D}(A) \longrightarrow \mathbf{D}(B).$$

沿用上述记号， u^* 称为 u的逆像，而 $\mathsf{R}u_*$ 称为 u的直接上同调像。特别地，对于每个 U-小范畴 A，典范函子 $p_A : A \to e$从 A到点定义了一个伴随:

$$(p_A)^* : \mathbf{D}(e) \longrightarrow \mathbf{D}(A), \quad \mathsf{R}(p_A)_* : \mathbf{D}(A) \longrightarrow \mathbf{D}(e).$$

对于 $\mathbf{D}(e)$ 中的每个对象 M （分别地，箭头 f），我们将相关的对象 M_A （分别地，箭头 $(p_A)^*(f)$）记为 $\mathbf{D}(A)$ 中的对象$(p_A)^*(M)$（分别地，f_A 。此外，给定函子 $u\colon\ A \to B$以及对象 $b \in \mathrm{Ob}B$，我们将相对于投影函子 $\zeta(u,\ b)\colon\ A/b \longrightarrow A$，$\mathbf{D}(A)$ 中对象 F 的逆像记为 $F|_{A/b}$。最后，对于 $\mathbf{D}(A)$ 中的每个对象，我们定义记号

$$\mathsf{H}^*(A;F) =_{df} \mathsf{R}(p_A)_*(F)$$

用于表示 A 的系数为 F的总体上同调。 A 的系数为 F 的上同调群是 U-阿贝尔群

$$H^n(A;F) =_{df} H^n(\mathsf{H}^*(A;F)).$$

3.7. 将每个 U-阿贝尔群 G 视为 $\mathbf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 中集中于零次的复形，即满足 $C^0 = G$ 和 $C^n = 0$ （对于 $n \neq 0$）的复形 C，则 $\mathcal{A}b_{\mathbf{U}}$ 到 $\mathbf{C}^*(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 中存在一个明显的嵌入，因此，我们可以将任意 U-阿贝尔群投射到 $\mathbf{D}(e) \simeq \mathbf{D}(\mathcal{A}b_{\mathbf{U}})$ 中。因此，对于每个 U-小范畴 A，我们定义以下阿贝尔群:

$$H^n(A) =_{df} H^n(A;\mathbb{Z}_A), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

这是 A 的整数上同调群。

命题 3.8. 1. 对于每个 U-小范畴 A，函子族

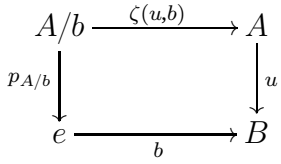
$$a^* : \mathbf{D}(A) \longrightarrow \mathbf{D}(e), \quad a \in \mathrm{Ob}A,$$

是联合保守的，即，当且仅当对于所有对象 $a \in \mathrm{Ob}A$，态射 f of $\mathbf{D}(A)$ 是同构时， f_a 是 $\mathbf{D}(e)$ 中的同构。

2. 对于每个态射 $u\ :\ A \to B$ 在 U-小范畴之间，以及每个对象 $b \in \mathrm{Ob}B$，由下述典范自然变换

$$\mathsf{R}(p_{A/b})_*\zeta(u,b)^* \longrightarrow b^*\mathsf{R}u_*$$

由该 2-方形诱导



是一个同构。特别地，对于 D 中的每个系数 F，典范箭头

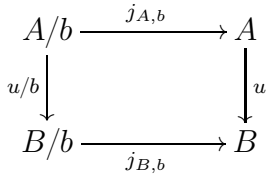
$$\mathsf{H}^*(A/b; F|_{A/b}) \longrightarrow (\mathsf{R}u_*F)_b$$

是一个同构。

3. 对于 U-小范畴之间的每个态射 $u:\ A \to B$ 以及每个对象 $b \in \mathsf{Ob}B$，典范自然变换

$$\mathsf{R}(u/b)_*(j_{A,b})^* \longrightarrow (j_{B,b})^*\mathsf{R}u_*$$

由笛卡尔2-方形诱导的



是一个同构。

定义 3.9. U-小范畴的态射 $u:\ A \to B$ 被称为上同调等价，如果典范自然变换

$$\mathsf{R}(p_B)_*(p_B)^* \longrightarrow (\mathsf{R}p_A)_*(p_A)^*$$

是一个同构。

命题 3.10. 局部化函子

$$\gamma : \mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \longrightarrow (\mathcal{W}_{\mathbf{D}})^{-1}\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$$

当且仅当 u 是上同调等价时，它将 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 中的箭头 u 映为同构。换言之，上同调等价的集合是强饱和的

