验证恒速多模式系统的线性时序规约

Michael Blondin 舍布鲁克大学 舍布鲁克，加拿大 michael.blondin @usherbrooke.ca

Philip Offtermatt 舍布鲁克大学 舍布鲁克，加拿大 华沙大学 华沙，波兰 p hili p.offtermatt@usherbrooke.ca

Alex Sansfac.on-Buchanan 舍布鲁克大学 舍布鲁克，加拿大 alex.sansfacon-buchanan @usherbrooke.ca

arXiv:2304.13816v1 [cs.LO] 26 Apr 2023

摘要——恒速多模式系统（MMS）是一类混合系统，具有有限多个模式和实值变量，这些变量随连续时间的推移按照模式特定恒定速率演化。我们为 MMS 引入了线性时序逻辑（LTL）的一种变体，并研究了 LTL 句法片段的模型检查问题的复杂度。我们获得了一个复杂度全景，其中每个片段要么是 P 完全、NP完全，要么是不可判定的。这些结果推广并统一了关于 MMS 和连续计数器系统的若干结果。

一、引言

恒速多模式系统（MMS）是混合系统，具有有限个模式和有限数量的实值变量，这些变量根据特定模式的恒定速率随连续时间演化。

MMS 最初由 Alur等人 引入，用于对例如与绿色调度及降低系统能耗峰值相关的问题 [1] 进行建模。在该研究中，他们考虑了相对于定义为有界凸多胞体的区域的安全可调度性和安全可达性问题。

安全可调度性询问给定的 MMS 是否存在始终处于给定安全区域内的非 Zeno[1] 无限执行。安全可达性询问给定的 MMS 是否存在一条有限执行，在沿途保持处于给定安全区域内的同时到达目标点。这两个问题均已证明可在多项式时间内求解 [1]。

Krishna等人研究了一个类似的问题，其背景是运动规划 [2]。在那里，作者关注的是可达避障问题。在后者中，目标是在不进入任何给定障碍物的情况下到达给定的目标点。 [2] 的作者将障碍物规定为凸多面体。他们证明，当障碍物是闭集时，可达避障问题是可判定的，而一般情况下是不可判定的。他们还提供了该过程的实现，并通过基准测试证明其性能优于开放运动规划库。

M. Blondin 获得了加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的探索基金资助，以及魁北克自然与技术研究基金（FRQNT）的资助。P. Offtermatt 现就职于德国慕尼黑的 Informal Systems。

[1]非正式地说，这意味着在有限的时间内不可能发生无限多次模式切换。

贡献：上述问题通过临时方法得到了解决。此外，许多自然问题无法用这些现有框架表达。其中一个问题是安全重复可达性，其目标是找到一条非泽诺无限执行，使其始终处于某个安全区域内，并无限次访问一个有限区域集。

我们提出了一个涵盖上述所有内容的框架。更准确地说，我们为 MMS 引入了一种线性时序逻辑（LTL）。该变体采用有界凸多胞体作为原子命题。我们省略了下一算子 X，因为它不适用于 MMS 的连续行为。此外，我们采用了受度量时序逻辑启发的直到时序算子 U 的严格未来解释 [3] （更准确地说，源自 MITL$_{0,\infty}$）。特别是，我们的逻辑能够表达

- 安全可调度性：G Zsafe;
- 安全可达性： Zsafe U{$\boldsymbol{x}$target};
- 可达避障：$(\neg O_1 \wedge \cdots \wedge \neg O_n)$ U {$\boldsymbol{x}$目标}；以及
- 安全重复可达性：（G Zsafe）$\wedge \bigwedge_{i=1}^{n}$（GF Z_i）。

我们研究 LTL模型检测的计算复杂度。LTL模型检测需要判断：给定一个 MMS \(M\)、一个起始点 $\boldsymbol{x}$ 和一个 LTL 公式 φ，是否存在一条从 $\boldsymbol{x}$ 出发、满足 φ 的 \(M\) 的非泽诺无限执行，记为 $\boldsymbol{x} \models_M \varphi$。我们考虑通过允许或禁止使用来自 {U、F、G $\wedge$、$\vee$、$\neg$} 的算子，并要求至少包含一个时序算子[2]，所得到的句法片段。我们确定了所有这些 $2^6 - 2^3 = 56$ 片段的计算复杂度：每个片段均属于 P 完全、NP完全或不可判定这三种情况之一。

我们的工作还与计数器系统（如向量加法系统（VAS）和 Petri 网）的研究密切相关。这些模型具有广泛的应用，涵盖从程序验证与综合，到化学、生物学和业务过程的形式化分析等诸多领域（例如，参见 [4]–[7]）。此外，计数器系统的连续松弛已在实践中得到成功应用，以缓解其巨大的计算复杂度（例如，参见 [8], [9]）。

MMS 的行为相当于 VAS 和 Petri 网的连续伪可达性，即变迁的效应可以按正实数值进行缩放，并且不要求

[2]不包含任何时序算子时，该逻辑与 MMS 毫无关系；它会变成无量词线性算术。

计数器必须保持非负。后一项要求可以在我们的逻辑中恢复。虽然我们不研究完全一般意义下的无界区域，但我们考虑半有界线性公式，其中包括形如 (G Z) $\wedge\cdots$或 ZU $\cdots$的公式，其中 Z 是无界的，因此可以设为 $Z \coloneqq \mathbb{R}^d_{\geq 0^\circ}$ 特别是，我们的结果蕴含了已知事实：连续可达性，即检查 $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$ U $\{\boldsymbol{x}_{\text{target}}\}$，可以在多项式时间 [10] 内完成。此外，我们还确立了更丰富性质的可判定性。因此，我们的工作可以被视为 MMS 以及连续 VAS/Petri 网的统一且更一般的框架。

结果：我们用 $\text{LTL}_{\text{B}}(X)$ 表示仅使用来自 X 的算子的 LTL 公式集合，用 $\text{LTL}(X)$ 表示具有相同片段但区域可能无界的情况。我们得到了图 1 所示的完整复杂度全景。我们的贡献概括为以下三点。

I)：我们证明 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{F}, \text{G}\ \wedge\})$ 属于 NP，因此 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{F}\ \wedge, \vee\})$ 也属于 NP。更准确地说，我们证明：1）来自该片段的公式可以转换为一种称为扁平公式的范式，其中时序算子的嵌套受到限制；2）扁平公式可以转换为带有基于转移的接受、除自环外不含环（“几乎无环”）且具有线性宽度的广义 B¨uchi 自动机；3）通过猜测一个所谓的线性路径方案 S，可以在 NP 中测试 MMS M 是否满足由该自动机 $\mathcal{A}$ 给出的规范；构造一个与 S 等价的所谓线性公式 ψ，并在多项式时间内测试 $\boldsymbol{x} \models_M \psi$。

步骤 2 的灵感来自 K˘ret´ınsk´y 和 Esparza [11] 关于经典 LTL 在限制为 $\{\text{F}, \text{G}\ \wedge, \vee, \neg\}$ 时的确定性 Muller 自动机研究。我们的构造也处理经典 LTL，但限制为 {F,G $\wedge$}，因此也是一项独立于 MMS、对逻辑与自动机领域的间接贡献。

特别是，在步骤 3 中，我们为 MMS 建立了一个多项式时间可处理的 LTL 片段，即半有界线性 LTL 公式。我们借助一种多项式时间可处理的存在性线性算术片段来实现这一点；该片段最初在 [12] 中提出，用于刻画连续 Petri 网的可达集。具体而言，我们展示了如何将形式为$\psi = (\text{G}Z_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \text{GF}Z_i$、其中 Z_0 无界的 LTL 公式，转换为 [12] 的逻辑。这颇具挑战性；相比之下，像 [1] 中所做的那样，只处理带有 Z_0 有界的 GZ_0 则要简单得多。这项工作需要对 MMS 以及满足 ψ 的点进行技术性刻画，其中尤其需要谨慎运用 Farkas引理。

作为步骤 3的推论，我们证明 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{F,G}\ \neg\})$、$\text{LTL}(\{\text{F}\ \vee\})$ 和 $\text{LTL}(\{\text{G}\ \wedge\})$ 均可在多项式时间内求解。这些片段包含安全可调度性和安全可达性，从而推广了它们在 P [1] 中的归属性。

II)：我们通过从子集和归约，证明 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{F}\ \wedge\})$ 是 NP-困难的。结合前述结果可知，$\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{F}, \text{G}\ \wedge\})$ 和 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{F}\ \wedge, \vee\})$ 均为 NP完全。

III)：我们通过从带抑制弧的Petri网的可达性问题进行归约，证明 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{U}\})$ 和 $\text{LTL}_{\text{B}}(\{\text{G}\ \vee\})$ 都是不可判定的。这一结果“推广”了 [2] 中所确立的到达-规避问题的不可判定性。他们该证明通过间接方式表明，对于形如 $(Z_1 \vee \cdots \vee Z_n)$ U $\{\boldsymbol{x}_{\text{target}}\}$ 的公式，当每个 Z_i 都是可能无界的区域时，模型检测问题是不可判定的。我们通过仅使用有界区域，进一步强化了这一结果。

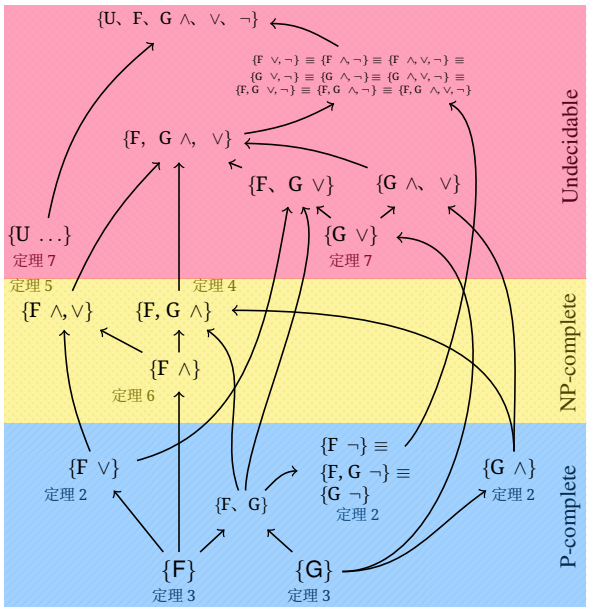


图 1：MMS 的线性时序逻辑模型检测复杂度全景。从 X 到 Y 的边表示，$\text{LTL}_{\text{B}}(X)$ 中的任意公式都等价于 $\text{LTL}_{\text{B}}(Y)$ 中的某个公式。每个表达式“$X \equiv Y$”代表 $X \leftrightarrow Y$，即从 X 到 Y 的边，以及从 Y 到 X 的边。节点 $\{\text{U} \ldots\}$ 表示任何包含 U 的线性时序逻辑片段。

更多相关工作：MMS 与混合自动机 [13] 有关。然而，与 MMS 不同，后者允许有限的控制结构以及速率非恒定的模式。其强大的建模能力导致大多数问题都不可判定，包括可达性问题，即形如 F $\{\boldsymbol{x}_{\text{target}}\}$ 的公式。不过，一些研究人员已针对信号时序逻辑等时序规范语言研究了判定过程（例如，参见 [14]）。

定时自动机 [15] 构成了另一种相关的混合系统。在该模型中，所有变量（称为时钟）都以相同的恒定速率增加，这与 MMS 的情况相反。另一方面，定时自动机配备了有限控制结构，而 MMS 则没有。

有界速率多模态系统推广了 MMS [16]，[17]。在此模型中，与模式相关的速率由有界凸多胞体给出。该设置可以视为一个双人博弈。玩家 1 选择一个模式和一个持续时间，玩家 2 从该模式对应的集合中选择速率。系统根据玩家 2 选择的速率演化。在此背景下，“可调度性”是玩家 1 的一种策略，无论玩家 2 如何选择，都不会离开安全区域。

文献中已有对经典 LTL 的一些小片段进行研究，例如参见 [18, 表 1]。特别是，$\text{LTL}(\{\text{F,G,}\wedge, \vee, \neg\})$ 曾在 [11], [19] 中以以下名称进行研究：

L(F) 和 (F, G)，而 LTL({F ∧}) 曾在 [20]中以 LTL+(◊, ∧) 之名进行研究。 [20] 的作者证明，一个称为 LTL$^{\text{PODB}}$ 的片段——它与 LTL({F, G ∧}) 不可比较——可以由指数规模、线性宽度的偏序确定性 B¨uchi 自动机识别。据我们所知，目前尚无专门研究 LTL({F,G ∧}) 的工作，尤其是尚无关于将其转换为线性宽度自动机的研究。

组织结构：第二节介绍基本定义、MMS 和 LTL，并进一步阐述 MMS 上的 LTL 与无限词上的经典 LTL 之间的关系。第三节证明，经典 LTL({F, G ∧}) 中的任意公式都可以转换为一种特定类型的 ω-自动机，而这种自动机等价于若干所谓的线性 LTL 公式的析取。第四节证明，可以在多项式时间内对 MMS 上的线性 LTL 公式进行模型检测。由此，我们确立了一些句法片段的 P-完全性。第五节和第六节分别证明了其他片段的 NP-完全性和不可判定性。最后在第七节作总结。受篇幅限制，许多证明留待完整版本呈现，该版本可在 arXiv 上免费获取。

II. 预备知识

我们用 $\mathbb{N}$ 表示 $\{0,1,\ldots\}$，用 $\mathbb{Z}$ 表示整数，用 $\mathbb{R}$ 表示实数。我们使用下标来限制这些集合，例如 $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$。我们写作 $[\alpha,\beta] := \{x \in \mathbb{R} : \alpha \le x \le \beta\}$ 和 $[a..b] := \{i \in \mathbb{N} : a \le i \le b\}$。我们还使用（半）开区间，例如 $(1,2] = [1,2] \setminus \{1\}$。

设 I 为指标集合，且令 $X \subseteq \mathbb{R}^I$。我们将 $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^I$记为满足 $\boldsymbol{e}_i(i) = 1$ 且对所有 $j \neq i$均有 $\boldsymbol{e}_i(j) = 0$ 的向量，并用 $\mathbf{0}$ 表示满足对所有 $i \in I$ 均有 $\mathbf{0}(i) = 0$ 的向量。令$\|\boldsymbol{x}\| := \max\{|\boldsymbol{x}(i)| : i \in I\}$，且 $\|X\| := \sup\{\|\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in X\}$。如果对所有 $\lambda \in [0,1]$ 以及 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$，均有 $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y} \in X$，则称 X 为凸；如果存在某个 $b \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ 使得 $\|X\| \le b$，则称其为有界。

我们用 2^Σ 表示 Σ的幂集。给定一个非空有限序列 w，令 $w^\omega := ww\cdots$。令 $\Sigma^\omega := \{w_0w_1\cdots : w_i \in \Sigma\}$ 为元素取自 Σ的无限序列集合。

A. 恒速多模式系统

一个具有 $d \in \mathbb{N}_{\ge 1}$的 d维常速多模式系统（MMS）是一个有限集合 $\mathrm{M} \subseteq \mathbb{R}^d$，其元素称为模式。调度是一个（有限或无限）序列$\pi = (\alpha_1, \boldsymbol{m}_1)(\alpha_2, \boldsymbol{m}_2)\cdots$，其中每个 $(\alpha_i, \boldsymbol{m}_i) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{M}$。为简化记法，我们常写作例如 $\boldsymbol{m}\,\frac{1}{2}\boldsymbol{m}'$，而不是 $(1,\boldsymbol{m})(1/2,\boldsymbol{m}')$。给定 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，我们将调度 $\lambda\pi$定义为 π，其中每个 α_i 都替换为 $\lambda\alpha_i$。 π 的大小记作 $|\pi|$，即其数对的数量。 π 的效应为 $\boldsymbol{\Delta}_\pi := \sum_i \alpha_i\boldsymbol{m}_i$。 π 的支撑集为 $\mathrm{supp}(\pi) := \{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots\}$。令 $\mathrm{time}_{\boldsymbol{m}}(\pi) := \sum_{i:\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{m}} \alpha_i$，并令 $\mathrm{time}(\pi) := \sum_{\boldsymbol{m}\in M} \mathrm{time}_{\boldsymbol{m}}(\pi)$。若无限调度 π 满足 $\mathrm{time}(\pi) = \infty$，则称其为非 Zeno。有限调度 π 的 Parikh映像记作 $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^M_{\ge 0}$，即 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{m}) := \mathrm{time}_{\boldsymbol{m}}(\pi)$。若两个有限调度在合并连续相同模式后相等，则称它们等价，记作 $\equiv$；也就是说，使用规则 $\pi(\alpha,\boldsymbol{m})(\beta,\boldsymbol{m})\pi' \equiv \pi(\alpha+\beta,\boldsymbol{m})\pi'$。令 $\pi[\tau..\tau']$ 为从 π 中经过时间 τ 后开始，并在经过时间 τ' 后结束所得到的调度；例如，对于 $\pi = (2,\boldsymbol{m}_1)(0.5,\boldsymbol{m}_2)(1,\boldsymbol{m}_3)^\omega$，我们有

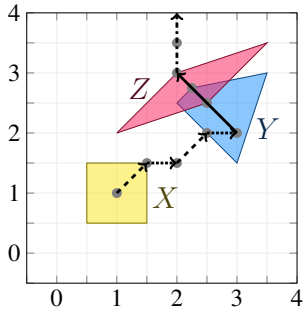


图 2：执行 σ 表示为一条有向路径。三个有界区域 X、Y、Z 表示为填充彩色多边形。根据标记点 σ 得到一条轨迹。

$\pi[0..1] = (1,\boldsymbol{m}_1)$、$\pi[0.5..2.25] = (1.5,\boldsymbol{m}_1)(0.25,\boldsymbol{m}_2)$ 和$\pi[3..] = (0.5,\boldsymbol{m}_3)(1,\boldsymbol{m}_3)^\omega$。

执行是一个（有限或无限）序列 $\sigma = \boldsymbol{x}_0I_0\boldsymbol{x}_1I_1\boldsymbol{x}_2\cdots$，其中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{x}_1$、$\ldots \in \mathbb{R}^d$、I_0、I_1、$\ldots \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}$是端点互不相同的闭区间，$\min I_0 = 0$，且对所有 $j \in \mathbb{N}_{>0}$，$\min I_j = \max I_{j-1}$。令 $\mathrm{dom}\,\sigma := I_0 \cup I_1 \cup \cdots$。对于每个 $\tau \in \mathrm{dom}\,\sigma$，若 $\tau \in I_j$，令

$$\sigma(\tau) := \boldsymbol{x}_j + \frac{\tau - \min I_j}{\max I_j - \min I_j} \cdot (\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j).$$

我们定义 $\sigma[\tau..\tau']$，其中 $[\tau,\tau'] \subseteq \mathrm{dom}\,\sigma$，为满足以下条件的执行：对每个 $\alpha \in [0, \tau'-\tau]$，$\sigma'(\alpha) = \sigma(\tau+\alpha)$。

调度 $\pi = (\alpha_1,\boldsymbol{m}_1)(\alpha_2,\boldsymbol{m}_2)\cdots$ 与点 $\boldsymbol{x}_0$ 一起，产生执行 $\mathrm{exec}(\pi,\boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{x}_0I_0\boldsymbol{x}_1\cdots$其中 $I_0 := [0,\alpha_1]$，$I_j := [\max I_{j-1}, \max I_{j-1} + \alpha_{j+1}]$ 和$\boldsymbol{x}_j := \boldsymbol{x}_{j-1} + \alpha_j\boldsymbol{m}_j$。我们用符号 $\boldsymbol{x} \to^\pi \boldsymbol{y}$ 表示这样一个事实：π 是一个调度，它从 $\boldsymbol{x}$ 出发，产生一个以 $\boldsymbol{y}$ 结束的执行。如果我们只关心此类调度是否存在，可以写作 $\boldsymbol{x} \to^* \boldsymbol{y}$；也可以写作 $\boldsymbol{x} \to^+ \boldsymbol{y}$，表示存在这样一个非空调度。有时，如果某个端点的值无关紧要，我们会省略其中一个端点，例如，$\boldsymbol{x} \to^\pi$ 表示 $\boldsymbol{x} \to^\pi \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta}_\pi$。给定集合 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$，我们写作 $\boldsymbol{x} \to^\pi_Z$ 表示该执行始终不会离开 Z，即对所有 $\tau \in \mathrm{dom}\,\sigma$，都有 $\sigma(\tau) \in Z$，其中 $\sigma := \mathrm{exec}(\pi,\boldsymbol{x})$。我们将这一记法扩展到任意集合族 $\mathcal{X}$，要求对所有 $\tau \in \mathrm{dom}\,\sigma$，都存在 $Z \in \mathcal{X}$ 使得 $\sigma(\tau) \in Z$。

示例 1：设 $\mathrm{M} := \{(0,1),(1,0),(1,1),(-1,1)\}$。令$\pi := \frac{1}{2}$ (1, 1) ı2(1, 0) ı2(1, 1) ı2(1, 0) (−1, 1) (0, 1) $\cdots$为一个调度。执行 $\sigma := \mathrm{exec}(\pi,(1,1))$ 在图 2 中表示为一条有向路径，其中用不同的样式区分各模式（忽略圆形标记和彩色多边形）：

$$(1,1)\,[0,0.5]\,(1.5,1.5)\,[0.5,1]\,(2,1.5)\,[1,1.5]\,(2.5,2)\,[1.5,2]\,(3,2)\,[2,3]\,(2,3)\,[3,4]\,(2,4)\cdots. \quad \square$$

B. MMS 的线性时序逻辑

区域 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ 是由有限个闭半空间的交集表示的凸多胞体，即 $Z = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \text{对于某个 } \mathrm{A} \in \mathbb{Z}^{k\times d} \text{ 和 } \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^k,\ \mathrm{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$。

基于有限区域集 AP 的线性时序逻辑（LTL）具有以下语法：

$$\varphi ::= true \mid Z \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \mathsf{F}\varphi \mid \mathsf{G}\varphi \mid \varphi\ \mathsf{U}\ \varphi,$$

其中 $Z \in$AP。令 LTL(X) 表示（在语法上）仅使用 X 中算子的 LTL 公式集合。例如，LTL({F、G $\wedge$}) 描述了仅使用算子 F、G 和 $\wedge$的 LTL 公式。我们写作 LTL_B 以表示 AP 中的所有区域都必须是有界的。若一个 LTL 公式不包含 $\neg$的任何出现，则称其为无否定公式。

我们定义无限执行上的语义：

$$\begin{aligned}
\sigma,\tau &\models true &&\iff true,\\
\sigma,\tau &\models Z &&\iff \sigma(\tau) \in Z,\\
\sigma,\tau &\models \neg\varphi &&\iff \neg(\sigma,\tau \models \varphi),\\
\sigma,\tau &\models \varphi \wedge \varphi' &&\iff (\sigma,\tau \models \varphi) \wedge (\sigma,\tau \models \varphi'),\\
\sigma,\tau &\models \varphi \vee \varphi' &&\iff (\sigma,\tau \models \varphi) \vee (\sigma,\tau \models \varphi'),\\
\sigma,\tau &\models \mathsf{F}\varphi &&\iff \exists\tau' \geq \tau : \sigma,\tau' \models \varphi,\\
\sigma,\tau &\models \mathsf{G}\varphi &&\iff \forall\tau' \geq \tau : \sigma,\tau' \models \varphi,\\
\sigma,\tau &\models \varphi\ \mathsf{U}\ \varphi' &&\iff \exists\tau' \geq \tau : (\sigma,\tau' \models \varphi')\\
&&&\qquad \wedge (\forall\tau'' \in [\tau,\tau') : \sigma,\tau'' \models \varphi).
\end{aligned}$$

我们将 $\sigma \models \varphi$ 写作 $\sigma,0 \models \varphi$。如果两个公式由相同的执行满足，则称它们等价，记作 $\varphi \equiv \varphi'$。特别地，$\mathsf{F}\psi \equiv$ true U ψ，且 $\mathsf{G}\psi \equiv \neg\mathsf{F}\neg\psi$。

设 M 为一个 MMS，且令 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$。我们称 $\boldsymbol{x} \models_M \varphi$ 当且仅当 M 存在一个非 Zeno 无限调度 π，使得执行($\pi,\boldsymbol{x}$) $\models\varphi$。片段 LTL(X) 的模型检测问题要求：给定 M、 $\boldsymbol{x}$ 和 $\varphi \in$ LTL(X)，判断 $\boldsymbol{x} \models_M \varphi$。

示例 2：回顾示例 1 中的 MMS M 和调度 π。令 X、 Y和 Z 为图 2 中着色的有界区域，例如 $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0.5 \leq x \leq 1.5, 0.5 \leq y \leq 1.5\}$。我们有 $(1,1) \models_M X \wedge \mathsf{F}((Y \wedge \neg Z) \wedge \mathsf{F}Z)$。 □

