物理信息数据驱动的本构模型发现及其在应变率敏感软材料中的应用

预印本

arXiv:2304.13897v1 [cs.CE] 27 Apr 2023

Kshitiz Upadhyay路易斯安那州立大学机械与工业工程系，美国路易斯安那州巴吞鲁日，70803 kshitizu@lsu.edu

Jan N. Fuhg康奈尔大学 Sibley 机械与航空航天工程学院，美国纽约州伊萨卡，14850 jf853@cornell.edu

Nikolaos Bouklas康奈尔大学 Sibley 机械与航空航天工程学院，应用数学中心，美国纽约州伊萨卡，14850 nb589@cornell.edu

K.T. Ramesh约翰斯·霍普金斯大学机械工程系，霍普金斯极端材料研究所，美国马里兰州巴尔的摩，21210 ramesh@jhu.edu

摘要

本文提出了一种新颖的数据驱动本构建模方法，将基于连续体热力学建模的物理信息特性与机器学习的优势相结合。该方法应用于应变率敏感软材料，并进行了验证。该模型基于黏性耗散驱动的黏性超弹性框架，其中总应力分解为体积变形、等容超弹性和等容黏性超应力贡献。研究表明，这些应力分量均可表示为不可约完备基各分量的线性组合。研究训练了三个基于高斯过程回归的代理模型（每个应力分量对应一个），建立应变张量和应变率张量的主不变量与完整性基底分量相应系数之间的关系。研究证明，这种模型构造方式能够对预测响应施加关键的基于物理的约束，包括热力学第二定律、局部作用原理与决定论、客观性、角动量平衡、假定的参考状态、各向同性以及有限记忆。构成该本构模型的三个代理模型通过小规模数值生成数据集进行训练和评估，这些数据集对应单一变形模式；随后在包含多种变形模式的更广泛测试范围内分析其预测结果。我们的物理信息

数据驱动本构模型预测结果与经典的基于连续体热力学的模型和纯数据驱动模型的相应预测结果进行了比较。结果表明，我们的代理模型能够在训练范围和测试范围内合理捕捉应力–应变–应变率响应，并在预测精度、对多种变形模式的泛化能力以及与有限数据的兼容性方面有所提升。

关键词 数据驱动本构模型、黏性超弹性、大变形、物理信息机器学习、高斯过程回归、超弹性

1 引言

本构模型是描述材料对外加载、变形或温度变化所产生响应的方程（或方程组）。多年来，本构模型的构建理念经历了显著演变，发展为四个阶段，如图1所示。最早的阶段可追溯至罗伯特·胡克提出的拉丁文谜语“ut tensio, sic vis”（如伸长，力亦随之）（胡克，1678年）；这一阶段通过编写简化且常具经验性的方程，描述材料在有限加载条件范围内的响应观测结果（例如理想胡克弹性固体和理想牛顿黏性流体）。20世纪50年代，本构建模的现代连续体理论兴起，带来了不同的理念：首先建立符合特定物理定律和热力学考量所施加约束的一般函数形式本构方程，并尽可能推迟、尽量减少基于观测到的材料响应而作出的简化假设，最终得到模型（Coleman和Noll，1963年；Malvern，1969年；Truesdell和Noll，2004年）。这种方法尤其有利于构建具有复杂变形特征（例如大变形）的材料本构模型，因为它降低了为提出本构方程而进行大量实验探索的必要性。软材料便是这类材料之一，其力学响应涉及大变形、非线性应力—应变行为以及对应变率（或时间）的依赖性。本研究聚焦于具有率敏感响应的软材料（例如弹性体、水凝胶和软组织）的本构建模。

本构建模演化的第三阶段，随着机器学习（ML）工具在计算机科学中的普及而出现。这些“黑箱模型”在应力与变形之间建立简单的映射，并在过去30年中广泛应用于包括软材料在内的多个材料类别（Wu 等（1990年）；Ghaboussi 等（1998年）；Lefik 和 Schrefler（2003年）；Jung 和 Ghaboussi（2006年）；Huang 等（2020年）；Fuhg 等（2021a年）；Logarzo 等（2021年））。机器学习在描述力学响应方面具有诸多优势：（i）在获得充足训练数据的情况下，能够捕捉复杂趋势；（ii）能够直接利用实验数据，无需物理定律或关于响应趋势的专家知识；（iii）有望降低计算成本并实现高通量。尽管具有这些优势，这些黑箱模型的精度仍受到限制，因为它们需要大量训练数据，而在实际实验环境中通常无法获得足够的数据。此外，近期研究表明，由于这些模型不受物理定律约束，因此在模型训练未涵盖的变形范围（例如，$>10\%$ 应变）内，其预测精度非常低，而模型训练所采用的范围可能是（例如，$\leqslant 10\%$ 应变）（Fuhg 和 Bouklas（2022年））。

本构建模发展的最新阶段尝试结合本构建模连续体理论（即第二阶段）的物理信息特性与经典机器学习（即第三阶段）的灵活性和效率，以构建“物理信息数据驱动本构模型”。例如，Liu 等人（2020年）近期提出了一种用于各向同性超弹性软组织的物理信息神经网络材料模型（NNMat）。该模型基于右柯西–格林变形张量的不变量与应变能密度对这些不变量的导数之间的映射，并在神经网络损失函数中施加凸性约束，以确保预测结果符合物理规律。与本研究不同，Frankel 等人（2020年）采用高斯过程回归（高斯过程回归）建立了右柯西–格林变形张量的不变量与应力张量不可约完备基系数之间的映射（针对各向同性超弹性固体）。Fuhg 和 Bouklas（2022年）表明，这类广义函数型本构方程（即将应力表示为不可约完备基的线性函数）能够自动确保材料行为满足多项物理约束：材料架构无关性、材料对称性、角动量平衡以及热力学第二定律（即克劳修斯–普朗克不等式）。此外，由于高斯过程回归能够精确预测训练数据点（称为精确推断性质），只需将零应力–零应变数据点纳入训练数据，即可满足无应力参考状态这一物理约束。

尽管这些基于高斯过程回归的模型具有重要价值且用途广泛，但其适用范围局限于假设材料行为不具有应变率依赖性的超弹性固体，而且训练时使用了大量人工生成的数据。实际上，软材料的材料响应往往具有应变率依赖性。此外，通过力学实验通常只能获得少数几个

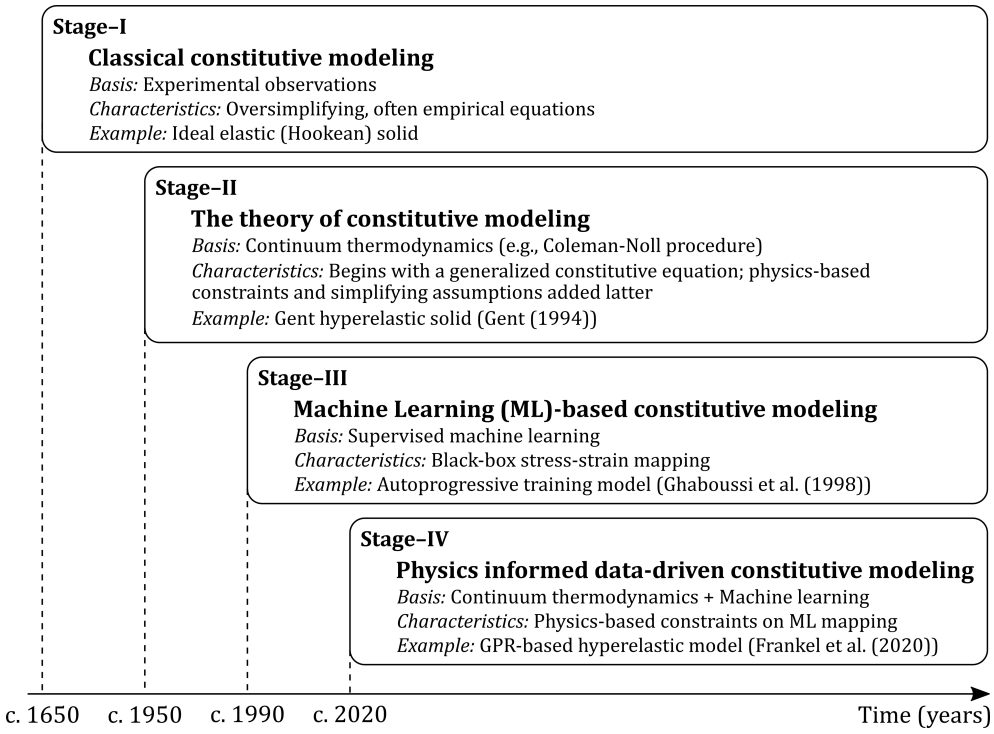


图 1：本构建模演进不同阶段的示意图。

应变率水平和有限应变范围内的稀疏数据（Upadhyay 等人（2019a，2021）；Luo 等人（2019））。因此，本研究旨在开发一种物理信息数据驱动本构模型，利用有限的训练数据捕捉黏弹超弹性软材料具有应变率敏感性的力学响应，并符合当前的实验实践。为此，本研究借鉴了 Frankel 等人（2020）以及 Fuhg 和 Bouklas（2022）近期针对超弹性软材料所做的研究。需要指出的是，黏性超弹性中的应变率依赖性可分为短时响应（例如高应变率变形）和长时响应（例如蠕变和松弛）（Upadhyay 等人（2020b））。本研究仅关注短时响应，这在损伤生物力学领域（例如碰撞、爆炸和弹道冲击的模拟）以及防护装备设计中尤为重要（Bracq 等人（2018）；Harrigan 等人（2010）；Upadhyay 等人（2022a）；Payne 等人（2015））。

本文的组织结构如下：第 2 节为黏弹超弹性软材料构建广义函数型本构方程，该方程构成了本研究所提出的数据驱动模型的基础。第 3 节定义了针对广义本构方程的数据驱动映射，并总结了这一数据驱动映射所受的基于物理的约束，这些约束既源于广义模型的构建，也源于映射方法。高斯过程回归是本研究采用的主要监督学习方法，可用于施加若干额外物理约束，相关内容将在第 4 节介绍。第 5 节通过多项数值测试，展示基于高斯过程回归的物理信息数据驱动本构模型的拟合与预测性能；这些测试涵盖多种变形模式和广泛的加载速率。本文还将该模型的性能与传统黏弹性超弹性本构模型（即本构建模演进第二阶段的模型）以及经典机器学习映射模型（即第三阶段的模型）进行比较。最后，第 6 节总结本文工作。

2 广义黏弹性超弹性本构框架

一般而言，每个可接受的热力学过程（以及本构模型的选择）都必须满足克劳修斯–杜亥姆不等式，

$$\rho_0 \dot{\eta}_0 + \nabla_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{Q}}{\theta} \right) - \rho_0 \frac{R}{\theta} \geq 0 \tag{1}$$

其中， ρ_0 为质量密度， η_0 为比熵，$\mathbf{Q}$为热流， R 为单位质量的内生热率， θ 为绝对温度。下标 0 表示参考系统构形，算子（$\nabla_0\cdot$）表示散度。此外，考虑参考构形下能量守恒的局部形式，

$$\rho_0\dot{u}_0 = \mathbf{T}^0 \cdot\cdot \dot{\mathbf{F}} - \nabla_0 \cdot \mathbf{Q} + \rho_0 R \tag{2}$$

其中， u_0 为比内能，$\mathbf{T}^0$ 为名义应力张量，$\mathbf{F}$ 为变形梯度张量。符号 $\cdot\cdot$ 表示张量标量积，因此在直角笛卡尔坐标系中，$\mathbf{T}^0 \cdot\cdot \dot{\mathbf{F}} = T^0_{ij}\dot{F}_{ji}$。将式（2）中的 R 代入式（1），并引入亥姆霍兹自由能函数 $\psi = u_0 - \theta\eta_0$,

$$\mathbf{T}^0 \cdot\cdot \dot{\mathbf{F}} - \rho_0\left(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta_0\right) - \frac{\mathbf{Q}}{\theta}\left(\nabla_0 \cdot \theta\right) \geq 0 \tag{3}$$

将研究范围限定 为仅考虑等温变形后，我们通过克劳修斯–普朗克不等式将热力学第二定律具体化， e 不等式 如下

$$\Xi_{int} = \mathbf{T}^0 \cdot\cdot \dot{\mathbf{F}} - \rho_0\dot{\psi} \geq 0 \tag{4}$$

其中， Ξ_{int} 是内耗散或局部熵产生（Limbert和Middleton（2004年））。方程4表示广义本构方程可能数学形式的主要物理约束。

除克劳修斯–普朗克不等式外，约束本构方程形式的另一条常见物理定律是局部作用原理，该原理指出，给定点处的材料响应仅取决于该点邻近区域内的条件（例如， $\psi = \psi(\theta,\ \mathbf{F}\ \nabla_0\mathbf{F}$ 。 。 。 ）。假设亥姆霍兹自由能函数仅取决于 θ 和$\mathbf{F}$ （即忽略高阶梯度），使得 $\psi = \psi(\theta,\ \mathbf{F})$，则方程（4）变为

$$\Xi_{int} = \left(\mathbf{T}^{0^{\mathrm{T}}} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}\right) : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \tag{5}$$

用右柯西–格林变形张量$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$和超弹性应变能密度函数$W_h$表示,

$$\Xi_{int} = \left(\mathbf{T}^{0^{\mathrm{T}}} - 2\mathbf{F}\frac{\partial W_h(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}}\right) : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \tag{6}$$

对于理想超弹性材料，在假设材料变形过程中不发生耗散的条件下，方程（6）中的不等式化为等式。这将导致与速率无关形式的本构模型。虽然这一假设对于准静态变形而言基本合理，但软材料在高应变率变形下的响应与不可逆热力学过程相关，而这些过程源于微观尺度的黏性耗散效应（Vogel 等人（2017年）；Pioletti（2006年））。需要注意的是，这里的“高应变率”与短时响应同义，即变形时间尺度相对于材料内部微观结构在载荷作用下发生重排或松弛所需的时间非常小。在这些条件下，通常假设存在黏性耗散势（也称为伪势） W_v，用于计及能量耗散（Germain（1998年）；Pioletti 等人（1998年）；Pioletti和Rakotomanana（2000年）；Zhurov 等人（2007年）；Upadhyay 等人（2020b年）），

$$\Xi_{int} = \left(2\mathbf{F}\frac{\partial W_v(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}})}{\partial\dot{\mathbf{C}}}\right) : \dot{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{T}^{0^{\mathrm{T}}} - 2\mathbf{F}\frac{\partial W_h(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}}\right) : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \tag{7}$$