Cor论断 3.11。 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 中的上同调等价集合是弱饱和的 $d.$

命题 3.12. 若 $u, v: A \to B$ 是 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 中两个同伦等价箭头，则它们的逆像 u^* 和 v^* 同构。

推论 3.13。如果两个 U-小范畴是同伦等价的，那么它们是上同调等价的。特别地，任意两个等价的 U-小范畴都是上同调等价的。

命题 3.14. 如果 A 是一个具有终对象的 U-小范畴，那么从 A 到点的典范箭头 $p_A: A \to e$ 是一个上同调等价。

引理 3.15。设

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & C & \end{array}$$

是 U-小范畴的交换三角形。如果 u 是 C 上的局部 $\mathcal{W}$-等价，则典范自然变换

$$\mathsf{R}q_*q^* \longrightarrow \mathsf{R}p_*p^*$$

是一个同构，即 u 也是 C 上的局部上同调等价。

命题 3.16。 $\mathcal{C}at_{\mathbf{U}}$ 中的上同调等价按照 (3.2) 构成一个基本局部化子。

定理 3.17。该函子

$$\mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathcal{A}b^{\mathbb{Z}}, \quad X \mapsto (H^n(X))_{n\in\mathbb{Z}},$$

根据 (3.4)，是一个同伦不变量。

3.18. 设 $\mathscr{E}$ 为一个 U-范畴， C 为 $\mathscr{E}$ 的一个 U-小全子范畴。那么，对于 $\mathscr{E}$ 中的每个对象 S，都可以构造 U-小范畴 C/S。如果 S 是 C 的一个对象，那么 C/S 存在一个终对象，因此，对于每个同伦不变量 T，都有 $\mathbf{T}(C/S) \cong \mathbf{T}(e)$ 。特别地，对于每个 $n \neq 0$， $H^0(C/S) \cong H^0(e) \cong \mathbb{Z}$, 和 $H^n(C/S) \cong H^n(e) = 0$ 。然而，即使 S 不是 C 的一个对象，范畴 C/S 仍可能是非球面的。

例3.19。设 $\mathcal{C}omm$ 是带单位元的有限表示交换环范畴的一个骨架，并定义 $\mathcal{A}ff =_{df} \mathcal{C}omm^o$。我们形式上将其记为

$$Spec : \mathcal{C}omm \longrightarrow \mathcal{A}ff, \quad A \mapsto Spec(A), \quad \varphi \mapsto ({}^a\varphi)$$

通常的逆变函子，它将对象映到其自身，并将箭头映到 $\mathcal{A}ff$中的相应对偶箭头。范畴 $\mathcal{A}ff$称为仿射概形范畴。我们可以选择一个宇宙 U，使得范畴 $\mathcal{C}omm$（从而 $\mathcal{A}ff$）是 U-小的。令 $\mathcal{K}_0$为 $\mathcal{A}ff$ 的全子范畴，由特征为零的域的仿射概形构成。那么， $\mathcal{K}_0/Spec(\mathbb{Z})$的对象对应于环同态 $\varphi:\ \mathbb{Z}\to k$ ，其从 $\mathbb{Z}$ 映到一个特征为零的域。可以验证， $Spce(\mathbb{Z})$ 不是 $\mathcal{K}_0$ 的对象（因为 $\mathbb{Z}$ 甚至不是域），但范畴 $\mathcal{K}_0/Spec(\mathbb{Z})$仍然是非球面的。事实上，由于每个表示 $\mathcal{K}_0/Spec(\mathbb{Z})$ 中一个对象的环同态 $\varphi:\ \mathbb{Z}\to k$ 都可以唯一地分解为形如 $\overline{\varphi}:\ \mathbb{Q}\to k$的域同态，典范投影 $\pi:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ 对应于 $\mathcal{K}_0/Spec(\mathbb{Z}),$ 中的终对象 ${}^a\pi:\ Spec(\mathbb{Q})\to Spec(\mathbb{Z})$ ，因此 $\mathcal{K}_0/Spec(\mathbb{Z})$ 是非球面的。显然，对于任意素数 p，考虑特征为 p 的域的仿射概形范畴 $\mathcal{K}_p$ ，即可重复上述论证，因为每个从 $\mathbb{Z}$ 映到特征为 p 的域的环同态 $\phi:\ \mathbb{Z}\to k$ 都唯一地分解为经过域扩张 $\overline{\phi}:\ \mathbb{F}_p\to k$的形式，其中 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$ ，因此典范投影 $\pi:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{F}_p$对应于 $\mathcal{K}_p/Spec(\mathbb{Z})$的一个终对象。现在，令 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{A}ff$ 的全子范畴，由域的仿射概形构成。那么，函子