C. 与经典 LTL 的联系

经典线性时序逻辑（LTL）（不含时序算子 X）与第 II-B 节中的逻辑具有相同的语法，但其解释基于无限词 $w \in (2^{AP})^\omega$：

$$\begin{aligned}
w,i &\models true, &&\iff true,\\
w,i &\models a &&\iff a \in w(i),\\
w,i &\models \neg\varphi &&\iff \neg(w,i \models \varphi),\\
w,i &\models \varphi \wedge \varphi' &&\iff (w,i \models \varphi) \wedge (w,i \models \varphi'),\\
w,i &\models \varphi \vee \varphi' &&\iff (w,i \models \varphi) \vee (w,i \models \varphi'),\\
w,i &\models \mathsf{F}\varphi &&\iff \exists j \geq i : w,j \models \varphi,\\
w,i &\models \mathsf{G}\varphi &&\iff \forall j \geq i : w,j \models \varphi,\\
w,i &\models \varphi\ \mathsf{U}\ \varphi' &&\iff \exists j \geq i : (w,j \models \varphi')\\
&&&\qquad \wedge (\forall k \in [i..j-1] : w,k \models \varphi).
\end{aligned}$$

我们写作 $w \models \varphi$ 当且仅当 $w,0 \models \varphi$。注意， $w,i \models \varphi$ 成立当且仅当 $w[i..] \models \varphi$，其中 $w[i..] := w(i)w(i+1)\cdots$。如果 φ 和 φ' 由相同的无限词满足，我们就写作$\varphi \equiv \varphi'$。为了将执行上的线性时序逻辑与无限词联系起来，我们引入轨迹的概念。直观地说，轨迹刻画了一次执行中的区域变化。

令 $\chi_{AP}\colon \mathbb{R}^d \to$ AP 为一个函数，它返回给定点所处区域的集合：$\chi_{AP}(\boldsymbol{x}) := \{Z \in \text{AP} : \boldsymbol{x} \in Z\}$。令 σ 为一次执行。我们称词 w 是 σ 的一条轨迹，当且仅当存在 $\tau_0 < \tau_1 < \cdots \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得

- $\operatorname{dom}\sigma = [\tau_0,\tau_1] \cup [\tau_1,\tau_2] \cup \cdots$，
- 对每个 $i \in \mathbb{N}$， $w(i) = \chi_{AP}(\sigma(\tau_i))$，并且
- 对每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在 $j \in \{i, i+1\}$，使得：$\chi_{AP}(\sigma(\tau'))$ $= \chi_{AP}(\sigma(\tau_j))$ 对所有 $\tau' \in (\tau_i,\tau_{i+1})$ 均成立。

示例 3：回忆一下示例 1 中的执行 σ。词 w：$= \{X\}\{X\}\emptyset\{Y\}\{Y\}\{Y,Z\}\{Y,Z\}\{Z\}\emptyset\emptyset\cdots$ 是 σ 的一条轨迹。如图 2 中圆形标记所示，它由 $\tau_0 := 0, \tau_1 := 0.5, \tau_2 := 1, \tau_3 := 1.5, \tau_4 := 2, \tau_5 :=$2.5, $\tau_6 := 2.75, \tau_7 := 3, \tau_8 := 3.5$ 等构成。 □

稍加谨慎即可证明，任何执行都有一条轨迹。此外，在没有否定的情况下，对执行进行模型检验等同于根据经典 LTL 语义对其任意一条轨迹进行模型检验。因此，无否定经典 LTL 中的等价关系在执行语义下也成立。

命题 1：任何执行 σ 都有一条轨迹。

命题 2：设 σ 是一个执行，$\operatorname{dom}\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$；设 w 是 σ 的一条轨迹，且 φ 是一个无否定 LTL 公式。则 $\sigma \models \varphi$ 当且仅当 $w \models \varphi$。

III. 从 LTL({F, G $\wedge$}) 到线性 LTL

本节讨论在无限词上解释的经典 LTL 公式。我们将证明，LTL({F, G $\wedge$}) 中的任何公式都对应于一种特定形状的自动机，这正是我们所称的线性 LTL 公式。

A. 从 LTL({*F,G* $\wedge$}) 到扁平公式

如果一个公式是原子命题的合取，我们就称其为伪原子的。按照约定，空合取等价于真。如果一个线性时序逻辑公式 φ 具有以下形式，则称其为扁平公式：

$$\psi \wedge \mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi_i'' \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j,$$

其中， ψ、 ψ' 和 ψ_i''是伪原子的；而 φ_j 是扁平的。

给定一个具有以下形式的公式 $\varphi \in$ 线性时序逻辑({F, G $\wedge$}):

$$\varphi = \psi \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j,$$

我们定义以下映射：

$$\begin{aligned}
\operatorname{flat}_\mathsf{G}(\varphi) &:= \mathsf{G}\psi \wedge \bigwedge_{i\in I} \operatorname{flat}_\mathsf{G}(\varphi_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \operatorname{flat}_\mathsf{GF}(\varphi_j),\\
\operatorname{flat}_\mathsf{GF}(\varphi) &:= \mathsf{GF}\psi \wedge \bigwedge_{i\in I} \operatorname{flat}_\mathsf{FG}(\varphi_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \operatorname{flat}_\mathsf{GF}(\varphi_j),\\
\operatorname{flat}_\mathsf{FG}(\varphi) &:= \mathsf{FG}\psi \wedge \bigwedge_{i\in I} \operatorname{flat}_\mathsf{FG}(\varphi_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \operatorname{flat}_\mathsf{GF}(\varphi_j),\\
\operatorname{flat}(\varphi) &:= \psi \wedge \bigwedge_{i\in I} \operatorname{flat}_\mathsf{G}(\varphi_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\operatorname{flat}(\varphi_j).
\end{aligned}$$

顾名思义，通过归纳法可知，公式 $\mathsf{flat}(\varphi)$ 是扁平的。此外，以下结论成立。

命题 3：扁平$(\varphi) \equiv \varphi$。

B. 从扁平公式到几乎无环自动机

我们称一个自动机为几乎无环的，如果对于每一对状态 $q \neq r$，$q \to^* r$ 蕴含 $r \not\to^* q$，也就是说，环必须是自环。几乎无环自动机的宽度是其简单路径中的最大长度。

我们将证明，任意公式 $\varphi \in$ 线性时序逻辑($\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\}$) 都可以被翻译为一个几乎无环的自动机 $\mathcal{A}_\varphi$，其宽度与 φ 的大小呈线性关系，并且当且仅当 $w \models \varphi$ 时，$\mathcal{A}_\varphi$ 接受 w。我们将在后文正式定义接受条件，但对于熟悉 ω-自动机的读者而言：$\mathcal{A}_\varphi$ 将是一个带有接受迁移的广义 B¨uchi 自动机。

为了定义 $\mathcal{A}_\varphi$，我们首先给出中间定义。令 $\mathfrak{U}$: LTL($\{\mathsf{F}, \mathsf{G}\ \wedge\}$) $\to 2^{\mathrm{LTL}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\})}$ 定义如下：$\mathfrak{U}(\mathsf{true}) \coloneqq \{\mathsf{true}\}$, $\mathfrak{U}(a) \coloneqq \{a\}$, $\mathfrak{U}(\mathsf{G}\varphi) \coloneqq \{\mathsf{G}\varphi\}$,

$$\mathfrak{U}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \coloneqq \{\psi_1 \wedge \psi_2 : \psi_1 \in \mathfrak{U}(\varphi_1), \psi_2 \in \mathfrak{U}(\varphi_2)\},$$
$$\mathfrak{U}(\mathsf{F}\varphi) \coloneqq \{\mathsf{F}\varphi\} \cup \mathfrak{U}(\varphi).$$

例 4：集合 $\mathfrak{U}(\mathsf{G}a \wedge \mathsf{F}(b \wedge \mathsf{FG}c))$ 等于

$$\{\mathsf{G}a \wedge \mathsf{F}(b \wedge \mathsf{FG}c), \mathsf{G}a \wedge b \wedge \mathsf{FG}c, \mathsf{G}a \wedge b \wedge \mathsf{G}c\}. \qquad \square$$

给定 $A \subseteq \mathrm{AP}$，令 $\mathsf{prop}(\bigwedge_{a\in A} a) \coloneqq A$。给定 $A \subseteq \mathrm{AP}$ 和一个扁平公式 $\varphi = \psi \wedge \mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi_i'' \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j$，令

$$\varphi[A] \coloneqq \begin{cases} \mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge\limits_{i\in I} \mathsf{GF}\psi_i'' \wedge \bigwedge\limits_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j & \text{if } \mathrm{prop}(\psi \wedge \psi') \subseteq A, \\ \mathit{false} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给定 $\varphi \in$ LTL($\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\}$)，自动机 $A_\varphi \coloneqq (Q, \Sigma, \to, q_0)$ 分别由以下状态、字母表、变迁和初始状态定义：

$$Q \coloneqq \{\psi \in \mathrm{LTL}(\{\mathsf{F},\mathsf{G},\wedge\}) : \psi \text{ is flat}\},$$
$$\Sigma \coloneqq 2^{AP},$$
$$\to \coloneqq \{(\psi, A, \psi') : \exists \psi'' \in \mathfrak{U}(\psi) \text{ s.t. } \psi' = \psi''[A] \neq \mathit{false}\},$$
$$q_0 \coloneqq \mathrm{flat}(\varphi).$$

例 5：令 $\varphi \coloneqq a \wedge \mathsf{F}b$，其为扁平公式。我们有 $\mathfrak{U}(\varphi) = \{a \wedge \mathsf{F}b, a \wedge b\}$。自动机 $\mathcal{A}_\varphi$ 描绘于图 3 顶部。注意，当且仅当存在一条从初始状态出发、标记为 w 且访问 true 的无限路径时，$w \models \varphi$。

令 $\varphi' \coloneqq \mathsf{GF}(a \wedge \mathsf{G}c) \wedge \mathsf{F}b$。我们有 $\mathsf{flat}(\varphi') = \mathsf{GF}a \wedge \mathsf{FG}c \wedge \mathsf{F}b$。因此，$\mathfrak{U}(\mathsf{flat}(\varphi'))$ 等于

$$\{\mathsf{GF}a \wedge \mathsf{FG}c \wedge \mathsf{F}b, \mathsf{GF}a \wedge \mathsf{FG}c \wedge b, \mathsf{GF}a \wedge \mathsf{G}c \wedge \mathsf{F}b, \mathsf{GF}a \wedge \mathsf{G}c \wedge b\}.$$

自动机 $\mathcal{A}_{\varphi'}$ 如图 3 底部所示。令$q \coloneqq \mathsf{GF}a \wedge \mathsf{G}c$。注意，$w \models \varphi'$ 当且仅当存在一条从初始状态出发、标记为 w的无限路径，该路径无限次经过变迁集合 $\{(q, A, q) : A \supseteq \{a, c\}\}$。 $\square$

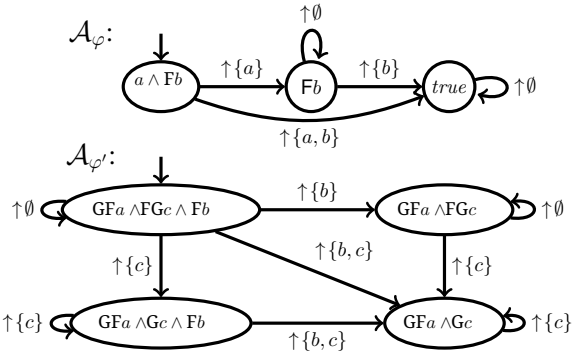


图 3：$\varphi = a \wedge \mathsf{F}b$（上）和 $\varphi' = \mathsf{GF}(a \wedge \mathsf{G}c) \wedge \mathsf{F}b$（下）的自动机。每个 $\uparrow A$ 均表示 $\{A' \subseteq$ 原子命题集：$A' \supseteq A\}$。

1）自动机 $\mathcal{A}_\varphi$ 的结构：我们首先尝试证明 $\mathcal{A}_\varphi$ 是几乎无环的。对于每个 $\varphi \in$ LTL($\{\mathsf{F}, \mathsf{G}\ \wedge\}$)，令 $|\mathsf{true}| = |a| \coloneqq 1$，$|\varphi_1 \wedge \varphi_2| \coloneqq |\varphi_1| + 1 + |\varphi_2|$ 和 $|\mathsf{G}\varphi| = |\mathsf{F}\varphi| \coloneqq 1 + |\varphi|$。此外，令 $|\mathsf{true}|_\mathsf{F} = |a|_\mathsf{F} = |\mathsf{G}\varphi|_\mathsf{F} \coloneqq 0$, $|\varphi_1 \wedge \varphi_2|_\mathsf{F} \coloneqq |\varphi_1|_\mathsf{F} + |\varphi_2|_\mathsf{F}$ 和 $|\mathsf{F}\varphi|_\mathsf{F} \coloneqq 1 + |\varphi|_\mathsf{F}$。下面的性质可通过归纳法得到。

命题 4：设 $\varphi \in$ 线性时序逻辑($\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\}$)。以下结论成立：
1) 若 φ 是扁平的，则 $|\varphi|_\mathsf{F} > |\varphi'|_\mathsf{F}$ 对于所有 $\varphi' \in \mathfrak{U}(\varphi) \setminus \{\varphi\}$，2) 若 φ 是扁平的，则 $|\varphi|_\mathsf{F} \geq |\varphi[A]|_\mathsf{F}$ 对于所有 $A \subseteq$ 原子命题集，3) $|\varphi| \geq |$扁平$(\varphi)|_\mathsf{F}$。

该命题可由命题 4 推得：

命题 5：设 $r_0 \to^{A_1} r_1 \to^{A_2} \cdots \to^{A_n} r_n$ 是 $\mathcal{A}_\varphi$的一条简单路径。则 $|r_1|_\mathsf{F} > \cdots > |r_n|_\mathsf{F}$成立。

命题 6：设 $\varphi \in$ 线性时序逻辑($\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\}$)。自动机 $\mathcal{A}_\varphi$ 几乎无环，且其宽度属于 $\mathcal{O}(|\varphi|)$。

证明：我们先证明几乎无环性。为导出矛盾，假设 $\mathcal{A}_\varphi$ 有一个简单环 $q \to^u r \to^v q$，其中 $q \neq r$。由于 $q \to^* r$，根据命题 4 的第 1 项和第 2 项可得 $|q|_\mathsf{F} \geq |r|_\mathsf{F}$。由于 $q \neq r$，我们有 $|u| > 1$ 和 $|v| > 1$。因此，命题 5 给出 $|r|_\mathsf{F} > |q|_\mathsf{F}$，这与假设矛盾。

现在我们来界定 的宽度 $\cdots \to^{A_n} q_n$ n A_φ $q_0 \to^{A_1} q_1 \to^{A_2}$。设 是 的一条简单路径。我们有 A_φ

$$\begin{aligned} n &\leq |q_1|_\mathsf{F} + 1 && \text{(by Proposition 5)} \\ &\leq |q_0|_\mathsf{F} + 1 && \text{(by Items 1 and 2 of Proposition 4)} \\ &= |\mathrm{flat}(\varphi)|_\mathsf{F} + 1 && \text{(by def. of } q_0\text{)} \\ &\leq |\varphi| + 1 && \text{(by Item 3 of Proposition 4).} \end{aligned} \qquad \square$$

2) $\mathcal{A}_\varphi$的语言：现在我们来定义自动机 $\mathcal{A}_\varphi$的接受条件。令 $F \coloneqq \{q \in Q : q_0 \to^+ q \wedge |q|_\mathsf{F} = 0\}$。根据定义，每个状态 $q \in F$ 都具有 $\mathsf{G}\psi \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{GF}\psi_j'$ 的形式。给定这样一个状态 q，我们定义

$$T_{q,j} \coloneqq \{(q, A, q) \in \to : \mathrm{prop}(\psi_j') \subseteq A\}.$$

我们称词 $w \in (2^{AP})^\omega$ 被 $\mathcal{A}_\varphi$接受，记为$w \in L(\mathcal{A}_\varphi)$，当且仅当存在 $q \in F$ 以及一条从 q_0出发的无限路径，该路径访问 q，并且对于每个 $j \in J$，集合 $T_{q,\,j}$ 无限次出现。在下文中，我们证明 $w \in L(\mathcal{A}_\varphi)$ 当且仅当 $w \models \varphi$。

引理 1：设 $\varphi \in \mathrm{LTL}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\})$ 是一个扁平公式。以下两个性质等价于 $w \models \varphi$：

1）存在 φ'，使得 $\varphi \to^{w(0)} \varphi'$ 和 $w[1..] \models \varphi'$；2）存在 $i \in \mathbb{N}$ 和 φ'，使得 $\varphi \to^{w(0)\cdots w(i-1)} \varphi'$、$|\varphi'|_{\mathsf{F}} = 0$ 和 $w[i..] \models \varphi'$。

命题 7：令 $\varphi \in$ 线性时序逻辑$(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\})$。当且仅当 $w \in L(\mathcal{A}_\varphi)$ 时，$w \models \varphi$ 成立。

证明：$\Rightarrow$) 根据引理 1(2)，存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 φ'，满足

$$\mathrm{flat}(\varphi) \to^{w(0)\cdots w(k-1)} \varphi', |\varphi'|_{\mathsf{F}} = 0 \text{ and } w[k..] \models \varphi'.$$

由于 $|\varphi'|_{\mathsf{F}} = 0$，我们有 $\mathfrak{U}(\varphi') = \{\varphi'\}$。因此，引理 1(1) 得出

$$\varphi' \to^{w(k)} \varphi' \to^{w(k+1)} \varphi' \to^{w(k+2)} \cdots.$$

作为 $\varphi' \in F$，它的形式为 $\mathsf{G}\psi \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{GF}\psi'_j$。特别地，这意味着 $w[k..] \models \bigwedge_{j\in J} \mathsf{GF}\psi'_j$。回忆一下，$T_{\varphi',\ j} = \{\varphi\ A\ \varphi'\ \in \to\ \psi'_j\ \subseteq A\}$ $j \in J$ (,,)：命题变量集合( )。因此，对于每个，集合 $T_{\varphi',\ j}$ 会被无限次访问。

$\Leftarrow$) 根据 $w \in L(\mathcal{A}_\varphi)$，存在 $q \in F$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 使得 • $q = \mathsf{G}\psi \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{GF}\psi'_j$，• $q_0 \to^{w}$ q $^{(0)\cdots w(k-1)}$，并且 • 某条无限路径 $q \to^{w[k..]}$ 会访问，对于每个 $j \in J$，集合 $T_{q,j}$ 无穷多次。

回顾一下，$T_{q,j} = \{(q, A, q)\ \in \to :\ \mathrm{prop}(\psi'_j)\ \subseteq A\}$。由于 $q \to^{w[k..]}$ 会无穷多次访问每个 $T_{q,j}$，我们有 $w[k..] \models \bigwedge_{j\in J} \mathsf{GF}\psi'_j$。根据 $\mathfrak{U}(q) = \{q\}$ 以及 $\to$的定义，我们有 $w[k..] \models \mathsf{G}\psi$。因此，$w[k..] \models q$。通过反复应用引理 1(1)，这意味着 $w \models q_0 =$扁平$(\varphi) \equiv \varphi$。 □

C. 从近乎无环自动机到线性 LTL

在本小节中，我们将展示，近乎无环自动机等价于有限个所谓的线性 LTL 公式集合，旨在说明 $\mathrm{LTL}_{\mathsf{B}}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\})$ 属于 NP，这将在后续的第五节A中给出。

对于每个 $A \subseteq$原子命题集，让 $\uparrow A := \{A' \subseteq$原子命题集 $:\ A' \supseteq A\}$。如果对于某个 $A \subseteq$原子命题集，$X \subseteq 2^{AP}$满足 $X = \uparrow A$，则称其为简单的。

示例 6：考虑图 3 中的底部自动机。其无限路径可由以下三个表达式刻画：

- $\uparrow\emptyset^* \uparrow\{b\} \uparrow\emptyset^* \uparrow\{c\} \uparrow\{c\}^\omega$,
- $\uparrow\emptyset^* \uparrow\{b,c\} \uparrow\{c\}^\omega$,
- $\uparrow\emptyset^* \uparrow\{c\} \uparrow\{c\}^* \uparrow\{b,c\} \uparrow\{c\}^\omega$,

分别对应以下线性时序逻辑公式：

- true U $(b \wedge$ (true U $(c \wedge \mathsf{G}c)))$,
- true U $((b \wedge c)\ \wedge \mathsf{G}c)$,
- true U $(c \wedge (c$ U $((b \wedge c)\ \wedge \mathsf{G}c)))$.

考虑自动机右下方变迁上的接受条件，我们得到以下线性时序逻辑公式：

- true U $(b \wedge$ (true U $(c \wedge (\mathsf{G}c \wedge \mathsf{GF}a))))$
- 真 U $((b \wedge c)\ \wedge (\mathsf{G}c \wedge \mathsf{GF}a))$,
- true U $(c \wedge (c$ U $((b \wedge c)\ \wedge (\mathsf{G}c \wedge \mathsf{GF}a)))$. □

对于每个 $q, r \in Q$，设 $X_{q,r} := \{A \subseteq$ 原子命题集 $:\ q \to^A r\}$。一般而言，由于 A_φ 的以下结构，$\mathcal{A}_\varphi$ 的路径总能按照示例 6 的方式捕获。

命题 8：设 $q, r \in Q$。以下结论成立：

1) $X_{q,\ r}$ 要么为空，要么是简单的，

2) 如果 $X_{q,\ r} \neq \emptyset$，那么 $X_{r,\ r} \neq \emptyset$，

3) 若 $X_{q,q} \neq \emptyset$，则 $X_{q,q} \supseteq X_{q,r}$。

此外，给定 $\theta \in \mathfrak{U}(q)$ 和 $A \subseteq$原子命题集，使得 $r = \theta[A]$，$X_{q,\ r}$ 的表示可以在多项式时间内获得。

$\mathcal{A}_\varphi$ 的线性路径方案（LPS）是 $\mathcal{A}_\varphi$ 的一条简单路径 $r_0 \to r_1 \to \cdots \to r_n$，满足 $r_n \in F$。如果词 $w \in (2^{AP})^\omega$ 被这样的 LPS S 接受，记作 $w \in L(S)$，当且仅当 $\mathcal{A}_\varphi$ 具有一条从 r_0 开始并访问 r_1、.....、r_n（可能多次）的接受路径。例如，图 3 顶部的 LPS $(a \wedge \mathsf{F}b) \to \mathsf{F}b \to$ true 接受 $w := \{a\}\ \emptyset\{a\}\ \{b\}\ (\emptyset\{a\})^\omega$。

如果一个线性时序逻辑公式可以由 ψ 通过以下文法推导得到，我们就称其为线性的：

$$\psi ::= A \wedge \psi' \mid \psi',$$
$$\psi' ::= B\ \mathsf{U}\ (B' \wedge \psi') \mid (\mathsf{G}C_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathsf{GF}C_i,$$

其中 A、B、B'、C_0、.....、C_n $\subseteq$属于原子命题集，$\uparrow B \supseteq \uparrow B'$，并且每个子集 D 都表示公式 $\bigwedge_{d\in D} d$。我们证明，任意 LPS 都与一个线性公式等价。

命题 9：给定一个 S $\mathcal{A}_\varphi$ 的 LPS，可以在多项式时间内构造一个线性公式 ψ，使得 $w \in L(S)$ 当且仅当 $w \models \psi$。

证明：令 $r_0 \to r_1 \to \cdots \to r_n \in F$ 为由 S 给出的简单路径。我们归纳地构造一个公式：当 $X_{r_0,\ r_0} \neq \emptyset$ 时，该公式由 ψ' 导出；否则由 ψ 导出。

如果 $n = 0$，那么我们有 $r_0 = r_n$。由于 $r_0 \in F$，它具有 $r_0 = \psi \wedge \bigwedge_{j\in J} \psi'_j$ $T_{r_0\ j} = \{\ r_0\ A\ r_0\ \in$ G GF 的形式。回忆一下，,：$\to\ A \in \uparrow\ \psi'_j\ \}$ $X_{r_0\ r_0} \neq \emptyset$ $\psi\ \in$ (,,)：命题变量集合 ( )。注意，，作为命题变量集合 ( ) $X_{r_0,\ r_0}$。因此，根据命题 8，对于某个 $C_0 \subseteq$ 原子命题集，有 $X_{r_0,\ r_0} = \uparrow C_0$。令 $\psi' :=$ G$C_0 \wedge \bigwedge_{j\in J}$ GFC_j，其中 $C_j :=$ 命题变量集合(ψ'_j)。根据定义，$w \in L(S)$ 当且仅当 $w \models \psi'$。