重新整理式（7），并引入第二类 Piola-Kirchhoff 应力$\mathbf{S}$ （$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}^{0^{\mathrm{T}}}$），

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_h + \mathbf{S}_v = 2\frac{\partial W_h(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} + 2\frac{\partial W_v(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}})}{\partial\dot{\mathbf{C}}} \tag{8}$$

根据公式（8），材料中的总应力可加性地分解为超弹性应力分量（$\mathbf{S}_h$）和黏性过应力分量（$\mathbf{S}_v$）。注意，由于超弹性应变能密度和黏性耗散势均为对称张量（即 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{C}$）的函数，因此应力张量 $\mathbf{S}$ 也具有对称性。这确保了角动量平衡这一物理约束。此外，可以直接确认公式（8）还满足决定性原理或因果律（即，某一时刻的材料响应仅是过去和当前事件的函数）

接下来，施加各向同性材料对称性这一物理约束后，公式（8）可以用张量$\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{C}$ 的若干标量不变量表示（Malvern（1969年）；Upadhyay 等人（2020b年）），

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_h+\mathbf{S}_v=2\frac{\partial W_h(I_1,I_2,I_3)}{\partial \mathbf{C}}+2\frac{\partial W_v(I_1,I_2,I_3,J_1,J_2,J_3,J_4,J_5,J_6,J_7)}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \tag{9}$$

其中

$$I_1=\mathrm{tr}\mathbf{C},\quad I_2=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathbf{C})^2-\mathrm{tr}(\mathbf{C}^2)],\quad I_3=\det\mathbf{C} \tag{10a}$$

$$J_1=\mathrm{tr}\dot{\mathbf{C}},\quad J_2=\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{C}}^2),\quad J_3=\det(\dot{\mathbf{C}}) \tag{10b}$$

$$J_4=\mathrm{tr}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}),\quad J_5=\mathrm{tr}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^2),\quad J_6=\mathrm{tr}(\mathbf{C}^2\dot{\mathbf{C}}),\quad J_7=\mathrm{tr}(\mathbf{C}^2\dot{\mathbf{C}}^2) \tag{10c}$$

现在将式 (9) 中的广义本构方程转换为一种等价形式，在不失一般性的前提下，使其与我们数据驱动映射方法（稍后介绍）兼容。为此，按照可压缩材料建模的标准方法（Holzapfel (2000)），将张量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{C}$ 乘法分解为体积分量和等容分量，

$$\mathbf{F}=J^{1/3}\bar{\mathbf{F}},\quad \mathbf{C}=J^{2/3}\bar{\mathbf{C}} \tag{11}$$

其中 J 是一个不变量，定义如下

$$J=\sqrt{I_3}=\sqrt{\det\mathbf{C}}=\det\mathbf{F} \tag{12}$$

引入了 $\bar{}$ $\bar{}$、修正变形梯度张量 $\mathbf{F}$ 以及修正右Cauchy–Green变形张量 $\mathbf{C}$ 。这些张量与变形的等容（保体积）部分相关，因此，

$$\det\bar{\mathbf{F}}=1,\quad \det\bar{\mathbf{C}}=1 \tag{13}$$

式 (11) 中变形梯度的分解，使式 (9) 中的应力张量也可等价地分解为体积应力分量和等容应力分量（见 Zhurov et al. (2007)），

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}+\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}+\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}=2\frac{\partial U(J)}{\partial \mathbf{C}}+2\frac{\partial \bar{W}_h(\bar{I}_1,\bar{I}_2)}{\partial \mathbf{C}}+2\frac{\partial \bar{W}_v(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\bar{J}_2,\bar{J}_3,\bar{J}_4,\bar{J}_5,\bar{J}_6,\bar{J}_7)}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \tag{14}$$

其中

$$\bar{I}_1=\mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{C}},\quad \bar{I}_2=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\ \bar{}\mathbf{C})^2-\mathrm{tr}(\ \bar{}\mathbf{C}^2)] \tag{15a}$$

$$\bar{J}_1=\mathrm{tr}\dot{\mathbf{C}},\quad \bar{J}_2=\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{C}}^2),\quad \bar{J}_3=\det(\dot{\mathbf{C}}) \tag{15b}$$

$$\bar{J}_4=\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{C}}),\quad \bar{J}_5=\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{C}}^2),\quad \bar{J}_6=\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{C}}^2\dot{\mathbf{C}}),\quad \bar{J}_7=\mathrm{tr}(\bar{\mathbf{C}}^2\dot{\mathbf{C}}^2) \tag{15c}$$

为不变量。在式 (14) 中，$\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}$ 为体积应力分量，$\mathbf{S}_{h,\mathrm{vol}}$ 为等容超弹性应力分量，而$\mathbf{S}_{v,\mathrm{vol}}$ 为等容黏性超应力分量。这三个应力分量分别由 $\bar{}$体积能量密度函数 $U(J)$、修正的超弹性应变能密度 W_h以及修正的 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$黏性耗散势 W_v描述。为方便起见， W_h 和 W_v 今后分别简称为应变能密度和黏性耗散势。

方程（14）是本研究所考虑的本构方程的一般化函数形式。这一广义框架（包括方程（9）和方程（14））称为基于外部状态变量驱动的黏性耗散的黏性超弹性（Pioletti和Rakotomanana（2000）；Upadhyay 等人（2020b））。这里，$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}$ 是外部热力学状态变量，用于将材料响应的应变率硬化或软化与黏性耗散联系起来。这与内部状态变量驱动框架形成对比；在该框架中，亥姆霍兹自由能函数的非平衡部分通过一组内部变量来描述，而这些变量先验地不具有任何物理意义

（例如，参见Simo（1987）；Reese和Govindjee（1998）；Holzapfel和Gasser（2001）；Garcia-Gonzalez 等人（2018））。与这一类替代性的黏弹超弹性模型不同（其中许多模型会导出基于遗传积分的应力方程），本研究提出的基于外部状态变量驱动的黏性耗散的黏弹超弹性本构框架受有限记忆约束（衰减记忆原理的一个子集）。这里，有限记忆意味着黏性材料行为仅取决于瞬时变形率（即非常近期的历史），而忽略其对全部先前加载历史（通常通过遗传积分描述）的依赖。Pioletti 等人（1998）首次提出了这一框架；此类本构模型已用于成功捕捉多种软材料在快速加载下的率相关响应：人体韧带和肌腱（Jiang 等人（2015）；Zhurov 等人（2007）；Ahsanizadeh和Li（2015））、骨骼肌（Lu 等人（2010））、水凝胶和弹性体（Upadhyay 等人（2020b，2022a））、舌组织（Yousefi 等人（2018）），以及大脑和心包（Kulkarni 等人（2016）；Upadhyay 等人（2021，2022b））等。这些研究基于专家知识和经验，假设了$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $

这里，组成数据集 $\mathcal{D}_{\text{vol}}$、 $\mathcal{D}_{h,\text{iso}}$ 和 $\mathcal{D}_{v,\text{iso}}$ 分别对应静水、等容准静态和等容动态条件下的材料响应。上标 i、j 和 k 分别表示数据集 $\mathcal{D}_{\text{vol}}$、 $\mathcal{D}_{h,\text{iso}}$和 $\mathcal{D}_{v,\text{iso}}$中的特定数据点。实际中，软材料的数据集（如 $\mathcal{D}$）可通过汇集其静水应力–应变数据（ $\mathcal{D}_{\text{vol}}$ ）（Nie et al. (2013)；Saraf et al. (2007)）、单轴和/或剪切变形下的准静态应力–应变数据（$\mathcal{D}_{h,\text{iso}}$ ）（Yang et al. (2000)；Upadhyay et al. (2020a)），以及在多个应变率水平下进行单轴和/或剪切变形高应变率测试所得到的黏性超应力（总应力减去准静态加载下的应力）–应变数据（$\mathcal{D}_{v,\text{iso}}$ ）（Yang et al. (2000)；Saraf et al. (2007)；Bracq et al. (2017)；Upadhyay et al. (2022a, 2019a)）来获得。对于数据集 $\mathcal{D}$中的每个数据点，可使用输入 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{C}$ 计算不变量集合（使用式（12）和（15））以及完整性基 $\mathbb{G}$ 的分量（使用式（20））。随后，可分别通过求解以下方程组，得到式（16–18）中完整性基的系数:

$$\Big[\text{vec}(\mathbf{S}_{\text{vol}})\Big] = \Big[\text{vec}(\mathbb{G}_1)\Big]\Big[\zeta_1\Big] \tag{22}$$

$$\left[\text{vec}\left(\frac{\mathbf{S}_{h,\text{iso}}}{J^{-2/3}}\right)\right] = \Big[\text{vec}(\mathbb{G}_2) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_3))\Big]\begin{bmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\left[\text{vec}\left(\frac{\mathbf{S}_{v,\text{iso}}}{J^{-2/3}}\right)\right] = \Big[\text{vec}(\mathbb{G}_2) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_3) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_4) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_5) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_6) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_7) \quad \text{vec}(\mathbb{G}_8)\Big]\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\\ \Phi_5\\ \Phi_6\\ \Phi_7\end{bmatrix} \tag{24}$$

其中，vec(·) 表示矩阵的 Voigt形式（对于任意二阶对称张量 $\mathbf{Z}$，vec(Z) $=\big[\mathbf{Z}_{11},\mathbf{Z}_{22},\mathbf{Z}_{33},\mathbf{Z}_{23},\mathbf{Z}_{13},\mathbf{Z}_{12}\big]^{\text{T}}$）。请注意，上述方程组与式（16–18）相同，且每个方程组都写成 $\big[\boldsymbol{b}\big] = \big[\boldsymbol{A}\big]\big[\boldsymbol{x}\big]$的形式。包含完整性基系数的向量 $\big[\boldsymbol{x}\big]$ 可通过求解相应的优化问题——$\min_x \big\|\big[\boldsymbol{A}\big]\big[\boldsymbol{x}\big] - \big[\boldsymbol{b}\big]\big\|_2^2$——获得，例如使用 QR分解。

针对 $\mathcal{D}$ 中的每个数据点，均执行上述获取不变量和完整性基系数的过程。利用这些信息，生成一个替代数据集，其中包含与每种应力分量类型相对应的不变量和完整性基系数,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*_{\text{vol}} \cup \mathcal{D}^*_{h,\text{iso}} \cup \mathcal{D}^*_{v,\text{iso}} = \{J^i, \zeta_1^i\}_{i=1}^{N_{\text{vol}}} \cup \{[\bar{I}_1^j, \bar{I}_2^j], [\Gamma_1^j, \Gamma_2^j]\}_{j=1}^{N_{h,\text{iso}}} \cup \\ \{[\bar{I}_1^k, \bar{I}_2^k, \bar{J}_1^k, \bar{J}_4^k, \bar{J}_6^k], [\Phi_1^k, \ldots, \Phi_7^k]\}_{k=1}^{N_{v,\text{iso}}}\end{aligned} \tag{25}$$

本研究使用 $\mathcal{D}^*$ 中的组成数据集来训练构成我们的物理信息数据驱动本构模型的三个代理模型:

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{vol}} : \mathcal{J}_{\text{vol}} \in \mathbb{R}^1 \rightarrow \zeta \in \mathbb{R}^1 \tag{26}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{h,\text{iso}} : \mathcal{I} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathit{\Gamma} \in \mathbb{R}^2 \tag{27}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\text{iso}} : \mathcal{J} \in \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathit{\Phi} \in \mathbb{R}^7 \tag{28}$$

具体而言， $\mathcal{M}_{\text{vol}}$ 捕获体积应力分量，是随机不变量 J（即 $\mathcal{J}_{\text{vol}}$）向系数 ζ_1 的随机向量（即 ζ）的映射。$\mathcal{M}_{h,\ \text{iso}}$ 捕获等容超弹性应力分量，是不变量 $[I_1, I_2]$ 的随机向量（即 $\mathcal{I}$）向相应系数 $[\Gamma_1, \Gamma_2]$ 的随机向量（即 $\mathit{\Gamma}$）的映射。最后，$\mathcal{M}_{v,\ \text{iso}}$ 捕获等容黏性超应力，是关于不变量 $[I_1, I_2, J_1, J_4, J_6]$ 的随机向量（即 $\mathcal{J}$）与随机向量的映射

相应系数 $[\Phi_1, \ldots, \Phi_7]$（即 Φ）之间的映射。更明确地表示为

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{vol}} : \left[\bar{J}\right] \rightarrow \left[\zeta_1\right] \tag{29}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{h,\text{iso}} : \begin{bmatrix}\bar{I}_1\\ \bar{I}_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\text{iso}} : \begin{bmatrix}\bar{I}_1\\ \bar{I}_2\\ \bar{J}_1\\ \bar{J}_4\\ \bar{J}_6\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\\ \Phi_5\\ \Phi_6\\ \Phi_7\end{bmatrix} \tag{31}$$

请注意，不将不变量 $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$, $\bar{J}_5$ 和 $\bar{J}_7$ 纳入代理模型 $\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\text{iso}}$（式（28/31））的理由将在下一节中说明。简而言之，假设某些不变量对黏性超应力的影响可以忽略不计，从而能够施加无应力参考状态这一物理约束；也就是说，确保 $\mathbf{S}_{v,\text{iso}}(\mathbf{C} = \mathbf{I}, \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{0})$，而不受右柯西–格林变形张量（$\mathbf{C}$）所施加速率的影响。

