arXiv:2304.13825v1 [math.AT] 26 Apr 2023

伪四元数空间的典范环

Nils Prigge

摘要。 光滑流形 M 的典范环 $R^*(M)$ 是由 Miller-Morita-Mumford类生成的特征类环，通常比光滑 M-丛的所有特征类环更容易研究。

在本文中，我们证明了，对于几乎所有与 $\mathrm{H}P^2$ 同伦等价的流形，典范环的 Krull 维数均为零；所采用的方法结合了 [Ber20、Ber22] 中发展出的有理同伦论新方法以及族签名定理。

1 引言

设 M^d 是一个闭的、定向的光滑流形，并设 $\pi : E \to B$ 是定向流形之间纤维为 M 的适当浸没。我们将 $T_\pi E := \mathrm{Ker}(D\pi : TE \to TB)$ 记为垂直切丛，它是一个秩为 d 的定向向量丛。对于任意类 $c \in H^{|c|}(\mathrm{B\,SO}(d))$，我们可以通过以下纤维积分为 π 定义一个特征类

$$\kappa_c(\pi) := \int_\pi c(T_\pi E) \in H^{|c|-d}(B), \tag{1.1}$$

这被称为广义*Miller-Morita-Mumford*类或特征类 [GGRW17]，而由所有 MMM 类生成的 $H^*(B)$ 的子环称为典范环 $R^*(\pi)$。[1] 特别地，我们可以研究分类空间 $\mathrm{BDiff}^+(M)$ 上的万有定向 M-丛的典范环，记作$R^*(M) \subset H^*(\mathrm{BDiff}^+(M))$，它为任意此类丛的典范环提供了相关信息。

关于（高维流形的）$R^*(M)$的环论性质，文献中的结果通常采用以下三种方法之一：

(i) 可以通过分析对上同调环施加某些约束的 Serre谱序列，构造仅涉及底层纤维化而不依赖于丛结构的典范环关系，例如 Gri17, GGRW17]。Randal-Williams 给出了一种非常精简的论述，他证明了（以及其他结果）如果 $H^*(M)$ 集中在偶数次，则 $R^*(M)$ 作为一个环是有限生成的 [RW18, Thm A]。

[1]这一术语源自曲面丛这一特殊情形，由 Mumford[Mum83] 提出，是一个经典的研究对象。

(ii) Hirzebruch 指标定理的族版本表明，当d 为奇数时， κ_{L_i} 消失；当d 为偶数时， κ_{L_i} 是幂零元，其中$L_i \in H^{4i}(\mathrm{BSO}(d))$表示 Hirzebruch L-类（我们将在下文第 4 节回顾一个精确表述）。

(iii) 给定一个环面作用 T y M，可以高效地计算相关 M-丛 π 的典范类：$M /\!/ \mathrm{T} \to * /\!/ \mathrm{T} = \mathrm{BT}$。特别地，可以据此推断某些 MMM 类是非平凡的，并且更一般地，获得$R^*(M)$ 的 Krull 维数下界。

最近，Alexander Berglund 在 [Ber20, Ber22] a 纲领中描述了如何使用有理同伦论系统地完成步骤 (i)。本文结合他得出的结果与族签名定理所获得的关系，研究与 $\mathbb{H}P^2$ 同伦等价的流形 M 的典范环。这类流形可以通过手术理论分类；事实上，存在无穷多个流形 $M \simeq \mathbb{H}P^2$ [Hsi66, EK62] ，它们由 Pontryagin数 $p_1^2(M)$ [KS07] 分类。

我们的主要结果（参见定理 4.6）表明，$R^*(M)$ 的 Krull 维数几乎总是为零。这表明，伪四元数空间的典范环的 Krull 维数几乎是一个同伦不变量，并暗示典范环的一些环论性质似乎仅轻微地依赖于流形结构，这相当令人惊讶。

定理 A。 对于几乎所有流形 $M \simeq \mathbb{H}P^2$ ，我们有 Krull 维数$R^*(M) = 0$。

Berglund方法基于研究带有额外结构的纤维化，例如全空间上有一个向量丛，其在纤维上的限制等价于一个固定的向量丛。我们在第 3 节回顾这类纤维化的一个适用版本，并讨论拟四元数空间相应分类空间的有理模型。我们在第 4.1 节证明主定理。本文的新思路是将典范环视为由 $p_1(M)$ 的取值参数化，随后使用 Grothendieck 泛自由定理的一个版本，了解维数如何变化。第 5 节中，我们讨论定理 A 可能存在的例外，并重点介绍其与 $\hat{A}$-属之间一个有趣的联系。

致谢。 本文摘自作者的学位论文，谨向导师 Oscar Randal-Williams 表示感谢。同时感谢 Alexander Berglund，感谢他进行许多富有成果的讨论，并分享其研究成果，这些成果是本文的重要基础。本研究得到 Knut and Alice Wallenberg基金会项目编号 2019.0519 的支持。

2 预备知识

2.1 代数约定

我们回顾微分分次代数的一些标准构造和术语，以及 Berglund 的论文 [Ber20、Ber22] 中引入的记号。对于微分分次交换代数（cdga），我们采用上同调分次约定；对于微分分次李代数，则采用同调分次约定。我们列出一些标准构造，以明确本文所采用的约定。

(i) 对任意交换微分分次代数 A，我们可以关联一个微分分次李代数 $(\mathrm{Der}(A), [d_A, -])$。根据我们的次数约定，次数为 $\theta \in$ 的导子 $\mathrm{Der}(A)$ 是一个线性映射 $\theta : A^* \to A^{*-n}$，满足 $\theta(a \cdot a') = \theta(a) \cdot a' + (-1)^{n\cdot|a|} a \cdot \theta(a')$，其中 a、$a' \in A$。

(ii) 给定一个有限型交换微分分次代数 A 和一个微分分次李代数 L，完备张量积 $A\hat{\otimes}L$ 是一个微分分次李代数，其第 n 次分量为 $\prod_i A^i \otimes L_{i+n}$，其微分采用张量积的通常微分，括号定义为

$$[a \otimes l, a' \otimes l] = (-1)^{|a'|\cdot|l|} a \cdot a' \otimes [l, l'].$$

(iii) 给定一个微分分次李代数 L 以及 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们用 $L\langle n\rangle \subset L$ 表示由下式确定的微分分次李子代数

$$L\langle n\rangle_i = \begin{cases} L_i & i > n \\ \ker(d_L : L_i \to L_{i-1}) & i = n \\ 0 & i < n \end{cases}$$

按照常用记法，我们用 $\mathrm{Der}^+(\Lambda)$ 表示 $\mathrm{Der}(\Lambda)\langle 1\rangle$。

(iv) 微分分次李代数 L 中的 Maurer–Cartan 元 τ 是满足 Maurer–Cartan 方程 $d_L(\tau) + \frac{1}{2}[\tau, \tau] = 0$ 的元素。Maurer–Cartan 元的集合记为 $\mathrm{MC}(L)$；对于 $\tau \in \mathrm{MC}(L)$，扭曲微分分次李代数 L^τ 作为分次李代数与 L 相同，但其微分被扭曲为 $d_{L^\tau} = d_L + [\tau, -]$。

我们沿用 [Ber22] 对微分分次李代数的 ***Chevalley–Eilenberg*** 复形 的约定（而该约定又以 [Tan83] 为基础），其定义为微分分次余代数

$$C^{CE}(L) = (\Lambda sL, D = d_1 + d_2),$$

其中微分由其余限制确定

$$d_1(sl) = -sd_L(l), \qquad d_2(sl_1 \wedge sl_2) = (-1)^{|l_1|} s[l_1, l_2].$$

如果一个微分分次李代数通过导子作用于交换微分分次代数 A，那么 Chevalley–Eilenberg 上链复形是

$$C_{CE}(L; A) := \left(\mathrm{Hom}(C^{CE}(L), A), \partial + t\right),$$

其中

$$\begin{aligned} \partial(f) &= d_A \circ f - (-1)^{|f|} f \circ D \\ t(f)(sl_1 \wedge \ldots \wedge sl_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|sl_i|(|f|+|sl_1|+\ldots+|sl_{i-1}|)} l_i \cdot f(sl_1 \wedge \ldots \hat{sl_i} \ldots \wedge sl_n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