假设 $n > 0$。令 S' 为 LPS $r_1 \to \cdots \to r_n \in F$。根据命题 8，由于 $X_{r_0,r_1} \neq \emptyset$，我们有 $X_{r_1,r_1} \neq \emptyset$。根据归纳假设，存在一个线性公式 ψ'，使得$w \in L(S')$ 当且仅当 $w \models \psi'$。根据命题 8，存在一个 $B \subseteq$ 原子命题集，使得 $X_{r_0,r_1} = \uparrow B$。如果 $X_{r_0,\ r_0} = \emptyset$，则令 $\psi := B \wedge \psi'$。否则，根据命题 8，存在一个 $A \subseteq$原子命题集，使得$X_{r_0,r_0} = \uparrow A \supseteq \uparrow B$。因此，令 $\psi := A$U ($B \wedge \psi'$)。根据接受的定义，$w \in L(S)$ 当且仅当 $w \models \psi$。 □

IV. P 完全片段

令 goals$(A \wedge \varphi) :=$ goals(φ)，goals$(B$ U $(B' \wedge \varphi)) :=$goals(φ)，以及 goals$((\mathsf{G}C_0)\ \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathsf{GF}C_i) := \{C_1, \ldots, C_n\}$。我们称一个在线性 LTL 公式 φ（在执行序列上进行解释）为半有界的，如果 goals(φ) 的每个区域都是有界的。我们将通过把线性 LTL 公式转换为 [12] 中引入的一种多项式时间逻辑，来证明以下定理。

定理 1：半有界线性 LTL 公式的模型检测问题属于 P。

在证明上述定理之前，我们先用它证明此前宣布的 P-完全性结果。

定理 2：以下片段的模型检测问题属于 P：$\mathrm{LTL}_{\mathsf{B}}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \neg\})$、LTL$(\{\mathsf{F}\ \vee\})$ 和 LTL$(\{\mathsf{G}\ \wedge\})$。

证明：考虑一个来自线性时序逻辑$_{\mathsf{B}}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \neg\})$的公式。注意，$\neg \mathsf{F}\varphi \equiv \mathsf{G}\neg\varphi$ 和 $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$。因此，可以将否定向内推进。之后，我们可以使用 FGF$\varphi \equiv$进行简化

GFφ 和 GFG$\varphi \equiv$ FGφ。如果所得公式不含否定，那么它的形式为 FZ、GZ、GFZ 或 FGZ。这些都是线性的，因为 F$Z \equiv \mathbb{R}^d$ U Z，且 FG$Z \equiv \mathbb{R}^d$ U (GZ)。因此，根据定理 1，证明完毕。如果所得公式含有否定，则需要考虑以下四种形式：(1) F$\neg Z$、(2) G$\neg Z$、(3) GF$\neg Z$ 和(4) FG$\neg Z$。这些情况很容易处理：

- 我们有 $\boldsymbol{x} \models_M$ F$\neg Z$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \models_M$ GF$\neg Z$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \models_M$ FG$\neg Z$当且仅当 $\boldsymbol{x} \notin Z$ 或者存在一个模式 $\boldsymbol{m} \in$ M，使得 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$。
- 我们有 $\boldsymbol{x} \models_M$ G$\neg Z$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \notin Z$，并且存在一个模式 $\boldsymbol{m} \in$ M，使得对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$：$\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{m} \notin Z$。

由于 FF$\varphi \equiv$ Fφ 和F$(\varphi \vee \psi) \equiv$ (Fφ)$\vee$(Fψ)，LTL({F $\vee$})中的任意公式都可以转换为原子命题与LTL({F})中公式的析取。因此，只需在多项式时间内检查每个析取项。

由于 GG$\varphi \equiv$ Gφ 和 (Gφ) $\wedge$ (Gψ) $\equiv$ G($\varphi \wedge \psi$)，我们可以将 LTL({G $\wedge$})中的公式转换为 $\psi \wedge$Gψ'的形式，其中 ψ、ψ' 是伪原子的。后者是线性的，因此可以在多项式时间内进行模型检测。 □

定理 3：对于 LTL$_B$({F}) 和 LTL$_B$({G})，模型检验问题都是 P-困难的。

证明：该结论可由线性规划可行性和单调电路值问题的简单归约得到。 □

A. 多项式时间一阶逻辑

我们回顾一种在 [12] 中引入的实数集上的一阶逻辑。它允许使用凸半线性霍恩公式的合取，即允许使用如下形式的公式：

$$\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{a}(i) \cdot \boldsymbol{x}(i) \sim c \vee \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \boldsymbol{x}(j) > 0,$$

其中 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^d$、$c \in \mathbb{Z}$、$\sim \in \{<, \leq, =, \geq, >\}$ 和 I，且每个 J_i 都是有限指标集。对于给定该逻辑中的公式 φ，确定是否存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ 使得 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 成立的问题，可以在多项式时间内 [12] 求解。

这一结果很容易扩展到允许 $\boldsymbol{x}(j) \in \mathbb{R}$ 的解，只要析取项中从不使用 $\boldsymbol{x}(j)$。事实上，只需引入两个变量 y、$z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并将 $\boldsymbol{x}(j)$ 的每次出现替换为 $y - z$ 即可。

给定 $\boldsymbol{x}(i)$ $\boldsymbol{x}(j) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们将使用 $\boldsymbol{x}(i) > 0 \to \boldsymbol{x}(j) > 0$ 作为 $\boldsymbol{x}(i) = 0 \vee \boldsymbol{x}(j) > 0$的简称。

B. 用一阶逻辑表达 $\to_Z^*$

我们首先试图从上述逻辑构造一个公式 φ_Z，使得 $\varphi_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})$ 成立，当且仅当存在一个有限调度 π，满足 $\boldsymbol{x} \to_Z^\pi \boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\lambda}$。固定区域 Z 和模式 M $=\{\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n\}$。我们借鉴了 [10, 定理 20], 对连续 Petri 网可达性的刻画，该刻画等价于寻找一个 Parikh映像，并且该映像 (1) 具有正确的效应，(2) 是正向可发射的，以及 (3) 是反向可发射的。接下来的命题 13 将以类似方式刻画 $\boldsymbol{x} \to_Z^\pi \boldsymbol{y}$。

命题 10：设 $\boldsymbol{x} \to_Z^\pi \boldsymbol{y}$。存在 π_x 和 π_y，使得 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi_x}$、$\to_Z^{\pi_y} \boldsymbol{y}$，supp($\pi_x$) =supp($\pi_y$) =supp($\pi$) 且$|\pi_x| = |\pi_y| = |\text{supp}(\pi)|$。

引理 2：设 $\rho(\alpha, \boldsymbol{m})\rho'$ 是一个调度。以下结论成立：

- If $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\alpha,\boldsymbol{m})\rho'}$, then $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})}$,
- If $\to_Z^{\rho'(\alpha,\boldsymbol{m})\rho}\ \boldsymbol{y}$, then $\to_Z^{(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\rho}\ \boldsymbol{y}$.

命题 11：$\boldsymbol{x} \to_Z^\pi \boldsymbol{y}$ $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi'}$：$\boldsymbol{y}_Z$ $\boldsymbol{x}_Z \to_Z^{\pi''} \boldsymbol{y}$ $|\pi| = |\pi'| = |\pi''|$ $\pi =$ 设。存在、和，使得，支集( ) 支集(π') = 支集(π'')，并且对于每个 $\boldsymbol{m} \in$ 支集(π)，均有 $\boldsymbol{x}_Z \to_Z^{(1/\beta)\boldsymbol{m}}$ 和 $\to_Z^{(1/\beta)\boldsymbol{m}} \boldsymbol{y}_Z$。

命题 12：设 $\boldsymbol{x} \to^\pi \boldsymbol{y}, k := |\pi|$，且对于所有 $i \in [1..k]$, $\boldsymbol{x} \to_Z^{(1/\beta)\pi(i)}$ 和 $\to_Z^{(1/\beta)\pi(i)} \boldsymbol{y}$ 均成立。则有 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi'} \boldsymbol{y}$，其中 $\pi' := ((1/(\beta k))\pi)^{\beta k}$。

命题 13：当且仅当存在 $\pi', \pi_{\text{fwd}}, \pi_{\text{bwd}}$ 使得以下条件成立时，$\boldsymbol{x} \to_Z^\pi \boldsymbol{y}$ 成立

- 支集(π') = 支集(πfwd) =支集(πbwd) = 支集(π)，
- $\boldsymbol{x} \to^{\pi'} \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \to^{\pi_{\text{前向}}Z}$ 和 $\to^{\pi_{\text{后向}}Z}$ $\boldsymbol{y}$。

证明：$\Rightarrow$) 只需取 $\pi' = \pi_{\text{fwd}} = \pi_{\text{bwd}} := \pi$。

$\Leftarrow$) 设 β，并由命题 11 给出以下内容：

$$\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi'_{\text{fwd}}} \boldsymbol{x}_Z \text{ and } \boldsymbol{y}_Z \to_Z^{\pi'_{\text{bwd}}} \boldsymbol{y}.$$

令 $\gamma \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 足够大，使得 $\boldsymbol{\pi'} \geq \frac{1}{\gamma}(\boldsymbol{\pi'_{\text{fwd}}} + \boldsymbol{\pi'_{\text{bwd}}})$。由于 supp($\pi'_{\text{fwd}}$) = supp($\pi'_{\text{bwd}}$) = supp($\pi'$)，因此存在这样的 γ。令 π'' 为任意一个满足 $\boldsymbol{\pi''} = \boldsymbol{\pi'} - \frac{1}{\gamma}(\boldsymbol{\pi'_{\text{fwd}}} + \boldsymbol{\pi'_{\text{bwd}}})$ 的调度。我们有

$$\boldsymbol{x} \to_Z^{\frac{1}{\gamma}\pi'_{\text{fwd}}} \boldsymbol{x'}_Z \to^{\pi''} \boldsymbol{y'}_Z \to_Z^{\frac{1}{\gamma}\pi'_{\text{bwd}}} \boldsymbol{y}.$$

因此，利用命题 12，并令 $\beta \cdot \gamma \cdot \lceil \text{time}(\pi'') \rceil \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，我们得到满足 $\boldsymbol{x} \to_Z^\pi \boldsymbol{y}$ 的 π。 □

现在，我们可以通过构造一个合适的一阶公式来结束本小节。首先，我们定义

$$\begin{aligned}
\theta_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}) := {} & \exists \{\boldsymbol{z}_{i,j} \in Z\}_{i \in [1..n], j \in [0..n]} \\
& \exists \{\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{i,j \in [1..n]} \\
& \exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_{1,0}) \wedge (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}_{n,n}) \wedge \\
& \bigwedge_{i \in [1..n]} \bigwedge_{j \in [1..n]} (\boldsymbol{z}_{i,j} = \boldsymbol{z}_{i,j-1} + \lambda_{i,j} \cdot \boldsymbol{m}_j) \wedge \\
& \bigwedge_{i \in [2..n]} (\boldsymbol{z}_{i,0} = \boldsymbol{z}_{i-1,n}) \wedge \\
& \bigwedge_{j \in [1..n]} (\boldsymbol{\alpha}(j) = \sum_{i \in [1..n]} \lambda_{i,j}) \wedge \\
& \bigwedge_{j \in [1..n]} (\boldsymbol{s}(j) > 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(j) > 0).
\end{aligned}$$

令 $\varphi_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y}) := \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y}) \wedge \psi_{\text{fwd}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \wedge \psi_{\text{bwd}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})$，其中

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y}) &:= (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}(1) \cdot \boldsymbol{m}_1 + \ldots + \boldsymbol{\lambda}(n) \cdot \boldsymbol{m}_n), \\
\psi_{\text{fwd}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) &:= \exists \boldsymbol{x'} \in \mathbb{R}^d : \theta_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{x'}), \\
\psi_{\text{bwd}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}) &:= \exists \boldsymbol{y'} \in \mathbb{R}^d : \theta_Z(\boldsymbol{y'}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

命题 14：当且仅当存在某个有限调度 π 使得 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\lambda}$ 时，$\varphi_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})$ 成立。

证明：首先注意，公式 $\theta_Z(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v})$ 猜测一个大小至多为 n^2、从 $\boldsymbol{u}$ 到 $\boldsymbol{v}$ 且始终位于 Z 内的调度，并且恰好使用来自 $\{\boldsymbol{m}_j$ 的模式：$j \in [1..n], \boldsymbol{s}(j) > 0\}$。$\theta_Z$ 使用大小为 n^2 而非 n 的调度，是为了猜测各模式首次被使用的顺序。

⇒) 假设 $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y})\wedge\psi_{\text{fwd}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\wedge\psi_{\text{bwd}}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y})$ 成立。令 $\pi' := \prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{\lambda}(i)\boldsymbol{m}_i$,

$$\pi_{\text{fwd}} \coloneqq \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}^{\text{fwd}}\boldsymbol{m}_j \text{ and } \pi_{\text{bwd}} \coloneqq \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}^{\text{bwd}}\boldsymbol{m}_j,$$

按照约定，$0\cdot\boldsymbol{m}_j$ 表示空调度。显然有 $\boldsymbol{x}\to^{\pi'}\boldsymbol{y}$。根据上述关于 θ_Z的观察，我们进一步有 $\boldsymbol{x}\to^{\pi_{\text{fwd}}}$ 和 $\to^{\pi_{\text{bwd}}}\boldsymbol{y}$。此外，$\text{supp}(\pi') = \text{supp}(\pi_{\text{fwd}}) = \text{supp}(\pi_{\text{bwd}}) = \boldsymbol{\lambda}$。根据命题 13，我们得到$\boldsymbol{x}\to_Z^{\pi}\boldsymbol{y}$，其中某个 π 满足 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\lambda}$。

⇐) 令 $\boldsymbol{x}\to_Z^{\pi}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\pi}$。根据命题 10，存在$\pi_x$ 和 π_y 使得 $\boldsymbol{x}\to_Z^{\pi_x}$、$\to_Z^{\pi_y}\boldsymbol{y}$，$\text{supp}(\pi_x) = \text{supp}(\pi_y) = \text{supp}(\pi)$，以及 $|\pi_x| = |\pi_y| = |\text{supp}(\pi)|$。因此，我们可以使用 π、π_x和 π_y 来满足 $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y})$、$\psi_{\text{fwd}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$和 $\psi_{\text{bwd}}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y})$。 □

C. 用一阶逻辑表达 *GZ* ∧*GFX* ∧*GFY*

在本小节中，我们将构造一个来自 IV-A 节逻辑的公式 $\varphi_{\mathsf{G}Z\wedge\mathsf{GF}X\wedge\mathsf{GF}Y}$，使得 $\boldsymbol{x}\models_M \mathsf{G}Z\wedge\mathsf{GF}X\wedge\mathsf{GF}Y$ 当且仅当 $\varphi_{\mathsf{G}Z\wedge\mathsf{GF}X\wedge\mathsf{GF}Y}(\boldsymbol{x})$ 成立。令 MMS M 固定不变。

命题 15：设 Z 是一个区域，设 π 是一个调度，设 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$、$\boldsymbol{y}\in Z$ 以及 $\beta\in(0,1]$。设 $\boldsymbol{z} := \beta\boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y}$，以及 $\boldsymbol{z}' := \beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{y}$。如果 $\boldsymbol{x}\to_Z^{\pi}\boldsymbol{x}'$ 成立，则 $\boldsymbol{z}\to_Z^{\beta\pi}\boldsymbol{z}'$。

命题 16：设 X、Y、Z 为区域，且这三个区域中至少有一个是有界的。设 $\boldsymbol{z}\models_M \mathsf{G}Z\wedge\mathsf{GF}X\wedge\mathsf{GF}Y$。存在 $\boldsymbol{x}_f\in X\cap Z$、$\boldsymbol{y}_f\in Y\cap Z$ 和有限调度 π、π'，使得 $\boldsymbol{z}\to^*\boldsymbol{x}_f\to^{\pi}\boldsymbol{y}_f\to^{\pi'}\boldsymbol{x}_f$ 且 $\|\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{\pi}'\|\geq 1$。

证明：设 $X' := X\cap Z$ 和 $Y' := Y\cap Z$。根据假设，存在 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{x}_1$、$\ldots\in X'$ 和 $\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{y}_1$、$\ldots\in Y'$，使得

$$\boldsymbol{z}\to_Z^*\boldsymbol{x}_0\to_Z^{\pi_0}\boldsymbol{y}_0\to_Z^{\pi_0'}\boldsymbol{x}_1\to_Z^{\pi_1}\boldsymbol{y}_1\to_Z^{\pi_1'}\cdots,$$

并且对所有 $i\in\mathbb{N}$ 都有 $\|\boldsymbol{\pi_i}+\boldsymbol{\pi_i'}\|\geq 1$。注意，后者由非 Zenon 性推出。

设 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\ell}\leq\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\ell}\leq\boldsymbol{b}_2$ 分别表示区域 X' 和 Y' 的不等式组。我们定义 M 为满足每一列都是 M 中一个模式的矩阵。令 $\mathcal{S}$ 表示以下系统:

$$\exists\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\geq\boldsymbol{0}:\quad \begin{bmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_2\mathbf{M} & \mathbf{A}_2\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{M}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} & -\mathbf{M}\\ \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1-\mathbf{A}_1\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{b}_2-\mathbf{A}_2\boldsymbol{z}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ -1\end{bmatrix}.$$

注意到，$\mathcal{S}$等价于存在 $\boldsymbol{x}_f\in X'$、$\boldsymbol{y}_f\in Y'$ 以及 π、π'，使得

$$\boldsymbol{z}\to^*\boldsymbol{x}_f\to^{\pi}\boldsymbol{y}_f\to^{\pi'}\boldsymbol{x}_f \text{ and } \|\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{\pi'}\|\geq 1.$$

为导出矛盾，假设 $\mathcal{S}$ 无解。根据Farkas引理，以下系统 $\mathcal{S}'$ 有解:

$$\exists\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathbb{R}^d_{\geq 0},\boldsymbol{v}_3\in\mathbb{R}^d,v_4\in\mathbb{R}_{\geq 0}:$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}^T\mathbf{A}_1^T & \mathbf{M}^T\mathbf{A}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^T\mathbf{A}_2^T & \mathbf{M}^T & -\mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^T & -\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ \boldsymbol{v}_3\\ v_4\end{bmatrix}\geq\boldsymbol{0},$$
$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{b}_1-\mathbf{A}_1\boldsymbol{z})^T & (\boldsymbol{b}_2-\mathbf{A}_2\boldsymbol{z})^T & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ v_4\end{bmatrix}<0.$$

利用上述内容，我们将构造线性函数 g 和 h，使得 $\lim_{i\to\infty} g(\boldsymbol{x}_i) = \lim_{i\to\infty} h(\boldsymbol{y}_i) = \infty$。由于 X' 或 Y' 有界，这将导致矛盾。我们根据 v_4 的取值进行分类讨论。

情况 $v_4 > 0$。我们有 $\boldsymbol{v}_3^T\mathbf{M}\geq\mathbf{1}^T v_4 > 0$。令 $g(\boldsymbol{x}_i) := \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)$ 和 $h(\boldsymbol{y}_i) := \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{y}_0)$。对于每个 $i\geq 1$,

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{x}_i) &= \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)\\ &= \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{x}_{i-1}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_{i-1})\\ &= g(\boldsymbol{x}_{i-1})+\boldsymbol{v}_3^T\mathbf{M}(\boldsymbol{\pi_{i-1}}+\boldsymbol{\pi'_{i-1}})\\ &\geq g(\boldsymbol{x}_{i-1})+v_4\mathbf{1}^T(\boldsymbol{\pi_{i-1}}+\boldsymbol{\pi'_{i-1}})\\ &\geq g(\boldsymbol{x}_{i-1})+v_4 \qquad (\text{by } \|\boldsymbol{\pi_{i-1}}+\boldsymbol{\pi'_{i-1}}\|\geq 1).\end{aligned}$$

根据上述内容，我们得出 $\lim_{i\to\infty} g(\boldsymbol{x}_i) = \infty$。关于函数 h 的证明是对称的。

情况 $v_4 = 0$。在这种情况下，$\mathcal{S}'$ 可写为:

$$\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{M}+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{M}\geq\mathbf{0}^T \tag{1}$$
$$\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{M}+\boldsymbol{v}_3^T\mathbf{M}\geq\mathbf{0}^T \tag{2}$$
$$\boldsymbol{v}_3^T\mathbf{M}\geq\mathbf{0}^T \tag{3}$$
$$\boldsymbol{v}_1^T(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T(\boldsymbol{b}_2-\mathbf{A}_2\boldsymbol{z})<0. \tag{4}$$

令 $\lambda := -(\boldsymbol{v}_1^T(\boldsymbol{b}_1-\mathbf{A}_1\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T(\boldsymbol{b}_2-\mathbf{A}_2\boldsymbol{z}))$。根据 (4)，我们有$\lambda>0$。令

$$\begin{aligned}f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= -(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}))+\\ &\qquad \boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),\\ f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

利用 (1) 和 (2)，可以证明 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq\lambda$。由此我们可以得出结论。令 $g(\boldsymbol{x}_i) := f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_i)$ 和 $h(\boldsymbol{y}_i) := f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_i)$，对所有 $i\in\mathbb{N}$ 均成立。对于所有 $i\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_i)\\ &= \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{x}_0)\\ &= \boldsymbol{v}_3^T((\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{x}_i)+(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_{i-1})+(\boldsymbol{y}_{i-1}-\boldsymbol{x}_0))\\ &= \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_{i-1})+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}_{i-1}-\boldsymbol{x}_0)\\ &= f(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)+\boldsymbol{v}_3^T\mathbf{M}\boldsymbol{\pi'_{i-1}}+f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{i-1})\\ &\geq f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{i-1})+f(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i) \qquad (\text{by (3)})\\ &\geq f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_{i-1})+\lambda.\end{aligned}$$

由上述可知，我们有 $\lim_{i\to\infty} h(\boldsymbol{y}_i) = \infty$。

同样地，对于每个 $i \geq 1$，我们有

$$f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_i) = f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_{i-1}) + \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_{i-1}) \geq f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_{i-1}),$$

这意味着 $g(\boldsymbol{x}_i) \geq h(\boldsymbol{y}_{i-1})$。因此，$\lim_{i\to\infty} g(\boldsymbol{x}_i) = \infty$。下面我们要证明以下命题。 □

命题 17：设 X、Y 和 Z 为区域。设 $\boldsymbol{z}$、$\boldsymbol{z}' \in Z$、$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{x}'$、$\boldsymbol{x}_f \in X \cap Z$ 以及 $\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{y}_f \in Y \cap Z$ 满足

- $\boldsymbol{z} \to_Z^* \boldsymbol{z}' \to_Z^{\pi''} \boldsymbol{x}_0 \to_Z^{\pi} \boldsymbol{y}_0 \to_Z^{\pi'} \boldsymbol{x}'$、
- $\boldsymbol{x}' \to^{\rho} \boldsymbol{x}_f \to^{\rho'} \boldsymbol{y}_f \to^{\rho''} \boldsymbol{x}_f$ 、
- 支集(ρ) = 支集(π) =支集(π') =支集(π''),
- 支集$(\rho') \cup$ 支集$(\rho'') \subseteq$ 支集(ρ) 且 $\|\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}''\| \geq 1$.