在本研究中，选择高斯过程回归（GPR）监督学习方法（Williams 和 Rasmussen（1995））进行代理建模（GPR 的详情见第 4 节），即利用给定的输入输出训练数据集 $\mathcal{D}$ 学习式（26–28）中的映射，进而预测一组新输入张量$\dot{\mathbf{C}}$ 和 $\mathbf{C}$对应的完整性基系数。鉴于各应力分量与其对应完整性基系数之间存在线性关系（式（16–18）），训练得到的代理模型可以预测三个应力分量：

$$\widetilde{\mathbf{S}}^i_{\text{vol}} = \widetilde{\zeta}^i_1 \mathbb{G}^i_1 \tag{32}$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}^j_{h,\text{iso}} = J^{-2/3}\left(\widetilde{\Gamma}^j_1 \mathbb{G}^j_2 + \widetilde{\Gamma}^j_2 \mathbb{G}^j_3\right) \tag{33}$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}^k_{v,\text{iso}} = J^{-2/3}\left(\widetilde{\Phi}^k_1 \mathbb{G}^k_2 + \widetilde{\Phi}^k_2 \mathbb{G}^k_3 + \widetilde{\Phi}^k_3 \mathbb{G}^k_4 + \widetilde{\Phi}^k_4 \mathbb{G}^k_5 + \widetilde{\Phi}^k_5 \mathbb{G}^k_6 + \widetilde{\Phi}^k_6 \mathbb{G}^k_7 + \widetilde{\Phi}^k_7 \mathbb{G}^k_8\right) \tag{34}$$

在方程（32–34）中，应力和完整性基系数上方的重音符号~表示这些值是通过代理模型预测得到的近似值。请注意，对于任意给定的输入应变和应变率，完整性基底分量（$\mathbb{G}^{i/j/k}$）均可通过方程（20）获得。Fuhg 等（2022a年）最近提出了一种数据驱动方法，可用于发现哪些完整性基底分量在应力响应中起主动作用，即识别各向异性的类型和方向。我们基于应力应变应变率数据集（即 $\mathcal{D}$）开发物理信息数据驱动本构模型的完整流程总结于算法1中。

由于方程（26–28）中的所提代理模型基于黏弹性超弹性应力方程（即方程（16–18））的广义函数形式，因此我们的数据驱动本构模型及其预测（方程（32–34））自动满足若干基于物理的约束：

- 局部作用原理：因为完整性基仅捕捉空间局部变形（通过 $\mathbf{C}$和 $\mathbf{C}$）。
- 角动量平衡：因为完整性基必然是对称的。
- 决定性原理（或因果律）：因为预测的应力仅是过去和当前事件的函数。.
- 材料框架无关性原理（客观性）：因为 $\mathbf{S}$、$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}$ 都是与参考构形相关的客观张量，因此在观察者变换下保持不变。
- 各向同性材料对称性：因为代理模型的应力方程（方程（32–34））在正交材料对称群 $SO(3)$ 中的任意变换下均保持不变（即在刚体旋转下不变）。这是方程（14）中的广义模型公式直接推导出的结果，其形式为张量$\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{C}$的不变量的各向同性性质。.

算法1应变率敏感软材料的物理信息数据驱动本构模型开发

数据： 训练数据集 $\mathcal{D}_{\text{vol}} = \{\mathbf{C}^i, \mathbf{S}^i_{\text{vol}}\}_{i=1}^{N_{\text{vol}}}$, $\mathcal{D}_{h,\text{iso}} = \{\mathbf{C}^j, \mathbf{S}^j_{h,\text{iso}}\}_{j=1}^{N_{h,\text{iso}}}$，以及 $\mathcal{D}_{v,\text{iso}} = \{\mathbf{C}^k, \dot{\mathbf{C}}^k, \mathbf{S}^k_{v,\text{iso}}\}_{k=1}^{N_{v,\text{iso}}}$

结果： 对应的代理模型 $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{vol}}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{h,\text{iso}}$，以及 $\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\text{iso}}$

1 — 体积应力部分

输入： $\{\mathbf{C}^1, \ldots, \mathbf{C}^{N_{\text{vol}}}\}$ 以及 $\{\mathbf{S}^1_{\text{vol}}, \ldots, \mathbf{S}^{N_{\text{vol}}}_{\text{vol}}\}$，其中 $\mathbf{C}^i, \mathbf{S}^i_{\text{vol}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

对于 $i \leftarrow 1, N_{\text{vol}}$ **执行**

使用公式 (12) 从 $\mathbf{C}^i$ 中获得不变量 J^i

使用公式 (20) 获得完整性基分量 $\mathbb{G}^i_1$。

获得 $\mathbb{G}^i_1$的 Voigt形式：$\text{vec}(\mathbb{G}^i_1) \in \mathbb{R}^{6\times 1}$

获取$\mathbf{S}^i_{\text{vol}}$的 Voigt形式 $\text{vec}(\mathbf{S}^i_{\text{vol}}) \in \mathbb{R}^6$

求解方程 (22)中的方程组以获得 ζ^i_1 ($\mathbb{R}^1$)

结束循环

构造 $\mathcal{D}^*_{\text{vol}} = \{J^i, \zeta^i_1\}_{i=1}^{N_{\text{vol}}}$包括 $\{J^1, \ldots, J^{N_{\text{vol}}}\} \in \mathbb{R}^{N_{\text{vol}}\times 1}$ 和 $\{\zeta^1_1, \ldots, \zeta^{N_{\text{vol}}}_1\} \in \mathbb{R}^{N_{\text{vol}}\times 1}$

使用 $\mathcal{D}^*_{\text{vol}}$，构建标准高斯过程回归近似 $\widetilde{\zeta}_1 = \widetilde{M}_{\text{vol}}(J)$

2 — 等容超弹性应力部分

输入： $\{\mathbf{C}^1, \ldots, \mathbf{C}^{N_{h,\text{iso}}}\}$ 和 $\{\mathbf{S}^1_{h,\text{iso}} \ldots \mathbf{S}^{N_{h,\text{iso}}}_{h,\text{iso}}\}$ 各向同性 其中 $\mathbf{C}^j, \mathbf{S}^j_{h,\text{iso}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

对于 $j \leftarrow 1, N_{h,\text{iso}}$ **执行**

使用公式 (12) 和 (15) 获取不变量 J^j、$\bar{I}^j_1$ 和 $\bar{I}^j_2$

使用公式 (20) 获取完整性基底分量 $\mathbb{G}^j_2$ 和 $\mathbb{G}^j_3$

获取 Voigt形式并构造矩阵 $[\text{vec}(\mathbb{G}^j_2) \quad \text{vec}(\mathbb{G}^j_3)] \in \mathbb{R}^{6\times 2}$

获取$\mathbf{S}^j_{h,\text{iso}}$的 Voigt形式 $\text{vec}(\mathbf{S}^j_{h,\text{iso}}) \in \mathbb{R}^6$

求解式（23）中的方程组，以获得 $[\Gamma^j_1, \Gamma^j_2] \in \mathbb{R}^2$

结束循环

构建 $\mathcal{D}^*_{h,\text{iso}} = \{[\bar{I}^j_1, \bar{I}^j_2], [\Gamma^j_1, \Gamma^j_2]\}^{N_{h,\text{iso}}}_{j=1}$ 包括 $\{[\bar{I}^1_1, \bar{I}^1_2], \ldots, [\bar{I}^{N_{h,\text{iso}}}_1, \bar{I}^{N_{h,\text{iso}}}_2]\} \in \mathbb{R}^{N_{h,\text{iso}}\times 2}$ 和 $\{[\Gamma^1_1, \Gamma^1_2], \ldots, [\Gamma^{N_{h,\text{iso}}}_1, \Gamma^{N_{h,\text{iso}}}_2]\} \in \mathbb{R}^{N_{h,\text{iso}}\times 2}$ 等

使用 $\mathcal{D}^*_{h,\text{iso}}$，构建标准高斯过程回归近似 $[\widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2] = \widetilde{M}_{h,\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$

3 — 等容黏性超应力部分

输入： $\{\mathbf{C}^1, \ldots, \mathbf{C}^{N_{v,\text{iso}}}\}$，$\{\dot{\mathbf{C}}^1, \ldots, \dot{\mathbf{C}}^{N_{v,\text{iso}}}\}$ 和 $\{\mathbf{S}^1_{v,\text{iso}} \ldots \mathbf{S}^{N_{v,\text{iso}}}_{v,\text{iso}}\}$ 各向同性，其中 $\mathbf{C}^k, \dot{\mathbf{C}}^k, \mathbf{S}^k_{v,\text{iso}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

对于 $k \leftarrow 1, N_{v,\text{iso}}$ **do** 各向同性

使用公式 (12) 和 (15) 求得不变量 $J^k, \bar{I}^k_1, \bar{I}^k_2, \bar{J}^k_1, \bar{J}^k_4$，以及 $\bar{J}^k_5$

使用公式 (20) 求得完整性基底分量 $\mathbb{G}^k_2, \mathbb{G}^k_3, \mathbb{G}^k_4, \mathbb{G}^k_5, \mathbb{G}^k_6, \mathbb{G}^k_7$，以及 $\mathbb{G}^k_8$

获得 Voigt形式并构造矩阵 $[\text{vec}(\mathbb{G}^k_2) \quad \ldots \quad \text{vec}(\mathbb{G}^k_8)] \in \mathbb{R}^{6\times 7}$

获得$\mathbf{S}^k_{v,\text{iso}}$的 Voigt形式 $\text{vec}(\mathbf{S}^k_{v,\text{iso}}) \in \mathbb{R}^6$

求解式（23）中的方程组，得到 $[\Phi^k_1, \Phi^k_2, \Phi^k_3, \Phi^k_4, \Phi^k_5, \Phi^k_6, \Phi^k_7] \in \mathbb{R}^7$

结束循环

构造 $\mathcal{D}^*_{v,\text{iso}} = \{[\bar{I}^k_1, \bar{I}^k_2, \bar{J}^k_1, \bar{J}^k_4, \bar{J}^k_6], [\Phi^k_1, \ldots, \Phi^k_7]\}^{N_{v,\text{iso}}}_{k=1}$ 由 $\{[\bar{I}^1_1, \bar{I}^1_2, \bar{J}^1_1, \bar{J}^1_4, \bar{J}^1_6], \ldots, [\bar{I}^{N_{v,\text{iso}}}_1, \bar{I}^{N_{v,\text{iso}}}_2, \bar{J}^{N_{v,\text{iso}}}_1, \bar{J}^{N_{v,\text{iso}}}_4, \bar{J}^{N_{v,\text{iso}}}_6]\} \in \mathbb{R}^{N_{v,\text{iso}}\times 5}$ 和 $\{[\Phi^1_1, \ldots, \Phi^1_7], \ldots, [\Phi^{N_{v,\text{iso}}}_1, \ldots, \Phi^{N_{v,\text{iso}}}_7]\} \in \mathbb{R}^{N_{v,\text{iso}}\times 7}$ 组成

选择一组约束点：$\mathcal{N}_c = \{\mathbf{C}^1, \ldots, \mathbf{C}^{N_c}\}$ 和 $\{\dot{\mathbf{C}}^1, \ldots, \dot{\mathbf{C}}^{N_c}\}$

使用 $\mathcal{D}^*_{v,\text{iso}}$ 和 $\mathcal{N}_c$，构造受约束的高斯过程回归近似 $[\widetilde{\Phi}_1, \ldots, \widetilde{\Phi}_7] = \widetilde{M}_{v,\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \bar{J}_4, \bar{J}_6)$

- 有限记忆约束（衰减记忆原理的一个子集）：因为黏性过应力分量（式（34））仅取决于瞬时变形率（即非常近期的历史）。

将通过采用高斯过程回归作为选定的代理建模技术来施加另外两项基于物理的约束：• 无应力参考状态，以及 • 热力学第二定律。现在将介绍这些额外物理约束以及高斯过程回归技术。

4 高斯过程回归与额外物理约束的实施

近年来，高斯过程回归作为一种用于构建代理模型以描述材料行为的工具，受到了越来越多的关注（Rocha 等（2021年）；Fuhg 等（2022b）；Chen 等（2023））。这部分是因为高斯过程回归建立在便于应用的统计学基础之上，具有严格收敛保证（例如，与人工神经网络不同），且在样本外模型预测方面经验证表现出色（Park 等（2014年）；Datta 等（2016年））。关于高斯过程回归的精彩综述，请参阅 Rasmussen（2003年）。本节将介绍高斯过程回归的基本思想，以及其在我们的代理模型中用于回归的具体方法。我们将介绍两种既有区别又相互关联的高斯过程回归形式：标准高斯过程回归和约束高斯过程回归。后者可在数据驱动模型的黏性过应力分量中实施热力学一致性约束。

4.1 标准高斯过程回归（GPR）

考虑一个包含 N 个数据点的通用数据集 $\mathcal{D}_g$，

$$\mathcal{D}_g = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}_{i=1}^{N} \tag{35}$$

其中$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ 和$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_o}$ 分别表示维度为 n_i 和 n_o 的输入数据点和输出数据点。所有输入数据点和输出数据点的集合可分别改写为矩阵$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N\times n_i}$ 和$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N\times n_o}$。使用数据集 $\mathcal{D}_g$ 进行训练的高斯过程回归模型的目标是，针对训练数据集中未包含的新输入数据点$\mathbf{x}_\star$，预测其输出$\mathbf{y}$ ~。

在高斯过程回归中，输入数据点之间的相似性至关重要。其假设是，彼此距离较近的两个输入数据点，其目标值也更有可能彼此接近，而不是距离较远的两个输入数据点。通常，两个输入数据点$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{x}'$ 之间的相似性由用户定义的协方差函数建模。该函数的选择是高斯过程回归的重要组成部分。根据 Laurent 等（2019）的研究，该研究比较了在缺乏先验知识时用于计算机实验的不同协方差函数形式，我们将范围限定为 Matérn 3/2 核（Matérn，1960），其表达式如下：

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2}{l}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2}{l}\right) + \alpha\delta_{x,x'} \tag{36}$$

其中，$\|(\cdot)\|_2$ 表示 L2 范数，σ_f 是缩放因子，l 是协方差函数的特征长度尺度。σ_f 和 l 可以合并为向量 $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_f, l]^T$，其中汇集了可训练参数。术语 α 表示一个小的正值，有助于克服数值不稳定性（Peng 和 Wu，2014年）。$\delta_{x,\ x'}$ 是 Kronecker delta 函数。利用式（36）中的协方差函数形式，可以构造协方差矩阵 $\mathbf{K(X,\ X')}$，以定义点集$\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}'$之间的相似性。