$$\mathcal{K}/Spec(\mathbb{Z})\longrightarrow\mathcal{K}$$

在 $\mathcal{K}...$ 上局部为非球面。由于局部非球面性意味着弱同伦等价，因此该函子

定义 3.20. 使用 (3.18) 的记号，当范畴 C/S 为非球面时，将 $\mathscr{E}$ 的对象 S 称为 C 的拟对象。

注 3.21. 使用 (3.18) 中的记号，存在一个函子

$$\mathscr{E}\longrightarrow\mathcal{C}at_{\mathbf{U}},\quad S\mapsto C/S$$

它可以延拓为一个函子

$$C_{/?}:\mathscr{E}\longrightarrow\mathsf{Hot}_{\mathbf{U}},\quad S\mapsto C/S$$

通过局部化。上述函子将 C 的每个对象发送到点，但它也将 C 的每个准对象发送到点。反之，由于 $\mathcal{W}_\infty$ 是强饱和的，因此，如果

$C_{/?}$ 将 S 中的一个对象映射到点上，那么 S 就是 C的一个拟对象。因此， C 的拟对象恰好是 $\mathscr{E}$ 中通过函子 $C_{/?}$, 映射到点上的对象，这意味着它们在同伦意义上与 C中的对象不可区分。

3.22. 设 A 是一个 U-小范畴。整数

$$\chi(A) =_{df} \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n dim H^n(A)$$

如果存在，则称为 A的欧拉示性数。若上述和不能作为整数存在，我们就说 $\chi(A)$ 是任意大或任意小。我们最感兴趣的是这样的情形：除有限多个指标外， $H^n(A) = 0$ 都成立，且阿贝尔群 $H^n(A)$的维数均有限。更一般地，若一个 U-小范畴 A 满足$\chi(A)$ 在 $\mathbb{Z}$中存在，则称其为同伦有限。现在，假设情形如 (3.18) 所述，对于 $\mathscr{E}$中的任意两个不同对象 S 和 S' ，我们可以比较度量 $\chi(C/S)$ 和$\chi(C/S')$ 。如果 $\chi(C/S)$ 未定义，那么 S 与 C相距任意远。否则，整数 $\chi(C/S)$ 度量了对象S 偏离作为 C中对象的程度。如果 $\|\chi(C/S) - 1\| < \|\chi(C/S') - 1\|$，那么可以说，与 S' 相比， S 在同伦意义上更接近 C。这里，我们应取 $\chi(C/S) - 1$，因为 $\chi(e) = 1$，因此需要进行修正，以确保只要 S 是 C中的对象，它与 C 的偏离就为零。不过，总体思路是使用同伦不变量 $\mathbf{T} : \mathcal{C}at_{\mathbf{U}} \to \mathcal{A}$作为度量，衡量 S 成为 C中对象的偏离程度。

4 公式的上同调偏差

引言

在这项工作中，我们试图阐明两个问题：什么是模型，以及说一个模型 M 满足一个句子 φ意味着什么？我们表明，如果机构理论回答了前一个问题，那么（余）同调必然回答后一个问题。

逻辑的上同调解释这一思想受到 Ren´e Guitart 的启发，他甚至提出了这样的口号：逻辑就是同调代数。在 [12], Guitart 断言如下：设 $\mathcal{L}$ 是一阶语言，且 φ 是 $\mathcal{L}$中的一个公式。那么，我们可以考虑由 φ的模型生成的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{C}$ 的范畴中的全子范畴范畴 I。给定任意一个 $\mathcal{L}$-结构 X，我们可以构造相对范畴 I/X, ，其对象是满足 $i \in Ob(I)$ 的成对对象 $(i、 s)$ 以及 $s \in Hom_{\mathcal{C}}(i、 X)$，而箭头 $\alpha : (i、 s) \to (j、 t)$ 是 I中的箭头 $\alpha : i \to j$，满足 $s = t \circ \alpha$。于是，存在一个显然的

投影函子

$$\pi_X : I/X \longrightarrow I, \quad (i, s) \mapsto i, \quad \alpha \mapsto \alpha.$$