并且 $\mathrm{C}_{CE}(L; A)$ 通过卷积乘积构成一个交换微分分次代数。若 $f \in \mathrm{C}^{CE}(L;A)$ 满足 $f(sl_1 \wedge \ldots \wedge sl_k) = 0$，则称其为一个 ***n*- 上链**，除非 $k = n$；并且我们将 0- 上链与 A 等同起来。

2.2 定向与纤维积分

除非另有说明，全文均讨论有理（上）同调群。我们始终假设所有流形均带有定向，且所有映射都保定向；我们将保定向微分同胚（分别为同伦自等价）的集合记为 $\mathrm{Diff}^+(M)$（分别为 $\mathrm{hAut}^+(M)$），并将恒等映射所在的道路连通分支记为 $\mathrm{Diff}_0(M)$（分别为 $\mathrm{hAut}_0(M)$）。

纤维化 $\pi\colon E\to B$，其纤维为形式维数d的庞加莱对偶空间X，若B 上的局部系数系统 $\mathrm{H}^d(X)$ 是平凡的，则称其为可定向的；若选择一个同构 $\mathrm{E}_X\colon \mathrm{H}^d(X;\mathrm{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Z}$，则称其为带定向的。给定一个定向 E_X，可以通过 Serre谱序列将纤维积分定义为以下复合映射

$$\int_\pi : H^*(E) \twoheadrightarrow E_\infty^{*-d,d} \subset E_2^{*-d,d} \cong H^{*-d}(B;\mathcal{H}^d(X)) \xrightarrow{(\mathcal{E}_X)_*} H^{*-d}(B), \tag{2.2}$$

其中，$H^*(E)$ 投影到$E_\infty^{*-d\,d}$，因为当 $*>d$ 时，$H^*(X)$ 消失。我们有时也将纤维积分记为 $\pi_!\colon H^*(E)\to H^{*-d}(B)$。由上述定义可知，纤维积分是一个$H^*(B)$-模同态（另见 [BH58, 命题 8.2]），即对于 $x\in H^*(B)$ 和 $y\in H^*(E)$，有

$$\int_\pi \pi^*(x)\cdot y = x\int_\pi y. \tag{2.3}$$

3 TM-纤维化

记闭定向流形 TM 为其切丛。于是，一个TM-纤维化是一个二元组 $(\pi : E\to B, T_\pi E\to E)$，由一个定向纤维化 $\pi : E\to B$ （其纤维为M ）和一个定向向量丛$T_\pi E\to E$ 组成，并满足对于所有$b\in B$，$T_\pi E|_{\pi^{-1}(b)}$作为向量丛等价于TM（这是 [Ber22，定义2.1] 的一个特例）。如果两个 TM-纤维化之间存在一个由丛映射覆盖的底层纤维化的纤维同伦等价，我们就称它们是等价的。

这正是我们需要从纤维丛中提取的数据，以定义典范类（同时也是研究 TM-纤维化的动机），并且我们可以将 (1.1) 中典范类的定义推广到 TM-纤维化。通过对一个通用 TM-纤维化进行拉回，等价意义下 TM-纤维化在 B 上的集合与 $[B, \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(TM)]$ 一一对应，其中

$$\mathrm{hAut}^+(TM) = \left\{ \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\bar f}_{\cong} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[\cong]{f} & M \end{array} \;\middle|\; f\in \mathrm{hAut}^+(M),\ \bar f \text{ is linear} \right\}$$

是切向同伦自等价的幺半群。接下来，我们关注路径分支集合 $\mathrm{hAut}_0(TM)\subset \mathrm{hAut}(TM)$，其中的切向同伦等价覆盖 $\mathrm{hAut}_0(M)$ 中的映射。空间 $\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)$ 分类底层纤维化具有平凡纤维传输的 TM-纤维化。

接下来，我们研究由 MMM 类生成的 $H^*(\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(TM))$ 子环。然而，我们首先需要处理一个与偶数维 $d = 2n$ 下的欧拉类 $e \in H^d(\mathrm{BSO}(d))$ 相关的微妙问题。

3.1 TM-纤维化的欧拉类

对于偶数维数 $\mathrm{d} = 2\mathrm{n}$，上同调环 $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\,\mathrm{SO}(\mathrm{d}); \mathrm{Q})$ 是由庞特里亚金类和欧拉类生成的多项式环 $\mathrm{Q}[\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_{n-1}, \mathrm{e}]$。将欧拉类与 TM-纤维化 $(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{B}, \mathrm{T}\pi\mathrm{E} \to \mathrm{E})$ 联系起来有两种不同的方式。可以考虑定向向量丛的欧拉类 $\mathrm{e}(\mathrm{T}\pi\mathrm{E}) \in \mathrm{H}^d(\mathrm{E})$，也可以考虑 HLLRW21, Def. 3.1.1] 中引入的纤维化欧拉类 $\mathrm{e}^{\mathrm{fw}}(\pi) \in \mathrm{H}^d(\mathrm{E})$，它只依赖于底层纤维化 $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$。对于纤维丛，这两种构造一致，但对于一般的 TM-纤维化，它们并不相同 [Pri20, Prop. 5.1.5]。因此，我们必须决定在 κ-类的定义中使用哪种欧拉类；或者，我们可以研究满足 $\mathrm{e}(\mathrm{T}\pi\mathrm{E}) = \mathrm{e}^{\mathrm{fw}}(\pi)$ 的 TM-纤维化的分类空间。本文选择后一种方案。

定向 M 纤维化的分类空间 $\pi : E \to B$，带有给定的上同调类 $e \in H^d(E)$，其限制到 $e(M) \in H^d(M)$，已由 May [May75, Sect. 11] 通过双边 bar 构造描述，其形式为 $\mathrm{B}(\mathrm{Map}(M, K(\mathrm{Z}, d))_{e(M)}, \mathrm{hAut}^+(M), *)$。存在分类映射

$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(M) \xrightarrow{e^{\mathrm{fw}}(\pi)} \mathrm{B}(\mathrm{Map}(M, K(\mathbb{Z}, d))_{e(M)}, \mathrm{hAut}^+(M), *),$$
$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(TM) \xrightarrow{e(T_\pi E)} \mathrm{B}(\mathrm{Map}(M, K(\mathbb{Z}, d))_{e(M)}, \mathrm{hAut}^+(M), *),$$

它们记录了底层的 M-纤维化，以及纤维化欧拉类和向量丛 $T\pi E$ 的欧拉类。

定义 3.1。我们将 $\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 定义为同伦等化子：

$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(M) \times \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(TM) \underset{e(T_\pi E)\circ\pi_2}{\overset{e^{\mathrm{fw}}(\pi)\circ\pi_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{B}(\mathrm{Map}(M, K(\mathbb{Z}, d))_{e(M)}, \mathrm{hAut}^+(M), *).$$

那么，$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 是满足 $e^{\mathrm{fw}}(\pi) = e(T_\pi E)$ 的 TM-纤维化的分类空间。将 $(E \xrightarrow{\pi} \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}, T_\pi E \to E)$ 记为 $\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 上的万有 TM-纤维化。现在，我们可以像之前一样，无歧义地定义 κ-类，即对于 $c \in H^{|c|}(\mathrm{B}\,\mathrm{SO}(d))$，我们定义

$$\kappa_c := \int_\pi c(T_\pi E) \in H^{|c|-d}(\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}). \tag{3.1}$$

定义 3.2。同伦本征环 $R^*{}_h(M)$ 是 $H^*(\mathrm{BhAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}})$ 的子环，由所有 κ-类生成。