通过最大对数似然方法（Fuhg 等，2021年b），可以得到最优参数集 $\boldsymbol{\theta}$，该参数集能够最佳描述训练数据集（式（35）），

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}^\star} \log p(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}^\star} \left[-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T\mathbf{K}(\mathbf{X},\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y} - \frac{1}{2}\log(\det(\mathbf{K}(\mathbf{X},\mathbf{X}))) - \frac{N}{2}\log(2\pi)\right] \tag{37}$$

找到最佳参数后，高斯过程回归模型便完全确定。给定一个新的输入数据点 $\mathbf{x}_\star$，高斯过程回归器的预测输出值 ~$\mathbf{y}$ 为

$$\widetilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_\star) = \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_\star)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1}\, \mathbf{Y} \tag{38}$$

与式（36）中的情况一样，高斯过程回归预测器成为精确插值器（参见 Marrel 等（2008年）），即 ~$\mathbf{y}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ 对于式（35）的训练数据集中的所有点 $i = 1, \ldots, N$ 均成立。这称为高斯过程回归的精确推断性质。由于预测具有概率性质，因此还可以得到回归器拟合的方差 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2$，

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \mathbf{K}(\mathbf{x}_\star, \mathbf{x}_\star) - \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_\star)^T\, \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1}\, \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{x}_\star) \tag{39}$$

~ ~本研究采用标准高斯过程回归（如上文所定义）拟合代理模型 $\mathcal{M}_{\mathrm{vol}}$（式（26）和$\mathcal{M}_{h,\ \mathrm{iso}}$（式（27），所用数据集分别具有 $\mathcal{D}^*_{\mathrm{vol}}$ 和 $\mathcal{D}^*_{h,\ \mathrm{iso}}$（式（25）的形式；请注意，数据集 $\mathcal{D}^*_{\mathrm{vol}}$ 和 $\mathcal{D}^*_{h,\ \mathrm{iso}}$分别由初始训练数据集 $\mathcal{D}_{\mathrm{vol}}$ 和 $\mathcal{D}_{h,\ \mathrm{iso}}$（式（21））导出（见算法 1）。此外，利用高斯过程回归的精确推断性质，施加应力自由参考状态（即

未变形状态）的物理约束，该约束也称为归一化条件（Holzapfel（2000））。对于采用标准高斯过程回归建模的两个应力分量 $\mathbf{S}_{v,\ \mathrm{iso}}$和 $\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso}}$，归一化条件写作

$$\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}(\mathbf{C}=\mathbf{I})=\mathbf{0},\quad \mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}(\mathbf{C}=\mathbf{I})=\mathbf{0} \tag{40}$$

为满足上述约束，将无应力参考状态—$\{\mathbf{C}=\mathbf{I},\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}=\mathbf{0}\}$ 和 $\{\mathbf{C}=\mathbf{I},\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}=\mathbf{0}\}$—纳入训练数据集。这保证了归一化条件得以满足，前提是公式（36）的稳定化常数 α 足够小。注意，用不变量表示时，$\mathbf{C}=\mathbf{I}$ 对应于 $I_1=I_2=3$。

本研究关注的另一项基于物理的约束是热力学第二定律。根据克劳修斯–普朗克不等式，该约束要求公式（7）所述黏弹超弹性软材料中的内耗散 Ξ_{int} 非负。在三个应力分量$\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}$、$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}$ 和$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}$中，前两个与速率无关，因此不会产生耗散。因此，对基于标准高斯过程回归的代理模型 $\mathcal{M}_{\mathrm{vol}}$ 和$\mathcal{M}_{h,\mathrm{iso}}$ 施加热力学第二定律约束变得轻而易举。换言之，本研究中广义本构方程的具体构造自动确保了数据驱动本构模型中与速率无关部分满足热力学第二定律约束。

4.2 约束高斯过程回归（C-GPR）

与速率无关的应力分量$\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}$ 和$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso}}$不同，与速率相关的等容黏性超应力$\mathbf{S}_{v,\ \mathrm{iso}}$会产生黏性耗散。关于这一点，公式（7）中的克劳修斯–普朗克不等式可改写为（Pioletti和Rakotomanana（2000））

$$\Xi_{int}=2\left(\mathbf{F}\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}\right):\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}:\dot{\mathbf{C}}\geq 0 \tag{41}$$

对于任意输入应变和应变率，代理模型$\mathcal{M}_{v,\ \mathrm{iso}}$（公式（34））对等容黏性超应力的预测都必须满足上述不等式。这类针对输入输出映射的不等式约束，可通过采用Pensoneault等人（2020年）最近提出的约束高斯过程回归（C-GPR）公式来实现。在标准高斯过程回归中，模型输出不受约束。

C-GPR的基本思路是在超参数优化问题（即公式（37））中限制解空间，使得模型在一组用户定义的“约束点”处的预测输出满足所需的不等式约束。因此，本研究为训练代理模型$\mathcal{M}_{v,\ \mathrm{iso}}$ 的高斯过程回归器，构建了如下优化问题（参见公式（37））：

$$\begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{\theta}}=\arg\max_{\boldsymbol{\theta}^{\star}}\log p(\mathbf{Y}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta})\\&\text{s.t.}\quad \left(\widetilde{\mathbf{S}}_{v,\mathrm{iso}}(\mathbf{C}^k,\dot{\mathbf{C}}^k)\right):\dot{\mathbf{C}}^k\geq 0,\quad \forall\ k=1,\ldots,N_c\end{aligned} \tag{42}$$

此处，$\widetilde{\mathbf{S}}_{v,\ \mathrm{iso}}(\mathbf{C}^k,\ \dot{\mathbf{C}}^k)$ 表示代理模型在第 k^{th} 个约束点处的等容黏性超应力预测（即，对于 $\{\mathbf{C}^k,\ \dot{\mathbf{C}}^k\}$ 输入）。N_c 是约束点的总数。式（42）的约束优化将克劳修斯–普朗克不等式（式（41））施加于我们的物理信息数据驱动本构模型中与速率相关的部分。请注意，式（42）中的不等式条件不是函数约束；相反，它是在有限个输入数据点处施加的。因此，C-GPR 仅对模型输出施加“弱”约束。

接下来，等容黏性超应力的归一化条件约束可写为

$$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}(\mathbf{C}=\mathbf{I},\dot{\mathbf{C}})=\mathbf{0} \tag{43}$$

上述条件要求等容黏性超应力在未变形状态下消失（即，$\mathbf{C}=\mathbf{I}$），无论该状态下施加的变形速率 $\dot{\mathbf{C}}$ 为何。由于在 $\mathcal{M}_{v,\ \mathrm{iso}}$ 代理模型的映射（式（31））中对应变率不变量J_1、J_4和 J_6 的特殊选择，该条件可以通过将无应力参考状态——$\{\mathbf{C}=\mathbf{I},\ \mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso}}=\mathbf{0}\}$——纳入训练数据来简单地强制实施。这是可行的，因为在未变形状态下，无论加载速率如何，这三个不变量都保持为零这一固定值，即，

$$\bar{J}_1(\mathbf{C}=\mathbf{I},\dot{\mathbf{C}})=0,\quad \bar{J}_2(\mathbf{C}=\mathbf{I},\dot{\mathbf{C}})=0,\quad \bar{J}_2(\mathbf{C}=\mathbf{I},\dot{\mathbf{C}})=0 \tag{44}$$

有关上述结果的推导，请参见附录 B。。根据式（44），$\mathbf{C}=\mathbf{I}$ 在映射 $\mathcal{M}_{v,\mathrm{iso}}$中对应于一组唯一的输入值：$[I_1,I_2,J_1,J_4,J_6]=[3,3,0,0,0]$，在该点，高斯过程回归的精确推断性质总会使黏性超应力值为零。

与不变量 J_1、 J_4和 J_6不同，$\mathbf{C} = \mathbf{I}$ 在未变形状态下的不变量 J_2、J_3、 J_5和 J_7 是张量 $\mathbf{C}$ 的函数（参见附录 B.）。因此，如果将这些不变量纳入映射$\mathcal{M}_{v,\text{iso}}$ （式（31）），就会有无穷多组可能的不变量值组合（即输入数据点）对应于无应力参考状态，从而无法利用高斯过程回归的精确推断性质来确保归一化条件。

5 模型性能

本节将从以下几个方面展示物理信息数据驱动本构模型的性能：（i）拟合来自不同变形模式（例如静水压缩，以及无约束单轴拉伸和压缩）的训练数据集的准确性；（ii）在训练区间之外进行样本外预测时的准确性和物理合理性；以及（iii）对训练数据集大小的要求。构成本构模型的三个代理模型——$\mathcal{M}_{\text{vol}}$、 $\mathcal{M}_{h,\text{iso}}$和$\mathcal{M}_{v,\text{iso}}$——就训练它们所需的特定数据集类型而言彼此独立（即公式（21）中的 $\mathcal{D}_{\text{vol}}$、$\mathcal{D}_{\text{vol}}$和 $\mathcal{D}_{\text{vol}}$，分别对应各模型），因此，以下各小节将分别使用多种变形模式进行训练和测试，以深入分析这些代理模型。在实际应用中，给定涵盖体积变形、等容准静态和等容动态变形模式的多个数据集，经过单独训练的 $\mathcal{M}_{\text{vol}}$、 $\mathcal{M}_{h,\text{iso}}$和$\mathcal{M}_{v,\text{iso}}$ 代理模型可以方便地组合成一个本构模型。

为评估 代理模型的拟合精度，采用以下百分比相对误差指标 d:

$$\text{err}(\widetilde{\mathbf{S}}, \mathbf{S}) = 100 \times \frac{\left\| \text{vec}(\widetilde{\mathbf{S}}) - \text{vec}(\mathbf{S}) \right\|_F}{\|\text{vec}(\mathbf{S})\|_F} \tag{45}$$

其中， $\|(\cdot)\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数，$\mathbf{S}$ 是代理模型预测的应力张量，$\mathbf{S}$ 是真实的应力张量值（即真实值）。标量误差 err 是针对各个数据点得到的。为方便起见，还将报告平均百分比误差值，

$$\overline{\text{err}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \text{err}_i}{N} \tag{46}$$

其中，err_i 是第 i个数据点处的误差值， N 是数据集（训练数据集或测试数据集）的总大小。

为评估模型在训练区间之外的预测精度和物理合理性，将考虑两类样本外“测试区域”： (i) 与训练期间所考虑的相同变形模式相对应的测试区域——例如，使用 [0, 0应变范围内的单轴拉伸应力–应变数据训练模型，然后预测更宽 [0, 0.5] 应变范围内的拉伸应力；(ii) 与模型训练期间所考虑的变形模式不同的测试区域——例如，使用单轴拉伸应力–应变数据训练模型，然后使用训练好的模型预测材料在单轴压缩和简单剪切变形模式下的响应。此外，还将研究训练数据集大小对拟合误差和样本外预测的影响。

最后，对于每个代理模型案例，我们会将模型的性能与以下两者进行比较：(i) 传统的黏弹性超弹性本构模型；以及 (ii) 采用经典机器学习黑箱映射的相应代理模型，该映射在张量$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}$ 的 Voigt形式（分别作为应变和应变率输入）与$\mathbf{S}$ （作为第二类 Piola-Kirchhoff 应力输出）之间建立关系（Ghaboussi 等（1998）；Lefik 和 Schrefler（2003））， 即

$$\text{Classical mapping: } \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{C}) \\ \text{vec}(\dot{\mathbf{C}}) \end{bmatrix} \rightarrow [\text{vec}(\mathbf{S})] \tag{47}$$

将使用标准高斯过程回归来学习经典映射。当然，在准静态加载条件下，不会考虑张量$\mathbf{C}$ 。

本文所展示的所有计算均在 Python 中完成（Van Rossum 和 Drake（2009））。对于机器学习任务，使用 Scikit-learn Python 软件包（Pedregosa 等（2011））。需要注意的是，作者已在该软件包的高斯过程回归模块中加入约束优化功能，用于开发基于约束高斯过程回归的代理模型。[1]

[1]论文被接收后，本文的代码将在 https://github.com/kshitizupadhyay/ viscohyperelastic-modeling 上发布。

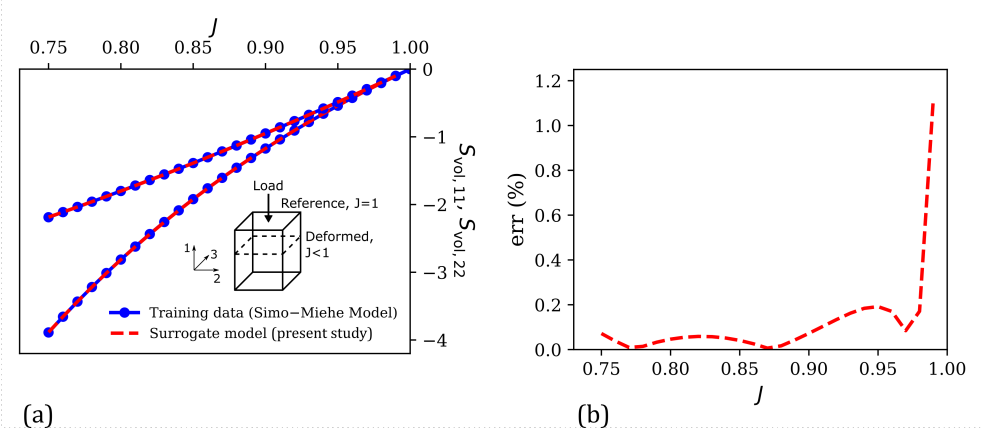


图 2： (a) 在受限压缩条件下，数值生成的体积应力分量（$\mathbf{S}_{\text{vol, 11}}$ 和 $\mathbf{S}_{\text{vol, 22}}$）与体积应变（$J$）训练数据的对比，以及相应的代理模型预测。插图为受限压缩变形模式的示意图，标出了参考状态、变形状态和11加载方向。(b) 训练区间内代理模型预测的百分比相对误差（err）随 J 的变化。

5.1 静水（受限单轴）加载下的 $\mathcal{M}_{\text{vol}}$ 代理模型

考虑以下变形梯度张量，

$$\mathbf{F}_{app} = \mathbf{I} + J\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 \quad \text{with } J \in [-0.75, 0] \tag{48}$$