利用 Andr´e 在 [12], Guitart 中构造的上同调群 $H^n(I/X;\ T)$ 对于这些数据:

$$\mathcal{C}^o \supset I^o \xrightarrow{T} \mathcal{A}b,$$

其中，$T : I^o \to \mathcal{A}b$ 是 A上的某个阿贝尔群预层。这些上同调群具有以下引人注目的性质：如果 X 是 I的一个对象，即 X 是公式 φ的一个模型，那么$H^n(I/X;$ 对于 $n = 0$和 $H^n(I/X,$ 有 $T) = TX;$ 对于 $n \neq 0,$ 有$T) = 0$。特别地，如果我们取 T为阿贝尔群 Λ的常值预层，则有 $H^n(I/X;$ 对于 $n = 0$ 和 $H^n(I/X,$ 有$\Lambda) = \Lambda$ ；对于 $n \neq 0,$ 有$\Lambda) = 0$。因此，这些上同调群 $H^n(I/X;\ T)$ 衡量了一个 $\mathcal{L}$-结构的解释成为公式 φ的模型的偏离程度。换言之，它们衡量的是这种关系。

$$X \models \varphi.$$

如果我们可以选择一个预层 T: $I^o \to \mathcal{A}b$ 使得 $H^n(I/X;\ T) \neq 0$ 对于 $n > 0,$ 那么关系 $X \models \varphi$ 不成立，这意味着 X 不是 φ的模型。如果 X 是某个用语言 $\mathcal{L}$ 书写的形式理论的模型，并且 φ 是 $\mathcal{L}$ 中的任意公式，满足 $H^n(I/X;$ 对于$n > 0,$ $T) \neq 0$，那么我们已经知道（根据完备性）， φ 不可能是我们的形式理论的定理。然而，我们得到的更多，因为这些上同调群 $H^n(I/X;$ $T)$ 在某种意义上也度量了 φ 偏离形式理论的程度。

我们指出，我们的第一个问题并非询问“某种形式语言的自然模型或规范模型是什么？”，例如，经典命题逻辑的布尔代数（相应地，直觉主义命题逻辑的海廷代数），以及某种一阶语言 $\mathcal{L}$ 的 $\mathcal{L}$-结构；而是询问一种独立于任何既定形式语言、适用于每一个解释对象的模型是什么。

在这项工作中，我们推广了 Guitart 的结果，并通过以下方式展示了他的洞见有多么深刻:

1. 首先，我们考察的不仅是一阶逻辑的经典模型论，还有一种独立的模型论，它由 Diaconescu 广泛发展，并称为机构理论。在这一理论中，可满足性是一个原始概念，而且对于每一种解释对象的概念，我们都有模型论的一般形式。

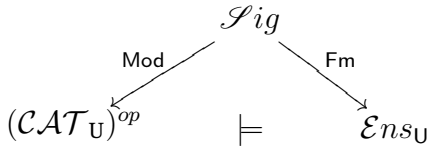
2. 其次，我们不仅构造了一种上同调理论，用来衡量模型相对于某个公式的偏差，还衡量模型相对于整个理论的偏差。

3. 我们的上同调理论将从导出子的语言中推导出来，因此我们处于一个更加一般的图景中。这一点至关重要，因为它意味着模型相对于公式的偏差并非 Andr´e 上同调所特有，而是一种普遍的上同调现象。特别地，我们可以为 Guitart 构造中的范畴 I/X 赋予一个同伦型。投影函子 π_X 从 I/X 到 I 证明了一个同伦型之间的态射；如果 X 是 I的一个对象，那么这个投影函子 π_X 就是小范畴之间的弱同伦等价，这意味着 I/X 与 I具有相同的同伦型。

最终，我们得到了逻辑的同伦解释。给定一个制度 I、I 的签名 Σ、I 的完备理论 Γ 以及 Γ 中的句子 φ，则 φ 是 Γ 的语义后承，当且仅当对 Γ 的每个模型 M，范畴 Mod$[\varphi]/M$ 都是可缩的。

模型论

令 I $= (\mathscr{S}ig$、Fm、Mod $\models)$ 为一个局部制度



定义 4.1. 设 $\mathcal{W}$ 为一个基本局部化子。局部 Σ-结构 M 是 Γ的一个 $\mathcal{W}$-拟模型，当且仅当对于每个 $\phi \in \Gamma$， M 都是 $Mod(\phi)$ 的一个 $\mathcal{W}$-拟对象。此外，当 M 对于每个基本局部化子 $\mathcal{W}$都是 Γ 的一个 $\mathcal{W}$-拟模型时，我们称 M 是 Γ 的一个拟模型。