对于光滑纤维丛，光滑 M-丛的 MMM 类的定义仅取决于底层的 TM-纤维化。此外，由于两个欧拉类相同，存在一个映射 $\mathrm{B}\,\mathrm{Diff}^+(M) \to \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$，它诱导一个满射

$$R_h^*(M) \twoheadrightarrow R^*(M) \tag{3.2}$$

正如 [Ber22, 定理 2.10] 中所指出的。

注记 3.3. Berglund 在 [Ber22] 中为 ξ 上的丛引入了同伦论重言环的一个更一般版本，他将其记作 $R^*(\xi) \subset H^*(\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}(\xi))$。我们选择了不同于 $R^*(TM)$ 的记法，因为两者的定义略有不同。

从这个意义上说，同伦本征环为 $R^*(M)$ 提供了一个上界。关键在于，$R^*{}_h(M)$ 更适合运用同伦论中的工具来研究；对它的研究为系统地获取典范环的信息提供了一种方法，正如引言中 (i) 所述。

在接下来的几节中，我们将运用族签名定理中的关系以及有理同伦论中的工具，研究（同伦）典范环。一般而言，这只能提供 $R^*(M)$ 在 $H^*(\mathrm{B}\,\mathrm{Diff}_0(M))$ 中的像的信息，我们将其记为 $R_0^*(M)$；以及 $R_h(M)$ 在 $H^*(\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}})$ 中的像的信息，我们将其记为 $R_{h,0}(M)$。其中，$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 是满足 $e^{\mathrm{fw}}(\pi) = e(T_\pi E)$ 且底层纤维化具有平凡纤维传输的 TM-纤维化的分类空间。$\mathrm{BhAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 的模型类似于定义 3.1，定义为下列对象的同伦等化子

$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(M) \times \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM) \underset{e(T_\pi E)\circ\pi_2}{\overset{e^{\mathrm{fw}}(\pi)\circ\pi_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{B}(\mathrm{Map}(M, K(\mathbb{Z}, d))_{e(M)}, \mathrm{hAut}_0(M), *). \tag{3.3}$$

如果自等价映射的同伦类群 $\mathrm{E}(M)$ 是有限群，我们就可以改进 $R^*{}_{h,0}(M)$ 的计算。

引理 3.4. 若 $\mathcal{E}(M)$ 是有限的，则包含映射 $\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}} \to \mathrm{BhAut}^+(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 诱导同伦挠丛环之间的一个同构 $R^*\,h(M) \cong R^*\,h_{,0}(M)$.

证明。 根据 [Ber20，推论 2。4] 存在等价关系

$$\begin{aligned} \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(TM) &\simeq \mathrm{B}\left(\mathrm{Map}(M, \mathrm{B}\,\mathrm{SO}(d))_{TM}, \mathrm{hAut}(M)_{TM}, *\right) \\ \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM) &\simeq \mathrm{B}\left(\mathrm{Map}(M, \mathrm{B}\,\mathrm{SO}(d))_{TM}, \mathrm{hAut}_0(M), *\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $\mathrm{hAut}(M)_{TM} \subset \mathrm{hAut}^+(M)$ 表示保持切丛的同伦等价映射的道路连通分支。由此可得，同伦纤维 of

$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}} \to \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}^+(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}} \tag{3.5}$$

等价于 $\pi_0(\mathrm{hAut}(TM)_{TM})$，因此，如果 $\mathrm{E}(M) = \pi_0(\mathrm{hAut}(M))$ 是有限的，那么它在同伦意义下也是有限的。因此，对比映射 (3.5) 具有有限层覆盖的同伦类型，从而在有理上同调上诱导一个单射，并且该单射限制在同伦挠丛环上为同构。□

3.2 有理模型和纤维积分

Berglund 在 [Ber20] 中确定了 $\mathrm{BhAut}_0(TM)$ 的有理模型，并在 [Ber22] 中用这些模型表示了 Euler 类和 Pontrjagin 类的余循环代表。基于

根据这些模型，我们确定了 \(B hAut_{\{v1\}}(\text{TM})_{\{v4\}}\) 的一个模型。结合作者在 [Pri19] 中关于纤维化欧拉类的工作，随后便可以直接计算 \(\mathcal{R}_{\{v9\}}^{h,0}(M)\) ⊂ \(H_{\{v19\}}(B hAut_{\{v20\}}(\text{TM}))_{\{v23\}}\)。

我们是 həмкар gin 通过给出 $\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 的另一种描述，直到有理等价 .

引理 3 .5. 设 M^d 是一个偶维的闭定向流形。存在一个有理等价 e

$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}} \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} \left(\prod_{i=1}^{d/2-1} \mathrm{Map}(M, K(\mathbb{Q}, 4i))_{p_i(M)}\right) /\!\!/ \mathrm{hAut}_0(M),$$

其中，$\mathrm{Map}(M,K(\mathbb{Q},4i))_{p_i(M)}$ 表示有理庞特里亚金类 $p_i(M) \in H^{4i}(M;\mathbb{Q})$ 所在的道路连通分支，而 $\mathrm{hAut}_0(M)$ 通过前复合的方式作用。

证明。 考虑空间 $M_P = \mathrm{Q}^{d/2-1}{}_{i=1}\,\mathrm{Map}(M,K(\mathrm{Q},4i))_{p_i(M)}$ 和 $M_E = \mathrm{Map}(M,K(\mathrm{Q},d))_{e(M)}$，它们分别记录有理 Pontryagin 类和有理欧拉类的道路连通分支。同伦商 $M_P /\!/ \mathrm{hAut}_0(M)$ 是具有平凡纤维传输的 M-纤维化的分类空间；这些纤维化的全空间上带有有理上同调类，且其在纤维上的限制为 M 的 Pontryagin 类（对 M_E 也类似）。考虑这个交换图。

$$\begin{array}{ccc} M_P /\!/ \mathrm{hAut}_0(M) & \longrightarrow & \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(M) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e^{\mathrm{fw}}} \\ (M_P \times M_E) /\!/ \mathrm{hAut}_0(M) & \xrightarrow{\pi_{M_E}} & M_E /\!/ \mathrm{hAut}_0(M) \end{array} \tag{3.6}$$

其中水平映射由投影诱导，垂直映射由纤维化的分类映射以及有理纤维化欧拉类给出。由于该方块在同伦意义下交换，且水平同伦纤维一致，因此可得$M_P /\!/ \mathrm{hAut}_0(M)$ 是以下映射的同伦等化子

$$((M_P \times M_E) /\!/ \mathrm{hAut}_0(M)) \times \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(M) \underset{\pi_{M_E}\circ\pi_1}{\overset{e^{\mathrm{fw}}(\pi)\circ\pi_2}{\rightrightarrows}} M_E /\!/ \mathrm{hAut}_0(M). \tag{3.7}$$

由于 $\mathrm{Map}(M, \mathrm{BSO}(d))_{TM} \simeq_{\mathbb{Q}} M_P \times M_E$ 和 $\mathrm{Map}(M, K(\mathrm{Z}, d))_{e(M)} \simeq_{\mathbb{Q}} M_E$，存在有理等价

$$\begin{aligned} \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM) \overset{(3.4)}{\simeq} \mathrm{Map}(M, \mathrm{B}\,\mathrm{SO}(d)_{TM} /\!/ \mathrm{hAut}_0(TM) &\xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} (M_P \times M_E) /\!/ \mathrm{hAut}_0(M), \\ \mathrm{Map}(M, K(\mathbb{Z}, d))_{e(M)} /\!/ \mathrm{hAut}_0(M) &\xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} M_E /\!/ \mathrm{hAut}_0(M), \end{aligned}$$

并且我们得到一个从 (3.3) 到 (3.7) 的图示映射，它在底层空间上是有理同伦等价。因此，诱导的同伦等化子映射

$$\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{\mathrm{fw}}} \xrightarrow{\simeq_{\mathbb{Q}}} M_P /\!/ \mathrm{hAut}_0(M).$$