实践中，通过受限压缩实验施加式（48）所示形式的变形，以研究静水体积材料响应（Sasson 等（2012年）；Kim 等（2019年）；Nie 等（2013年））。这些实验提供材料的静水应力／压力与体积应变（即 J）之间的响应，据此可校准特定形式的体积能量密度函数 $U(J)$（见式（14））。本研究采用常用的 Simo–Miehe体积能量密度（Simo 和 Miehe（1992））生成静水应力$\widetilde{\ }$，用于训练 $\mathcal{M}_{\text{vol}}$ 代理模型，

$$U^{\text{SM}}(J) = \frac{\kappa}{2}\left(\frac{J^2-1}{2} - \ln J\right) \tag{49}$$

其中， κ 为体积模量。我们选择 $\kappa = 10$。相应的体积应力分量$\mathbf{S}^{\text{SM}}_{\text{vol}}$（见式（13））为

$$\mathbf{S}^{\text{SM}}_{\text{vol}} = 2\frac{\partial U^{\text{SM}}(J)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\kappa}{2}\left(J^2-1\right)\mathbf{C}^{-1} \tag{50}$$

其中，$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{app} = \mathbf{F}^{\text{T}}_{app}\mathbf{F}_{app}$。

$\mathbf{C}^{app}$ 和$\mathbf{S}^{\text{SM}}_{\text{vol}}$构成式（21）的训练数据集 $\mathcal{D}_{\text{vol}}$（注意，在此情况下为 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\text{vol}}$），并按照第3节中详细介绍的流程用于训练$\mathcal{M}_{\text{vol}}$ 代理模型（式（26））。映射采用标准高斯过程回归。由于无应力未变形状态（即$\mathbf{F}^{app} = \mathbf{I}$）包含在训练数据中，因此只需在所有数据点处指定近零高斯噪声 $\alpha = 10^{-4}$（式（36）），即可实施归一化条件。

式（47）中的受限压缩变形模式生成三个非零体积应力分量：$\mathbf{S}_{\text{vol,11}}$、$\mathbf{S}_{\text{vol,22}}$和$\mathbf{S}_{\text{vol,33}}$。鉴于11加载方向，$\mathbf{S}_{\text{vol, 22}} = \mathbf{S}_{\text{vol,33}}$，因此仅有两个独立应力分量。图2(a)展示了训练数据中$\mathbf{S}_{\text{vol,11}}$ 和$\mathbf{S}_{\text{vol,22}}$ 随 J 的演化，并将其与训练后的代理模型预测的相应$\mathbf{S}_{\text{vol,11}}$–$J$ 和$\mathbf{S}_{\text{vol,22}}$–$J$ 响应进行比较。在此情况下，训练使用了26个数据点（即应变增量为0.01）。相对于 J 的百分比相对误差（式（45））曲线如图2(b)所示。从这些图中可以明显看出，在训练区间内，训练数据与代理模型预测结果高度吻合，这符合基于机器学习的模型的预期。总体而言，训练区间内的最大相对误差和平均相对误差分别为1.12%和0.12%，表明我们的代理模型具有很高的拟合精度。

接下来，我们分析代理模型在更广泛的 J（即测试范围）内的性能，并将其与以下方法的相应预测结果进行比较：(i) Neo-Hookean模型的传统体积应变能密度函数

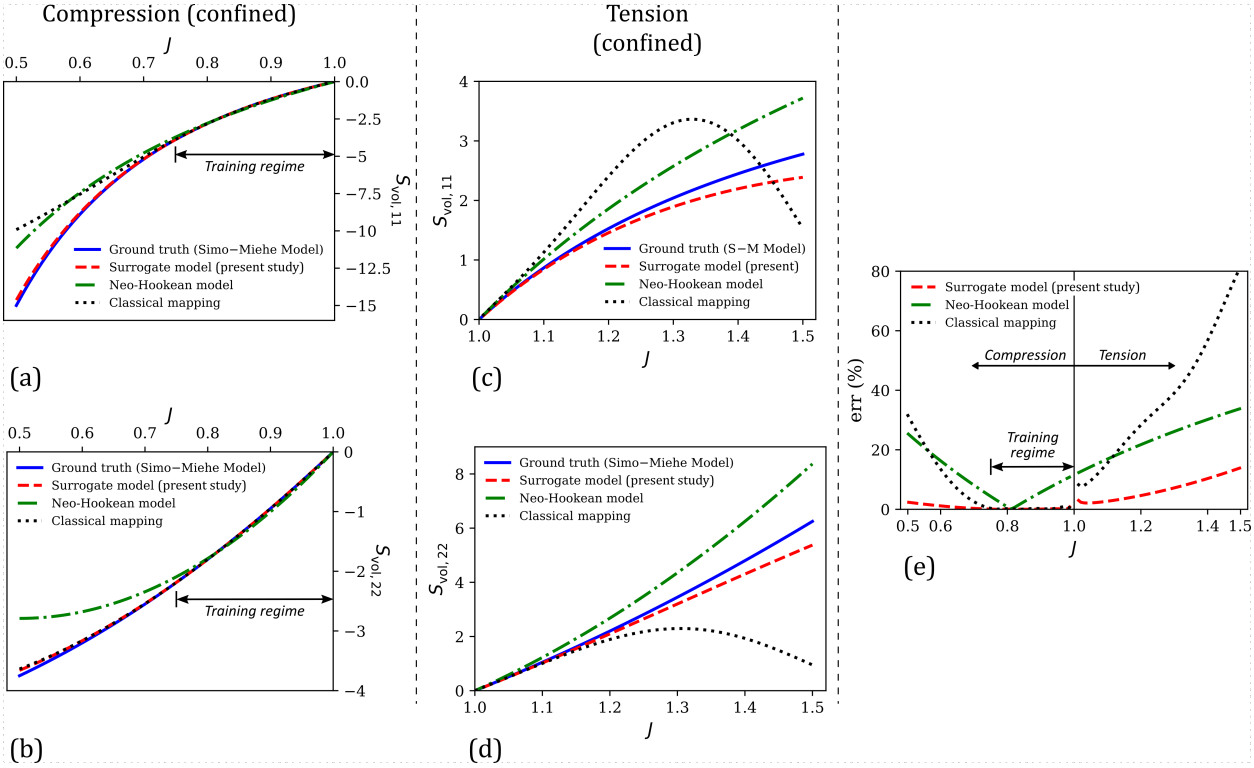


图 3： 总体测试区域（$J \in [0.5, 1.5]$）内，Simo–Miehe 模型（即真实值）数值生成的体积应力–体积应变数据与我们的代理模型、体积新胡克模型及经典机器学习映射模型相应预测结果的比较：(a) 受限压缩下 $\mathbf{S}_{\text{vol},\ 11}$ 与 J 的对比；(b) 受限压缩下 $\mathbf{S}_{\text{vol},\ 22}$ 与 J 的对比；(c) 受限拉伸下$\mathbf{S}_{\text{vol},\ 11}$ 与 J 的对比；(d) 受限拉伸下 $\mathbf{S}_{\text{vol},\ 22}$ 与 J 的对比。(d) 当前代理模型、体积新胡克模型和经典映射模型的百分比相对误差（err）与 J 响应的比较。

（De Rooij和Kuhl（2016）），以及(ii) 基于经典机器学习的映射方法（公式（47））。Neo-Hookean体积应变能密度及其相应的体积应力张量如下所示

$$U^{\text{NH}}(J) = \frac{\kappa_{\text{NH}}}{2}\,(J-1)^2 \tag{51a}$$

$$\mathbf{S}_{\text{vol}}^{\text{NH}} = 2\frac{\partial U^{\text{NH}}(J)}{\partial \mathbf{C}} = \kappa_{\text{NH}} J\,(J-1)\,\mathbf{C}^{-1} \tag{51b}$$

使用训练数据对体积新胡克模型进行标定，得到的 κ_{NH} 值为 11.56，接近 Simo–Miehe 模型中用于生成训练数据的真实值 $\kappa = 10$。

图 3(a-b) 展示了本文提出的代理模型、体积新胡克模型以及式 (47) 的经典映射模型在压缩变形模式下的应变范围（$J \in [0.5, 1]$）内对$\mathbf{S}_{\text{vol},\ 11}$–$J$ 和$\mathbf{S}_{\text{vol},\ 22}$–$J$ 响应的预测结果；该应变范围超出了训练区间（即训练中所考虑的变形模式）。同一图中还给出了扩展应变区间内的真实值（即 Simo–Miehe 模型）以供比较，同时图 3(e) 的左半部分展示了三个模型相对于真实值的百分比相对误差 err 与 J 的关系图。从这些图中可以清楚看出，在训练区间内（即 $J \in [0.75, 1]$），三个模型在预测应力–应变数据方面都具有合理的精度。在这三个模型中，两个基于机器学习的数据驱动模型——本研究的代理模型和经典映射模型——产生的平均相对百分比误差（err）分别为 0.12% 和 0.27%，远小于体积新胡克模型的误差；后者的 err 为 4.90%。这是预期之中的，因为不同于基于机器学习的映射，传统本构模型由于采用固定数学形式，其拟合精度有限。在训练区间之外，当 $J \in [0.5, 0.75]$ 时，我们的代理模型通过预测与真实值高度一致的应力分量，明显优于另外两个模型。就平均相对百分比误差而言，我们的代理模型在该区间内的 err 为 1.07%，比体积新胡克模型（即 14.86%）和经典映射模型（即 12.72%）的相应误差小一个数量级。

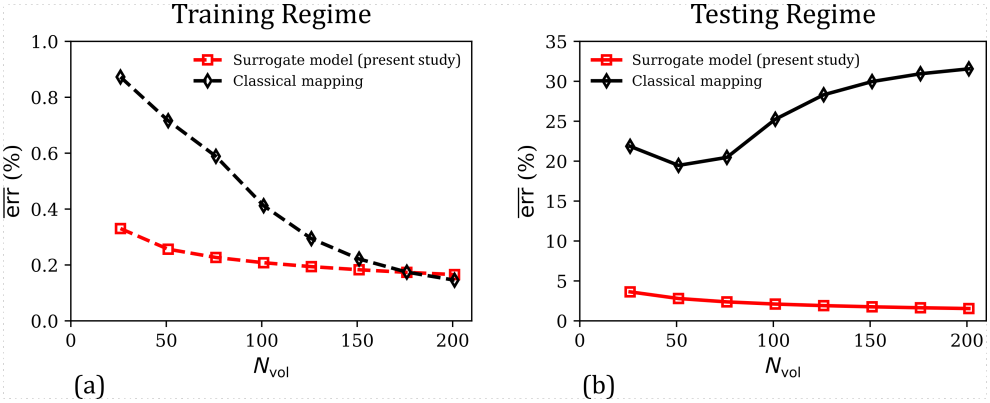


图 4： (a) 比较代理模型和经典映射模型在训练区间（$J \in [0.75, 1]$）内的预测平均百分比相对误差（err）随训练数据集大小（N_{vol}）的变化。(b) 对于总体测试区域（$J \in [0.5, 1.5]$）内的预测响应，比较当前代理模型和经典映射模型的 err 随 N_{vol} 响应的变化。

图 3(c-d) 比较了三个模型在拉伸（受限）变形模式（$J \in [1, 1.5]$）下的预测结果与真实值（Simo–Miehe 模型）；该变形模式完全未被纳入训练数据。在此情况下，经典映射模型给出了不符合物理规律的预测：在较大的体积应变下，应力开始降低，违反了增量变形的热力学稳定性。事实上，对于 $J > 1.6$ （图中未显示），该模型预测受限拉伸加载下会产生压缩应力，这是不可能的。这种错误的模型行为源于这些传统基于机器学习的本构模型所采用的纯黑箱映射，因为它们没有对连续体的响应施加任何物理或机理约束。从图 3(c-d) 可以看出，我们的物理信息数据驱动代理模型不存在这一问题，即使在训练中未考虑的变形模式下，也能做出符合物理规律且可信的预测。不出所料，体积新胡克模型的预测结果在物理上也是合理的（如 $\kappa_{\text{NH}} > 0$）。此外，就预测应力分量与真实值的一致性而言，我们的代理模型优于另外两个模型。我们的模型在拉伸区间内的平均相对百分比误差为 6.66%，显著低于体积新胡克模型（即 23.59%）和经典映射模型（即 37.23%）的误差。

最后，图 4(a-b) 分析了训练数据集大小对两种数据驱动模型性能的影响，图中绘出了训练区间（$J \in [0.75, 1]$）和总体测试区域（$J \in [0.5, \overline{1.5}]$）内的平均百分比相对误差 err 随训练数据集大小 N_{vol} （即 $\mathcal{D}_{\text{vol}}$ 中的数据点数量）的变化。在训练区间（图 4(a)）中，两种模型的误差均随 N_{vol} 渐近下降。这是基于机器学习的模型的典型表现：用于模型训练的数据量越大，其在训练区间（即插值）内的预测效果就越好。总体而言，即使训练数据集仅包含 26 个应力–应变值，两种模型仍表现出极高的拟合精度（err）。在测试范围（图 4(b)）中，该范围涵盖受限压缩和拉伸变形模式，经典映射模型的性能不再随训练数据集大小的增加而提升。事实上，对于 $N_{\text{vol}} > 50$，err 会随 $\overline{N_{\text{vol}}}$ 单调增加，这与其在受限拉伸区间内给出的高度不符合物理规律的预测一致（示例见补充材料第 SM1 节）。由于具有物理信息特性，我们的代理模型不存在这一局限，其在训练区间和测试区间内的预测效果均随训练数据集大小的增加而持续提升。此外，由于基于物理的约束限制了可能的高斯过程回归超参数特征空间，即使在 $N_{\text{vol}} = 26$，我们的代理模型预测也与真实值高度一致。显然，我们的物理信息数据驱动本构模型兼具基于机器学习模型的高拟合精度，以及传统本构模型的物理合理性和小数据集适用性。

$\widetilde{\ }$5.2 准静态单轴和剪切加载下的$\mathcal{M}_{h,\ \text{iso}}$ 等容代理模型

现在，考虑以下等容（保体积）单轴变形模式，

$$\mathbf{F}_{app} = \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3) \quad \text{with } \lambda \in [1, 1.25] \tag{52}$$