对于每个基本局部化子 $\mathcal{W}$ 和每个 Σ-结构 M，记号 $M \models_{\mathcal{W}} \Gamma$ 表示M 是 Γ的一个 $\mathcal{W}$-拟模型。显然， $M \models \Gamma$总是蕴含 $M \models_{\mathcal{W}} \Gamma$，因为每当 M 是一个Γ-模型时，它也是每个 $\phi \in \Gamma$的一个对象。然而，由 (3.19) 可轻易推出，并非每个 $\mathcal{W}$-拟模型都是模型，这意味着 $M \models_{\mathcal{W}} \Gamma$并不必然蕴含$M \models \Gamma$。

定义 4.2. 设 $\mathcal{W}$ 是一个基本局部化子。若对于任意 $\mathcal{W}$-拟模型 M，只要它是 Γ的拟模型， M 也必然是 ϕ的 $\mathcal{W}$-拟模型，则有 $\Gamma_{\mathcal{W}}\ \phi$。关系 $\Gamma_{\infty}\ \phi$ 表示，对于所有基本局部化子$\mathcal{W}$，均有 Γ $_{\mathcal{W}}\ \phi$。

当 Γ 是仅含一个公式 ϕ的集合时，说 M 是 ϕ 的 $\mathcal{W}$-拟模型，等价于说 M 是 $Mod(\phi)$的拟对象。现在我们面临的关键开放问题是：关系 $_{\mathcal{W}}$是否存在一个句法对应物 $\vdash_{\mathcal{W}}$？如果存在，那么与之相关的证明概念是什么?

命题 4.3. 如果 $M \models \phi$，那么对于 $n \neq 0$， $H^0(Mod(\phi)/M) \cong \mathbb{Z}$ 和 $H^n(Mod(\phi)/M) = 0$。特别地，如果 Γ 是一个由 Σ-公式构成的集合，并且对于某个公式 $\phi \in \Gamma$ 和某个 $n \neq 0$, $H^n(Mod(\phi)/M) \neq 0$，那么 M 不可能是一个 Γ-模型。

前述命题引出了以下内容

定义 4.4. 当 M 是 Γ 的偏离性时，称其为 Σ-结构。

$$\chi(Mod(\phi)/M) - 1 \neq 0$$

对于至少一个公式 $\phi \in \Gamma$。上述方程成立的公式集合 $\phi \in \Gamma$ 称为 M 在 Γ 中的曲率。

备注 4.5. 我们在这项工作中提出的逻辑并非正确性逻辑，而是一种偏离逻辑。这种逻辑所关注的对象并非模型，甚至不是拟模型，而恰恰是偏离本身。看来，即使正确性失效，对错误本身仍然存在研究的可能性。定义 (4.4) 中使用的“曲率”这一名称，其灵感来源于高斯-博内定理，该定理将适当的光滑流形的局部曲率与全局欧拉示性数联系起来。

证明系统

接下来，我们将从同伦方法和上同调方法的角度重新诠释证明系统。

定义 4.6. 命题逻辑是由公式集合 Fm 和集合中的公式与公式之间的关系 (Fm $\vdash$) 以及$\vdash$ 构成的一对，并满足以下条件

-（平凡性）若 $\phi \in \Gamma$，则 $\Gamma \vdash \phi$。-（弱化性）若 $\Delta \subseteq \Gamma$ 且 $\Delta \vdash \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$-（传递性）若对所有 $\phi \in \Gamma'$ 和 $\Gamma' \vdash$ B 都有 $\Gamma \vdash \phi$，则 $\Gamma \vdash$ B。

对于每个公式集 Γ，我们定义集合

$$\overline{\Gamma} = \{\phi \in \mathsf{Fm} : \Gamma \vdash \phi\}$$

称为 Γ 的演绎闭包。根据定义可立即得到 $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$；如果 $\Gamma \subset \Gamma'$，则 $\overline{\Gamma} \subset \overline{\Gamma}'$。当 $\Gamma = \overline{\Gamma}$ 时，公式集 Γ 被称为一个理论。Fm 中的公式构成一个范畴：当且仅当 $\phi \vdash$B 时，存在从 $\phi \to$ 到 B 的唯一箭头。

P命题 4.7。设 Γ 为一个理论，ϕ 为一个公式。等价条件 :

1. $\Gamma \vdash \phi$. 2. Γ/ϕ 是非球面的。 3. $H^0(\Gamma/\phi) \cong \mathbb{Z}$ 和 $H^n(\Gamma/\phi) = 0$，适用于 $n \neq 0$。 4. $\Gamma/\phi \neq \varnothing$。