是一个有理同伦等价。 □

现在，我们可以结合 [Pri19] 应用 Berglund 的结果 [Ber20, Ber22]，从而得到 B hAut$_0(TM)^{e=e^{fw}}$ 的模型，以及$T_\pi E \to E$特征类的代表元。下文中，我们考虑与 HP^2 同伦等价的流形M，并将M的极小 Sullivan 模型记为 $\Lambda = (\Lambda(x, y), d = x^3 \frac{\partial}{\partial y})$，其中 $|x| = 4$和 $|y| = 11$（这里$x \in \Lambda$代表整系数上同调环的一个生成元）。

命题 3.6。设 M 是一个与 $\mathbb{H}P^2$ 同伦等价的流形，其 *Pontryagin* 类的上循环代表元由 $p_i(\Lambda) = p_i x^i \in \Lambda$ 表示，其中 $p_i \in \mathbb{Q}$ 适用于 $i \in \{1,2\}$。上同调环 $H^*(\mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{fw}})$ 是一个多项式环。

$$B := \mathbb{Q}[a_8, a_{12}, p_{1,0}, p_{2,0}, p_{2,1}, p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}]$$

由次数为 8、12、4、8、4、12、8、4 的生成元构成，且 *TM*-纤维化 $E \to \mathrm{B}\,\mathrm{hAut}_0(TM)^{e=e^{fw}}$ 是形式的，其代数模型由以下给出。

$$B \longrightarrow E := B[x]/(x^3 + a_8 x + a_{12}),$$

以及 $T_\pi E \to E$ 的特征类的代表元

$$\begin{aligned} e(T_\pi E) &= 3x^2 + a_8, & p_2(T_\pi E) &= p_2 x^2 + p_{2,1} x + p_{2,0}, \\ p_1(T_\pi E) &= p_1 x + p_{1,0}, & p_3(T_\pi E) &= p_{3,2} x^2 + p_{3,1} x + p_{3,0}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

证明。记分次向量空间为 $\Pi\,\mathrm{Q}\{q_1, q_2, q_3\}$，其中 $|q_i| = 4i - 1$，它是一个微分和括号运算均为平凡的微分分次李代数。于是 $\tau(M) := \sum_{i=1}^{3} p_i(\Lambda) \otimes q_i \in \mathrm{MC}(\Lambda\hat{\otimes}\Pi)$，且扭曲微分分次李代数 $(\Lambda\hat{\otimes}\Pi)^{\tau(M)}$ 是 $M_P = \prod_{i=1}^{3} \mathrm{Map}(M, K(Q, 4i))_{p_i}(M)$ 的一个微分分次李模型，其中 [Ber15]。

由于 $\mathrm{Der}^+(\Lambda)$ 通过导子作用于 $\Lambda\hat{\otimes}\Pi$，我们可以考虑半直积

$$\mathfrak{g}_M := (\mathrm{Der}^+(\Lambda) \ltimes \Lambda\hat{\otimes}\Pi_d)^{\tau(M)}\langle 0\rangle \tag{3.9}$$

它是 M_P//hAut$_0(M)$ 的一个模型，因为根据 [Ber22，第 3.8] 条定理，它同样也是 B hAut$_0(TM)^{e=e^{fw}}$ 的一个模型，依据引理 3.5。作为链复形，$\mathrm{Der}^+(\Lambda)$ 的一组基为 $\{x^2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\}$，其中唯一的非平凡微分由 $[d, \frac{\partial}{\partial x}] = -3x^2\frac{\partial}{\partial y}$ 给出。因此，阿贝尔的 Lie 子代数 $\mathfrak{a} := \mathrm{Q}\{x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ 到 $\mathrm{Der} \hookrightarrow (^+)$ 的包含映射是一个拟同构，从而我们通过以下方式得到 $\mathfrak{g}_M$ 的一个更小的 Lie 模型

$$(\mathfrak{a} \ltimes \Lambda\hat{\otimes}\Pi)^{\tau(M)}\langle 0\rangle \xhookrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}_M$$

我们还可以进一步简化：赋予上循环代表元的线性映射 $H(\Lambda) \to \Lambda$ 诱导出微分分次李代数的一个拟同构 $H(\Lambda) \otimes \Pi \xrightarrow{\simeq} \Lambda\hat{\otimes}\Pi$，因为 Π 是阿贝尔的。此外，相对于 $H(\Lambda)\hat{\otimes}\Pi$ 上的平凡 a-模结构，这个拟同构是一个 a-模映射，因此存在微分分次李代数的拟同构 贝博

$$\mathfrak{a}_M := \mathfrak{a} \times (H(\Lambda) \otimes \Pi)\langle 0\rangle \xhookrightarrow{\simeq} (\mathfrak{a} \ltimes \Lambda\hat{\otimes}\Pi)^{\tau(M)}\langle 0\rangle \xhookrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}_M,$$

由于 $\mathfrak{a}_M$ 是微分为零的阿贝尔的李代数，其 Chevalley–Eilenberg 复形为 $C_{CE}(\mathfrak{a}_M) \cong \mathbb{Q}[a_8, a_{12}, p_{1,0}, p_{2,0}, p_{2,1}, p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}]$，其微分为零，其中生成元对应于 $\mathfrak{a}_M$ 的以下基的（悬挂）对偶基元素：

$$\left\{x\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y}, 1\otimes q_1,\ 1\otimes q_2,\ x\otimes q_2,\ 1\otimes q_3,\ x\otimes q_3,\ x^2\otimes q_3\right\}.$$

由 [Ber22] 中的定理3.8可知，普适 TM-纤维化 $E\to \mathrm{BhAut}_0(\mathrm{TM})^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 的相对Sullivan模型为 $\eta_*\colon C_{CE}(\mathfrak{a}_M;\mathbb{Q})\to C_{CE}(\mathfrak{a}_M;\Lambda)$，其中 $\mathfrak{a}_M$ 通过投影到一个 $\subset \mathrm{Der}^+(\Lambda)$ 上作用于 Λ，而 $\eta:\mathbb{Q}\to\Lambda$ 表示单位元。采用 (2.1) 中 Chevalley–Eilenberg 复形的符号约定，我们得到 $C_{CE}(\mathfrak{a}_M;\Lambda) \cong (C_{CE}(\mathfrak{a}_M)\otimes\Lambda(x,y), D(y) = x^3 + a_8x + a_{12})$，因此 η_* 等价于

$$C_{CE}(\mathfrak{a}_M) \longrightarrow C_{CE}(\mathfrak{a}_M)[x]/(x^3 + a_8x + a_{12})$$

通过显然的投影。直接计算可知，Berglund 在 [Ber22, 定理 3.8] 中确定的 Pontryagin 类在 $C_{CE}(\mathfrak{g}_M;\Lambda)$ 中的余循环代表元拉回后为

$$p_1(T_\pi E) = p_1 x + p_{1,0}, \qquad p_2(T_\pi E) = p_2x^2 + p_{2,1}x + p_{2,0},$$
$$p_3(T_\pi E) = p_{3,2}x^2 + p_{3,1}x + p_{3,0},$$

在包含映射 $\mathfrak{a}_M \xhookrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}_M$ 下。最后，底层纤维化的纤维化欧拉类由 $e^{\mathrm{fw}}(\pi) = 3x^2 + a_8$ 根据 [Pri19, Thm 5.6] 表示，并且根据构造与 $e(T_\pi E)$ 一致，由此完成证明。□

注记3.7。具有上述*TM*-纤维化且$M \simeq \mathbb{H}P^2$ 的通用有理模型之所以如此简单，是有充分理由的。也就是说，$\mathbb{H}P^2$ 是正有理椭圆的，即所有有理同伦群和上同调群的集合都是有限维的，并且 $\chi(M) > 0$。这类空间的有理模型非常刚性 [FHT01, 第32]章。此外，Halperin猜想指出，对于任何具有平凡纤维传输且纤维为正有理椭圆的纤维化，Serre谱序列都会退化。对于特定的正有理椭圆空间，Halperin猜想很容易验证，因此，具有有理椭圆纤维的纤维化相当容易研究。