其中，λ 称为单轴伸长。在准静态假设下，拉伸速率 $\dot{\lambda}$ 近似为零。式（52）所示的变形通常用于软材料的力学表征，例如在

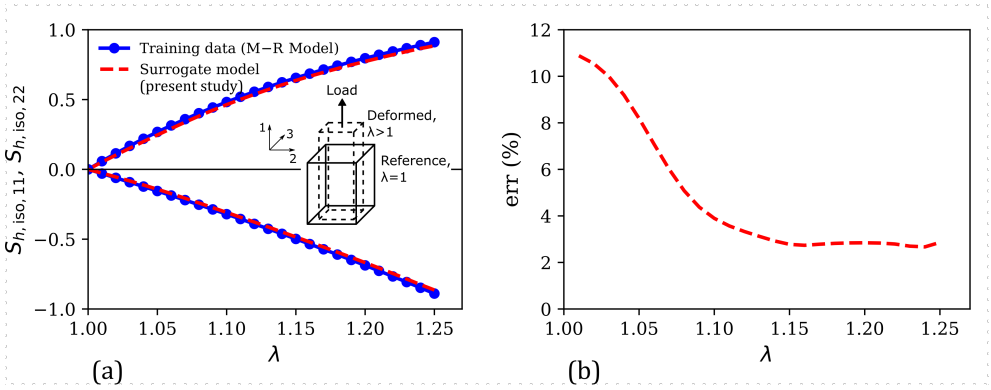


图5： (a) 比较数值生成的等容超弹性应力分量（$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso},\ 11}$ 和 $\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso},\ 22}$）与单轴拉伸下单轴拉伸（$\lambda$）训练数据的结果，以及相应的代理模型预测。插图示意性地展示了无约束单轴拉伸变形模式，突出显示参考状态和变形状态以及11加载方向。(b) 代理模型预测相对于训练区间内 λ 的百分比相对误差（err）的演化。

无约束单轴拉伸试验中（Miller 和 Chinzei（2002年）；Gao 等（2010年）；Brown（2006年））。利用这些试验获得的单轴应力与伸长响应来标定超弹性本构模型。本研究采用一种称为 Mooney–Rivlin模型的多项式型超弹性模型（Mooney（1940年）；Rivlin（1948b））， 以$\widetilde{\ }$ $\bar{\ }$生成训练数据，用于开发我们的 $\mathcal{M}_{h,\ \mathrm{iso}}$ 代理模型。Mooney–Rivlin模型的应变能密度 W_h 及相应的等容超弹性应力$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso}}$ 表达式如下:

$$\bar{W}_h^{\mathrm{MR}} = A_{10}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + A_{01}\left(\bar{I}_2 - 3\right) \tag{53a}$$

$$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}^{\mathrm{MR}} = 2\frac{\partial \bar{W}_h^{\mathrm{MR}}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3}\left[2\left(A_{10} + \bar{I}_1 A_{01}\right)\mathrm{Dev}\mathbf{I} - 2A_{01}\mathrm{Dev}\bar{\mathbf{C}}\right] \tag{53b}$$

其中， A_{10} 和 A_{01} 为模型参数。我们选取 $A_{10} = 1$ 和 $A_{01} = 0.5$ 来生成训练数据。此外，$J = J_{app} = \det(\mathbf{F}_{app})$、$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{app} = \mathbf{F}_{app}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_{app}$以及 $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}_{app} = J^{-2/3}\mathbf{C}_{app}$。
使用$\mathbf{C}_{app}$ 和$\mathbf{S}_h^{\mathrm{MR}}{}_{,\mathrm{iso}}$ 作为训练数据集$\mathcal{D}_{h,\mathrm{iso}}$ （在本例中，$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{h,\mathrm{iso}}$），按照式（27）训练了一个基于标准高斯过程回归的映射。与静水加载情形类似，本例中的归一化条件由于训练数据中包含无应力参考状态而自动满足。该训练得到的代理模型可以预测任意准静态变形下的$\widetilde{\ }$等容超弹性应力分量$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}$。

图5比较了用于训练代理模型的应力–伸长响应与该工况下训练所得代理模型的相应预测。与静水情形（第5.1节）类似，单轴加载条件下产生两个独立应力分量，$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},11}$ 和$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},22}$，其中$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},22} = \mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},33}$。本例中使用了26个数据点进行训练。从图5(a)可见，模型预测与训练数据高度吻合，因此误差相对较小，如图5(b)所示。本例的平均百分比相对误差为4.75%。

基于图 5 所确立的良好拟合精度，现对我们的代理模型在更广泛的测试范围内的性能进行分析。本例中的测试范围包括单轴变形模式（式（52））以及 $\lambda \in [0.5, 1.5]$ 下的简单剪切变形模式,

$$\mathbf{F}_{app} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \quad \text{with}\, \gamma \in [0, 0.5] \tag{54}$$

其中 γ 为剪切应变。将代理模型的性能与经典映射模型（公式（47））以及另一种多项式超弹性模型——二参数 Yeoh模型（以下简称 Yeoh模型）进行比较。Yeoh模型（Yeoh（1993））定义为

$$\bar{W}_h^{\mathrm{Y}} = C_1\left(\bar{I}_1 - 3\right) + C_2\left(\bar{I}_1 - 3\right)^2 \tag{55a}$$

$$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}^{\mathrm{Y}} = 2\frac{\partial \bar{W}_h^{\mathrm{Y}}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3}\left[2C_1 + 4C_2\left(\bar{I}_1 - 3\right)\right]\mathrm{Dev}\mathbf{I} \tag{55b}$$

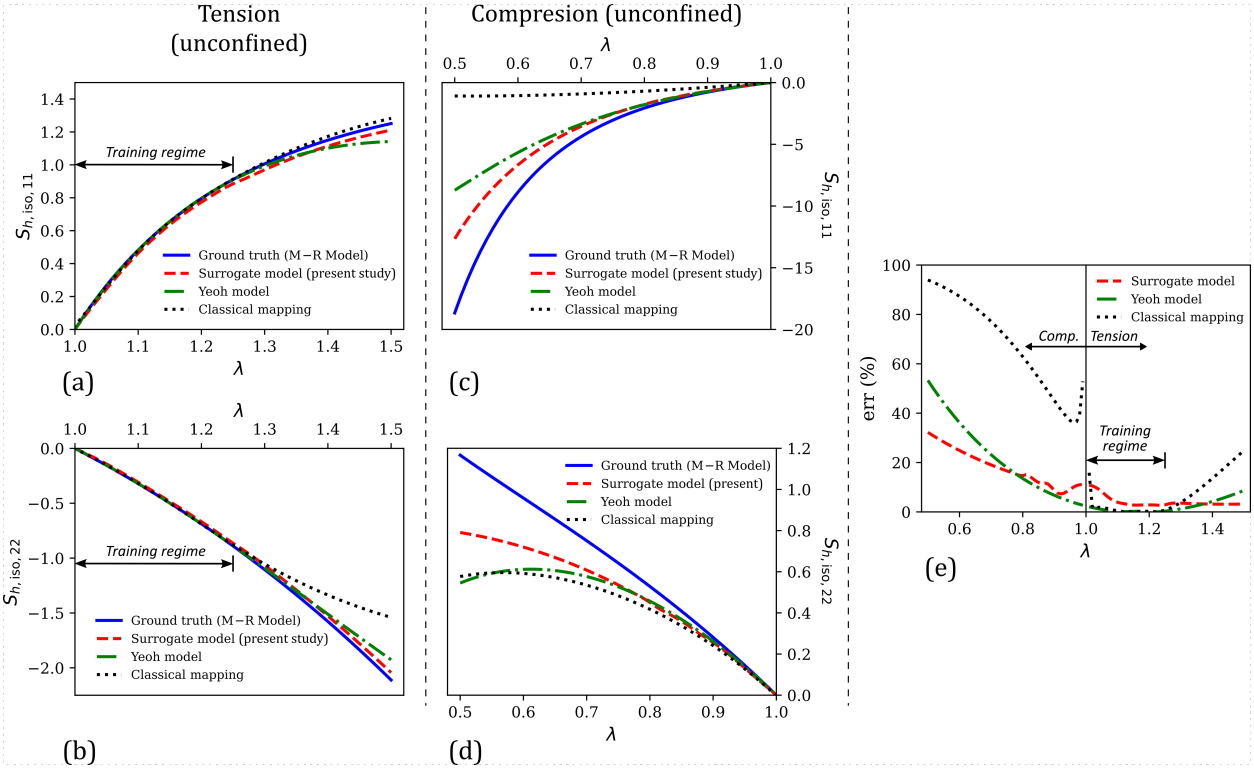


图6： 比较单轴测试范围（$\lambda \in [0.5, 1.5]$）内由 Mooney–Rivlin模型数值生成的等容超弹性应力–单轴伸长数据（即真实值）与我们的代理模型、Yeoh模型和经典映射模型的相应预测：(a) 单轴拉伸下$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso},\ 11}$ 与 λ 的关系；(b) 单轴拉伸下$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso},\ 22}$ 与 λ 的关系；(c) 单轴压缩下$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso},\ 11}$ 与 λ 的关系；(d) 单轴压缩下$\mathbf{S}_{h,\ \mathrm{iso},\ 22}$ 与 λ 的关系。(e) 比较当前代理模型、Yeoh模型和经典映射模型的百分比相对误差（err）与 λ 响应。

标定 使用单轴应力–伸长训练数据得到的 Yeoh模型产生了 $C_1 = 1.46$ 和 $C_2 = -0.21$. 图6比较了当前代理模型、经典映射模型和Yeoh模型预测的应力与单轴伸长之间的关系，并与真实值（即用于生成训练数据的Mooney–Rivlin模型所得结果）进行了对比。在 $\lambda \in [1, 1.25]$ 的训练区间内（见图6(a-b)），三个模型均与真实值高度一致。从图6(e)所示的百分比相对误差来看，三个模型在该区间内预测结果的平均误差分别为4.75%（代理模型）、1.26%（经典映射模型）和0.50%（Yeoh模型）。

在总体测试区域内，无论从预测响应的物理合理性还是预测精度来看，我们的代理模型都明显优于另外两个模型。例如，经典映射模型预测的压缩应力–拉伸响应（图6(c-d)）表现出不合理的力学特征：(i) $\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},\ 11} - \lambda$ 响应表现出软化特征，这与超弹性软材料的典型特性不符；超弹性软材料通常在加载方向上表现出压缩-拉伸不对称性（即材料在压缩下表现出高度非线性且更刚性的响应，而在拉伸下则相对较软）（Budday 等人（2017）；Upadhyay 等人（2020a）；Treloar（1944））；(ii) $\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},22} - \lambda$ 响应在约 $\lambda = 0.57$处达到最大值后开始下降，这违背了应力–拉伸响应应具有的单调性（在损伤/失效之前）。Yeoh模型也表现出后一种行为，其预测的$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},22}$ 与 λ 的响应在 $\lambda < 0.61$的大压缩应变下违背了单调性。文献中已观察到，传统超弹性模型在某些模型参数值下会产生非物理响应预测，这被归因于具有这些参数值的模型违反了热力学第二定律（Liu（2012年）；Upadhyay 等人（2019b）；Fontenele 等人（2022年））。得益于其物理信息驱动公式，我们的代理模型避免了这一问题，即使在大变形下也能产生符合物理规律的力学响应。此外，在单轴测试范围内，其平均百分比相对误差为10.98%，略低于Yeoh模型的11.08%误差，并显著低于经典映射模型的49.94%误差。

图 7(a) 展示了三个模型预测的剪切应力–剪切应变响应以及真实值。这里，经典映射模型无论施加的应变如何，预测的应力始终为零。这归因于模型仅

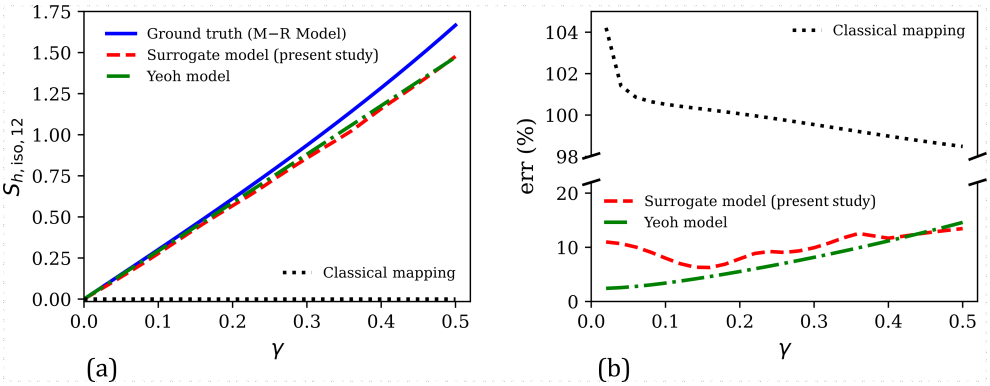


图7： (a) 比较Mooney–Rivlin模型（即真实值）在剪切测试区间（$\gamma \in [0, 0.5]$）内数值生成的等容超弹性剪切应力（$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},12}$）–剪切应变（$\gamma$）数据与我们的代理模型、Yeoh模型和经典映射模型的相应预测结果。(b) 比较当前代理模型、Yeoh模型和经典映射模型的百分比相对误差（err）与 γ 响应之间的关系。

考虑了训练数据集中的单轴变形，其中$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}$张量的非对角分量始终为零。由于我们的代理模型基于应变不变量与响应系数之间的映射，因此不存在这一局限，并能如图7(a)所示准确预测剪切应力。需要注意的是，尽管简单剪切变形模式会产生多个非零应力分量（即$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},11}$、$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},12}$、$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},22}$和$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso},33}$），为简洁起见，这里仅展示占主导地位的 12 分量。根据包含所有非零应力分量、并绘于图 7(b) 中的相对误差百分比指标，我们的代理模型在整个剪切变形模式下的最大误差为 13.46%，平均误差为 10.09%。相比之下，Yeoh模型的最大误差为 14.59%，平均误差为7.54%。总体而言，可以看出，本研究的代理模型和 Yeoh模型在整个测试范围（单轴变形 + 剪切）内均具有合理的预测精度，但只有我们的代理模型能够在所有所研究的变形模式下给出物理上合理的应力–应变预测。