有 $\boldsymbol{z} \models \mathsf{G}Z \wedge \mathsf{GF}X \wedge \mathsf{GF}Y$ 成立。

为证明上述命题，我们根据给定的调度构造一个调度。根据假设，存在一个足够小的 $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $\boldsymbol{\rho} \geq \epsilon \cdot (\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}')$。令 $\lambda := 1 - (1/(1+\epsilon))$。对于每个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，令

$$\boldsymbol{x}_n := \boldsymbol{y}_{n-1} + \lambda^{n-1}\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi'} + \frac{\boldsymbol{\Delta}_{\rho} - \epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right) + (1-\lambda^{n-1})\boldsymbol{\Delta}_{\rho''},$$

$$\boldsymbol{y}_n := \boldsymbol{x}_n + \lambda^n \boldsymbol{\Delta}_{\pi} + (1-\lambda^n)\boldsymbol{\Delta}_{\rho'}.$$

命题 18：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，均有 $\boldsymbol{x}_n = \lambda^n \boldsymbol{x}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f$ 以及 $\boldsymbol{y}_n = \lambda^n \boldsymbol{y}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f$。

下面的命题证明了命题 17。

命题 19：以下两点成立：(1) $\boldsymbol{x}_n \to_Z^* \boldsymbol{y}_n$；(2) 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{y}_n \to_Z^* \boldsymbol{x}_{n+1}$。

证明：(1) 回顾 $\boldsymbol{x}_0 \to_Z^{\pi} \boldsymbol{y}_0$ 和 $\boldsymbol{x}_f \in Z$。因此，根据命题 15 和命题 18，我们有

$$\boldsymbol{x}_n = (\lambda^n \boldsymbol{x}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f) \to_Z^{\lambda^n \pi} (\lambda^n \boldsymbol{y}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f). \quad (5)$$

类似地，根据命题 15 和命题 18，我们有 e

$$(\lambda^n \boldsymbol{x}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f) \to_Z^{\lambda^n \pi} (\lambda^n \boldsymbol{y}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f) = \boldsymbol{y}_n. \quad (6)$$

根据定义，我们有

$$\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{x}_n + \lambda^n \boldsymbol{\Delta}_{\pi} + (1-\lambda^n)\boldsymbol{\Delta}_{\rho'}. \quad (7)$$

综上，(5)–(7) 得出

$$\boldsymbol{x}_n \to^{\lambda^n \pi\, (1-\lambda^n)\rho'} \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{x}_n \to_Z^{\lambda^n \pi} \text{ and } \to_Z^{\lambda^n \pi} \boldsymbol{y}_n.$$

由于 supp$(\rho') \subseteq$ supp(π)，因此 supp$(\lambda^n \pi) =$ supp$(\lambda^n \pi (1-\lambda^n)\rho')$。所以，根据命题 13，我们得出 $\boldsymbol{x}_n \to_Z^* \boldsymbol{y}_n$。

(2) 根据命题 15 和命题 18，我们有

$$\boldsymbol{y}_n = \lambda^n \boldsymbol{y}_0 + (1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f \to_Z^{\lambda^n \pi'} (\lambda^n \boldsymbol{x}' + (1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f). \quad (8)$$

同理，根据命题 15 和命题 18，我们有

$$(\lambda^{n+1}\boldsymbol{z}' + (1-\lambda^{n+1})\boldsymbol{x}_f) \to_Z^{\lambda^{n+1}\pi''} \boldsymbol{x}_{n+1}. \quad (9)$$

令 π_n 为任意满足 $\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\rho} - \epsilon(\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}')$ 的有限调度。我们有

$$\boldsymbol{y}_n \to^{\lambda^n \pi' (\lambda^n/(1+\epsilon))\pi_n (1-\lambda^n)\rho''} \boldsymbol{x}_{n+1}. \quad (10)$$

根据 (8)–(10)，supp$(\rho'') \subseteq$ supp$(\rho) =$supp$(\pi) =$ supp$(\pi') =$ supp(π'')，以及命题 13，可得 $\boldsymbol{y}_n \to_Z^* \boldsymbol{x}_{n+1}$。 □

现在，我们可以通过构造一个合适的一阶公式来结束本小节。令 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{y}$ 表示第 IV-B 节中的公式 $\varphi_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y})$ 的简写，并令 $\boldsymbol{x} \to_Z^* \boldsymbol{y}$ 表示 $\exists \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}: \boldsymbol{x} \to_Z^{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{y}$。令 M $= \{\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n\}$。我们将 $\varphi_{\mathsf{G}Z \wedge \mathsf{GF}X \wedge \mathsf{GF}Y}(\boldsymbol{z})$ 定义为

$$\begin{aligned}
&\exists \boldsymbol{z}' \in Z; \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_f \in X \cap Z; \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_f \in Y \cap Z;\\
&\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}'', \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'' \geq \boldsymbol{0}:\\
&\boldsymbol{z} \to_Z^* \boldsymbol{z}' \to_Z^{\boldsymbol{\pi}''} \boldsymbol{x}_0 \to_Z^{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{y}_0 \to_Z^{\boldsymbol{\pi}'} \boldsymbol{x}' \wedge \quad (11)\\
&\boldsymbol{x}' \to^{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{x}_f \to^{\boldsymbol{\rho}'} \boldsymbol{y}_f \to^{\boldsymbol{\rho}''} \boldsymbol{x}_f \wedge \quad (12)\\
&\bigwedge_{j\in[1..n]} \theta_j \wedge \sum_{j\in[1..n]} (\boldsymbol{\rho}'(j) + \boldsymbol{\rho}''(j)) \geq 1,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\theta_j = {} & (\boldsymbol{\pi}(j) > 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\pi}'(j) > 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\pi}''(j) > 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\rho}(j) > 0)\\
& \wedge (\boldsymbol{\rho}'(j) > 0 \to \boldsymbol{\rho}(j) > 0) \wedge (\boldsymbol{\rho}''(j) > 0 \to \boldsymbol{\rho}(j) > 0).
\end{aligned}$$

命题 20：$\boldsymbol{z} \models_M \mathsf{G}Z \wedge \mathsf{GF}X \wedge \mathsf{GF}Y$ 当且仅当 $\varphi_{\mathsf{G}Z \wedge \mathsf{GF}X \wedge \mathsf{GF}Y}(\boldsymbol{z})$ 成立。

证明：$\Leftarrow$) 根据命题 17 可直接得出，因为φ_Z 是用逻辑表达的同一陈述。

$\Rightarrow$) 设 π 是一个满足 $\sigma := \text{exec}(\pi, \boldsymbol{z}) \models \mathsf{G}Z \wedge \mathsf{GF}X \wedge \mathsf{GF}Y$ 的非 Zeno 无限调度。令 M′为 π中无限次使用的模式集合。根据 $\boldsymbol{z}$，我们可以沿着 σ 移动到一个点 $\boldsymbol{z}'$，从该点开始只使用 M′ 中的模式。我们还可以进一步移动到一个点 $\boldsymbol{x}_0 \in X \cap Z$，在该点从 $\boldsymbol{z}'$ 到 $\boldsymbol{x}_0$ 的过程中使用 M′ 中的所有模式。同样地，我们可以从 $\boldsymbol{x}_0$ 到某个 $\boldsymbol{y}_0 \in Y \cap Z$的过程中使用 M′中的所有模式，并且从 $\boldsymbol{y}_0$ 到某个$\boldsymbol{x}' \in X \cap Z$的过程中也可以如此。所得序列满足（11）。

注意，$\mathsf{G}Z \wedge \mathsf{GF}X \wedge \mathsf{GF}Y$在 M′中从 $\boldsymbol{x}'$ 满足。因此，我们可以调用命题 16 来满足 (12)。由于 supp$(\boldsymbol{\pi}'') =$ supp$(\boldsymbol{\pi}) =$ supp$(\boldsymbol{\pi}') =$ supp$(\boldsymbol{\rho}) =$ M′, supp$(\boldsymbol{\rho}') \subseteq$M′且 supp$(\boldsymbol{\rho}'') \subseteq M'$, 所以证明完成。 □

D. 用一阶逻辑表示 GZ

现在我们来处理上一小节的特殊情形 $n = 0$。我们断言，$\boldsymbol{z} \models_M \mathsf{G}Z$ 当且仅当 $\varphi_{\mathsf{G}Z}(\boldsymbol{z})$ 成立，其中

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathsf{G}Z}(z) := {} & \exists \boldsymbol{z}' \in Z, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}' \geq \boldsymbol{0} : \boldsymbol{z} \to_Z^{\boldsymbol{\pi}} \wedge \boldsymbol{z} \to^{\boldsymbol{\pi}'} \boldsymbol{z}' \wedge\\
& \mathbf{A}\boldsymbol{z}' \leq \mathbf{A}\boldsymbol{z} \wedge \bigwedge_{j\in[1..n]} (\boldsymbol{\pi}'(j) > 0 \to \boldsymbol{\pi}(j) > 0) \wedge\\
& \sum_{j\in[1..n]} \boldsymbol{\pi}'(j) \geq 1.
\end{aligned}$$

可以得到一个比命题 16 的证明更简单的证明：

命题21：如果 $\boldsymbol{z} \models_M \mathsf{G}Z$，那么存在 π 和 $\boldsymbol{z}'$，使得 $\boldsymbol{z} \to^{\pi} \boldsymbol{z}'$、$\mathbf{A}\boldsymbol{z}' \leq \mathbf{A}\boldsymbol{z}$ 和 $\|\boldsymbol{\pi}\| \geq 1$。

命题 22：设 $\boldsymbol{z}$、$\boldsymbol{z}' \in Z$ 和 ρ 是一个有限调度。若 $\boldsymbol{z} \to_Z^{\rho}$ 且 $\mathbf{A}\boldsymbol{z}' \leq \mathbf{A}\boldsymbol{z}$，则 $\boldsymbol{z}' \to_Z^{\rho}$。

命题 23：$\boldsymbol{z} \models_M \mathsf{G}Z$ 当且仅当 $\varphi_{\mathsf{G}Z}(\boldsymbol{z})$。

证明：$\Leftarrow$) 令 π 为满足 $\boldsymbol{z} \to_Z^{\pi}$ 的调度。根据命题 11，我们得到某些 $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 和 $\boldsymbol{z} \to_Z^{\rho} \boldsymbol{z}_0$，使得对于每个 $\boldsymbol{m} \in$ supp(π)，都有 $\boldsymbol{z}_0 \to_Z^{(1/\beta)\boldsymbol{m}}$。令 π' 为满足 $\boldsymbol{z} \to^{\pi'} \boldsymbol{z}'$ 的调度。

$= \qquad\qquad\qquad\

B. NP-困难性

定理 6：片段 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{F}\ \wedge\})$ 是强NP困难。

证明：我们从 SUBSET- SUM 的有理数变体归约而来，该变体要求给定 $S \subseteq \mathbb{Q}$ 和 $t \in \mathbb{Q}$，判断是否存在某个子集 $V \subseteq S$ 满足 $\sum_{v \in V} v = t$。给定一个实例，其中$S = \{s_1, \ldots, s_n\}$，我们构造一个 $(4n+1)$ 维 MMS M 和一个公式 $\varphi \in \mathrm{LTL_B}(\{F, \wedge\})$，使得 $\mathbf{0} \models_M \varphi$ 成立当且仅当 (S, t) 存在一个解。

一种简单但错误的方法如下。对于每个 $s_i \in S$，我们可以关联模式 $\boldsymbol{y}_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0, s_i)$ 和$\boldsymbol{n}_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$，其中 “1” 出现在维度 i 中。目标是将这些模式相加，从而得到 $(1, \ldots, 1, t)$。然而，这种方法过于简单。例如，考虑 $S = \{8, 9\}$ 和 $t = 4$。通过取 $(0.5, \boldsymbol{y}_1)$ $(0.5, \boldsymbol{n}_1)$ $(1, \boldsymbol{n}_2)$，我们可以得到 $(1, 1, 4)$，尽管无法从S中得到 4。我们需要一种机制，以确保对于每个 i，$\boldsymbol{y}_i$ 或 $\boldsymbol{n}_i$ 恰好以一个单位的量被使用。因此，我们将引入额外的模式 $\overline{\boldsymbol{y}}_i$ 和 $\overline{\boldsymbol{n}}_i$，以及区域$Y_i$、$N_i$ 和 C_i。我们将要求 Y_i、N_i 和 C_i 均被到达。如图 4（部分）所示，唯一可行的方法是使用调度 $(1, \boldsymbol{y}_i)$ $(1, \overline{\boldsymbol{y}}_i)$ 或调度 $(1, \boldsymbol{n}_i)$ $(1, \overline{\boldsymbol{n}}_i)$。此外，在 Y_i和N_i中，首先到达的区域将决定是否已使用 $s_i \in S$。

M 和 φ 的定义：现在继续。对于每个 $i \in [1..n]$，我们将前 $4n$ 个维度称为 $c_{i,1}$,$c_{i,2}$,$c_{i,3}$,$c_{i,4}$，并将剩余的维度称为 c^*。直观地说，在一次满足执行结束时，c^* 将存储数值t，该数值由累加 S中的元素得到。其他维度确保 S 中的每个元素都以 1 或 0 的系数加到 c^*中，也就是说，既不会只加一部分，也不会被重复相加。

对于所有 $i \in [1..n]$，模式 $\{\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{n}_i, \overline{\boldsymbol{y}}_i, \overline{\boldsymbol{n}}_i\}$ 定义如下：

j	$\boldsymbol{y}_i(j)$	$\boldsymbol{n}_i(j)$	$\overline{\boldsymbol{y}}_i(j)$	$\overline{\boldsymbol{n}}_i(j)$
$c_{i,1}$	0.5	-0.5	-1	1
$c_{i,2}$	1	1	1	1
$c_{i,3}$	1	1	0	0
$c_{i,4}$	0	0	1	1
c^*	s_i	0	0	0
else	0	0	0	0

令 $\gamma := \max(2, |t|, n \cdot \max(|s_1|, \ldots, |s_n|))$。对于每个 $i \in [1..n]$，我们通过以下约束定义区域 Y_i、N_i 和 C_i：

	Y_i	N_i	C_i
$c_{i,1}$	$= 0.5$	$= -0.5$	$\in [-0.5, 0.5]$
$c_{i,2}$	$\in [1, 2]$	$\in [1, 2]$	$= 2$
$c_{i,3}$	$= 1$	$= 1$	$= 1$
$c_{i,4}$	$\in [0, 1]$	$\in [0, 1]$	$= 1$
else	$\in [-\gamma, \gamma]$	$\in [-\gamma, \gamma]$	$\in [-\gamma, \gamma]$

令 T为区域 $T := \{\boldsymbol{x} \in C_1 \cap \cdots \cap C_n : \boldsymbol{x}(c^*) = t\}$。我们定义 $\varphi := \mathsf{F}T \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\mathsf{F}Y_i \wedge \mathsf{F}N_i)$。

直观来说，在 Y_i 和 N_i中最先到达的区域，表明数字 s_i 是否用于该子集和实例的解中。模式 $\boldsymbol{y}_i$ 可用于到达 Y_i

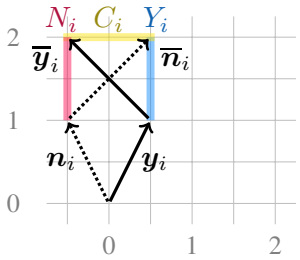


图 4：调度 $(1, \boldsymbol{y}_i)$ $(1, \overline{\boldsymbol{y}}_i)$ 和 $(1, \boldsymbol{n}_i)$ $(1, \overline{\boldsymbol{n}}_i)$，其中$x$ 轴和 y 轴分别对应 $c_{i,\ 1}$ 和 $c_{i,\ 2}$。

首先，对于 N_i也同样如此。模式 $\overline{\boldsymbol{y}}_i$ 可用于从 Y_i 到达 N_i；对于从 N_i 到 Y_i的情况，$\overline{\boldsymbol{n}}_i$ 也同样如此。参见图4。

正确性：证明见完整版。 □

VI. 不可判定片段

本节通过从带抑制弧的Petri网（即零测试）的可达性问题进行归约，证明 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{U}\})$ 和 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{G}\ \vee\})$ 是不可判定的。带抑制弧的Petri网是一个元组 $\mathcal{N} = (P, T, \sim, \boldsymbol{\Delta})$，其中

- P 是一个有限集合，其元素称为库所，
- T 是一个不相交的有限元素集合，这些元素称为变迁，
- $\sim$： $T \to \{\geq, =\}^P$，以及
- $\boldsymbol{\Delta}$： $T \to \mathbb{Z}^P$。

如果在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^P$ 中 $\boldsymbol{x} \sim_t \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta}_t \geq \mathbf{0}$，则变迁 t 是使能的。若其使能，则其触发会导向 $\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta}_t$，记为$\boldsymbol{x} \to^t \boldsymbol{x}'$。若存在某个 t使得 $\boldsymbol{x} \to^t \boldsymbol{x}'$，我们记作 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$。我们将 $\to$的传递闭包定义为$\to^+$，将 $\to^+$的自反闭包定义为 $\to^*$。可达性问题是指：给定一个带抑制弧的Petri网 $\mathcal{N}$以及 $\boldsymbol{x}_{\text{src}}$、$\boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$，判断 $\boldsymbol{x}_{\text{src}} \to^+ \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ 是否属于 $\mathcal{N}$。该问题不可判定，例如参见 [22]。

A. 从带抑制弧的Petri网到 MMS

在本小节中，我们将通过一系列中间命题证明以下命题：

命题 24：给定一个带抑制弧的 Petri网 $\mathcal{N}$和$\boldsymbol{x}_{\text{src}}$、$\boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$，可以计算得到一个 MMS M、两个点$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$以及一个有限的有界区域集合 AP，使得

1) $\boldsymbol{x}_{\text{src}} \to^+ \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ in $\mathcal{N}$ iff $\boldsymbol{x} \to^*_{AP} \boldsymbol{x}'$ in M, and
2) no infinite non-Zeno schedule π satisfies $\boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP}$ in M.

令 $\mathcal{N} = (P$、T、$\sim$、$\boldsymbol{\Delta})$ 为一个带抑制弧的 Petri网。我们定义一个 $(|P| + 3|T|)$ 维 MMS M 及其区域 AP：
$= \bigcup_{t \in T} \{A_t, A'_t, B_t, B'_t, C_t, C'_t\}$。我们将$|P|$ 个维度与 P关联起来，并将它们统称为 $\boldsymbol{p}$。每个变迁 $t \in T$都与维度 $\{t_A, t_B, t_C\}$相关联。

每个变迁 $t \in T$ 都会产生模式 $\{\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{c}_t\}$。一般而言，这三种模式分别用于“请求触发 t”、“触发 t”以及“释放对 t 的控制”。对于

每个 $s \neq t$ 和 $I \in \{A, B, C\}$，我们都有 $\boldsymbol{a}_t(s_I) = \boldsymbol{b}_t(s_I) = \boldsymbol{c}_t(s_I) := 0$。其余值定义如下：

j	$\boldsymbol{a}_t(j)$	$\boldsymbol{b}_t(j)$	$\boldsymbol{c}_t(j)$
$\boldsymbol{p}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\Delta}_t$	$\mathbf{0}$
t_A	-1	0	1
t_B	1	-1	0
t_C	0	1	-1

与 $t \in T$ 相关联的六个区域由以下约束定义，其中 s 表示“任意变迁 $s \neq t$”：

	A_t	A'_t	B_t	B'_t	C_t	C'_t
$\boldsymbol{p}$	$\geq \mathbf{0}$	$\geq \mathbf{0}$	$\sim_t \mathbf{0}$	$\geq \mathbf{0}$	$\geq \mathbf{0}$	$\geq \mathbf{0}$
t_A	≥ 0	≥ 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	≥ 0
t_B	$= 0$	≥ 0	≥ 0	≥ 0	$= 0$	$= 0$
t_C	$= 0$	$= 0$	$= 0$	≥ 0	≥ 0	≥ 0
s_A	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0
s_B	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
s_C	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$

由于对所有 s、$t \in T$ 都有 $A_t = A_s$，我们就简单地将此区域称为 A。非正式地说，MMS 的运行方式如下：

- 从 A 出发，我们可以采取模式 $\boldsymbol{a}_t$，必须经过 A'_t，并且在最多采取 $\boldsymbol{a}_t$ 后最终到达 B_t；
- 在 B_t中，我们测试是否 $\boldsymbol{p} \sim_t \mathbf{0}$ 满足这些约束；
- 从 B_t出发，我们必须采取模式 $\boldsymbol{b}_t$，经过 B'_t，并在最多采取 $\boldsymbol{b}_t$（将 $\boldsymbol{\Delta}_t$ 加到 $\boldsymbol{p}$上）后到达 C_t；
- 从 C_t出发，我们必须采取模式 $\boldsymbol{c}_t$，经过 C'_t，并在最多采取 $\boldsymbol{c}_t$后到达 A。

更形式化地说，以下结论成立。

引理 4：设 $\boldsymbol{x}_A$、$\boldsymbol{x}'_A \in A$，且令 π 为一个有限调度，使得 $\boldsymbol{x}_A(t_A) = 1$, $|\pi| > 0$，并且 $\boldsymbol{x}_A \to^{\pi}_{AP} \boldsymbol{x}'_A$ 成立，且 A 中没有中间点，即 $\mathrm{exec}(\pi, \boldsymbol{x}_A)(\tau) \in A$ 当且仅当$\tau \in \{0, \mathrm{time}(\pi)\}$。此时，$\pi \equiv \boldsymbol{a}_t \boldsymbol{b}_t \boldsymbol{c}_t$，并且存在 $\boldsymbol{x}_B \in B_t$、$\boldsymbol{x}_C \in C_t$ 使得

$$\boldsymbol{x}_A \to^{\boldsymbol{a}_t}_{A'_t} \boldsymbol{x}_B \to^{\boldsymbol{b}_t}_{B'_t} \boldsymbol{x}_C \to^{\boldsymbol{c}_t}_{C'_t} \boldsymbol{x}'_A.$$

若区域 Z 满足如下条件，则称其在缩放下封闭：对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$和 $\boldsymbol{z} \in Z$，$\lambda \boldsymbol{z} \in Z$ 均成立。若区域集合 AP 中的每个 $Z \in$ 均在缩放下封闭，则称区域集合 AP 在缩放下封闭。由引理 4 可得：

命题 25：给定一个带抑制弧的Petri网 $\mathcal{N}$ and$\boldsymbol{x}_{\mathrm{src}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{tgt}}$，可以计算出一个MMS M、点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$以及一个在缩放下闭合的有限区域集 AP，使得

1) 对于某个有限调度 π，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{src}} \to^{+} \boldsymbol{x}_{\mathrm{tgt}}$ in $\mathcal{N}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP} \boldsymbol{x}'$ in M，且 $\mathrm{time}(\pi) \geq 1$；2) $\mathbf{0} \not\to^{+}_{AP} \mathbf{0}$ in M。

命题 26：给定一个带有抑制弧 $\mathcal{N}$和 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{src}}$、$\boldsymbol{x}_{\mathrm{tgt}}$的Petri网，可以计算出一个MMS M、点 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$以及一个有限的有界区域集合 AP，使得 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{src}} \to^{+} \boldsymbol{x}_{\mathrm{tgt}}$ 在$\mathcal{N}$ 中，当且仅当对于某个满足 $\mathrm{time}(\pi) = 1$的 $\lambda \in [0, 1]$ 和 π，$\lambda \boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP} \lambda \boldsymbol{x}'$ 在 M 中。

证明：令 M、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$ 和 AP 由命题 25 给出。令 $\gamma := \|\boldsymbol{x}\| + \|\mathrm{M}\|$，并令 d 表示 M 的维度。我们用 AP′:= $\{Z \cap [-\gamma, \gamma]^d : Z \in \mathrm{AP}\}$证明该命题。

⇒) 由于 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{src}} \to^{+} \boldsymbol{x}_{\mathrm{tgt}}$ in $\mathcal{N}$，命题 25 给出，对于某个有限调度 π，$\boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP} \boldsymbol{x}'$in M 且 $\mathrm{time}(\pi) \geq 1$。由于 AP 在缩放下闭合，对于任意$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，都有 $\lambda \boldsymbol{x} \to^{\lambda\pi}_{AP} \lambda \boldsymbol{x}'$ in M。取 $\lambda := 1/\mathrm{time}(\pi)$ 后，沿着所得执行的每个点 $\boldsymbol{y}$ 都满足 $\|\boldsymbol{y}\| \leq \gamma$，因此对于某个 $Z' \in \mathrm{AP}'$，有 $\boldsymbol{y} \in Z'$。此外，$\mathrm{time}(\lambda\pi) = 1$。

⇐) 设 $\lambda \boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP'} \lambda \boldsymbol{x}'$，且 $\mathrm{time}(\pi) = 1$。由于 π 非空，并且根据命题 25 有 $\mathbf{0} \not\to^{+}_{AP} \mathbf{0}$，因此我们得到 $\lambda > 0$。

设 $Z \in$原子命题集。如果 $\boldsymbol{y} \in Z \cap [-\gamma, \gamma]^d$，那么特别有 $\boldsymbol{y} \in Z$。由于 Z 在缩放下封闭，因此有 $\lambda \boldsymbol{y} \in Z$。于是，

$$\boldsymbol{x} = (1/\lambda) \cdot \lambda \boldsymbol{x} \to^{\frac{1}{\lambda}\pi}_{AP} (1/\lambda) \cdot \lambda \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' \text{ in } M.$$

根据命题 25，这意味着 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{src}} \to^{+} \boldsymbol{x}_{\mathrm{tgt}}$ 属于 $\mathcal{N}$。现在我们可以证明命题 24。 □

命题 24 的证明：设 M、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$ 和原子命题集 AP 由命题 26 给出。定义一个 MMS M′ 和一个区域集合 AP′。MMS M′ 与 M 具有相同的维度，此外还增加四个维度：$\{\top, \vdash, \perp, \star\}$。M′的模式为 $\{\boldsymbol{a}_\top, \overline{\boldsymbol{a}}_\top\} \cup \{\boldsymbol{m}_\vdash : \boldsymbol{m} \in \mathrm{M}\} \cup \{\boldsymbol{a}_\perp, \overline{\boldsymbol{a}}_\perp\}$。它们定义如下：

j	$\boldsymbol{a}_\top(j)$	$\overline{\boldsymbol{a}}_\top(j)$	$\boldsymbol{m}_\vdash(j)$	$\boldsymbol{a}_\perp(j)$	$\overline{\boldsymbol{a}}_\perp(j)$
$\top$	-1	-1	0	0	0
$\vdash$	0	0	1	0	0
$\perp$	0	0	0	1	1
$\star$	1	0	0	-1	0
rest	$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{m}$	$-\boldsymbol{x}'$	$\mathbf{0}$