证明。假设 Γ 是一个理论。因此，$\Gamma \vdash \phi$ 当且仅当 $\phi \in \Gamma$。若 $\Gamma \vdash \phi$，则 ϕ 是 Γ 的一个对象，这意味着 Γ/ϕ 存在终对象，因而它是非球面的，这就证明了 (1) 蕴含 (2)。显然，(2) 蕴含 (3)，且 (3) 蕴含 (4)（最后一个蕴含通过逆否论证显而易见）。(4) 蕴含 (1) 这一事实由弱化性得出。

□

因此，给定理论 Γ 的非定理是满足 ϕ 的公式 $H^n(\Gamma/\phi) \neq 0$ 对于某个 $n \neq 0$。

定义 4.8。当对于所有$i > n$都有 $H^i(\Gamma/\phi) = 0$ 时，公式 ϕ 被称为公式集 Γ 的 n-曲率。Γ 的 0-曲率恰好是 Γ 的定理（根据（4.7））。Γ 的 ω-曲率 ϕ是这样一个公式：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $i > n$ 使得 $H^i(\Gamma/\phi) \neq 0$。

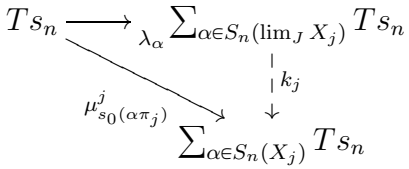
在某种意义上，阿贝尔群族 $(H^n(\Gamma/\phi))_{n\in\mathbb{Z}}$ 可称为关系 $\Gamma \vdash \phi$ 的阿贝尔障碍寄存器。如果两个公式 ϕ 和 B 具有同构的阿贝尔障碍寄存器，那么它们相对于 Γ 具有相同类型的偏离性。我们使用记号 $\Gamma \vdash_k \phi$，其中 $k \in \omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$，表示 ϕ 是 Γ 的 k-曲率；并用 $\mathsf{Fm}(\Gamma; k)$ 表示由这些 k-曲率构成的集合。于是，下面有一个层级：

$$\mathsf{Fm} = \bigsqcup_{k\in\omega^+} \mathsf{Fm}(\Gamma; k).$$

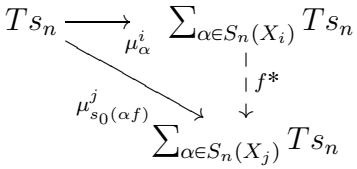
一些计算

有限积的上同调

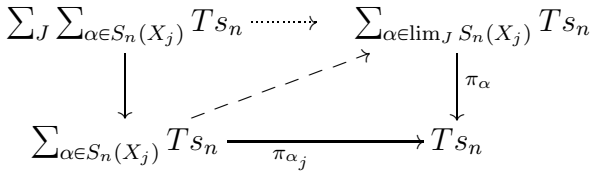
设 $\lambda_j\colon \lim_J X_j \to X_j$, $\mu^j_\alpha\colon Ts_n \to \sum_{\alpha\in S_n(X_j)} Ts_n$ e $\lambda_\alpha\colon Ts_n \to \sum_{\alpha\in S_n(\lim_J X_j)} Ts_n$ os（余）锥 极限（此处 $\alpha\colon s_n \to \cdots \to X_j$）。那么



根据 f 的泛性质: $i \to j \in J$ 我们有 $f^*k_i = k_j$ 因为



然后 $k\colon \sum_{\alpha\in S_n(\lim_J X_j)} Ts_n \to \lim_J \sum_{\alpha\in S_n(X_j)} Ts_n$。 此外, $\lim_J S_n X_j \cong S_n(\lim_J X_j)$ 因为$C/\lim_J X_j = \lim_J C/X_j$ e N 与极限交换。如果 J 是有限的且离散的, 那么 k 的逆由下式给出



因此

$$C_n(\prod_J X_j, T) \cong \sum_J C_n(X_j, T)$$

and

$$H_n(\prod_m X_i, T) \cong \sum_m H_n(X_i, T).$$

滤余极限的上同调

设 $\mu_j\colon S^n(X_j) \to \operatorname{colim}_J S^n(X_j)$。定义

$$k_j : \sum_{\alpha\in S^n(X_j)} Ts_n \to \sum_{\alpha\in \operatorname{colim}_J S^n X_j} Ts_n$$

由 $k_j(x)=(x_{s_0(\alpha\mu_j)})_\alpha$ 给出。考虑这个满态射。

$$k:\sum_J\sum_{\alpha\in S^n(X_j)}Ts_n\to\sum_{\alpha\in\mathrm{colim}_J S^nX_j}Ts_n$$