图8展示了训练区间和总体测试区域中平均百分比相对误差 err 随训练数据集大小 $N_{h,\mathrm{iso}}$ 的变化。与静水加载情况类似，我们的代理模型使 err 随 $N_{h,\mathrm{iso}}$ 单调减小，并且在两种情况下都呈现出具有渐近行为的响应。另一方面，经典映射模型仅在测试范围内表现出 err 的渐近下降，而在训练区间内则呈现轻微上升。最终，尽管两种模型在所研究的每一种训练数据集大小下都表现出非常高的拟合精度，我们的代理模型在多种变形模式下都能给出显著更准确的预测。这种在不损失精度的情况下在不同变形模式之间无缝转换的能力，是可信本构模型的显著特征（Beda（2014年））。

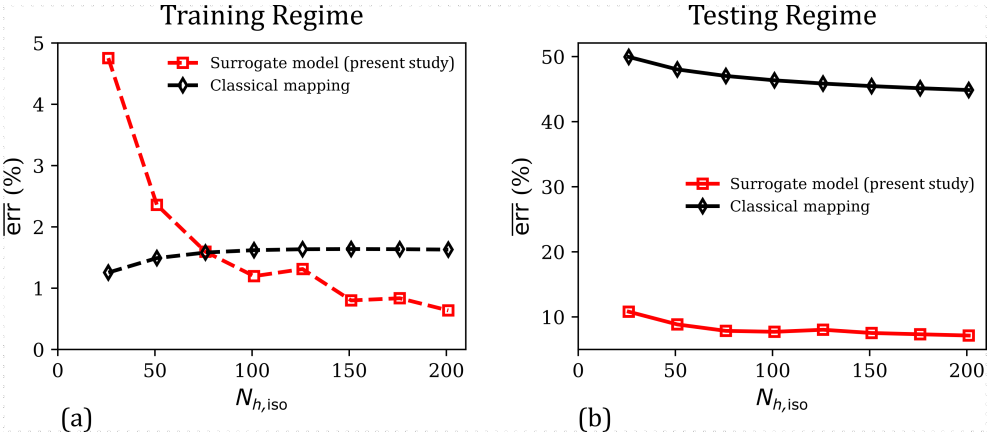


图8： (a) 比较代理模型和经典映射模型在训练区间（$\lambda \in [1, 1.25]$）内预测结果的平均百分比相对误差（err）随训练数据集大小（$N_{h,\mathrm{iso}}$）的变化。(b) 对于当前代理模型和经典映射模型在总体测试范围（$\lambda \in [0.5, 1.5] \cup \gamma \in [0, 0.5]$）内的预测响应，比较相应的err与$N_{h,\mathrm{iso}}$ 响应之间的关系。

5.3 The$\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\mathrm{iso}}$动态单轴与剪切加载下的代理模型

到目前为止，本研究中的物理信息数据驱动本构模型仅在准静态加载条件下进行了评估，此时施加的应变率非常小，因此黏性耗散仍可忽略。现在，考虑在有限施加加载速率下进行等容动态单轴加载，相当于遵循

$$\mathbf{F}_{app} = \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \right) \quad \text{with } \lambda \in [1, 1.5] \tag{56a}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_{app} = \dot{\lambda} \left[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 - \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \right) \right] \quad \text{with } \dot{\lambda} \in [10, 100] \tag{56b}$$

其中，$\dot{\lambda} = d\lambda/dt$ 为施加的单轴应变率。在加载过程中的任意时刻 t，$\lambda = \lambda t.$

在软材料的高应变率拉伸试验中，会施加形式如式（56）所示的动态加载，例如拉伸 Kolsky 杆试验（参见 Upadhyay 等人（2021年）；Yang 等人（2000年））。随后，将这些试验获得的应力–应变（或伸长）–应变率数据与准静态单轴试验获得的应力–应变（或伸长）数据结合起来，用于标定黏弹性超弹性本构模型。由于许多黏弹性超弹性本构模型（综述见 Upadhyay 等人（2020b年））假设总应力可加性分解为超弹性（与速率无关）分量和黏性过应力分量（例如式（14））， 因此，准静态试验数据专门用于标定超弹性模型（W_h）参数，而通过从高应变率应力–应变数据中减去准静态应力–应变数据所计算得到的黏性过应力，则用于标定本构模型的黏弹性分量的模型参数（例如式（14）中的 W_v）。在本研究中，采用三参数 Upadhyay–Subhash–Spearot（USS）黏性耗散势（Upadhyay 等人（2020b年，2022a年））生成黏性过应力训练数据，以开发$\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\mathrm{iso}}$代理模型，

$$\bar{W}_v^{\mathrm{USS}} = k_{11} \bar{J}_2 \sqrt{\bar{I}_1 - 3} + \frac{k_{21}}{c_{21}} \bar{J}_5^{c_{21}} \sqrt{\bar{I}_2 - 3} \tag{57a}$$

$$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}^{\mathrm{USS}} = 2 \frac{\partial \bar{W}_v^{\mathrm{USS}}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} = J^{-2/3} \left[\left(4 k_{11} \sqrt{\bar{I}_1 - 3} \right) \mathrm{Dev}(\dot{\bar{\mathbf{C}}}) + \left(2 k_{21} \bar{J}_5^{c_{21}-1} \sqrt{\bar{I}_2 - 3} \right) \mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}} \dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{C}}) \right] \tag{57b}$$

其中，k_{11} 和 k_{21} 分别为线性和非线性速率敏感性控制参数，c_{21} 为速率敏感性指数。我们使用 $k_{11} = 1$、$k_{21} = 1$和 $c_{21} = 0.75$ 生成训练数据。不变量 I_1、I_2、J_2和 J_5 的表达式见式（15）。与准静态加载情况相同，$J = J_{app} = \det(\mathbf{F}_{app})$、$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{app} = \mathbf{F}_{app}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_{app}$以及 $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}_{app} = J^{-2/3} \mathbf{C}_{app}$。$\dot{\bar{\mathbf{C}}}$ 是 $\bar{\mathbf{C}}_{app}$的时间变化率。

由 USS 模型生成的训练数据集$\mathcal{D}_{v,\mathrm{iso}} = \mathcal{D} = \{\mathbf{C}_{app}, \dot{\mathbf{C}}_{app}, \mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}^{\mathrm{USS}}\}$（见式（21））用于训练$\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\mathrm{iso}}$代理模型（式（28））。与先前的准静态情况（涉及$\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}$和$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}$）类似，由于训练数据中考虑了无应力参考状态，归一化条件得以隐式满足。另一方面，热力学第二定律约束则通过选用 C-GPR 作为回归方法来施加。此处，式（42）中超参数优化问题的不等式约束在所有训练输入数据点处施加（即约束点与训练数据点相同；$N_c = N_{v,\mathrm{iso}}$）。训练得到的$\widetilde{\mathcal{M}}_{v,\mathrm{iso}}$代理模型可以针对任意给定的施加张量 $\mathbf{C}$ 和$\dot{\mathbf{C}}$预测黏性超应力$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}$。

图9研究了数据驱动代理模型在由单轴拉伸加载的训练区间（式（52））中的拟合响应，该区间由范围为 $\lambda \in [10, 100]$ 的5个均匀分布的拉伸速率组成（即，$\dot{\lambda} = 10, 32.5, 55, 77.5,$ 和100），并且对于所考虑的每个拉伸速率，在 $\lambda \in [1, 1.5]$ 范围内包含31个均匀分布的拉伸值。因此，训练数据点总数为 $5 \times 31 = 155$。单轴拉伸下的两个非零应力分量$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},11}$ 和$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},22}$分别绘制于图9(a)和图9(b)中。从这些图中可以明显看出，模型预测结果与应力–伸长–拉伸速率训练数据之间具有极好的一致性。相应的标量拟合误差（err）随伸长的响应如图9(c)所示；其中，曲线表示对所有研究的拉伸速率取平均后的平均err值，阴影区域表示平均值 $\pm$ 标准差的垂直范围。err随 λ 响应在较小伸长处从相对较高的值开始，随后在 $\lambda > 1.1$处始终保持接近于零的较小值。小拉伸值处较大的err归因于训练数据中小应变区间内的应力非常小（即err公式中的分母），这会导致即使真实应力与预测应力之间的绝对差异非常小，也产生异常偏高的err。总体而言，

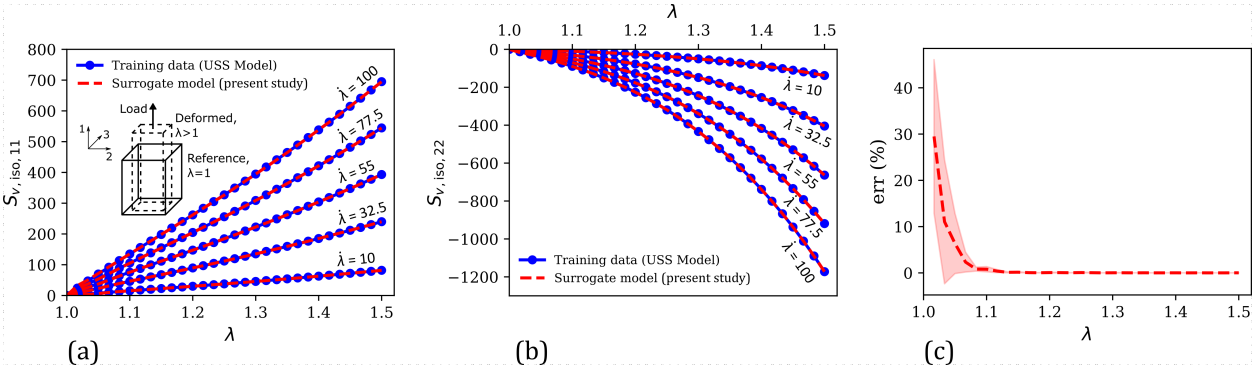


图9： (a) 比较数值生成的等容黏性超应力分量 $\mathbf{S}_{v,\ \mathrm{iso},\ 11}$ 与多个拉伸速率 ($\dot{\lambda}$) 下的单轴拉伸 (λ)，以及相应的代理模型预测结果。插图展示了无约束单轴拉伸变形模式的示意图。(b) 训练数据和代理模型在固定 $\dot{\lambda}$ 值下对应的 $\mathbf{S}_{v,\ \mathrm{iso},\ 11}$ 与 λ 响应。(c) 训练区间内代理模型预测结果相对于 λ 的百分比相对误差 (err) 的演化（虚线：所有拉伸速率下的平均 err；阴影区域：平均值 ± ± 标准差）。

全部155个训练数据点的平均百分比相对误差 err 为1.73%，表明模型拟合精度非常高。

现在，我们将在由拉伸、压缩和简单剪切变形模式组成的更广泛测试范围内，考察数据驱动模型预测的准确性和物理合理性。这里，两种单轴变形模式（即拉伸和压缩）包含范围为 $\dot{\lambda} \in [-145, 145]$ 的拉伸速率，以及范围为 $\lambda \in [0.5, 1.75]$ 的拉伸值（参见公式 (56)）。模型测试中考虑的具体拉伸速率值为： $\dot{\lambda}$ =±10, ±32.5, ±55, ±77.5, ±100, ±122.5、以及 ±145。现在，动态简单剪切变形表示为

$$\mathbf{F}_{app} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \quad \text{with}\, \gamma \in [0, 0.5] \tag{58a}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_{app} = \dot{\gamma} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \quad \text{with}\, \dot{\gamma} \in [10, 145] \tag{58b}$$

其中 $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$为施加的剪切应变率。在加载过程中的任意时刻 t， $\gamma = \dot{\gamma} t$。在模型测试中，我们考虑范围为 $\dot{\gamma} \in [10, 145]$ 的剪切应变率（具体为 $\dot{\gamma} = 10$，32。5，55，77。5，100，122。5，和145）；对于每个应变率，均考虑范围为 $\gamma \in [0, 0.5]$ 的剪切应变。总体测试范围在最大拉伸/应变以及拉伸率/应变率幅值方面均超出了训练区间，并涵盖多种变形模式。与前两个准静态情况一样，将当前模型的预测结果与经典映射模型（方程（28））以及文献中的现有本构模型进行比较。此处，我们选择Pioletti模型（Pioletti 等人（1998年）；Pioletti和Rakotomanana（2000年）），

$$\bar{W}_v^{\mathrm{PL}} = \frac{\eta'}{4} \left(\bar{I}_1 - 3\right) \bar{J}_2 \tag{59a}$$

$$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}^{\mathrm{PL}} = 2 \frac{\partial \bar{W}_v^{\mathrm{PL}}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} = J^{-2/3} \eta' \left(\bar{I}_1 - 3\right) \mathrm{Dev}(\dot{\mathbf{C}}) \tag{59b}$$

Pioletti模型　　使用拉伸应力–拉伸–拉伸速率训练数据集进行了校准，结果为 $\eta' = 6.9$　　4. 图10(a-b)比较了测试范围内三个具有代表性的拉伸速率下（为清晰起见），当前数据驱动代理模型、经典映射模型和Pioletti模型所预测的拉伸应力-伸长响应，以及真实值（即USS模型预测值）。在这些图所示的三个拉伸速率中， $\dot{\lambda} = 10$ 和 $\dot{\lambda} = 55$ 属于训练子集，而 $\dot{\lambda} = 145$ 属于训练期间未被考虑的测试数据集。在训练区间（即 $\lambda \in [1, 1.5]$ 和 $\lambda \in [10, 100]$）内，两个数据驱动模型均表现出优异的拟合性能，因为它们预测的拉伸应力-伸长响应几乎与真实值重合。相比之下，Pioletti模型的拟合精度相对较低，这归因于其过于简单的数学形式，仅包含一个模型参数。就图11中绘制的标量百分比误差指标而言（对所有研究的应变率取平均），我们的代理模型在训练区间内的平均预测误差最低，为1.73%，其次是经典映射模型（4.67%）和Pioletti模型（40.59%）。在训练范围之外