集合 AP′ 包含两个新的区域，以及 AP 中每个附加了约束 $\top = \perp = 0$和 $\vdash, \star \in [0, 1]$的区域。由于 AP 由有界区域组成，我们可以提取 $\gamma \in \mathbb{N}$，使每个维度都必须保持在 $[-\gamma, \gamma]$范围内。我们添加由以下约束定义的区域 $\{A_\top, A_\perp\}$：

	$A_\top$	$A_\perp$
$\top$	$\in [0, 1]$	$= 0$
$\vdash$	$= 0$	$= 1$
$\perp$	$= 0$	$\in [0, 1]$
$\star$	$\in [0, 1]$	$\in [0, 1]$
else	$\in [-\gamma, \gamma]$	$\in [-\gamma, \gamma]$

非正式地说，MMS 的运行方式如下：

- 来自 $A_\top$、模式 $\boldsymbol{a}_\top$ 和 $\overline{\boldsymbol{a}_\top}$ 空 $\top$ 以生成 $\lambda \boldsymbol{x}$，并在 $\star$中保留一份 $\lambda \in [0, 1]$ 的副本；
- 种模式将持续使用，直到时间达到 $\vdash = 1$；
- 来自 $A_\perp$，模式 $\boldsymbol{a}_\perp$ 和 $\overline{\boldsymbol{a}_\perp}$ 增加 $\perp$ 至 **1**，以便消耗 $\lambda \boldsymbol{x}'$，使用 $\star$ 推断 λ。

形式化地，根据模式和区域的定义，存在 $\lambda \in [0, 1]$ 以及 M 中的 $\lambda \boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP} \lambda \boldsymbol{x}'$，使得 $\mathrm{time}(\pi) = 1$ 当且仅当

分别存在有限调度 $\rho_\top$ 和 $\rho_\bot$，它们分别仅使用模式 $\{\boldsymbol{a}_\top, \overline{\boldsymbol{a}_\top}\}$ 和 $\{\boldsymbol{a}_\bot, \overline{\boldsymbol{a}_\bot}\}$，使得

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\mathbf{0}\end{pmatrix} \to^{\rho_\top}_{A_\top} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\lambda\\\lambda\boldsymbol{x}\end{pmatrix} \to^{\pi_\vdash}_{AP'\setminus\{A_\top,A_\bot\}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\lambda\\\lambda\boldsymbol{x}'\end{pmatrix} \to^{\rho_\bot}_{A_\bot} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

在 M′ 中。由于区域强制执行这一顺序，上述条件成立当且仅当 $(1,0,0,0,0) \to^*_{AP'} (0,1,1,0,0)$ 位于 M′ 中。

还需证明条目 2。为导出矛盾，假设存在一个无限非齐诺调度 π 使得 $\boldsymbol{x} \to^\pi_{AP}$。原子命题集的所有区域都强制满足 $\top$、$\bot$、$\vdash$、$\star \in [0,1]$。因此，我们得到矛盾，因为：

- 如果时间 $\boldsymbol{a}_\top(\pi)$ +时间 $\overline{\boldsymbol{a}}_\top(\pi) = \infty$，那么 $\top$ 会降至 0 以下；
- 如果 $\sum_{\boldsymbol{m}\in M}$ 时间 $\boldsymbol{m}_\vdash(\pi) = \infty$，那么 $\vdash$ 会超过 1；
- 如果时间 $\boldsymbol{a}_\bot(\pi)$ +时间 $\overline{\boldsymbol{a}}_\bot(\pi) = \infty$，那么 $\bot$ 会超过 1。 □

B. 不可判定性

我们利用命题 24 证明片段 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{U}\})$ 和 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{G}\ \vee\})$ 的不可判定性。

引理 5：给定 $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi \in \mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{U}\})$，可以计算出一个来自 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{U}\})$ 的公式，该公式等价于公式 $(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)\ \mathsf{U}\ \varphi$。

定理 7：$\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{U}\})$ 和 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{G}\ \vee\})$ 是不可判定的。

证明：设 $\mathcal{N}$ 是一个带有抑制弧的 Petri网，并设 $\boldsymbol{x}_{\text{src}}, \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$。令 M、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$ 和 AP 如命题 24 所定义。令 $X' \coloneqq \{\boldsymbol{x}'\}$ 和 $\psi \coloneqq (\bigvee_{Z\in AP} Z)\ \mathsf{U}\ X'$。根据引理 5，我们可以计算出一个公式 $\varphi \in \mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{U}\})$，使得 $\varphi \equiv \psi$。根据命题 24，$\boldsymbol{x}_{\text{src}} \to^+ \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ 属于 $\mathcal{N}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \to^*_{AP} \boldsymbol{x}'$ 属于 M，当且仅当 $\boldsymbol{x} \models_M \psi$，当且仅当 $\boldsymbol{x} \models_M \varphi$。

关于 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{G}\ \vee\})$ 的证明本质上相同，但需要增加一个“虚拟维度”，该维度在到达 $\boldsymbol{x}'$ 时可以增加和减少一次（且只能一次）。 □

VII. 结论

我们为 MMS 引入了线性时序逻辑，并确立了每个句法片段的模型检测复杂度：每个片段均为 P 完全、NP完全或不可判定。这一工作推广并统一了关于 MMS 以及连续向量加法系统/Petri 网的现有研究。

未来的工作包括：完整处理无界区域；允许对时序算子施加时间约束；以及针对满足给定线性时序逻辑规范的调度，以算法方式优化目标函数。此外，提供线性 LTL 公式的求解器，以及更一般地提供 $\mathrm{LTL_B}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\})$ 的求解器，将理论推进到实践也颇为有趣。

参考文献

[1] R. Alur、A. Trivedi 和 D. Wojtczak，“恒速多模式系统的最优调度”，载于 *15th* ACM 混合系统：计算与控制国际会议（HSCC）论文集，2012年，第 75–84 页。

[2] S. N. Krishna、A. Kumar、F. Somenzi、B. Touri 和 A. Trivedi，《恒定速率多模式系统的可达-避开问题》，载于 *15th* 自动化验证与分析技术国际研讨会（ATVA）论文集。施普林格，2017年，第 463–479 页。[3] R. Koymans，《使用度量时序逻辑描述实时性质》，《实时系统》，第 2 卷，第 4 期，第 255–299 页，1990年。[4] S. M. German 和 A. P. Sistla，《关于多进程系统的推理》，《ACM学报》，第 39 卷，第 3 期，第 675–735 页，1992年。[5] J. Esparza、P. Ganty、J. Leroux 和 R. Majumdar，《群体协议的验证》，《信息学学报》，第 54 卷，第 215–239 页，2017年。[6] M. Heiner、D. R. Gilbert 和 R. Donaldson，《用于系统与合成生物学的 Petri 网》，载于《计算系统生物学形式化方法》，2008年，第 215–264 页。[7] W. van der Aalst，《Petri 网在工作流管理中的应用》，《电路、系统与计算机学报》，第 8 卷，第 1 期，第 21–66 页，1998年。[8] J. Esparza、R. Ledesma-Garza、R. Majumdar、P. J. Meyer 和 F. Nikˇsi´c，《一种基于 SMT 的可覆盖性分析方法》，载于 *26th* 计算机辅助验证国际会议（CAV）论文集，第 8559 卷，2014年，第 603–619 页。[9] M. Blondin、C. Haase 和 P. Offtermatt，《无限状态系统的有向可达性》，载于 *27th* 系统构造与分析工具和算法国际会议（TACAS）论文集，2021年，第 3–23 页。[10] E. Fraca 和 S. Haddad，《连续 Petri 网的复杂性分析》，《信息学基础》，第 137 卷，第 1 期，第 1–28 页，2015年。[11] J. Kˇret´insk´y 和 J. Esparza，《LTL 的 (F, G) 片段的确定性自动机》，载于 *24th* 计算机辅助验证国际会议（CAV）论文集，2012年，第 7–22 页。[12] M. Blondin 和 C. Haase，《Petri 网和带状态的向量加法系统中连续可达性的逻辑》，载于 *32nd* ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会（LICS）论文集，2017年，第 1–12 页。[13] T. A. Henzinger，《混合自动机理论》，载于 *11th* IEEE 计算机科学逻辑年会（LICS）论文集。IEEE计算机学会，1996年，第 278–292 页。[14] K. Bae 和 J. Lee，《使用语法分离对信号时序逻辑性质进行有界模型检测》，《ACM程序设计语言》（POPL），第 3 卷，POPL 专刊，第 51:1–51:30 页，2019年。[15] R. Alur，《定时自动机》，载于计算机辅助验证国际会议（CAV）论文集，1999年，第 8–22 页。[16] D. Bhave、S. Jha、S. N. Krishna、S. Schewe 和 A. Trivedi，《基于有界速率多模式系统的运动规划》，载于 *18th* 混合系统：计算与控制国际会议（HSCC）论文集。ACM，2015年，第 41–50 页。[17] R. Alur、V. Forejt、S. Moarref 和 A. Trivedi，《有界速率多模式系统的可调度性》，《ACM嵌入式计算系统汇刊》（TECS），第 16 卷，第 3 期，2017年。[18] S. Demri 和 Philippe Schnoebelen，《简单情形下命题线性时序逻辑的复杂性》，《信息与计算》，第 174 卷，第 1 期，第 84–103 页，2002年。[19] A. P. Sistla 和 E. M. Clarke，《命题线性时序逻辑的复杂性》，《ACM学报》，第 32 卷，第 3 期，第 733–749 页，1985年。[20] R. Alur 和 S. L. Torre，《LTL 片段的确定性生成器与博弈》，《ACM计算逻辑汇刊》（TOCL），第 5 卷，第 1 期，第 1–25 页，2004年。[21] D. Wojtczak，《关于有理数问题的强 NP 完全性》，载于 *13th* 俄罗斯计算机科学国际研讨会（CSR）论文集，2018年，第 308–320 页。[22] K. Reinhardt，《带抑制弧的 Petri 网中的可达性》，《理论计算机科学电子札记》（ENTCS），第 223 卷，第 239–264 页，2008年。[23] R. Greenlaw、H. J. Hoover 和 W. L. Ruzzo，《并行计算的极限：P 完全性理论》。牛津大学出版社，1995年。

附录

在证明命题 1（我们稍后将对其进行回顾）之前，先证明以下技术引理。

引理 6：设 σ 是一次执行，且 τ、$\tau' \in \mathrm{dom}\ \sigma$ 属于 σ 的同一时间区间 I_j。设 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个凸集。若 $\tau'' \in [\tau, \tau']$ 且 $\sigma(\tau)$ $\sigma(\tau') \in X$，则 $\sigma(\tau'') \in X$。

证明：设 $\lambda \in [0,1]$ 满足 $\tau'' = \lambda \cdot \tau + (1-\lambda) \cdot \tau'$。设 $b := \min I_j$，$c := \max I_j - \min I_j$，且 $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j$。我们有：

$$\begin{aligned}
&\sigma(\tau'') \\
&= \boldsymbol{x}_j + (\tau'' - b)/c \cdot \boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{x}_j + (\lambda\tau + (1-\lambda)\tau' - b)/c \cdot \boldsymbol{y} \\
&= \lambda\left(\boldsymbol{x}_j + (\tau - b)/c \cdot \boldsymbol{y}\right) + (1-\lambda)\left(\boldsymbol{x}_j + (\tau' - b)/c \cdot \boldsymbol{y}\right) \\
&= \lambda\sigma(\tau) + (1-\lambda)\sigma(\tau') \\
&\in X.
\end{aligned}$$

□

命题 1：任意执行 σ 都有一条轨迹。

证明：设 $\sigma = \boldsymbol{x}_0 I_0 \boldsymbol{x}_1 \cdots$。设 $\tau_0 := 0$。我们归纳地构造序列的其余部分。设 $X_i := \{\tau' \in \mathrm{dom}\ \sigma : \tau' > \tau_{i-1}$，且 $\chi_{AP}(\tau') \neq \chi_{AP}(\tau_{i-1})\}$。下面进行分类讨论。

X_i 为空。如果 τ_{i-1} =支配 σ，则过程结束。否则，我们添加 $\tau_i := \max I_j$，其中 $j \in \mathbb{N}$ 是满足 $\tau_{i-1} \in I_j$ 的最大索引。

$\inf X_i > \tau_{i-1}$。我们添加 $\tau_i := \inf X_i$，因为对于所有 $\tau' \in [\tau_{i-1}, \tau_i$，它都满足 $\chi_{AP}(\sigma(\tau')) = \chi_{AP}(\sigma(\tau_{i-1}))$。

$\inf X_i = \tau_{i-1}$。令 j 为满足 $\tau_{i-1} \in I_j$ 的最大索引。存在一个收敛到 τ_{i-1} 的序列 $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots \in X_i \cap I_j$。根据引理 6 和区域的凸性，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $\tau' \in (\tau_{i-1}$，{v15， $\chi_{AP}(\sigma(\tau')) = \chi_{AP}(\sigma(\alpha_k))$。因此，我们将 $\tau_i := \alpha_k$ 添加到该序列中。

剩下需要证明的是 $\mathrm{dom}\ \sigma = [\tau_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup \cdots$。为导出矛盾，假设 τ_0、τ_1、..... 是无限的，并且收敛于某个 $\alpha \leq \sup \mathrm{dom}\ \sigma$。令 $j \in \mathbb{N}$ 为满足 $\alpha \in I_j$ 的最小索引。存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 τ_k、τ_{k+1}、$\ldots \in I_j$。根据引理 6 以及区域的凸性，存在 $\ell \geq k$，使得对于所有 $\tau' \in [\tau_\ell, \alpha$， $\chi_{AP}(\sigma(\tau')) = \chi_{AP}(\sigma(\alpha))$ 均成立。这意味着 $X_{\ell+1} = \emptyset$ 或 $\inf X_{\ell+1} \geq \alpha$。在这两种情况下，都意味着 $\tau_{\ell+1} \geq \alpha$。如果 $\tau_{\ell+1} > \alpha$，则这与 $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \alpha$ 矛盾。如果 $\tau_{\ell+1} = \alpha$，那么我们必须有 $\tau_{\ell+1} = \sup \mathrm{dom}\ \sigma$，这与序列是无限的这一事实矛盾。

□

在证明命题 2 之前，我们先简要回顾该命题，并证明以下技术引理。

引理 7：设 φ 是一个无否定线性时序逻辑公式，设 σ 是一个定义域为 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的执行，设 τ、$\tau' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并设 $T_\varphi := \{\tau'' \in [\tau, \tau')$： σ、$\tau'' \models \varphi\}$。如果集合 T_φ 非空，则它具有最小值。

证明：我们对 φ 的结构进行归纳法。

情形 $\varphi =$ 为真。显然有 $\min T_\varphi = \tau$。

情况 $\varphi = Z \in$ 原子命题集。非正式地说，该断言源于以下事实：Z 被定义为闭半空间的交集，因此 σ 必须与 Z 的一个面相交。

形式化地，设 $\sigma = \boldsymbol{x}_0 I_0 \boldsymbol{x}_1 \cdots$，并设 Z 由系统 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 定义。令 $\alpha := \inf T_Z$。若 $\sigma(\alpha) \in Z$，则问题解决。为导出矛盾，假设情况并非如此。对于某个 ℓ，我们有 $(\mathbf{A} \cdot \sigma(\alpha))(\ell) > \boldsymbol{b}(\ell)$。

设 $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots$ 是来自 T_Z 且收敛于 α 的序列。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $j_i \in \mathbb{N}$ 为满足 $\alpha_i \in I_{j_i}$ 的最后一个索引。令 $j \in \mathbb{N}$ 为满足 $\alpha \in I_j$ 的最后一个索引。存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $j_k = j_{k+1} = \cdots = j$。令 $b := \min I_j$，$c := \max I_j - \min I_j$，并令 $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j$。根据执行的定义，我们有

$$\mathbf{A} \cdot \sigma(\alpha) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_j + \frac{\alpha - b}{c} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{y}.$$

此外，对于每个 $k' \geq k$，我们有

$$\mathbf{A} \cdot \sigma(\alpha_{k'}) = \mathbf{A} \cdot \sigma(\alpha) + \frac{\alpha_{k'} - \alpha}{c} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{y}.$$

对于每个 $k' \geq k$，我们有 $\alpha_{k'} > \alpha$ 且 $(\mathbf{A} \cdot \sigma(\alpha_{k'}))(\ell) \leq \boldsymbol{b}(\ell)$。因此，$(\mathbf{A}\boldsymbol{y})(\ell) < 0$。令 $k' \geq k$ 足够大，使得 $\alpha_{k'} - \alpha$ 足够小，从而满足以下条件：

$$(\mathbf{A} \cdot \sigma(\alpha))(\ell) + \frac{\alpha_{k'} - \alpha}{c} \cdot (\mathbf{A}\boldsymbol{y})(\ell) > \boldsymbol{b}(\ell).$$

我们得到 $\sigma(\alpha_{k'})(\ell) > \boldsymbol{b}(\ell)$，这构成矛盾。

情况 $\varphi = \psi \wedge \psi'$。令 $\alpha := \inf T_\varphi$，并令

$$B := \{\alpha' \in [\alpha, \tau') : \sigma, \alpha' \models \psi\},$$
$$B' := \{\alpha' \in [\alpha, \tau') : \sigma, \alpha' \models \psi'\}.$$

由于 $T_\varphi \neq \emptyset$，B 和 B' 均非空。因此，根据归纳法，$\beta := \min B$ 和 $\beta' := \min B'$ 均定义良好。我们必有 $\inf B = \inf B' = \inf T_\varphi$，因为 $\varphi = \psi \wedge \psi'$。因此，$\min B = \min B' = \alpha$，这意味着 $\min T_\varphi = \alpha$。

Case $\varphi = \psi \vee \psi'$. Follows from $T_\varphi = T_\psi \cup T_{\psi'}$ and induction.

情况 $\varphi = \psi\ \mathsf{U}\ \psi'$。令 $\alpha := \inf T_\varphi$，并令

$$T' := \{\alpha' \in [\alpha, \tau') : \sigma, \alpha' \models \psi'\},$$

由于 $T_\varphi \neq \emptyset$，我们必有 $T' \neq \emptyset$。根据归纳假设，$\beta := \min T'$ 是良定义的。如果 $\beta = \alpha$，那么由 σ、$\alpha \models \psi\,\mathsf{U}\ \psi'$，我们即可得出结论，因此 $\min T_\varphi = \alpha$。

否则，$\alpha < \beta$。我们断言，对于所有 $\gamma \in (\alpha$、$\beta)$，都有 σ、$\gamma \models \psi$。通过对 $\{\alpha' \in [\alpha, \beta)$ 进行归纳：σ、$\alpha' \models \psi\}$，该断言意味着 $\min T_\varphi = \alpha$。下面只需证明该断言。设 $\gamma \in (\alpha$、$\beta)$。由于 $\alpha = \inf T_\varphi$，存在 $\gamma' \in (\alpha$、$\gamma)$，使得 σ、$\gamma' \models \psi\,\mathsf{U}\ \psi'$。根据 β 的极小性，对于所有 $\delta \in [\gamma', \beta)$，必有 σ、$\delta \models \psi$。因此，σ、$\gamma' \models \psi\,\mathsf{U}\ \psi'$，从而 σ、$\gamma \models \psi\,\mathsf{U}\ \psi'$。

情形 $\varphi = \mathsf{F}\psi$。由 $\mathrm{F}\psi \equiv$ 真 $\mathrm{U}\ \psi$ 可得。

情形 $\varphi = \mathsf{G}\psi$。令 $\alpha :=$ 无穷 T_φ。对于任意接近 α 的 $\beta \in (\alpha, \tau')$，$\sigma, \beta \models \mathrm{G}\psi$ 无限多次成立。因此，对于所有 $\beta > \alpha$，我们有 σ，$\beta \models \psi$。根据归纳假设，集合 $\{\beta \in [\alpha, \tau') : \sigma, \beta \models \psi\}$ 有一个最小值，该最小值必为 α。因此，$\sigma, \alpha \models \mathrm{G}\psi$，这意味着 $\min T_\varphi = \alpha$。

□

命题 2：设 σ 是定义域为 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的执行，设 w 是 σ 的轨迹，并设 φ 是一个无否定线性时序逻辑公式。当且仅当 $\sigma \models \varphi$ 时，$w \models \varphi$。

证明：设 τ_0、τ_1、$\ldots \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 产生 w。设 f：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{N}$ 是满足以下条件的函数，对所有 $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$：

$$f(\tau) \coloneqq \begin{cases} i & \text{if } \chi_{AP}(\sigma(\tau)) = \chi_{AP}(\sigma(\tau_i)), \\ i+1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据轨迹的定义，f 是非递减的。我们通过对 φ的结构进行归纳法，证明σ、$\tau \models \varphi$当且仅当 w、$f(\tau) \models \varphi$。

情形 $\varphi = Z \in$ 原子命题集。对于所有$i \in \mathbb{N}$，我们有 $w(i) = \chi_{AP}(\sigma(\tau_i))$。因此，$\sigma$、$\tau \models \varphi$当且仅当 $\sigma(\tau) \in Z$ 当且仅当 $Z \in w(f(\tau))$ 当且仅当w、$f(\tau) \models \varphi$。

情形 $\varphi = \psi \wedge \psi'$。我们有 σ、$\tau \models \varphi$当且仅当 σ、$\tau \models \psi \wedge \sigma$、$\tau \models \psi'$当且仅当 w、$f(\tau) \models \psi \wedge w$、$f(\tau) \models \psi'$当且仅当 w、$f(\tau) \models \varphi$。

情形 $\varphi = \psi \vee \psi'$。与 $\wedge$对称。

情形 $\varphi = \psi \,\mathsf{U}\, \psi'$。 $\Rightarrow$) 由于 σ、$\tau \models \varphi$，存在 $\tau' \geq \tau$使得 σ、$\tau' \models \psi'$，并且对于所有 $\tau'' \in [\tau, \tau'$都有 σ、$\tau'' \models \psi)$。根据归纳假设，我们有 w、$f(\tau') \models \psi'$，以及 w、$f(\tau'') \models \psi$对于所有 $\tau'' \in [\tau, \tau')$。根据 f的定义，我们有

$$[f(\tau)..f(\tau') - 1] \subseteq \{f(\tau'') : \tau'' \in [\tau, \tau')\}.$$

因此，对于所有 $j \in [f(\tau)..f(\tau')-1]$，$w, j \models \psi$ 都成立。这意味着 $w, f(\tau) \models \psi \mathsf{U}\ \psi'$。

$\Leftarrow$) 由于 $w, f(\tau) \models \varphi$，存在一个最小的 $i \geq f(\tau)$，使得 w，$i \models \psi'$，并且对于所有 $j \in [f(\tau)..i-1]$，$w, j \models \psi$。

如果 $f(\tau) = i$，则由归纳假设可得结论。因此，我们假设 $f(\tau) \neq i$。我们断言 $\tau < \tau_i$。事实上，若 $\tau_i \leq \tau$ 成立，那么由于 f 非递减，我们会有 $i = f(\tau_i) \leq f(\tau) \leq i$，这与 $f(\tau) \neq i$ 矛盾。

根据归纳假设，$\sigma, \tau_i \models \psi'$ 成立。令 $\tau' \in [\tau, \tau_i)$。还需证明 $\sigma, \tau' \models \psi$。由于 f 非递减，我们有 $f(\tau) \leq f(\tau') \leq f(\tau_i) = i$。因此，$f(\tau') \in [f(\tau)..i)$。如果 $f(\tau') \leq i-1$，则由归纳假设可得结论。因此，假设 $f(\tau') = i$。令

$$A \coloneqq \{\alpha \in [\tau_{i-1}, \tau_i) : \sigma, \alpha \models \psi'\}.$$

由于 $\tau' < \tau_i$，根据 f 的定义可得，对于所有 $\alpha \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$，有 $f(\alpha) = i$。因此，根据归纳假设，我们有 $\inf A = \tau_{i-1}$，从而根据引理 7 得到 $\min A = \tau_{i-1}$。于是，σ、$\tau_{i-1} \models \psi'$，因此 w、$i-1 \models \psi'$，这与 i的最小性相矛盾。

Case $\varphi = \mathsf{F}\psi$. Follows from $\mathsf{F}\psi \equiv \mathit{true}\ \mathsf{U}\ \psi$.