这与纤维为有理双曲空间*X*的纤维化形成鲜明对比；对于这类纤维化，用Sullivan模型的导子来描述 $B\,\mathrm{hAut}_0(X)$ 的模型相当繁琐。相较之下，通过微分分次李模型来处理纤维为有理双曲空间的纤维化之有理模型更为容易，而这类模型的分析结果也证明复杂得多（例如参见 [BM20, Sto22]）。

3.3 纤维积分

设$E\to B$ 是一个满足 Leray-Hirsch 定理假设的M-纤维化，即到纤维$H^*(E)\to H^*(M)$的限制是满射。这意味着$H^*(E)$是底空间的上同调环上的一个自由模，并且在这种情况下，纤维积分完全由推拉公式 (2.3) 决定。

由命题 3.6 可知，$\{1,x,x^2\}$ 是 $H_{CE}(\mathrm{a}_M)$-模的自由模基。由此，纤维积分由此确定。

$$\pi_!(x^i)=\begin{cases}1 & i=2\\ 0 & i<2\end{cases}. \tag{3.10}$$

高次幂 x 的纤维整性可以通过改写为模基的形式来计算。例如，由于 $x^4+a_8x^2+a_{12}x=0\in H_{CE}(\mathrm{a}_M;\Lambda)$，我们得到 $\pi_!(x^4)=-a_8,$，并且可以轻松求出 κ-类的代表元。

4 与族签名定理的互动

Hirzebruch 指标定理 [Hir66] 描述了流形 M^{4k} 的切丛与拓扑之间一种精妙的联系。该定理指出，存在一些多项式 $L_k\in H^{4k}(\mathrm{B\,SO};\mathrm{Q})$，使得对于闭定向流形 M^{4k}，其交叉形式的指标由 $\mathrm{sign}(M)=\mathrm{R}_M L_k(TM)$ 给出。这些多项式中的前几个如下所示。

$$L_1=\frac{1}{3}p_1,$$
$$L_2=\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2).$$

该定理存在一个逐纤维版本，最初由 Atiyah [Ati69] 提出，适用于纤维为 M 的丛 $\pi:\mathrm{E}\to\mathrm{B}$，它将 $\kappa_{L_i}=\mathrm{R}_\pi L_i(\mathrm{T}_\pi\mathrm{E})$ 与某些纤维化不变量联系起来；当 d 为偶数时，这些不变量与 $\mathrm{H}^{d/2}(\mathrm{M};\mathrm{Q})$ 的局部系统的指标有关。更确切地说，存在一些类 $\sigma_{4i-d}\in\mathrm{H}^{4i-d}(\mathrm{B\,Aut}(\mathrm{H}_M,\lambda);\mathrm{Q})$，其中 $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_M,\lambda)$ 表示保持交叉配对 λ的 $\mathrm{H}^{d/2}(\mathrm{M};\mathrm{Q})$ 的自同构群。这些类沿着映射 $\phi:\mathrm{B\,hAut}^+(\mathrm{M})\to\mathrm{B\,Aut}(\mathrm{H}_M,\lambda)$ 的拉回与 κ_{L_i} 一致；该映射将与丛 $\pi:\mathrm{E}\to\mathrm{B}$ 相关联的局部系统 $\mathrm{H}^{d/2}(\mathrm{M};\mathrm{Q})$ 分类。

定理 4.1（[Ran22，定理 2.6]）。设 π： $E\to B$ 是一个光滑的定向纤维丛，其纤维为 M^d 一个闭定向流形。则

$$\kappa_{L_i}=\int_\pi L_i(T_\pi E)=\begin{cases}\phi^*(\sigma_{4i-d}) & \textit{if } d \textit{ is even}\\ 0 & \textit{if } d \textit{ is odd}\end{cases} \tag{4.1}$$

备注 4.2。注意，上述陈述要求使用有理系数。除了关于族签名定理的更精细陈述之外，Randal-Williams 还在 [Ran22]中证明了定理 4.1 对拓扑块丛也更一般地成立，因此族签名定理取决于丛，而不取决于光滑结构。

该定理最初被用于研究 [GGRW17，定理 2。1],他们注意到，由于自同构群 $\mathrm{Aut}(H_M,\lambda)$ 是算术群，其分类空间具有有限的有理上同调维数，因此 $\kappa_{L_i}=\phi^*(\sigma_{4i-d})$ 必须是幂零的。

在我们的情形中，我们将注意力限制在恒等元的道路连通分支 $\mathrm{Diff}_0(M)$（分别为 $\mathrm{hAut}_0(M)$）上，从而使得 $\phi:\mathrm{Diff}_0(M)\subset\mathrm{hAut}_0(M)\to\mathrm{Aut}(H_M,\lambda)$ 是常值的，因此 $\kappa_{L_i}=$

$0 \in R_0(M)$。然而，对于一般的TM-纤维化，族签名定理并不成立（如下文所见）。因此，通过在同伦本征环中强制加入这些额外关系，我们可以改进$R^{*}{}_{h,}0(M)$的上界。

定义 4.3. 令 $i^{*}L_k \in H^{4k}(B\,SO(d))$ 表示 L-类的限制，并定义 $\kappa_{L_k} = R\,\pi i^{*}L_k(T_{\pi}E) \in H^{4k-d}(B\,hAut_0(TM)^{e=e^{fw}})$。Hirzebruch 理想 $I_H \subset H^{*}(B\,hAut_0(TM)^{e=e^{fw}}; Q)$ 是由所有 κ_{L_k} for $4k > \dim M$ 生成的理想。出于计算方面的考虑，我们还考虑由 κ_{L_k} for $\dim M/4 < k \leq n$ 生成的理想 $I^{\leq n}\,H \subset I_H$。

由族签名定理，满射 (3.2) 分解为

$$R^{*}_{h,0}(M) \longrightarrow R^{*}_{h,0}(M)/(I_H^{\leq k} \cap R^{*}_{h,0}(M)) \longrightarrow R^{*}_{h,0}(M)/(I_H \cap R^{*}_{h,0}(M)) \longrightarrow R^{*}_{0}(M), \tag{4.2}$$

这是一个比 $R^{*}{}_{h,}0(M)$ 更好的上界。特别地，我们得到 Krull 维数的一个上界

$$\mathrm{Kdim}\, R^{*}_{0}(M) \leq \mathrm{Kdim}\, R^{*}_{h,0}(M)/(I_H \cap R^{*}_{h,0}(M)). \tag{4.3}$$

在实际操作中，事实证明，计算 Hirzebruch 理想$I_H \subset H^{*}(B\,hAut_0(TM)^{e=e^{fw}}; Q)$ 的维数要简单得多，而且在某些值得关注的情形下，这也为 Krull 维数提供了一个上界。

引理 4.4. 如果 M 是偶维的，且 $R^{*}\,h_{,0}(M)$ 和 $H^{even}(B\,hAut_0(M)^{e=e^{fw}})$ 是有限生成的 $\mathbb{Q}$-代数，那么对于所有 k，Krull 维数 $R^{*}_{0}(M) \leq$ 维数$I^{\leq k}\,H$。

证明。对于有限生成的k-代数，超越次数与 Krull 维数相同 [Kem11, 定理 5.9]。特别地，若 $A \subset B$ 是有限生成的k-代数，则 $\mathrm{Kdim}\, A \leq \mathrm{Kdim}\, B$。由于根据假设，$R^{*}{}_{h,}0(M)/(I^{\leq k}{}_{H} \cap R^{*}{}_{h,}0(M)) \subset H^{\mathrm{even}}(B\,hAut_0(M)^{e=e^{fw}})/I^{\leq k}{}_{H}$ 均为有限生成的，我们得到 Krull 维数的界。

$$\mathrm{Kdim}\, R^{*}_{0}(M) \overset{(4.3)}{\leq} \mathrm{Kdim}\, R^{*}_{h,0}(M)/(I_H^{\leq k} \cap R^{*}_{h,0}(M)) \leq \mathrm{Kdim}\, H^{\mathrm{even}}(B\,hAut_0(M)^{e=e^{fw}})/I_H^{\leq k}.$$

□

对于第一庞特里亚金类的固定取值，可以使用 Macaulay2[GS]计算 $\dim I^{\leq k}{}_{H}$；在下表中，我们列出$k = 10$的几个计算示例：

$p_1(M) \in \Lambda$	$2x$	$3x$	$4x$
$\dim I_H^{\leq 10}$	3	0	0

(4.4)

I在下一节中，我们将讨论一种同时处理 $p_1(M)$ 的所有取值的策略 .