注意， $k(j,a)=k(i,b)$ 当且仅当

$$(a_{s_0(\alpha\mu_j)})_\alpha=(b_{s_0(\alpha\mu_i)})_\alpha\qquad(\star)$$

给定 $f:\ i\to k$ 注意 $(a_{s_0(\alpha\mu_i)})_{\alpha\in\mathrm{colim}_J S^n(X_j)}=(a_{s_0(s_0(\alpha\mu_k)f*)})_{\alpha\in\mathrm{colim}_J S^n(X_j)}$。由于 J 是一个滤子范畴， $(\star)$等价于

$$\exists f:i\to k\exists g:j\to k[(a_{s_0(\alpha f)})_{\alpha\in S^n(k)}=(b_{s_0(\alpha g)})_{\alpha\in S^n(k)}]$$

由于 Δ^n 是紧致的，神经构造与滤余极限可交换：这个同构保证 $x_k\to s_0\to ...\to s_n$ 来自 $\mathbf{colim}_J x_k\to s_0\to ...\to s_n$。因此， μ_i 是单射；$\mathbf{colim}N(X_j/C)_n=N(\mathbf{colim}(X_j/C))_n=N((\mathbf{colim}X_j)/C)_n$。由于上面的等价关系正是将滤余极限描述为余积的商的关系，同构定理给出

$$\mathrm{colim}_J\sum_{\alpha\in S^n(X_j)}Ts_n\cong\sum_{\alpha\in\mathrm{colim}_J S^nX_j}Ts_n$$

也就是说： $C^n(\mathbf{colim}_J X,T)\cong\mathbf{colim}_J C(X_j,T)$。由于滤余极限与以下运算可交换：有限极限、任意 colim 和像（=coker ker），因此可得

$$H^n(\mathrm{colim}_J X_j,T)\cong\mathrm{colim}_J H^n(X_j,T)$$

一个具体计算

考虑包含函子 $Field\hookrightarrow Ring$ 和函子 $(-)^\times:\ Field\to Ab$。我们有

$$d^0:\sum_{\mathbb{Z}\to F}F^\times\to\sum_{\mathbb{Z}\to F\to K}K^\times$$

由 $(d^0(x))_{f,\ F}=x_{dom(f)}-x_{cod(f)}$ 以及

$$d^1:\sum_{\mathbb{Z}\to F\to K}K^\times\to\sum_{\mathbb{Z}\to F\to K\to T}T^\times$$

由 $\mathbb{Z} \to F \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} T$、$(d^1(x))_{g,\ f} = x_{g,\ K} - x_{gf,\ F} + x_{f,\ F}$ 给出。因此

$$H^1(\mathbb{Z}, (-)^\times) = \frac{\{x_{f,F} : \forall \mathbb{Z} \to F \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} T(x_{g,K} - x_{gf,F} + x_{f,F} = 0)\}}{\{x_{f,F} : \exists y \in \sum_{\mathbb{Z}\to F} F^\times (x_{f,F} = y_{dom(f)} - y_{cod(f)})\}}$$

给定 $(x_{f,\ F})$ 集合 $y_F = x_{\chi_F,\ \mathbb{Q}}$ 其中 χ_F：当 $charF = 0$ 和 $y_F = x_{\chi_F,\ \mathbb{F}_p}$ 时是唯一的态射，否则。给定序列 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to F \xrightarrow{g} K$ 我们有

$$x_{g,F} - x_{g\chi_F,\mathbb{Q}} + x_{\chi_F,\mathbb{Q}} = 0$$

$$\implies x_{g,F} - x_{\chi_K,\mathbb{Q}} + x_{\chi_F,\mathbb{Q}} = 0 \implies x_{g,F} = y_K - y_F$$

and 同样适用于 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p \to F \xrightarrow{g} K$。因此 $H^1 = 0$，然而 $\mathbb{Z}$ 不是域！！！

5 最后的评述与未来发展

1. 一个自然的情形是考虑关于包含函子 $j : Mod[T] \hookrightarrow L - Str$ 的 Andre 上同调，其中 L 是一种有限语言，而 T 是第一阶有限语言 $L_{\omega,\omega}$ 中由 Σ 语句构成的集合。选择 X，即一个一般的 L-结构，并考虑 $M_i \in Mod[T]$ 的情形，同时将函子 $\mathcal{T}$ 取为“由.....生成的自由阿贝尔群”函子，这样做是有意义的。接下来考虑：

X 的偏差在 $Mod[T]$ 中由上同调群表示为：

$$\alpha : M_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_1 \to M_0 \to X$$