情形 $\varphi = \mathsf{G}\psi$。我们有

$$\begin{aligned} & \sigma, \tau \models \mathsf{G}\psi \\ \iff & \sigma, \tau' \models \psi \text{ for all } \tau' \geq \tau \\ \iff & w, f(\tau') \models \psi \text{ for all } \tau' \geq \tau \quad \text{(by ind. hyp.)} \\ \iff & w, i \models \psi \text{ for all } i \geq f(\tau) \quad \text{(by def. of } f\text{)} \\ \iff & w, f(\tau) \models \mathsf{G}\psi. \end{aligned}$$

□

回顾一下，在下面的命题中，我们有

$$\varphi = \psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{F}\varphi_j.$$

命题 3：扁平(φ) $\equiv \varphi$成立。

证明：我们断言以下等价关系成立：

1) $\mathsf{G}\varphi \equiv \mathsf{G}\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{GF}\varphi_j$,
2) $\mathsf{GF}\varphi \equiv \mathsf{GF}\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{FG}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{GF}\varphi_j$,
3) $\mathsf{FG}\varphi \equiv \mathsf{FG}\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{FG}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{GF}\varphi_j$.

通过常规归纳，这些等价关系给出 $\mathrm{flat}_{\mathsf{G}}(\varphi) \equiv \mathsf{G}\varphi$、$\mathrm{flat}_{\mathsf{GF}}(\varphi) \equiv \mathsf{GF}\varphi$、$\mathrm{flat}_{\mathsf{FG}}(\varphi) \equiv \mathsf{FG}\varphi$ 以及 $\mathrm{flat}(\varphi) \equiv \varphi$。剩下的工作是证明这些等价关系。

1) 这由 G 关于 $\wedge$的分配律以及 G 的幂等律得到。

2) $\Rightarrow$) 令 $w \models \mathsf{GF}\varphi$。令 $i_0 < i_1 < \cdots \in \mathbb{N}$ 满足：对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $w, i_k \models \varphi$。回顾 $\varphi = \psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{F}\varphi_j$。显然，我们有 $w \models \mathsf{GF}\psi$ 以及 $w \models \bigwedge_{j \in J} \mathsf{GF}\varphi_j$。此外，由于 $w, i_0 \models \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i$，我们有 $w \models \bigwedge_{i \in I} \mathsf{FG}\varphi_i$。

$\Leftarrow$) 设 $w \models \mathsf{GF}\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{FG}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{GF}\varphi_j$。设 $i_0 \in \mathbb{N}$满足 $w, i_0 \models \mathsf{GF}\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{GF}\varphi_j$。存在 $i_0 < i_1 < \cdots \in \mathbb{N}$使得 w，$i_k \models \psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{F}\varphi_j$ 对每个 $k \geq 1$均成立。因此，$w \models \mathsf{GF}\varphi$。

3) 由 G 和 FG 关于 $\wedge$的分配律以及 G 的幂等性可得。

□

命题 4：设 $\varphi \in \mathrm{LTL}(\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\})$。以下结论成立：
1) 若 φ 是扁平的，则 $|\varphi|_{\mathsf{F}} > |\varphi'|_{\mathsf{F}}$ 对所有 $\varphi' \in \mathfrak{U}(\varphi) \setminus \{\varphi\}$均成立；2) 若 φ 是扁平的，则 $|\varphi|_{\mathsf{F}} \geq |\varphi[A]|_{\mathsf{F}}$ 对所有 $A \subseteq$ 原子命题集均成立；3) $|\varphi| \geq |$扁平(φ)$|_{\mathsf{F}}$。

我们证明条目 1 和条目 3。根据定义，条目 2 很容易得出。

命题 4(1) 的证明：我们对扁平公式的结构进行归纳法证明。

真值、原子命题和算子 G。由 $\mathfrak{U}(\varphi) \setminus \{\varphi\} = \emptyset$ 可直接得到。

Conjunction. Let $\varphi' \in \mathfrak{U}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \setminus \{\varphi_1 \wedge \varphi_2\}$. By definition,

$$\varphi' \in \{\psi_1 \wedge \psi_2 : \psi_1 \in \mathfrak{U}(\varphi_1), \psi_2 \in \mathfrak{U}(\varphi_2)\} \setminus \{\varphi_1 \wedge \varphi_2\}.$$

因此，我们有 $\varphi' = \psi_1 \wedge \psi_2$，其中 $\psi_1 \in \mathfrak{U}(\varphi_1)$、$\psi_2 \in \mathfrak{U}(\varphi_2)$，并且 $\psi_1 \neq \varphi_1$ 或 $\psi_2 \neq \varphi_2$。我们考虑第一种情况。第二种情况是对称的。我们有：

$$\begin{aligned} |\varphi'|_{\mathsf{F}} &= |\psi_1 \wedge \psi_2|_{\mathsf{F}} \\ &= |\psi_1|_{\mathsf{F}} + |\psi_2|_{\mathsf{F}} \\ &< |\varphi_1|_{\mathsf{F}} + |\psi_2|_{\mathsf{F}} \qquad \text{(by ind. hyp. as } \psi_1 \neq \varphi_1\text{)} \\ &\leq |\varphi_1|_{\mathsf{F}} + |\varphi_2|_{\mathsf{F}} \qquad \text{(by ind. hyp. or } \psi_2 = \varphi_2\text{)} \\ &= |\varphi_1 \wedge \varphi_2|_{\mathsf{F}}. \end{aligned}$$

算子 F。令 $\varphi' \in \mathfrak{U}(\mathsf{F}\varphi) \setminus \{\mathsf{F}\varphi\}$。根据定义，有 $\varphi' \in \mathfrak{U}(\varphi)$。由于以下原因，我们有 $|\mathsf{F}\varphi|_{\mathsf{F}} > |\varphi'|_{\mathsf{F}}$：

$$\begin{aligned} |\mathsf{F}\varphi|_{\mathsf{F}} &= 1 + |\varphi|_{\mathsf{F}} \\ &\geq 1 + |\varphi'|_{\mathsf{F}} \qquad \text{(by ind. hyp. or } \varphi' = \varphi\text{).} \end{aligned}$$

□

命题 4(3) 的证明：我们通过结构归纳法证明这一点：$|\mathrm{flat}(\varphi)|_{\mathsf{F}} \leq |\varphi|$、$|\mathrm{flat}_{\mathsf{G}}(\varphi)|_{\mathsf{F}} \leq |\varphi|$、$|\mathrm{flat}_{\mathsf{GF}}(\varphi)|_{\mathsf{F}} \leq |\varphi|$ 以及 $|\mathrm{flat}_{\mathsf{FG}}(\varphi)|_{\mathsf{F}} \leq |\varphi|$。

设 φ 的形式为 $\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \mathsf{G}\varphi_i \wedge \bigwedge_{j \in J} \mathsf{F}\varphi_j$。

情况 G。我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{flat}_{\mathsf{G}}(\varphi)|_{\mathsf{F}} &= \Sigma_{i\in I}|\mathrm{flat}_{\mathsf{G}}(\varphi_i)|_{\mathsf{F}} + \Sigma_{j\in J}|\mathrm{flat}_{\mathsf{GF}}(\varphi_j)|_{\mathsf{F}} \\ &\le \Sigma_{i\in I}|\varphi_i| + \Sigma_{j\in J}|\varphi_j| \qquad \text{(by ind.)} \\ &\le |\varphi|.\end{aligned}$$

情形GF。我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{flat}_{\mathsf{GF}}(\varphi)|_{\mathsf{F}} &= \Sigma_{i\in I}|\mathrm{flat}_{\mathsf{FG}}(\varphi_i)|_{\mathsf{F}} + \Sigma_{j\in J}|\mathrm{flat}_{\mathsf{GF}}(\varphi_j)|_{\mathsf{F}} \\ &\le \Sigma_{i\in I}|\varphi_i| + \Sigma_{j\in J}|\varphi_j| \qquad \text{(by ind.)} \\ &\le |\varphi|.\end{aligned}$$

情形FG。我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{flat}_{\mathsf{FG}}(\varphi)|_{\mathsf{F}} &= 1 + \Sigma_{i\in I}|\mathrm{flat}_{\mathsf{FG}}(\varphi_i)|_{\mathsf{F}} + \Sigma_{j\in J}|\mathrm{flat}_{\mathsf{GF}}(\varphi_j)|_{\mathsf{F}} \\ &\le |\psi| + \Sigma_{i\in I}|\varphi_i| + \Sigma_{j\in J}|\varphi_j| \\ &\le |\varphi|.\end{aligned}$$

一般情形。我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{flat}(\varphi)|_{\mathsf{F}} &= |\psi|_{\mathsf{F}} + \Sigma_{i\in I}|\mathrm{flat}_{\mathsf{G}}(\varphi_i)|_{\mathsf{F}} + \Sigma_{j\in J}|\mathrm{flat}(\varphi_j)|_{\mathsf{F}} \\ &\le |\psi| + \Sigma_{i\in I}|\varphi_i| + \Sigma_{j\in J}|\varphi_j| \qquad \text{(by ind.)} \\ &\le |\varphi|.\end{aligned}$$

□

命题 27：设 $\varphi \in$ 线性时序逻辑($\{\mathsf{F}, \mathsf{G}\ \wedge\}$) 为扁平的，且$A$, $A' \subseteq$原子命题集。则有 $\varphi[A][A'] \in \{\varphi[A], \mathsf{false}\}$。

证明：若 $\varphi[A] = \mathsf{false}$，则 $\varphi[A][A'] = \mathsf{false}$。否则，根据定义，$\varphi[A][A']$ 要么是 $\varphi[A]$，要么是 false。□

命题 5：设 $r_0 \to^{A_1} r_1 \to^{A_2} \cdots \to^{A_n} r_n$ 是 $\mathcal{A}_\varphi$ 的一条简单路径。则有 $|r_1|_{\mathsf{F}} > \cdots > |r_n|_{\mathsf{F}}$。

证明：令 $i \in [1..n-1]$。根据 $\mathcal{A}_\varphi$ 的定义，存在 $\psi_i \in \mathfrak{U}(r_{i-1})$ 和 $\psi_{i+1} \in \mathfrak{U}(r_i)$，使得 $r_i = \psi_i[A_i] \neq \mathsf{false}$ 且 $r_{i+1} = \psi_{i+1}[A_{i+1}] \neq \mathsf{false}$。有两种情况。

情况 $\psi_{i+1} = r_i$。我们有

$$r_{i+1} = \psi_{i+1}[A_{i+1}] = r_i[A_{i+1}] = \psi_i[A_i][A_{i+1}].$$

由于 $r_{i+1} \neq$ 为假，根据命题 27，有 $\psi_i[A_i][A_{i+1}] = \psi_i[A_i] = r_i$ 成立。因此，$r_i = r_{i+1}$，这与该路径是简单的这一事实相矛盾。

情况 $\psi_{i+1} \neq r_i$。根据命题 4 的条目 2，我们有 $|r_{i+1}|_{\mathsf{F}} = |\psi_{i+1}[A_{i+1}]|_{\mathsf{F}} \le |\psi_{i+1}|_{\mathsf{F}}$。此外，根据命题 4 的条目 1，我们有 $|\psi_{i+1}|_{\mathsf{F}} < |r_i|_{\mathsf{F}}$，因为 $\psi_{i+1} \in \mathfrak{U}(r_i) \setminus \{r_i\}$。□

引理 1：设 $\varphi \in$ LTL($\{\mathsf{F},\mathsf{G}\ \wedge\}$) 是一个扁平公式。以下两个性质等价于 $w \models \varphi$：

1) 存在 φ' 使得 $\varphi \to^{w(0)} \varphi'$ 且 $w[1..] \models \varphi'$；2) 存在 $i \in \mathbb{N}$ 和 φ' 使得 $\varphi \to^{w(0)\cdots w(i-1)} \varphi'$、$|\varphi'|_{\mathsf{F}} = 0$ 且 $w[i..] \models \varphi'$.

第 1 项的证明：我们通过对 $|\varphi|_{\mathsf{F}}$ 进行归纳法来证明。

若 $|\varphi|_{\mathsf{F}} = 0$，则 φ 的形式为 $\psi \wedge \mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi''_i$。令 $\varphi' := \varphi[w(0)]$。注意，$\mathfrak{U}(\varphi) = \{\varphi\}$。我们有

$$\begin{aligned}& w \models \varphi \\ \iff\ & \mathrm{prop}(\psi \wedge \psi') \subseteq w(0) \wedge w[1..] \models (\mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi''_i) \\ \iff\ & \varphi[w(0)] \neq \mathit{false} \wedge w[1..] \models \varphi[w(0)] \\ \iff\ & \varphi \to^{w(0)} \varphi' \wedge w[1..] \models \varphi'.\end{aligned}$$

现在，假设 $\varphi = \theta \wedge \mathsf{F}\psi$，其中 θ 和 ψ 是扁平的。

⇒) 令 $w \models \varphi$。我们有 $w \models \theta$ 和 $w \models \mathsf{F}\psi$。根据归纳假设，存在 θ'，使得 $\theta \to^{w(0)} \theta'$ 且 $w[1..] \models \theta'$。根据 $\mathfrak{U}(\cdot)$ 的定义，我们有 $\theta \wedge \mathsf{F}\psi \to^{w(0)} \theta' \wedge \mathsf{F}\psi$。因此，如果 $w[1..] \models \mathsf{F}\psi$，那么取 $\varphi' := \theta' \wedge \mathsf{F}\psi$ 即可完成证明。否则，我们必有 $w \models \psi$。根据归纳假设，存在 ψ'，使得 $\psi \to^{w(0)} \psi'$ 且 $w[1..] \models \psi'$。由于 $\mathfrak{U}(\psi) \subseteq \mathfrak{U}(\mathsf{F}\psi)$，我们有 $\mathsf{F}\psi \to^{w(0)} \psi'$，从而$\theta \wedge \mathsf{F}\psi \to^{w(0)} \theta' \wedge \psi'$。因此，取 $\varphi' := \theta' \wedge \psi'$ 即可完成证明。

⇐) 设 φ' 满足 $\varphi \to^{w(0)} \varphi'$ 和 $w[1..] \models \varphi'$。根据 $\to$ 的定义，存在 θ'、ψ' 使得 $\theta \to^{w(0)} \theta'$、$\mathsf{F}\psi \to^{w(0)} \psi'$ 以及 $\varphi' = \theta' \wedge \psi'$。因此，$w[1..] \models \theta'$ 且$w[1..] \models \psi'$。根据归纳假设，有 $w \models \theta$。剩下需要证明 $w \models \mathsf{F}\psi$。

如果 $\psi' \neq \mathsf{F}\psi$，则根据命题 4，$|\psi'|_{\mathsf{F}} < |\mathsf{F}\psi|_{\mathsf{F}}$，从而根据归纳假设，$w \models \mathsf{F}\psi$。否则，我们有$\psi' = \mathsf{F}\psi$，因此 $w[1..] \models \mathsf{F}\psi$，特别地，$w \models \mathsf{F}\psi$。□

第 2 项的证明：我们对 $|\varphi|_{\mathsf{F}}$ 使用归纳法。如果$|\varphi|_{\mathsf{F}} = 0$，则该断言显然成立。设 $\varphi = \theta \wedge \mathsf{F}\psi$，其中 θ 和 ψ 是扁平的。

⇐) 由于 $\varphi \to^{w(0)\cdots w(i-1)} \varphi'$ 和 $w[i..] \models \varphi'$，重复应用条目 1 得出 $w \models \varphi$。

⇒) 令 $w \models \varphi$。此时，$w \models \theta$ and $w \models \mathsf{F}\psi$。设$j \in \mathbb{N}$ 满足 $w[j..] \models \psi$。根据条目 1，存在 ψ' 使得 $\psi \to^{w(j)} \psi'$ and $w[j+1..] \models \psi'$。根据 $\to$ 的定义，存在 $\psi'' \in \mathfrak{U}(\psi)$，使得 $\psi' = \psi''[w(j)]$。由于 $\mathfrak{U}(\psi) \subseteq \mathfrak{U}(\mathsf{F}\psi)$，我们有 $\psi'' \in \mathfrak{U}(\mathsf{F}\psi)$，因此 $\mathsf{F}\psi \to^{w(j)} \psi'$。此外，我们有 $\mathsf{F}\psi \to^{w(0)\cdots w(j-1)} \mathsf{F}\psi$。由此可得，$\mathsf{F}\psi \to^{w(0)\cdots w(j)} \psi'$。

通过重复应用条目 1，存在 θ' 使得 $\theta \to^{w(0)\cdots w(j)} \theta'$ 且 $w[j+1..] \models \theta'$。因此，

$$(\theta \wedge \mathsf{F}\psi) \to^{w(0)\cdots w(j)} (\theta' \wedge \psi') \text{ and } w[j+1..] \models \theta \wedge \psi'.$$

根据命题 4，我们有 $|\theta|_{\mathsf{F}} \ge |\theta'|_{\mathsf{F}}$ 且 $|\mathsf{F}\psi|_{\mathsf{F}} > |\psi'|_{\mathsf{F}}$。因此，$|\theta \wedge \mathsf{F}\psi|_{\mathsf{F}} > |\theta' \wedge \psi'|_{\mathsf{F}}$。所以，根据归纳假设，存在 $k \ge j+1$ 和 φ'，使得 $(\theta' \wedge \psi') \to^{w(j+1)\cdots w(k-1)} \varphi'$、$|\varphi'|_{\mathsf{F}} = 0$ 和 $w[k..] \models \varphi'$。由于

$$\varphi = (\theta \wedge \mathsf{F}\psi) \to^{w(0)\cdots w(j)} (\theta' \wedge \psi') \to^{w(j+1)\cdots w(k-1)} \varphi'.$$ □

命题 8：设 q、$r \in Q$。则有

1) $X_{q,\,r}$ 要么为空，要么是简单的；

2) 如果 $X_{q,\,r} \neq \emptyset$，则 $X_{r,\,r} \neq \emptyset$；3) 如果 $X_{q,\,q} \neq \emptyset$，则 $X_{q,\,q} \supseteq X_{q,\,r}$。

此外，给定 $\theta \in \mathfrak{U}(q)$ 和 $A \subseteq$原子命题集，使得 $r = \theta[A]$，可以在多项式时间内获得 $X_{q,\,r}$ 的表示。

证明：

1) 我们假设 $X_{q,\,r} \neq \emptyset$，否则问题便可平凡地解决。首先证明 $X_{q,\,r}$ 在交运算下是闭合的。令 A、$B \in X_{q,\,r}$。根据 $\to$ 的定义，必然存在 $\theta \in \mathfrak{U}(q)$ 使得 $r = \theta[A] = \theta[B]$。此外，$\theta$ 具有以下形式

$$\theta = \psi \wedge \mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi''_i \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j,$$

并且 prop($\psi \wedge \psi'$) $\subseteq A$ 且 prop($\psi \wedge \psi'$) $\subseteq B$。这意味着 prop($\psi \wedge \psi'$) $\subseteq A \cap B$，从而有 $r = \theta[A \cap B]$，进而推出 $q \to^{A\cap B} r$。

由于 $X_{q,r}$ 对交集封闭，因此它有一个最小元素 A，事实上该元素为 $A :=$ 命题变量集合($\psi \wedge \psi'$)，因而可以在多项式时间内从 θ 得到。我们有$X_{q,r} = \uparrow A$，因为对于任意 $A' \supseteq A$，都有命题变量集合($\psi \wedge \psi'$) $=$ $A \subseteq A'$ $\quad q \to^{A'} \theta[A'] = r$，因此。

2) 由于 $X_{q,r} \neq \emptyset$，存在 $\theta \in \mathfrak{U}(q)$ 和 $A \subseteq$原子命题集，使得 $r = \theta[A]$。因此，r 的形式为 $\mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi_i'' \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j$。注意，$r \in \mathfrak{U}(r)$ 和 $r[B] = r$，其中 $B :=$ 命题变量集合(ψ')。因此，$r \to^B r$，所以 $B \in X_{r,r}$。

3) 由于 $X_{q,q} \neq \emptyset$，q 的形式为 $q = \mathsf{G}\psi' \wedge \bigwedge_{i\in I} \mathsf{GF}\psi_i'' \wedge \bigwedge_{j\in J} \mathsf{F}\varphi_j$。设 $\theta \in \mathfrak{U}(q)$。后者的形式为

$$\theta = \psi_{\mathfrak{U}} \wedge \mathsf{G}(\psi' \wedge \psi'_{\mathfrak{U}}) \wedge \bigwedge_{i\in I_{\mathfrak{U}}} \mathsf{GF}\psi_i'' \wedge \bigwedge_{j\in J_{\mathfrak{U}}} \mathsf{F}\varphi_j.$$

检验 prop(ψ') $\subseteq A$ 的限制比 prop($\psi_{\mathfrak{U}} \wedge \psi' \wedge \psi'_{\mathfrak{U}}$) $\subseteq A$。因此，如果 $\theta[A] \neq$ 为假，那么 $q[A] \neq$ 为假。由于 $q \in \mathfrak{U}(q)$，这意味着 $q \to^A r$ 蕴含 $q \to^A q$。定理 2: □

对于以下片段，模型检测问题属于 P：线性时序逻辑$_B$({F,G ¬})、线性时序逻辑({F ∨}) 和线性时序逻辑({G ∧})。

证明：下面补充正文中省略的细节。1) 我们证明 $\boldsymbol{x} \models_M \mathsf{F}\neg Z$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \notin Z$，或者存在一个模式 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{M}$，使得 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$。

⇒) 为了导出矛盾，假设 $\boldsymbol{x} \in Z$，并且不存在满足 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{m} \in M$。显然，我们永远无法到达 $\boldsymbol{x}$ 以外的点。

⇐) 如果 $\boldsymbol{x} \notin Z$，那么显然 $\boldsymbol{x} \models_M \mathsf{F}\neg Z$。否则，我们有 $\boldsymbol{m} \in Z$，其中 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}$。由于我们假设 Z 是一个有界区域，因此必然可以通过永远简单地调度 $\boldsymbol{m}$，最终离开 Z。

2) 我们证明，$\boldsymbol{x} \models_M \mathsf{G}\neg Z$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \notin Z$，并且存在一个模式 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{M}$，使得对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，均有 $\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{m} \notin Z$。

⇐) 很容易看出，通过将 $\boldsymbol{m}$ 调度为无限时长所获得的执行满足公式，因为对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$，$\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{m} \notin Z$。

⇒) 显然，必须满足 $\boldsymbol{x} \notin Z$。设 M 的模式为 $\{\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n\}$。为了证明另一半，反设存在矛盾，即对于所有 $i \in [1..n]$，都有 $\boldsymbol{x} + \alpha_i\boldsymbol{m}_i \in Z$，其中某个 $\alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}$。下面证明，对于任意非 Zeno 无限调度 ρ，均有 exec($\rho, \boldsymbol{x}$) $\not\models \mathsf{G}\neg Z$。为此，我们将证明存在 $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\boldsymbol{z} \in Z$，使得 $\boldsymbol{x} \to^{\rho[..\tau]} \boldsymbol{z}$。

令 $\boldsymbol{m}'_i := \alpha_i\boldsymbol{m}_i$，并考虑 MMS M′ :=$\{\alpha_i\boldsymbol{m}_i : i \in [1..n]\}$。显然，M 与 M′ 的调度可以相互关联：M 的一个调度 π 相当于 M′ 的调度π'，其中我们将每次出现的 $(\beta, \boldsymbol{m}_i)$ 替换为 $(\beta/\alpha_i, \boldsymbol{m}'_i)$。因此，对于每个 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$，都有 $\boldsymbol{y} \to^{\pi} \boldsymbol{y}'$ 当且仅当 $\boldsymbol{y} \to^{\pi'} \boldsymbol{y}'$。

考虑 M′的一个调度 π，并令 $\rho = \pi[..1]$。有 $\boldsymbol{x} \to^{\rho} \boldsymbol{z}$，其中

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{m}'_i,$$

对于某些 λ_1、……、λ_n，使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$。因此，对于任意$i \in [1..n]$，$\boldsymbol{z}$都是点 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m}'_i$ 的凸组合。但注意，根据 M′的定义，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m}'_i = \boldsymbol{x} + \alpha_i\boldsymbol{m}_i$；根据 α_i的定义，$\boldsymbol{x} + \alpha_i\boldsymbol{m}_i \in Z$。因此，$\boldsymbol{z}$是来自 Z中各点的凸组合，故属于 Z，因为它是凸的。

3) 关于 GF¬Z 的证明与条目 1 相同，但还需注意：执行一旦通过调度$\boldsymbol{m}$离开 Z，如果继续调度 $\boldsymbol{m}$，就不会重新进入 Z。