4.1 参数化 Hirzebruch 理想

本文的主要新思路是将庞特里亚金类的取值视为额外参数，并要求它们满足符号定理所施加的关系。这样，我们便可以研究商 B/I_H，并应用 Grothendieck 泛自由定理的一个版本，以了解当庞特里亚金类变化时，B/I_H 的维数。

接下来，我们在 $M \simeq \mathrm{H}P^2$的情形中展示这一思路。对于 $i = 1, 2$，令$p_i(\Lambda) = p_i x^i \in \Lambda$（其中 $p_i \in \mathrm{Q}$）表示两个非平凡 Pontryagin 类的代表。根据符号定理，$p_2 = \frac{1}{7}(45 + p_1^2)$，因此我们在命题 3.6 的模型中增加一个次数为 0 的参数P_1，用以参数化第一庞特里亚金类的取值。

$$\overline{B} := \mathbb{Q}[P_1][a_8, a_{12}, p_{1,0}, p_{2,0}, p_{2,1}, p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}] \longrightarrow \overline{E} := \overline{B}[x]/(x^3 + a_8 x + a_{12}) \tag{4.5}$$

其中的元素属于 $\overline{E}$

$$e^{\mathrm{fw}}(\pi) = 3x^2 + a_8, \qquad p_2(T_\pi E) = \frac{1}{7}(45 + P_1^2)x^2 + p_{2,1}x + p_{2,0},$$
$$p_1(T_\pi E) = P_1 x + p_{1,0}, \qquad p_3(T_\pi E) = p_{3,2}x^2 + p_{3,1}x + p_{3,0},$$

延拓特征类 $T\pi E \to E$ 的代表元，并引入附加参数 P_1。记 $I_H \subset B$ 为由 $\kappa_{L_i} \in B$（其中 $i > 2$）生成的 Hirzebruch 理想，并考虑环映射。

$$\varphi : \mathbb{Q}[P_1] \to \overline{B}/\overline{I}_H. \tag{4.6}$$

我们可以从 (4.6) 中的态射 φ 恢复第一庞特里亚金类 $\mathrm{p}_1(\mathrm{M}) = \mathrm{p}_1\mathrm{x} \in \Lambda$ 取特定值 $\mathrm{p}_1 \in \mathrm{Q}$ 时 Hirzebruch 理想的商，即 $\mathrm{Q}[\mathrm{P}_1]/(\mathrm{P}_1 - \mathrm{p}_1) \otimes_{\mathbb{Q}[P_1]} \mathrm{B}/\mathrm{I}_H$，其中 $(\mathrm{P}_1 - \mathrm{p}_1) \subset \mathrm{Q}[\mathrm{P}_1]$ 表示由 $\mathrm{P}_1 - \mathrm{p}_1 \in \mathrm{Q}[\mathrm{P}_1]$ 生成的极大理想，而 B/I_H 是一个通过 φ 的 $\mathrm{Q}[\mathrm{P}_1]$-代数。

更一般地，给定一个诺特环的同态 $\varphi : R \to S$，其中 S 是一个有限生成的 R-代数，我们可以研究当素$P \subset R$ 变化时，纤维 $K(R/P) \otimes_R S$ 如何变化（其中 $K(R/P)$ 表示 R/P的分式域）。Grothendieck 一般自由引理表明，在 $\mathrm{Spec}(R)$ 的某个开集上，这些纤维具有一些共同性质。

我们所使用的精确表述见于 [Eis95, 定理 14.8b]，，其指出：如果 $S = \mathrm{L}_{i \geq 0} S_0$ 是一个有限生成于 $R = S_0$，之上的正分次代数，那么对于每个整数 e，都存在一个理想 $J_e \subset R$，使得对于任意素理想 $P \subset R$，以下各项彼此等价

$$\mathrm{Kdim}\, K(R/P) \otimes_R S \geq e \quad \text{if and only if} \quad P \supset J_e.$$

将其应用于 φ 中的映射 (4.6)，并借助计算机计算，我们得到如下结果。

定理 4.5。 φ 在极大理想 $(P_1 - p_1) \subset \mathbb{Q}[P_1]$ 上的纤维的 *Krull* 维数，对于除有限多个 $p_1 \in \mathbb{Q}$之外的所有 p 均为零。

证明。 可以使用 Macaulay2 计算 $\varphi : \mathrm{Q}[P_1] \to B/I^{\leq 10}{}_H$ 在极大理想 $(P_1 - p_1)$ 上的纤维维数，其中 $p_1 \in \mathrm{Q}$ 取特定值。我们发现，对于某些 p_1 值，纤维的维数为零（见 (4.4)）。根据上述 [Eis95, Thm 14.8b]，对于$e = 1$，理想 J_1 非零，因此只有有限多个极大理想 $(P_1 - p_1)$ 可以包含 J_1。因此，对于几乎所有 p_1 值，纤维的维数均为零。又由于 $\dim I_H \leq \dim I^{\leq 10}{}_H$，结论得证。□

我们的主要定理可以由这个代数陈述推导得出。存在无穷多个伪四元数空间 $M \simeq \mathrm{H}P^2$ [Hsi66，EK62] 它们在微分同胚意义下由 Pontryagin数 $p_1(M)^2$ [KS07]分类。在我们的主要定理中，我们证明，除有限种情况外，所有伪四元数空间的 $R^*(M)$ 的 Krull 维数均为零。

定理 4.6。 对于几乎所有流形 $M \simeq \mathbb{H}P^2,$ ，我们有 Krull 维数$R^*（M）= 0$..

证明。 同伦自等价群 E(M) 是有限群 [Bau96，第 9] 节，因此映射 B $\mathrm{hAut}_0(M)^{e=e^{\mathrm{fw}}} \to$ B $\mathrm{hAut}(M)^{e=e^{\mathrm{fw}}}$ 诱导出一个同构 $R^*{}_h(M) \xrightarrow{\cong} R^*{}_h{}_0(M)$，这由引理 3.4 得出，因此 Hirzebruch 理想也具有相应的同构。此外，由于自同构群 Aut(H_M, λ) 同样是有限群，$\kappa_{L_i} \in R^*(M)$ 不仅是幂零的，而且实际上为零。因此，分解 (4.2) 可以提升为

$$R^*_h(M) \twoheadrightarrow R^*_h(M)/(R^*_h(M) \cap I_H) \twoheadrightarrow R^*(M).$$

因此，我们可以将定理 4.5 和推论 4.4 应用于 $R^*{}_h(M)/(R^*{}_h(M) \cap I_H)$，从而得知，对于除有限多个第一庞特里亚金类取值之外的所有情况，商环 $R^*{}_h(M)/(R^*{}_h(M) \cap I_H)$ 的 Krull 维数均为零，因此 Kdim$R^*(M)$ 也具有相同的性质。□

备注 4.7. 定理 4.6 的证明更普遍地适用于 1-连通的闭定向流形M ，只要它们与 $\mathrm{H}P^2$ 有理同伦等价，且 (4.6) 的纤维维数对$p_1(M)$ 消失。只是，在此语境下几乎所有的含义不那么明确。