一列 L-同态（或 L-初等嵌入，甚至是 L-纯嵌入），

or

X 的偏差可以用以下同调群表示：

$$\beta : X \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_{n-1} \to M_n$$

一列 L-同态（或 L-初等嵌入，甚至是 L-纯嵌入）。

2. 研究由满足以下某些条件的所有结构所构成的 $L - Str$ 子类 X，或许会有所启发：

(a) $H^n(X, j) = 0, n \geqslant 1$(这包含类 $Mod[T]$) (b) $H^n(X, j) = 0, n \geqslant n_0$ 对于某个选定的 $n_0 \geqslant 1$。 (c) 上述项目 (b) 中所述子类的并集，对所有 $n_0 \geqslant 1$而言。 (d) 子类 (c) 的补集，即由满足以下条件的结构 X 构成：满足 $H^n(X, j) \neq 0$ 的$n \in \mathbb{N}$ 的集合是无限的。

3. 当我们从 $Mod[T]$ 转向中间子范畴 S:$Mod(T) \hookrightarrow S \hookrightarrow \Sigma - str$ 时，重新计算并比较一般结构 X 的（上）同调群，可能会很有意思，其中 S 在某些情况下可以是：(a) S 是 $Mod[T]$ 在子结构和（单态）滤过余极限等构造下的闭包——因为这些构造与众所周知的模型论结果有关（例如，某个 T 模型的子结构类，即 $S = Mod(T_\forall) =$）。(b) S 是 T 在一种包含 $L_{\omega,\omega}$ 的语言中的后承类：例如，$L_{\omega_1,\omega}$ 是 $L_{\omega,\omega}$ 的一个扩展，它具有良好的模型论性质，并且许多无法用 $L_{\omega,\omega}$-句子描述的数学概念，都可以用 $L_{\omega_1,\omega}$-句子来刻画（例如，良基偏序集、可除群等）。

参考文献

[1] Andr´e，M. M ´ethode Simpliciale en Alg `ebre homologique et Alg `ebre Commutative，《数学讲义》32，Springer-Verlag，1967。

[2] H. Cordeiro Maia e Silva。《基于有限结构上的 Quillen 模型范畴的逻辑局部性概念》，博士论文，CLE-IFCH，坎皮纳斯州立大学，巴西，2019。

[3] P.Gabriel，M. Zismann。《分数演算与同伦论》，《数学及其边界领域成果》35，Springer-Verlag，1967。

[4]A. Grothendieck。《导出范畴》，见 webusers.imj- prg.fr/georges.maltsiniotis/groth/Derivateurs.html。

[5] A. Grothendieck. Á l一次追求 des ch放大器，可用的 lable at we b users.imj-prg.fr/georges.maltsiniotis/ps.html.[6] R. Diaconescu.《非机构化模型论》，《普遍逻辑研究》，Birkh¨auser，巴塞尔，2008年。[7] C. Ehresmann.《代数结构的草图与类型》。Bule. Inst. Politec. Ia¸si 14 (1968), 1–14。[8] J. Fiadeiro, A. Sernadas.《关于推理后承的理论结构化》，载于 D. Sannella 和 A. Tarlecki（编），《数据类型规范的近期趋势》，《计算机科学讲义》332 (1988), 44–72。[9] J. A. Goguen, R. M. Burstall.《机构：面向规范与程序设计的抽象模型论》，《ACM学报》（JACM），39(1) (1992), 95–146。[10] R. Guitart.《模型论与同调代数理论的单位元》，《拓扑学与范畴微分几何笔记》30(4) (1989), 281–293。[11] R. Guitart.《理性的曲率》，《鹦鹉讲座》31 (1991), 3–41。[12] R. Guitart.《与一阶公式相关的同调理论与上同调理论的构造》，Diagrammes 23 (1990), 7–13。[13] H. L. Mariano, D. C. Pinto.《关于命题逻辑以及机构与 π-机构之间范畴关系的若干评述》，《南美逻辑学报》，3(1) (2017), 111–121。[14] G. Maltsiniotis.《Grothendieck同伦论》，Ast´erisque 301，2005年。[15]I. Moerdijk.《分类拓扑斯与分类空间》，《数学讲义》1616，Springer-Verlag，1995年。[16] G. B. Rios, D. A. Souza, D. C. Pinto, H. L. Mariano.《在 π-机构理论中连接抽象逻辑与伴随：若干理论评述及应用》，《应用逻辑学报》，9(1) (2022), 111–121。