4) The proof for $\mathsf{FG}\neg Z$ is as in Item 3. □

定理 3：对于 LTL$_B$({F}) 和 LTL$_B$({G})，模型检验问题都是 P-困难的。

证明：线性时序逻辑 LTL$_B$({F}) 片段。我们将其归约为线性规划可行性问题。该问题询问：给定一个区域$Z \subseteq \mathbb{R}^d$，由不等式组 A$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$描述，是否存在非负解。即使区域$Z$ 有界，该问题仍是 P 完全的 [23, （见命题 A.4.1]）。令 M := $\{\boldsymbol{e}_i : i \in [1..d]\}$。容易看出，当且仅当 $\boldsymbol{0} \models_M \mathsf{F}Z$时，$Z \neq \emptyset$。

片段 LTL$_B$({G})。我们从单调电路值问题（CVP） [23, Prob. A.1.3] 进行归约。设 $C(x_1, \ldots, x_n)$是一个门来自 $\{\wedge, \vee\}$的布尔电路，且 $w_1, \ldots, w_n \in \{0, 1\}$。我们构造一个 d 维 MMS M、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ 以及一个有界区域 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$，使得 $C(w) = 1$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \models_M \mathsf{G}Z$。

每个门 g 都与一个维度 g相关联。我们添加两个维度 $\{\heartsuit, \overline{\heartsuit}\}$。令 $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{e}_{\heartsuit} + \sum_{i=1}^n w_i \cdot \boldsymbol{e}_{x_i}$。令 Z为由 $c \in [0, 1]$ 对每个维度 c定义的区域。

我们用 g_{out} 表示 C的输出门。我们为每个门 $g = u \wedge v$关联一个模式 $\boldsymbol{m}_g$，定义为 $\boldsymbol{m}_g := -\boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_v + \boldsymbol{e}_g$。我们为每个门 $g = u \vee v$关联模式 $\boldsymbol{m}_g$ 和 $\boldsymbol{m}'_g$，分别定义为 $\boldsymbol{m}_g := -\boldsymbol{e}_u + \boldsymbol{e}_g$ 和 $\boldsymbol{m}_g := -\boldsymbol{e}_v + \boldsymbol{e}_g$。我们添加两个模式：$\boldsymbol{m}_{\heartsuit} := -\boldsymbol{e}_{g_{\text{out}}} - \boldsymbol{e}_{\heartsuit} + \boldsymbol{e}_{\overline{\heartsuit}}$和$\boldsymbol{m}_{\overline{\heartsuit}} := \boldsymbol{e}_{g_{\text{out}}} + \boldsymbol{e}_{\heartsuit} - \boldsymbol{e}_{\overline{\heartsuit}}$。

令 g_1，……，g_m 为 C 中各门的拓扑排序。令 C_j 为将 g_j 设为输出门后得到的子电路。通过常规归纳可得，$C_j(w) = 1$ 当且仅当存在 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{x} \to_Z^* \boldsymbol{y}$ 且 $\boldsymbol{y}(g_j) > 0$。该断言意味着，$C(w) = 1$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} \models_M \mathsf{G}Z$。事实上，任何非 Zeno 无限调度都必须使用 $\boldsymbol{m}_{\heartsuit}$。此外，在到达某个 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{y}(g_{\text{out}}) = \alpha > 0$ 后，便可以在 $\alpha\boldsymbol{m}_{\heartsuit}$ 与 $\alpha\boldsymbol{m}_{\overline{\heartsuit}}$ 之间无限交替。

□

命题 10 可由该引理归纳地推出：

引理 8：令 $\rho(\alpha, \boldsymbol{m})\rho'(\beta, \boldsymbol{m})\rho''$ 为一个调度。则有：

- If $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\alpha,\boldsymbol{m})\rho'(\beta,\boldsymbol{m})\rho''} \boldsymbol{y}$, then $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho\,(\alpha,\boldsymbol{m})\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}[\rho'\rho'']}$,
- If $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho''(\beta,\boldsymbol{m})\rho'(\alpha,\boldsymbol{m})\rho} \boldsymbol{y}$, then $\to_Z^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}[\rho''\rho']\,(\alpha,\boldsymbol{m})\,\rho} \boldsymbol{y}$.

证明：我们只证明第一个条目。第二个条目以对称的方式即可推出。我们有 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho} \boldsymbol{u}$，其中 $\boldsymbol{u}$。根据凸性，存在 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}'$、$\boldsymbol{w}$，使得：

$$\boldsymbol{u} \to_Z^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}[(\alpha,\boldsymbol{m})\rho'(\beta,\boldsymbol{m})]} \boldsymbol{v} \to_Z^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\rho''} \boldsymbol{w}$$

and

$$\boldsymbol{u} \to_Z^{(\alpha,\boldsymbol{m})\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\rho'} \boldsymbol{v}'.$$

下面证明 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\alpha\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta}_{\rho'} + \beta\boldsymbol{m}\right)\\ &= \boldsymbol{u} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left((\alpha+\beta)\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\Delta}_{\rho'}\right)\\ &= \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{m} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\boldsymbol{\Delta}_{\rho'}\\ &= \boldsymbol{v}'.\end{aligned}$$

由此，我们得到 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho} \boldsymbol{u} \to_Z^{(\alpha,\boldsymbol{m})\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\rho'} \boldsymbol{v} \to_Z^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\rho''} \boldsymbol{w}$。 □

引理 2：令 $\rho(\alpha,\boldsymbol{m})\rho'$ 为一个调度。以下结论成立：

- If $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\alpha,\boldsymbol{m})\rho'}$, then $\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})}$,
- If $\to_Z^{\rho'(\alpha,\boldsymbol{m})\rho} \boldsymbol{y}$, then $\to_Z^{(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\rho} \boldsymbol{y}$.

证明：我们仅证明第一个条目。第二个条目可对称地推出。由凸性，存在 $\boldsymbol{y}'$ 和 $\boldsymbol{w}$，使得

$$\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'} \boldsymbol{y}' \text{ and } \boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\alpha,\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'} \boldsymbol{w}.$$

此外，我们有 $\boldsymbol{y}' \to^{(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})} \boldsymbol{w}$。由于 $\boldsymbol{y}', \boldsymbol{w} \in Z$，根据凸性，我们得出

$$\boldsymbol{x} \to_Z^{\rho(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})\frac{1}{2}\rho'} \boldsymbol{y}' \to_Z^{(\frac{\alpha}{2},\boldsymbol{m})} \boldsymbol{w}.$$ □

命题 11 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi} \boldsymbol{y}$ $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi'}$ $\boldsymbol{y}_Z$ $\boldsymbol{x}_Z \to_Z^{\pi''} \boldsymbol{y}$ $|\pi| = |\pi'| = |\pi''|$ $\pi =$ 令。存在、以及使得，$\mathrm{supp}(\,)\,\mathrm{supp}(\pi') = \mathrm{supp}(\pi'')$，并且对于每个 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{supp}(\pi)$，都有 $\boldsymbol{x}_Z \to_Z^{(1/\beta)\boldsymbol{m}}$ 和 $\to_Z^{(1/\beta)\boldsymbol{m}} \boldsymbol{y}_Z$。

证明：根据引理 2，我们可以选取

$$\pi' \coloneqq \prod_{i=1}^{|\pi|}\left(\frac{1}{2^i}\cdot\pi(i)\right),\ \pi'' \coloneqq \prod_{i=1}^{|\pi|}\left(\frac{1}{2^{(|\pi|-i+1)}}\cdot\pi(i)\right),$$

和 $\beta \coloneqq 2^{|\pi|}\cdot\lceil$时间$(\pi)\rceil$。 □

命题 12：设 $\boldsymbol{x} \to^{\pi} \boldsymbol{y}$、$k \coloneqq |\pi|$ 和 $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 满足条件 $\boldsymbol{x} \to_Z^{(1/\beta)\pi(i)}$ 和 $\to_Z^{(1/\beta)\pi(i)} \boldsymbol{y}$ 对所有 $i \in [1..k]$ 均成立。则有 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi'} \boldsymbol{y}$，其中 $\pi' \coloneqq ((1/(\beta k))\pi)^{\beta k}$。

证明：令 $\pi \coloneqq (\alpha_1,\boldsymbol{m}_1)(\alpha_2,\boldsymbol{m}_2)\cdots(\alpha_k,\boldsymbol{m}_k)$。令 $\boldsymbol{x}_0^0 \coloneqq \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_{\beta k-1}^k \coloneqq \boldsymbol{y}$ 以及 $\boldsymbol{x}_j^k \coloneqq \boldsymbol{x}_{j+1}^0$。令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_j^i &\coloneqq \boldsymbol{x}_0^0 + j\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k} + \sum_{h=1}^{i}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\\ &= \boldsymbol{x}_0^i + \sum_{h=i+1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k} + (j-1)\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k} + \sum_{h=1}^{i}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\\ &= \boldsymbol{x}_0^i + \sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k} + (j-1)\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\\ &= \boldsymbol{x}_0^i + j\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}.\end{aligned}$$

令 $\mathbf{A}\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{b}$ 为表示区域Z的不等式组。根据假设，以下内容对所有 $i \in [1..k]$均成立：

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{x}_0^0 + \frac{\alpha_i\boldsymbol{m}_i}{\beta}\right) \leq \boldsymbol{b} \text{ and } \mathbf{A}\left(\boldsymbol{x}_{\beta k-1}^k - \frac{\alpha_i\boldsymbol{m}_i}{\beta}\right) \leq \boldsymbol{b}.$$

以下内容成立：

$$\boldsymbol{x}_0^0 \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(1)} \boldsymbol{x}_0^1 \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(2)} \boldsymbol{x}_0^2 \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(3)} \cdots \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(k)} \boldsymbol{x}_0^k,$$

由于

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0^i &= \mathbf{A}\boldsymbol{x}_0^0 + \sum_{j=1}^{i}\mathbf{A}\frac{\alpha_j\boldsymbol{m}_j}{\beta k}\\ &= \frac{k-i}{k}\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0^0 + \frac{i}{k}\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0^0 + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}\mathbf{A}\frac{\alpha_j\boldsymbol{m}_j}{\beta}\\ &= \frac{k-i}{k}\mathbf{A}\boldsymbol{x}_0^0 + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}\mathbf{A}\left(\boldsymbol{x}_0^0 + \frac{\alpha_j\boldsymbol{m}_j}{\beta}\right)\\ &\leq \frac{k-i}{k}\boldsymbol{b} + \frac{1}{k}\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

类似地，以下结论成立：

$$\boldsymbol{x}_{\beta k-1}^0 \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(1)} \boldsymbol{x}_{\beta k-1}^1 \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(2)} \boldsymbol{x}_{\beta k-1}^2 \cdots \to_Z^{\frac{1}{\beta k}\pi(k)} \boldsymbol{x}_{\beta k-1}^k.$$

还需证明，对于所有 $i \in [1..k]$、$j \in [1..(\beta k-1)]$，我们有 $\boldsymbol{x}_j^i = (1-\lambda)\boldsymbol{x}_0^i + \lambda\boldsymbol{x}_{\beta k-1}^i$，其中 $\lambda = \frac{j}{\beta k-1}$。我们有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_j^i &= \boldsymbol{x}_0^i + j\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\\ &= \boldsymbol{x}_0^i + \frac{\beta k-1}{\beta k-1}\cdot j\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\\ &= \boldsymbol{x}_0^i + \lambda(\beta k-1)\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\\ &= (1-\lambda)\boldsymbol{x}_0^i + \lambda\left(\boldsymbol{x}_0^i + (\beta k-1)\sum_{h=1}^{k}\frac{\alpha_h\boldsymbol{m}_h}{\beta k}\right)\\ &= (1-\lambda)\boldsymbol{x}_0^i + \lambda\boldsymbol{x}_{\beta k-1}^i.\end{aligned}$$

由于 $\lambda \in [0,1]$，每个 $\boldsymbol{x}_j^i$ 都因凸性而属于 Z。 □

命题 15：设 Z 为一个区域，设 π 为一个调度，设$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$、$\boldsymbol{y} \in Z$ 和 $\beta \in (0,1]$。设 $\boldsymbol{z} \coloneqq \beta\boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y}$，且 $\boldsymbol{z}' \coloneqq \beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{y}$。若 $\boldsymbol{x} \to_Z^{\pi} \boldsymbol{x}'$ 成立，则 $\boldsymbol{z} \to_Z^{\beta\pi} \boldsymbol{z}'$。

证明：我们来证明 $\pi = \alpha m$ 对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ 和模式 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{M}$ 的情形。一般情形可由归纳法得出。注意到 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{x}' \in Z$。令 $\boldsymbol{z}' \coloneqq \boldsymbol{z} + \beta\alpha\boldsymbol{m}$。显然，我们有 $\boldsymbol{z} \to^{\beta\pi} \boldsymbol{z}'$。接下来只需证明 $\boldsymbol{z} \to_Z^{\beta\pi} \boldsymbol{z}'$。根据 Z 的凸性，只需证明 $\boldsymbol{z}'$ 位于经过 $\boldsymbol{x}' \in Z$ 和 $\boldsymbol{y} \in Z$ 的直线上：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}' &= (\beta\boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y}) + \beta\alpha\boldsymbol{m}\\ &= \beta(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{m}) + (1-\beta)\boldsymbol{y}\\ &= \beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$ □

在命题 16 的证明中，我们断言了$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda$。下面对此进行证明。

命题16的证明（缺失的断言）：我们首先提出两个额外的断言。给定 $\boldsymbol{x} \in X'$ 和 $\boldsymbol{y} \in Y'$，使得 $\boldsymbol{z} \to^{\pi} \boldsymbol{x} \to^{\pi'} \boldsymbol{y}$，则有：

1) $f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda$, and
2) $f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$.

要证明断言 1，请注意我们有

$$\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = & -(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}))+ \\
& \boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \\
= & -(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}))+ \\
& (\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{M}+\boldsymbol{v}_3^T\mathbf{M})\boldsymbol{\pi'} \\
\geq & -(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})) \qquad \text{(by (2))} \\
\geq & -(\boldsymbol{v}_1^T(\boldsymbol{b}_1-\mathbf{A}_1\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T(\boldsymbol{b}_2-\mathbf{A}_2\boldsymbol{z})) \\
& \qquad\qquad \text{(by } \boldsymbol{x}\in X', \boldsymbol{y}\in Y') \\
= & \ \lambda.
\end{aligned}$$

接下来，为了证明断言 2，我们有

$$\begin{aligned}
& f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
= & -(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}))+ \\
& \boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \\
= & -\left(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\right)+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \\
= & -(\boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{M}+\boldsymbol{v}_2^T\mathbf{A}_2\mathbf{M})\boldsymbol{\pi}+\boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \\
\leq & \ \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \qquad \text{(by (1))}.
\end{aligned}$$

最后，利用断言 2 和断言 1，我们可以证明原断言：$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}_3^T(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq \lambda$。 □

命题 18：对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\boldsymbol{x}_n = \lambda^n\boldsymbol{x}_0+(1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f$ 以及 $\boldsymbol{y}_n = \lambda^n\boldsymbol{y}_0+(1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f$。

证明：

展开 $\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{y}_n$ 的定义后，我们得到

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{x}_n \qquad (17) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\lambda^i\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\frac{\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right)+(1-\lambda^i)\boldsymbol{\Delta}_{\rho'\rho''}\right) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\lambda^i\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\frac{\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right)+(1-\lambda^i)\cdot\mathbf{0}\right) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\frac{\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\frac{\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right) \qquad (18) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+\frac{\lambda^n-1}{-1/(1+\epsilon)}\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\frac{\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0-(\lambda^n-1)(1+\epsilon)\left(\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\frac{\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}}{1+\epsilon}\right) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+(1-\lambda^n)((1+\epsilon)\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}+\boldsymbol{\Delta}_\rho-\epsilon\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'}) \\
= & \ \boldsymbol{x}_0+(1-\lambda^n)\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'\rho} \\
= & \ \lambda^n\boldsymbol{x}_0+(1-\lambda^n)(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{\Delta}_{\pi\pi'\rho}) \\
= & \ \lambda^n\boldsymbol{x_0}+(1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f,
\end{aligned}$$

其中，(18) 是由 $\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1} = (x^n-1)/(x-1)$ 得出的。此外，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_n &= \boldsymbol{x}_n+\lambda^n\boldsymbol{\Delta}_\pi+(1-\lambda^n)\boldsymbol{\Delta}_{\rho'} \\
&= \lambda^n\boldsymbol{x}_0+(1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f+\lambda^n\boldsymbol{\Delta}_\pi+(1-\lambda^n)\boldsymbol{\Delta}_{\rho'} \qquad (19) \\
&= \lambda^n(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\Delta}_\pi)+(1-\lambda^n)(\boldsymbol{x}_f+\boldsymbol{\Delta}_{\rho'}) \\
&= \lambda^n\boldsymbol{y}_0+(1-\lambda^n)\boldsymbol{y}_f,
\end{aligned}$$

其中，(19) 是由以下事实得出的：对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\boldsymbol{x}_n = \lambda^n\boldsymbol{x}_0+(1-\lambda^n)\boldsymbol{x}_f$，如上文所证。 □

命题 21：如果 $\boldsymbol{z}\models_M \mathsf{G}Z$，则存在 π 和 $\boldsymbol{z}'$，使得 $\boldsymbol{z}\to^{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{z}'$、$\mathbf{A}\boldsymbol{z}'\leq\mathbf{A}\boldsymbol{z}$ 以及 $\|\boldsymbol{\pi}\|\geq 1$。

证明：我们将 M 定义为如下矩阵：每一列都是 M 中的一个模式。注意，以下约束集合 $\mathcal{S}$ 与 $\exists\pi$、$\boldsymbol{z}'$ 等价：$\boldsymbol{z}\to^{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{z}'\wedge\mathbf{A}\boldsymbol{z}'\leq\mathbf{A}\boldsymbol{z}\wedge\|\boldsymbol{\pi}\|\geq 1$：

$$\exists\boldsymbol{u}\geq\mathbf{0}:\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{M}\\ -\mathbf{1}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\leq\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -1\end{bmatrix}.$$

为了导出矛盾，假设 $\boldsymbol{z}\models\mathsf{G}Z$，且$\mathcal{S}$ 没有解。根据 Farkas引理，以下系统$\mathcal{S}'$ 有一个解：

$$\begin{aligned}
& \exists\boldsymbol{v}_1\geq\mathbf{0}, v_2\geq 0: \\
& \begin{bmatrix}\mathbf{M}^T\mathbf{A}^T & -\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ v_2\end{bmatrix}\geq\mathbf{0},\ \begin{bmatrix}\mathbf{0}^T & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ v_2\end{bmatrix}<0.
\end{aligned}$$

后者可以等价地重写如下：

$$\begin{aligned}
& \exists\boldsymbol{v}_1\geq\mathbf{0}, v_2\geq 0: \mathbf{M}^T\mathbf{A}^T\boldsymbol{v}_1-\mathbf{1}v_2\geq\mathbf{0},\ -v_2<0 \\
\iff & \exists\boldsymbol{v}_1\geq\mathbf{0}, v_2\geq 0: \boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}\mathbf{M}\geq\mathbf{1}^Tv_2,\ v_2>0 \\
\iff & \exists\boldsymbol{v}_1\geq\mathbf{0}, v_2\geq 0: \boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}\mathbf{M}\geq\mathbf{1}^Tv_2>\mathbf{0}^T.
\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{z}\models\mathsf{G}Z$，存在一个非 Zeno 无限调度 π，使得 $\boldsymbol{z}\to_Z^{\pi}$。令 $n\in\mathbb{N}$、$\pi_n := \pi[..n]$，以及 $\boldsymbol{z}_n := \boldsymbol{z}+\boldsymbol{\Delta}_{\pi_n}$。我们有 $\boldsymbol{z}_n\in Z$，因此 $\mathbf{A}\boldsymbol{z}_n\leq\boldsymbol{b}$。于是，

$$\begin{aligned}
v_2\mathbf{1}^T\boldsymbol{\pi_n} &\leq \boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}\mathbf{M}\boldsymbol{\pi_n} \\
&= \boldsymbol{v}_1^T\mathbf{A}(\boldsymbol{z}_n-\boldsymbol{z}) \\
&\leq \boldsymbol{v}_1^T(\boldsymbol{b}-\mathbf{A}\boldsymbol{z}). \qquad (20)
\end{aligned}$$

由于 π 是非 Zeno 的，我们进一步有 $\lim_{n\to\infty}v_2\mathbf{1}^T\boldsymbol{\pi_n}=\infty$，这与 (20) 矛盾。 □

命题 22：设 $\boldsymbol{z}$、$\boldsymbol{z}'\in Z$ 和 ρ 为一个有限调度。若 $\boldsymbol{z}\to_Z^{\rho}\boldsymbol{z}'$ 且 $\mathbf{A}\boldsymbol{z}'\leq\mathbf{A}\boldsymbol{z}$，则 $\boldsymbol{z}'\to_Z^{\rho}$。

证明：我们考虑 $\rho=\alpha\boldsymbol{m}$ 的情形。一般情形可归纳地推出。由于 $\boldsymbol{z}\to_Z^{\rho}$，我们有 $\mathbf{A}\boldsymbol{z}+\mathbf{A}\alpha\boldsymbol{m}\leq\boldsymbol{b}$。因此，$\mathbf{A}\boldsymbol{z}'+\mathbf{A}\alpha\boldsymbol{m}\leq\mathbf{A}\boldsymbol{z}+\mathbf{A}\alpha\boldsymbol{m}\leq\boldsymbol{b}$。 □

引理 3 中构造的证明：

⇒) 令 π 为满足 $\mathsf{exec}(\pi,\boldsymbol{x})\models\varphi$ 的非 Zeno 无限调度。我们构造一个非 Zeno 无限调度π'，使得 $\mathsf{exec}(\pi',(\boldsymbol{x},..,\boldsymbol{x}))\models\varphi'$。根据 φ 的定义，对于每个 $i\in[1..n]$，存在 $\tau_{i,0}<\tau_{i,1}<\cdots\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\boldsymbol{x}_{i,0},\boldsymbol{x}_{i,1},\ldots\in\mathbb{R}^d$，使得 $\tau_{i,0}=0$, $\boldsymbol{x}_{i,0}=\boldsymbol{x}$ 以及

$$\boldsymbol{x}_{i,j}\to_{Z_0}^{\pi[\tau_{i,j}..\tau_{i,j+1}]}\boldsymbol{x}_{i,j+1}\in Z_i \qquad \text{for all } j\in\mathbb{N}.$$

不失一般性，我们可以假设对于所有 $i\in[1..n]$ 和 $j\in\mathbb{N}$，$\tau_{i,j}\leq\tau_{1,j}\leq\tau_{i,j+1}$。事实上，由于每个区域 Z_i 都会被无限次访问，因此可以这样选择这些值。

令 π_i 表示通过将 π 中的每个模式 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{M}$ 替换为 $\boldsymbol{m}_i \in \mathrm{M}'$ 所得到的调度。令 $\pi' \coloneqq u_0 v_0 u_1 v_1 \cdots$ 为无限调度，其中

$$u_j \coloneqq \pi_1[\tau_{1,j}..\tau_{1,j+1}] \quad \pi_2[\tau_{1,j}..\tau_{2,j+1}] \quad \cdots \pi_n[\tau_{1,j}..\tau_{n,j+1}],$$
$$v_j \coloneqq \pi_1[\tau_{1,j+1}..\tau_{1,j+1}]\pi_2[\tau_{2,j+1}..\tau_{1,j+1}] \cdots \pi_n[\tau_{n,j+1}..\tau_{1,j+1}].$$

根据定义，我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}) &\to_Z^{u_0} (\boldsymbol{x}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n,1}) \in X \\ &\to_Z^{v_0} (\boldsymbol{x}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1,1}) \in Y \\ &\to_Z^{u_1} (\boldsymbol{x}_{1,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n,2}) \in X \\ &\to_Z^{v_1} (\boldsymbol{x}_{1,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1,2}) \in Y \\ &\to_Z^{u_2} \cdots .\end{aligned}$$

因此可得 $(\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}) \models_{M'} \varphi'$.