5 环面作用与$\hat{A}$-亏格

定理 4.6 引出了这样一个问题：我们能否精确确定所有假四元数空间 M 的集合，其中 Kdim$R^*(M) > 0$。或者相关地，我们能否确定 (4.6) 中 φ 的例外纤维轨迹，即 P_1 的取值，使得纤维具有正维数。我们将在本节的最后部分讨论这些问题。

5.1 典范环与环面作用

目前，我们用来证明 $\mathrm{R}^*(\mathrm{M})$ 的 Krull 维数下界的最有效方法，是利用 M 上的群作用；而最精炼、最一般的表述仍归功于 Randal-Williams [RW18]。设 M 是一个带有光滑环面作用的流形，即一个连续群同态 $\mathrm{T}^k \to \mathrm{Diff}_0(\mathrm{M})$，并考虑由 Borel构造 π 给出的相应光滑 M-丛：$\mathrm{M} // \mathrm{T}^k \to * // \mathrm{T}^k$。$* // \mathrm{T}^k = \mathrm{B}\,\mathrm{T}^k$ 的上同调环是多项式环 $\mathrm{H}^*\mathrm{T} := \mathrm{Q}[\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k]$，我们将 π 的典范环记为 $\mathrm{R}^*\mathrm{T}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{H}^*\mathrm{T}$。Randal-Williams [RW18, Thm 3.1] 的一项主要结果给出了作用满足某项条件的判据，该条件保证 $\mathrm{H}^*\mathrm{T}$ 整扩张于 $\mathrm{R}^*\mathrm{T}(\mathrm{M})$，因此 Kdim $\mathrm{R}^*(\mathrm{M}) \geq$ Kdim $\mathrm{R}^*\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \mathrm{k}$。我们在下文陈述该定理的一个特例。

定理 5.1 ([RW18, 推论 B])。 设 T^k 有效作用于光滑流形 M，且不动点集 W^T 是离散且非空的。则 $H^*\,T$ 整扩张于 $R^*\,T(M)$，因此 Krull 维数$R^*(M) \geq k$。

HP^2 具有一个 $T^2 \subset (C^\times)^2$ 作用，定义为 $(\lambda_1, \lambda_2) \cdot [h_0:h_1:h_2] = [h_0:\lambda_1 h_1:\lambda_2 h_2]$，其不动点为孤立点 [1:0:0], [0:1:0] 和 [0:0:1], ，因此 Randal-Williams 定理推出 $\mathrm{Kdim}\ R^*(HP^2) \geq 2$。由引理 4.4，我们通过计算 (4.6) 中 φ 关于 $p_1 = 2$（HP^2的第一庞特里亚金类的取值）的纤维维数，得到 $\mathrm{Kdim}\ R^*(HP^2)$ 的一个上界；该值由 Macaulay2 计算得为 $\mathrm{Kdim}\ \mathbb{Q}[P_1]/(P_1 - 2) \otimes_{\mathbb{Q}[P_1]} B/I_H = 3$。

命题 5.2。 $2 \leq$ Krull 维数$R^*(\mathbb{H}P^2) \leq 3$。

事实证明，这是唯一一种我们可以通过 Atiyah 和 Hirzebruch 的以下结果，利用环面作用找出 $\mathrm{Kdim} R^*(M)$ 下界的情形。

定理 5.3 ([AH70])。 设 M^{4k} 是一个具有 $w_2(M) = 0$的紧致定向光滑流形。如果连通紧致李群 G 非平凡地作用于 M，则 $\hat{A}(M) = 0$。

$\hat{A}$-亏格是环同态 $\hat{A} : \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$，与由函数 $x/2\sinh(x/2)$ 的幂级数所诱导的乘法序列相关。其作为 Pontryagin 类的多项式表示的前两项为

$$\hat{A}_1(p_1) = -\frac{1}{24}p_1,$$
$$\hat{A}_2(p_1, p_2) = \frac{1}{5760}(-4p_2 + 7p_1^2),$$

以及流形 M^{4k} 的 $\hat{A}$-亏格定义为 $\hat{A}(M^{4k}) := \int_M \hat{A}_k(M)$。

现在考虑一个满足 $\hat{A}(M) = 0$ 的伪四元数空间 $M \simeq \mathbb{H}P^2$。根据符号定理，我们有 $L(M) = \int_M L_2(M) = 1$，而这两个方程的唯一可能解是 $p_1(M) = \pm 2x$。根据伪四元数流形分类 [KS07, 定理 1.3], $\mathbb{H}P^2$（带有通常光滑结构）是第一庞特里亚金类取此值的唯一流形，因此，伪四元数流形 M 仅当 $M \cong \mathbb{H}P^2$ 时才允许非平凡的环面作用。我们推测，$\mathbb{H}P^2$ 也是定理 4.6 的唯一例外。

5.2 同伦典范环与 $\hat{A}$-亏格

类似地，我们可以寻找定理 4.5 的例外，即 $p_1 \in \mathbb{Q}$ 的取值，使得 $\mathbb{Q}[P_1]/(P_1 - p_1) \otimes_{\mathbb{Q}[P_1]} B/I_H$ 的维数为正（这是 $\mathrm{Kdim} R^*(M) > 0$ 的必要条件）。这个问题完全是代数性的，等价于确定理想 J_1，该理想来自 [Eis95, 定理 14.8b]，我们在上面的证明中使用了它，而它似乎很难计算。

然而，本节最后要讨论的一个有趣观察是，$\hat{A}$-属的消失提供了一个完全代数性的判据，用以区分使相应 Hirzebruch 理想的维数为正的第一 Pontryagin 类的取值。从纯粹的交换代数角度来看，这种关系完全不明显；我们将提出一些证据，表明这并非巧合，而且 $\hat{A}$-属是几何概念“圆作用”的一种合适的代数替代物，可用于获得同伦本征环 Krull 维数的下界。

为此，我们重新考察式 (4.5) 中参数化 Hirzebruch 理想的构造，不过这次加入两个形式参数 P_1 和 P_2，用以参数化 $p_1(M)$ 和 $p_2(M)$ 的取值。更准确地说，我们考虑

$$\overline{B} := \mathbb{Q}[P_1, P_2][a_8, a_{12}, p_{1,0}, p_{2,0}, p_{2,1}, p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}] \longrightarrow \overline{E} := \overline{B}[x]/(x^3 + a_8 x + a_{12}), \tag{5.1}$$

其中P_1,P_2 是次数为 0 的形式参数，其元素属于E

$$e^{\mathrm{fw}}(\pi) = 3x^2 + a_8, \qquad p_2(T_\pi E) = P_2 x^2 + p_{2,1} x + p_{2,0},$$
$$p_1(T_\pi E) = P_1 x + p_{1,0}, \qquad p_3(T_\pi E) = p_{3,2} x^2 + p_{3,1} x + p_{3,0},$$

它们表示特征类。

备注 5.4. 与上一节所做的不同之处在于，我们在这个代数模型中不施加符号定理 $45 = 7P_2 - P_1^2$。这是因为我们关注的是这个纯代数问题，以及它与脱离流形几何的A-属之间的关系。

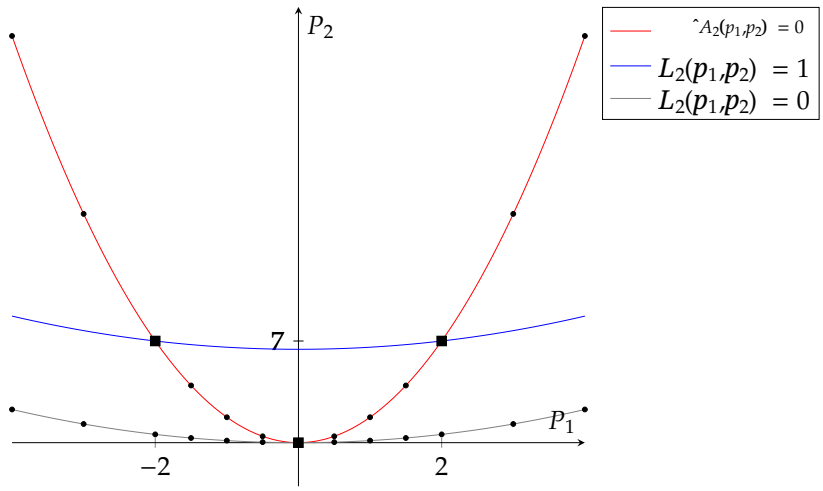
滥用记号，我们仍用I_H 表示由 $\kappa_{L_i} \in B$ （其中$i > 2$ 属于B）生成的参数化 Hirzebruch 理想，并考虑映射

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{Q}[P_1, P_2] \longrightarrow \overline{B}/\overline{I}_H.$$

在最大理想 $(P_1 - p_1, P_2 - p_2) \subset \mathbb{Q}[P_1, P_2]$ 处，$\tilde{\varphi}$ 的纤维维数，对于$p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$，对应于B/I_H 的商的维数，其中第一和第二庞特里亚金类取相应的特定值（尽管未必存在具有这些庞特里亚金类的流形）。定理 4.5 的论证仍然适用，可说明一般纤维的维数为零；但现在例外纤维不再是孤立点 $\mathbb{A}^2$，而可能构成一维簇。

我们使用 Macaulay2 计算了若干个 $\mathbb{A}^2$ 中点对应的 $\tilde{\varphi} : \mathbb{Q}[P_1, P_2] \to B/I_H^{\leq 10}$ 的纤维维数。一个有趣的观察是，在我们检查过的所有 $\hat{A}$-属为零的例子中，也就是说，对于 $V(-4P_2 + 7P_1^2) \subset \mathbb{A}^2$，上的点，$\tilde{\varphi}$ 的纤维维数至少为 1。因此，尽管这个问题与流形上是否存在圆作用无关，但这个代数族的 $\hat{A}$-属消失，似乎仍为相应 Pontryagin 类取值下的 B/I_H 的 Krull 维数提供了一个正的下界。我们尚无法解释这一观察，但它暗示了 $\hat{A}$-属消失与同伦典范环 Krull 维数下界之间存在联系。

我们已将样本计算结果汇总于下图中的 $\mathbb{A}^2$,。其中，每个圆圈代表仿射平面上的一个点，在该点处，$\tilde{\varphi} : \mathbb{Q}[P_1, P_2] \to B/I_H^{\leq 10}$ 的纤维的 Krull 维数为 1；每个正方形则对应纤维维数为 3 的点。我们还标出了簇 $V(L_2)$ 和 $V(\hat{A}_2)$，我们预期它们上纤维的维数为正。此外，为完整起见，我们也标出了 $V(L_2 - 1)$，根据符号定理，它包含伪四元数射影空间的 p_1 和 p_2 的取值。



备注 5.5. 对 $\tilde{\varphi} : \mathrm{Q}[p_1,p_2] \to B/I_H$ 的纤维维数的计算，并不能确定$R^*\,h,0(M)/(I_H \cap \overline{R^*}\,\bar{h},0(M))$的维数，而仅仅给出了一个上界。我们推测这个上界是紧的，并且已经验证在某些情况下确实如此，但这一计算需要耗费显著更多的时间。

基于这些有限的计算以及它们与典范环 Krull 维数下界的联系，我们提出以下乐观的猜想。

猜想 5.6. 设 M 是一个闭的、定向的、正有理椭圆的光滑流形，并且满足 *Halperin*猜想。如果 $\hat{A}(M) = 0$ 那么 Krull 维数$R^*\,h,0(M)/(I_H \cap R^*\,h,0(M)) > 0.$

参考文献

[AH70] M. Atiyah 和 F. Hirzebruch。Spin流形与群作用。载于《拓扑学及相关主题论文集》（献给 *Georges de Rham* 的纪念文集），第 18–28 页。Springer，纽约，1970 年。[Ati69] M. F. Atiyah。纤维丛的特征。载于《整体分析》（纪念 *K. Kodaira* 的论文集），第 73–84 页。东京大学出版社，东京，1969 年。[Bau96] H. J. Baues。关于流形的同伦等价群。《美国数学学会汇刊》，348(12):4737–4773，1996 年。[Ber15] A. Berglund。通过李理论研究L_∞-代数的映射空间的有理同伦论。《同调、同伦及其应用》，17(2):343–369，2015 年。[Ber20] A. Berglund。纤维丛自同构的有理模型。《数学文献》，(25):239–265，2020 年。[Ber22] A. Berglund。丛族的特征类。《数学精选》（新辑），28(3):第 51 号论文，56 页，2022 年。[BH58] A. Borel 和 F. Hirzebruch。特征类与齐性空间。I。《美国数学杂志》，80:458–538，1958 年。[BM20] A. Berglund 和 I. Madsen。流形自同构的有理同伦论。《数学学报》，224(1):67–185，2020 年。[Eis95] D. Eisenbud。交换代数，《数学研究生教材》第 150 卷。Springer- Verlag，纽约，1995 年。着眼于代数几何。

[EK62] J. Eells 和 N. Kuiper。类似射影平面的流形。高等科学研究所数学出版物，(14):5–46，1962。[FHT01] Y. Félix、S. Halperin 和 J.-C. Thomas。《有理同伦论》，《数学研究生教材》第205卷。Springer-Verlag，纽约，2001。[GGRW17] S. Galatius、I. Grigoriev 和 O. Randal-Williams。高维流形的典范环。《组合数学》，153(4):851–866，2017。[Gri17] I. Grigoriev。流形丛特征类之间的关系。《几何与拓扑》，21(4):2015–2048，2017。[GS] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。参见 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[Hir66] F. Hirzebruch。《代数几何中的拓扑方法》。数学科学基础丛书，第131卷。Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，增订版，1966。新增附录及由第二版德文版翻译而来，译者为 R. L. E. Schwarzenberger，另含 A. Borel 撰写的一节。[HLLRW21] F. Hebestreit、M. Land、W. Lück 和 O. Randal-Williams。非球面流形典范类的消失定理。《几何与拓扑》，25(1):47–110，2021。[Hsi66] W. Hsiang。关于 S^1 和 S^3 在同伦球面上的自由可微作用的注记。《数学年刊》(第二辑)，83:266–272，1966。[Kem11] Gregor Kemper。《交换代数教程》，《数学研究生教材》第256卷。Springer，海德堡，2011。[KS07] L. Kramer 和 S. Stolz。类似射影平面的流形的微分同胚分类。《微分几何杂志》，77(2):177–188，2007。[May75] J. P. May。分类空间与纤维化。《美国数学会回忆录》，1(1, 155):xiii+98，1975。[Mum83] D. Mumford。迈向曲线模空间的枚举几何。载于《算术与几何》，第II卷，《数学进展》第36卷，第271–328页。Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1983。[Pri19] N. Prigge。《纤维化的重言环》。arXiv 电子预印本，第 arXiv:1905.02676 页，2019年5月。[Pri20] N. Prigge。关于纤维丛的典范类与自嵌入演算。2020。博士论文——剑桥大学。[Ran22]Oscar Randal-Williams。族签名定理。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2204.11696 页，2022年4月。[RW18] O. Randal-Williams。流形典范环中的若干现象。《数学精选》(新系列)，24(4):3835–3873，2018。[Sto22] Robin Stoll。球面乘积连通和的自等价的稳定上同调。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2203.15650 页，2022年3月。[Tan83] D. Tanré。《有理同伦：Chen、Quillen、Sullivan 模型》，《数学讲义》第1025卷。Springer-Verlag，柏林，1983。

电子邮件地址：nils.prigge@math.su.se