⇐) 令 π' 为满足 $\mathsf{exec}(\pi', (\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x})) \models \varphi'$ 的非 Zeno 无限调度。存在 $0 = \tau_0 < \gamma_1 < \tau_1 < \gamma_2 < \tau_2 < \cdots \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, \ldots \in \mathbb{R}^{nd}$ 使得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x}) &\to_Z^{\pi'[\tau_0..\gamma_1]} \boldsymbol{x}_1 \in X \\ &\to_Z^{\pi'[\gamma_1..\tau_1]} \boldsymbol{y}_1 \in Y \\ &\to_Z^{\pi'[\tau_1..\gamma_2]} \boldsymbol{x}_2 \in X \\ &\to_Z^{\pi'[\gamma_2..\tau_2]} \boldsymbol{y}_2 \in Y \\ &\to_Z^{\pi'[\tau_2..\gamma_3]} \ldots\end{aligned}$$

对于每个 $i \in [1..n]$，令 π_i' 表示由 π' 得到的调度：仅保留来自 $\{\boldsymbol{m}_i$ 的模式，即 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{M}\}$，并将每次出现的 $\boldsymbol{m}_i$ 替换为 $\boldsymbol{m}$。令

$$\begin{aligned}\pi \coloneqq\ & \pi_1[\tau_0..\gamma_1]\ \pi_1[\gamma_1..\tau_1] \\ & \pi_2[\tau_1..\gamma_2]\ \pi_2[\gamma_2..\tau_2] \\ & \cdots \\ & \pi_n[\tau_{n-1}..\gamma_n]\ \pi_n[\gamma_n..\tau_n] \\ & \pi_1[\tau_n..\gamma_{n+1}]\ \pi_1[\gamma_{n+1}..\tau_{n+1}] \\ & \cdots\end{aligned}$$

回顾一下，$\boldsymbol{y}_j[i] = \boldsymbol{y}_j[i']$ 对于所有 i、$i' \in [1..n]$。因此，根据定义，我们有

$$\begin{array}{llll}\boldsymbol{x} \to_{Z_0}^{\pi_1[\tau_0..\gamma_1]} & \boldsymbol{x}_1[1] & \to_{Z_0}^{\pi_1[\gamma_1..\tau_1]} & \boldsymbol{y}_1[1] = \boldsymbol{y}_1[2] \\ \to_{Z_0}^{\pi_2[\tau_1..\gamma_2]} & \boldsymbol{x}_2[2] & \to_{Z_0}^{\pi_2[\gamma_2..\tau_2]} & \boldsymbol{y}_2[2] = \boldsymbol{y}_2[3] \\ \cdots & & \cdots & \\ \to_{Z_0}^{\pi_n[\tau_{n-1}..\gamma_n]} & \boldsymbol{x}_n[n] & \to_{Z_0}^{\pi_n[\gamma_n..\tau_n]} & \boldsymbol{y}_n[n] = \boldsymbol{y}_n[1] \\ \to_{Z_0}^{\pi_1[\tau_n..\gamma_{n+1}]} & \boldsymbol{x}_{n+1}[1] & \to_{Z_0}^{\pi_1[\gamma_{n+1}..\tau_{n+1}]} & \boldsymbol{y}_{n+1}[1] = \boldsymbol{y}_{n+1}[2] \\ \cdots & & \cdots & \end{array}$$

回忆一下，$\boldsymbol{x}_j[i] \in Z_i$ 对所有 $i \in [1..n]$ 和 $j \in \mathbb{N}$均成立。因此，每个区域 Z_i 都会被无限次访问，所以执行$(\pi, \boldsymbol{x}) \models \varphi$。 □

定理 6 的证明（归约正确性）：我们来证明 $\boldsymbol{0} \models_M \varphi$ 当且仅当存在解 V，使其满足 SUBSET-SUM 实例 (S, t)。回顾一下，$\boldsymbol{0} \models_M \varphi$ 成立，当且仅当 M 存在一个非 Zeno 无限调度 π，使得 $\mathsf{exec}(\pi, \boldsymbol{0}) \models \varphi$。

⇐) 令 $V \subseteq S$ 满足 $\sum_{v \in V} v = t$。我们定义一个满足 φ 的调度 π。令 $\pi \coloneqq \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n \boldsymbol{y}_1^\omega$，其中

$$\pi_i \coloneqq \begin{cases} \boldsymbol{y}_i\, \overline{\boldsymbol{y}}_i & \text{if } s_i \in V, \\ \boldsymbol{n}_i\, \overline{\boldsymbol{n}}_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

⇒) 令 π 满足 $\sigma \coloneqq \mathsf{exec}(\pi, \boldsymbol{0}) \models \varphi$。根据 φ的定义，存在 τ_T, $\tau_{Y_1}, \tau_{N_1}, \ldots, \tau_{Y_n}, \tau_{N_n} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得$\sigma(\tau_T) \in T$, $\sigma(\tau_{Y_i}) \in Y_i$且 $\sigma(\tau_{N_i}) \in N_i$ 对所有 $i \in [1..n]$ 均成立。令所有这些量均为最小值。

令 $\sigma' \coloneqq \sigma[0..\tau_T]$。由于 π 是 σ的一个调度，因此存在一个调度 π'，使得 $\sigma' = \mathsf{exec}(\pi', \boldsymbol{0})$。我们将证明：

$$\mathrm{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\pi'), \mathrm{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\pi') \in \{0, 1\} \text{ for all } i \in [1..n]. \quad (*)$$

由 (*) 可完成证明。事实上，根据 π'和模式的定义，我们有

$$\sigma(\tau_T)(c^*) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\pi') \cdot s_i.$$

此外，根据区域 T的定义，$\sigma(\tau_T)(c^*) = t$成立。由于每个时刻$\boldsymbol{y}_i$(π') $\in \{0, 1\}$，我们得到一个解 $V \coloneqq \{s_i : \text{时刻} \boldsymbol{y}_i(\pi') = 1\}$，对应于该子集和实例。

仍需证明（*）。首先，我们对每个 $i \in [1..n]$ 作出以下断言：

(1) $\tau_{Y_i} \leq \tau_T$和 $\tau_{N_i} \leq \tau_T$。(2) $\mathrm{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\pi')$ $+ \mathrm{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\pi') = 1$ 且 $\mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\pi') + \mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\pi') = 1$。

下面证明这两个断言。

(1) 我们只证明 $\tau_{Y_i} \leq \tau_T$，因为 $\tau_{N_i} \leq \tau_T$ 是对称的。我们通过证明对任意 $\boldsymbol{x} \in T \setminus Y_i$，都有 $\boldsymbol{x} \not\models_M \mathrm{F} Y_i$ 来完成论证。根据 T 和 Y_i 的定义，有 $\boldsymbol{x}(c_i,1) \in [-0.5, 0.5)$、$\boldsymbol{x}(c_i,2) = 2$ 和 $\boldsymbol{x}(c_i,3) = \boldsymbol{x}(c_i,4) = 1$。注意，影响 $\{c_{i,1}, \ldots, c_{i,4}\}$ 的模式只有 $\{\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{n}_i, \overline{\boldsymbol{y}}_i, \overline{\boldsymbol{n}}_i\}$。能够正向影响 c_i,1、从而使其达到 0.5 的模式只有 $\boldsymbol{y}_i$ 和 $\overline{\boldsymbol{n}}_i$。然而，这两种模式都会正向影响 c_i, 2，且没有任何模式会降低 c_i,2。因此，使用 $\boldsymbol{x}$ 中的任一模式都无法到达 Y_i 中的点。于是，$\boldsymbol{x} \not\models_M \mathrm{F} Y_i$。

(2) 根据 $\sigma(\tau_T) \in T$，我们有 $\sigma(\tau_T)(c_i,2) = 2$。由于$\boldsymbol{y}_i(c_i, 2) = \boldsymbol{n}_i(c_i,2) = \overline{\boldsymbol{y}}_i(c_i,2) = \overline{\boldsymbol{n}}_i(c_i,2) = 1$，且没有模式会降低$c_i$,2，因此 $\mathrm{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\pi') + \mathrm{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\pi') + \mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\pi') + \mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\pi') = 2$。由于 T 要求 $c_i,3 = 1$，且没有模式会降低 c_i,3，因此我们有 $\mathrm{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\pi') + \mathrm{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\pi') = 1$。同样地，由于 T要求 $c_i,4 = 1$，我们有 $\mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\pi') + \mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\pi') = 1$。

接下来需要利用上述断言证明 (*)。注意，$\tau_{Y_i} \neq \tau_{N_i}$ 由于 Y_i 和 N_i 的约束在 $c_{i,1}$ 上发生冲突。我们不妨假设 $\tau_{Y_i} < \tau_{N_i}$（另一种情况是对称的）。令ψ和 ψ'为满足以下条件的调度：$\mathsf{exec}(\psi, \boldsymbol{0}) = \sigma[0..\tau_{Y_i}]$，且 $\mathsf{exec}(\psi', \sigma(\tau_{Y_i})) = \sigma[\tau_{Y_i}..\tau_{N_i}]$。

根据 Y_i 和 N_i的定义，我们有 $\sigma(\tau_{Y_i})(c_{i,\ 3}) = 1$ 和 $\sigma(\tau_{N_i})(c_{i,\ 3}) = 1$。由于没有模式降低 $c_{i,\ 3}$，模式 $\boldsymbol{y}_i$ 和 $\boldsymbol{n}_i$ 不会在 ψ'中使用。此外，注意到 $\sigma(\tau_{Y_i})(c_{i,\ 1}) = 0.5$ 和 $\sigma(\tau_{N_i})(c_{i,\ 1}) = -0.5$。因此，必然有

$$0.5 - \mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\psi') + \mathrm{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\psi') = -0.5.$$

因此，$\text{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\psi') - \text{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\psi') = 1$。由于 ψ' 源自 π'，断言 2 得出

$$\text{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\psi') + \text{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\psi') \leq 1.$$

因此，我们有 $\text{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\psi') = 1$ 和 $\text{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\psi') = 0$。由断言 2，我们进一步推导出 $\text{time}_{\overline{\boldsymbol{y}}_i}(\psi) = \text{time}_{\overline{\boldsymbol{n}}_i}(\psi) = 0$。

根据 Y_i 的定义，我们有 $\sigma(\tau_{Y_i})(c_{i,1}) = 0.5$。由于 $\boldsymbol{y}_i$和 $\boldsymbol{n}_i$ 是 ψ 中可能用于改变 $c_{i,1}$ 的唯一模式，我们有 $\frac{1}{2} \cdot$ 时间 $\boldsymbol{y}_i(\psi) - \frac{1}{2} \cdot$ 时间 $\boldsymbol{n}_i(\psi) = 0.5$。根据断言 (2),

$$\text{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\psi') + \text{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\psi') \leq 1.$$

因此，我们有 $\text{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\psi) = 1$ 和 $\text{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\psi) = 0$，根据断言 (2)，可得 $\text{time}_{\boldsymbol{y}_i}(\pi') = 1$ 和 $\text{time}_{\boldsymbol{n}_i}(\pi') = 0$。 □

在第 VI 节中，我们隐含地假设带抑制弧的Petri网不存在从同一库所消耗并向其中产生的变迁。我们可以不失一般性地作出这一假设。粗略地说，可以将从同一库所消耗并向其中产生的变迁 t 拆分为两个变迁 t_{pre} 和 t_{post}，同时保持可达性方面的等价。我们令 t_{pre} 从该库所消耗，并在所有其他库所上实现 t 的效应，再令 t_{post} 向该库所产生。我们可以通过添加一个新库所 p_t、添加一条从 t_{pre} 到 p_t 的弧和一条从 p_t 到 t_{post}的弧，并从 p_t 向所有其他变迁添加一条抑制弧，来确保当 t_{pre}时，紧接着 t_{post} 被触发，从而阻止除 t_{post} 之外的任何变迁在 t_{post} 触发以消耗来自 p_t的令牌之前被触发。

现在，让我们证明第 VI 节中的陈述。

引理 4：设 $\boldsymbol{x}_A$、$\boldsymbol{x}'_A \in A$，且设 π 是一个有限调度，使得 $\boldsymbol{x}_A(t_A) = 1$、$|\pi| > 0$，并且 $\boldsymbol{x}_A \to^{\pi}_{AP} \boldsymbol{x}'_A$ 在 A 中不含中间点的情况下成立，即当且仅当 $\text{exec}(\pi, \boldsymbol{x}_A)(\tau) \in A$ iff $\tau \in \{0, \text{time}(\pi)\}$。则 $\pi \equiv \boldsymbol{a}_t \boldsymbol{b}_t \boldsymbol{c}_t$ 成立，并且存在 $\boldsymbol{x}_B \in B_t$、$\boldsymbol{x}_C \in C_t$，使得

$$\boldsymbol{x}_A \to^{\boldsymbol{a}_t}_{A'_t} \boldsymbol{x}_B \to^{\boldsymbol{b}_t}_{B'_t} \boldsymbol{x}_C \to^{\boldsymbol{c}_t}_{C'_t} \boldsymbol{x}'_A.$$

证明：设 $\boldsymbol{x}_A$、$\boldsymbol{x}'_A \in A$ 和 π 如上所述。

设 $\pi = (\alpha, \boldsymbol{m})\pi'$。根据 A 的定义，必有 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}_t$ 对某个 $t \in T$ 成立。由于 $\boldsymbol{x}_A(t_A) = 1$，因此有 $\alpha \in (0, 1]$。如果 $\alpha < 1$，则会到达区域 $A'_t \setminus A$，而唯一可以使用的模式是 $\boldsymbol{a}_t$。因此，不失一般性地，可以假设 $\alpha = 1$。令 $\boldsymbol{x}_B := \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{a}_t$。我们有

$$\boldsymbol{x}_A \to^{\boldsymbol{a}_t}_{A'_t} \boldsymbol{x}_B \text{ and } \boldsymbol{x}_B \in B_t.$$

设 $\pi' = (\alpha', \boldsymbol{m}')\pi''$。根据 B_t 的定义，我们有 $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{b}_t$或 $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{a}_s$，其中某个 $s \neq t$ 成立。由于没有区域允许 $t_B > 0$和 $s_B > 0$，因此必有 $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{b}_t$。由于 $\boldsymbol{x}_B(t_B) = 1$，我们有 $\alpha' \in (0, 1]$。如果 $\alpha' < 1$，则会到达区域 $B'_t \setminus B_t$，并且同样地，唯一可以使用的模式是 $\boldsymbol{b}_t$。因此，不妨假设 $\alpha' = 1$。令 $\boldsymbol{x}_C := \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{b}_t$。我们有

$$\boldsymbol{x}_B \to^{\boldsymbol{b}_t}_{B'_t} \boldsymbol{x}_C \text{ and } \boldsymbol{x}_C \in C_t.$$

令 $\pi'' = (\alpha'', \boldsymbol{m}'')\pi'''$。根据 C_t 的定义，我们有 $\boldsymbol{m}'' = \boldsymbol{c}_t$，或者对于某个 $s \neq t$有 $\boldsymbol{m}'' = \boldsymbol{a}_s$。由于没有任何区域允许 $t_C > 0$ 和 $s_B > 0$，因此必有 $\boldsymbol{m}'' = \boldsymbol{c}_t$。由于 $\boldsymbol{x}_C(t_C) = 1$，我们有 $\alpha'' \in (0, 1]$。如果 $\alpha'' < 1$，则会到达区域 $C'_t \setminus C_t$，并且同样，唯一可以使用的模式是 $\boldsymbol{c}_t$。因此，不失一般性，我们可以假设 $\alpha'' = 1$。令 $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x}_C + \boldsymbol{c}_t$。我们有

$$\boldsymbol{x}_C \to^{\boldsymbol{c}_t}_{C'_t} \boldsymbol{y} \text{ and } \boldsymbol{y} \in A.$$

由于执行 $\text{exec}(\pi, \boldsymbol{x}_A)$ 不包含 A 中的中间点，因此我们有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}'_A$，从而 π''' 为空。因此，$\pi \equiv \boldsymbol{a}_t \boldsymbol{b}_t \boldsymbol{c}_t$。 □

命题 25：给定一个带抑制弧的 Petri网 $\mathcal{N}$和$\boldsymbol{x}_{\text{src}}$、$\boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$，可以计算得到一个 MMS M、点 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$，以及一个在缩放下闭合的有限区域集 AP，使得

1) $\boldsymbol{x}_{\text{src}} \to^{+} \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ 属于 $\mathcal{N}$ 当且仅当对于某个有限调度 π，满足 $\text{time}(\pi) \geq 1$ 时，$\boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP} \boldsymbol{x}'$ 属于 M，
2) $\boldsymbol{0} \not\to^{+}_{AP} \boldsymbol{0}$ 属于 M。

证明：我们用上述描述的 M 和原子命题集 AP 来证明该命题。令 $\boldsymbol{x}$ 为满足以下条件的点：对于所有$t \in T$，$\boldsymbol{x}(t_A) := 1$；并且，对于任意其他 j，$\boldsymbol{x}(j) := 0$。令 $\boldsymbol{x}'$ 以相同方式定义，但使用 $\boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ 而非 $\boldsymbol{x}_{\text{src}}$。

条目 2 由以下事实得出：来自 AP 的区域均为非负，且 M 的每个模式都会使某个维度减小。剩下要证明的是，$\boldsymbol{x}_{\text{src}} \to^{+} \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ 属于 $\mathcal{N}$当且仅当 $\boldsymbol{x} \to^{+}_{AP} \boldsymbol{x}'$ 属于 M。

⇒) 令 $\boldsymbol{x}_{\text{src}} \to^{\pi} \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$属于 $\mathcal{N}$，其中 $\pi = t_1 \cdots t_k$。令$\leq \pi'$：$\boldsymbol{a}_{t_1}\boldsymbol{b}_{t_1}\boldsymbol{c}_{t_1} \cdots \boldsymbol{a}_{t_k}\boldsymbol{b}_{t_k}\boldsymbol{c}_{t_k}$ $\boldsymbol{x} \to^{\pi'}_{AP} \boldsymbol{x}'$。我们在 M 中有。

⇐) 令 $\boldsymbol{x} \to^{\pi}_{AP} \boldsymbol{x}'$ in M，其中 π 非空。由于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in A$，重复应用引理 4 可得 $t_1, \ldots, t_k \in T$以及点 $\boldsymbol{y}_{A,1}$, $\boldsymbol{y}_{B,1}$, $\boldsymbol{y}_{C,1}$, …, $\boldsymbol{y}_{A,k}$, $\boldsymbol{y}_{B,k}$, $\boldsymbol{y}_{C,k}$, $\boldsymbol{y}_{A,k+1}$，使得 $\pi \equiv \boldsymbol{a}_{t_1}\boldsymbol{b}_{t_1}\boldsymbol{c}_{t_1} \cdots \boldsymbol{a}_{t_k}\boldsymbol{b}_{t_k}\boldsymbol{c}_{t_k}$，并且对所有 $i \in [1..k]$:

1) $\boldsymbol{y}_{A,i} \in A$, $\boldsymbol{y}_{B,i} \in B_{t_i}$ and $\boldsymbol{y}_{C,i} \in C_{t_i}$,
2) $\boldsymbol{y}_{A,1} = \boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}_{A,k+1} = \boldsymbol{x}'$, and
3) $\boldsymbol{y}_{A,i} \to^{\boldsymbol{a}_{t_i}}_{A'_{t_i}} \boldsymbol{y}_{B,i} \to^{\boldsymbol{b}_{t_i}}_{B'_{t_i}} \boldsymbol{y}_{C,i} \to^{\boldsymbol{c}_{t_i}}_{C'_{t_i}} \boldsymbol{y}_{A,i+1}$ in M.

根据模式和区域的定义，条目 3 得出

$$\boldsymbol{y}_{A,i}(\boldsymbol{p}) \to^{t_i} \boldsymbol{y}_{A,i+1}(\boldsymbol{p}) \text{ in } \mathcal{N} \qquad \text{for all } i \in [1..k].$$

因此，$\boldsymbol{x}_{\text{src}} = \boldsymbol{y}_{A,1}(\boldsymbol{p}) \to^{t_1 \cdots t_k} \boldsymbol{y}_{A,k+1}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$ 属于 $\mathcal{N}$。 □

引理 5：给定 $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi \in$ 线性时序逻辑$_{\text{B}}$({U})，可以计算出一个来自线性时序逻辑$_{\text{B}}$({U}) 的公式，该公式等价于公式 $(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n)$ U φ。

证明：对于在无限词上解释的 LTL 公式，以下两个等价关系成立：

1) $(\psi \vee \psi')$ U $\varphi \equiv (\psi$ U $\psi')$ U $((\psi'$ U $\psi)$ U $\varphi)$,
2) φ U $(\psi \vee \psi') \equiv (\varphi$ U $\psi) \vee (\varphi$ U $\psi')$.

根据命题 1 和命题 2，这些等价关系对于在线性时序逻辑执行上解释的无否定 LTL 公式同样成立。

我们对 n 进行归纳法。如果 $n = 1$，那么该断言显然成立。假设 $n \geq 2$。令 $\psi' := \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_n$。我们有：

$$\begin{aligned}
&(\psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_n) \text{ U } \varphi \\
&\equiv (\psi_1 \vee \psi') \text{ U } \varphi \\
&\equiv (\psi_1 \text{ U } \psi') \text{ U } ((\psi' \text{ U } \psi_1) \text{ U } \varphi) && (21) \\
&\equiv (\psi_1 \text{ U } \psi') \text{ U } (\theta \text{ U } \varphi) && (22) \\
&\equiv [(\psi_1 \text{ U } \psi_2) \vee \cdots \vee (\psi_1 \text{ U } \psi_n)] \text{ U } (\theta \text{ U } \varphi) && (23) \\
&\equiv \theta', && (24)
\end{aligned}$$

其中，(21) 和 (23) 根据第 1 项和第 2 项得出，而 (22) 和 (24) 根据归纳假设得出 $\theta, \theta' \in$ 线性时序逻辑$_{\text{B}}$({U})。 □

定理 7：LTL$_{\text{B}}$({U}) 和 LTL$_{\text{B}}$({G $\vee$}) 是不可判定的。

$\mathrm{LTL}_B(\{G, \vee\})$ 的证明：设 $\mathcal{N}$ 是一个带抑制弧的 Petri网，并设 $\boldsymbol{x}_{\text{src}}$、$\boldsymbol{x}_{\text{tgt}}$。设 M、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}'$ 和原子命题集 AP 由命题 24 给出。我们对 M 和原子命题集 AP 进行如下修改。我们添加维度 $\heartsuit$ 以表示已达到 $\boldsymbol{x}'$，并将执行扩展为无限执行。

每个模式 $\boldsymbol{m} \in \mathrm{M}$ 都通过 $\boldsymbol{m}(\heartsuit) := 0$ 进行扩展。原子命题集的每个区域都通过约束 $\heartsuit = 0$ 进行扩展。我们添加模式 $\{\boldsymbol{a}_\heartsuit, \overline{\boldsymbol{a}_\heartsuit}\}$ 和区域 $A_\heartsuit$，其定义如下：

j	$\boldsymbol{a}_\heartsuit(j)$	$\overline{\boldsymbol{a}_\heartsuit}(j)$
$\heartsuit$	1	−1
else	0	0

	$A_\heartsuit$
$\heartsuit$	$\in [0,1]$
rest	$= \boldsymbol{x}'$

令 M′ 和 AP′ 分别为所得的 MMS 和区域集合。令 $\varphi := \mathrm{G}(\bigvee_{Z \in AP'} Z)$。令 $\boldsymbol{y} := (0, \boldsymbol{x})$。根据命题 24，只需证明 $\boldsymbol{x} \to_{AP}^{*} \boldsymbol{x}'$ 属于 M 当且仅当 $\boldsymbol{y} \models_{M'} \varphi$。

⇒) 令 π 为一个有限调度，使得 $\boldsymbol{x} \to_{AP}^{\pi} \boldsymbol{x}'$ 属于 M。令 $\pi' := \pi\, \boldsymbol{a}_\heartsuit\, \overline{\boldsymbol{a}}_\heartsuit\, \boldsymbol{a}_\heartsuit\, \overline{\boldsymbol{a}}_\heartsuit \cdots$。我们有 $\boldsymbol{y} \to_{AP'}^{\pi'}$ 属于 M′，因此 $\mathrm{exec}(\pi', \boldsymbol{y}) \models_{M'} \varphi$，因为 π' 是非 Zeno 的。

⇐) 令 π 为 M′ 的一个无限非齐诺调度，使得 $\mathrm{exec}(\pi, \boldsymbol{y}) \models \varphi$。令 $\sigma := \mathrm{exec}(\pi, \boldsymbol{y})$。根据命题 24，我们有 $\boldsymbol{y} \not\to_{AP' \setminus \{A_\heartsuit\}}^{\pi}$。

因此，存在 $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得 $\sigma(\tau) \in A_\heartsuit$。根据 M′ 的定义，存在一个最小的 $\tau' \leq \tau$，使得 $\sigma(\tau') = (0, \boldsymbol{x}')$。令 π' 为一个有限调度，使得 $\mathrm{exec}(\pi', \boldsymbol{y}) = \sigma[0..\tau']$。我们有 $\boldsymbol{y} \to_{AP' \setminus \{A_\heartsuit\}}^{\pi'} (0, \boldsymbol{x}')$ 属于 M′。因此，$\boldsymbol{x} \to_{AP}^{*} \boldsymbol{x}'$ 属于 M。 □