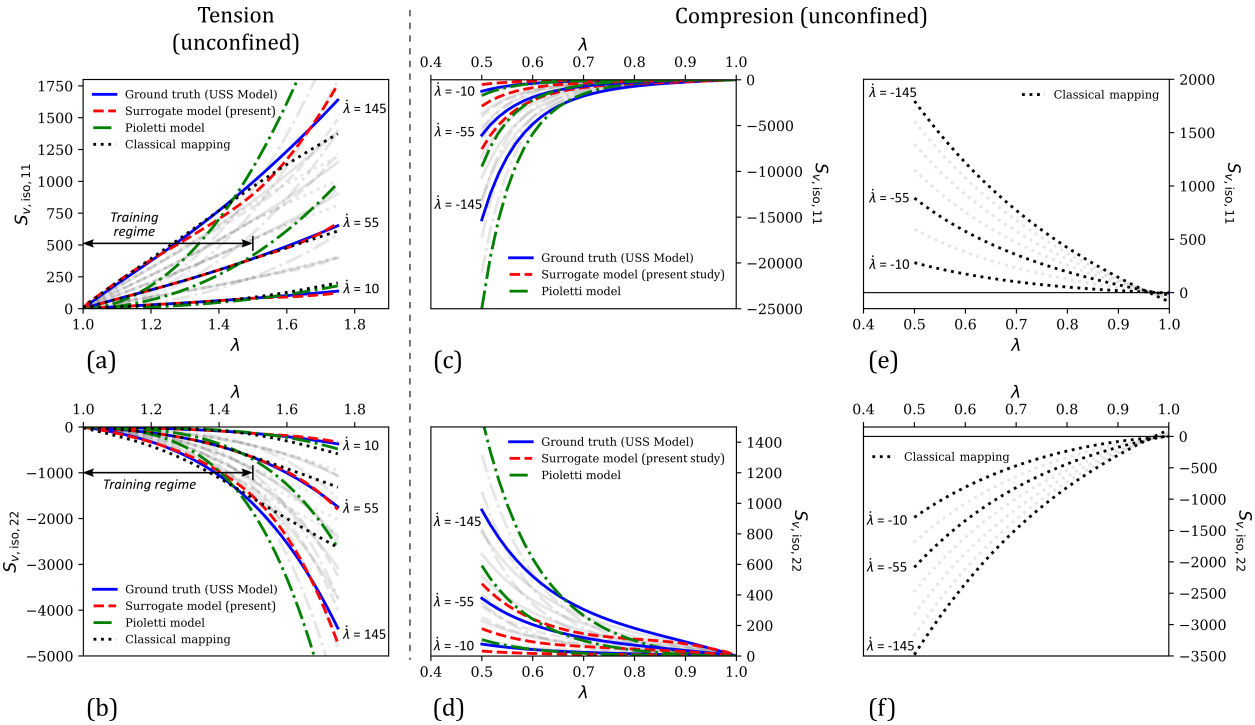


图 10： 比较 USS 模型（即真实值）在单轴测试范围（$\lambda \in [0.5, 1.75]$, $\dot{\lambda} \in [-145, 145]$）内多个拉伸速率下数值生成的等容黏性超应力–单轴伸长数据，以及我们的代理模型、Pioletti模型和经典映射模型的相应预测结果：(a) 单轴拉伸下，$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},11}$ 与 λ 的关系；(b) 单轴拉伸下，$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},22}$ 与 λ 的关系；(c,e) 单轴压缩下，$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},11}$ 与 λ 的关系；(d,f) 单轴压缩下，$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},22}$ 与 λ 的关系。注：背景中的浅灰色曲线对应拉伸速率 $\dot{\lambda} = \pm 32.5, \pm 77.5, \pm 100$ 和 ± 122.5下的数据，这些速率也纳入了模型测试，但为清晰起见未在图中显示。

拉伸变形模式下的范围内，当 $\lambda > 1.5$ 或 $\lambda > 100$ 时（见图10a-b），Pioletti模型仍然是所研究的三个模型中性能最差的模型。然而，此时经典映射模型的应力预测也与真实值存在较大差异，尤其是在高拉伸速率下。总体而言，在拉伸变形模式下，我们的代理模型的平均百分比相对误差err仅为3.40%，显著低于经典映射模型（12.30%）和Pioletti模型（41.59%）。

在压缩变形模式下（图10(c-f)），三种模型的应力预测均在不同程度上与真实值存在偏差。尽管如此，我们的数据驱动代理模型和Pioletti模型的应力-拉伸曲线在物理上是合理的，并表现出预期的压缩特性（即负$\mathbf{S}_{v,\ \mathrm{iso},\ 11}$

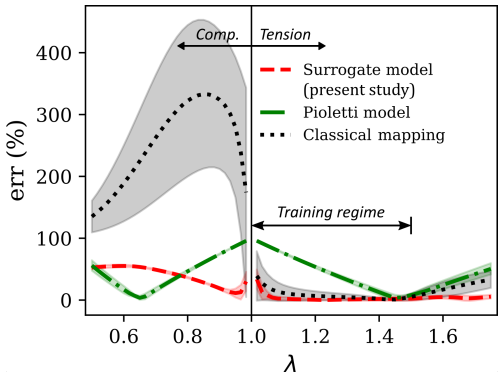


图 11： 比较当前代理模型、Pioletti模型和经典映射模型的百分比相对误差（err）与 λ 响应之间的关系。线条表示所有研究应变率下的平均 err，阴影区域表示平均 ± 标准差。

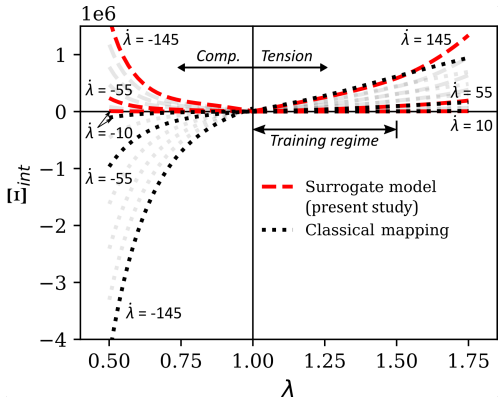


图 12： 现有代理模型与经典机器学习映射模型的内耗散（Ξ_{int}）与 λ 响应的比较。注：背景中的浅灰色线条表示对应于拉伸速率 $\dot{\lambda} =$ 、 、和 的数据。这些数据也在模型测试中进行了评估，但为清晰起见未在本图中显示。 ± 32.5 ± 77.5 ± 100 ± 122.5

以及$\mathbf{S}_{v,\ \mathrm{iso},\ 22}$），在每个所研究的伸长速率下均具有单调性，并且在11加载方向上表现出压缩-拉伸不对称性（即压缩状态下的响应比拉伸状态下更刚性）。另一方面，经典映射模型在压缩状态下预测出了拉伸应力（见图10(e-f)），这在物理上是不合理的。由于这些不合理的预测，该模型的平均百分比相对误差err为253.14%，比我们的代理模型（39.69%）和Pioletti模型（45.59%）对应的平均误差高出一个数量级。

现在根据两个数据驱动模型（现有代理模型和经典映射模型）在测试范围内对热力学第二定律的符合性，对它们的预测结果进行分析。为此，图 12 绘制了这两个模型预测的多个拉伸速率下内部黏性耗散 Ξ_{int} 随伸长变化的曲线。在拉伸变形模式下，两个模型均产生非负黏性耗散，因此满足热力学第二定律（见式（41））。然而，在压缩状态下，经典映射模型的预测结果在每个研究的拉伸速率下都显示出负内耗散，这违反了热力学第二定律。这导致模型预测出物理上不合理的应力–拉伸–拉伸速率预测结果，正如图 10(e-f) 所示。得益于其强制黏性耗散保持非负的物理信息构造，我们的代理模型避免了这一问题，并且其预测的单轴力学响应在整个拉伸测试范围内均符合热力学第二定律。

图 13 分析了我们代理模型在简单剪切变形模式下的性能，并将其与 Pioletti 模型和经典映射模型进行了比较。与第 5.2 节中的准静态超弹性情形类似，经典模型预测的剪切应力分量（即 $\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},12}$）为零，无论施加的剪切应变和应变率如何（见图 13(a)）。这种非物理行为归因于训练数据集中所考虑的张量中不存在任何非零的非对角分量

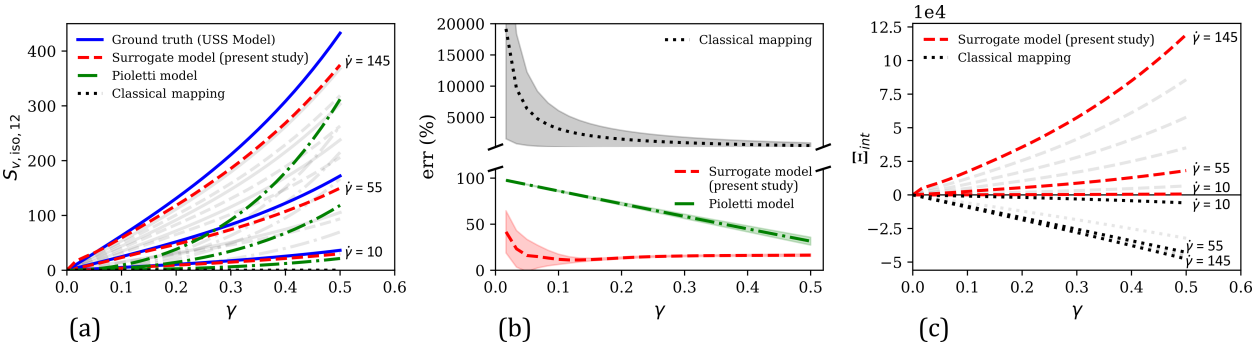


图13： (a) 在剪切测试区间（$\gamma \in [0, 0.5]$, $\dot{\gamma} \in [10, 145]$）内，对比由USS模型（即真实值）数值生成的等容剪切黏性超应力（$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso},12}$）–剪切应变（$\gamma$）数据与我们的代理模型、Pioletti模型和经典映射模型的相应预测结果。(b) 三种模型对应的百分比相对误差（err）与 γ 响应的关系。曲线表示所有研究应变率下的平均err，阴影区域表示平均 $\pm$ 标准差。(c) 对比两种数据驱动模型（我们的代理模型和经典映射模型）的内耗散（Ξ_{int}）与 γ 响应的关系。注：在(a)和(c)中，背景浅灰色曲线表示应变率 $\dot{\gamma} = \pm 32.5, \pm 77.5, \pm 100$, 和 ± 122.5对应的数据；这些数据也在模型测试中进行了评估，但为清晰起见未予显示。

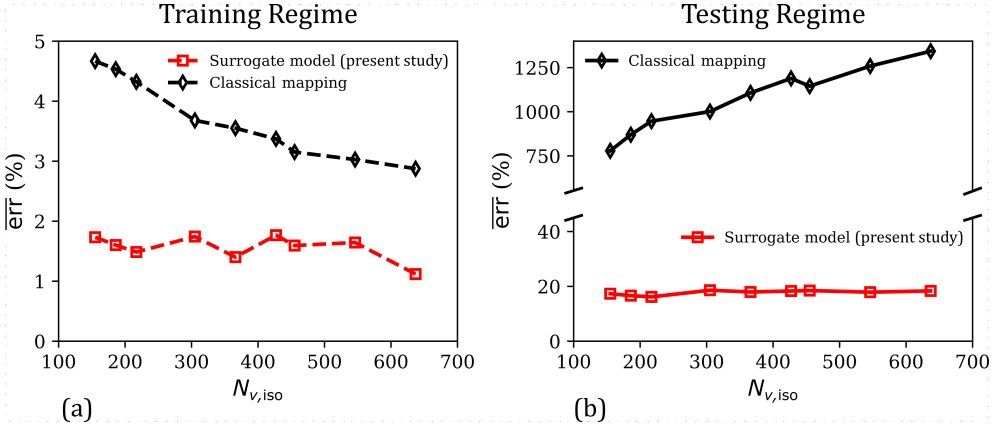


图 14： (a) 比较代理模型和经典映射模型在训练区间（$\lambda \in [1, 1.5]$，$\dot{\lambda} \in [10, 100]$）内预测结果的平均百分比相对误差（err）随训练数据集大小（$N_{v,\ \mathrm{iso}}$）的变化。(b) 对于总体测试范围（$[\lambda \in [0.5, 1.75], \dot{\lambda} \in [-145, 145]] \cup [\gamma \in [0, 0.5]]$，$\dot{\gamma} \in [10, 145]$）内的预测结果，展示了本文代理模型和经典映射模型对应的 err 随 $N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 响应的变化。

$\dot{\mathbf{C}}$、$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}$。请注意，经典映射模型在剪切加载下预测的对角应力分量不为零。在比较的另外两个模型中，当前代理模型和 Pioletti 模型都给出了物理上合理的预测，但与 Pioletti 模型的预测相比，我们的代理模型预测与真实值更加一致。图 13(b) 比较了三个模型的标量百分比误差随剪切应变变化的响应（对所考察的剪切应变率取平均）。我们的代理模型在剪切变形模式下的平均百分比误差 err 为 15.86%，显著低于 Pioletti 模型相应的 60.43%，且比经典映射模型的 err（2453.32%）低两个数量级以上。

从图 13(a-b)可以看出，在所比较的两种数据驱动本构模型中，只有本文的代理模型能够给出可信的预测，即使在大应变、高应变率条件下，以及更重要的是在模型完全未见过的变形模式下，也能保持物理合理性，这证实了其出色的泛化能力。图 13(c)绘出了这些模型在多个剪切应变率下的内部黏性耗散随剪切应变的变化。毫不意外，本文代理模型的预测呈现非负耗散，因此遵守热力学第二定律。与压缩变形模式类似，经典映射模型在剪切变形中表现出负耗散，这与热力学第二定律不符。

最后，图 14 研究了训练数据集大小 $N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 对两个数据驱动模型的平均百分比相对误差 err 的影响。这里，$N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 是训练过程中所考虑的 $\lambda \in [10, 100]$范围内不同拉伸率的数量与每种拉伸率情况下 $\lambda \in [1, 1.5]$ 范围内拉伸值数量的乘积（例如，在图 9 中，$N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 等于 $5 \times 31 = 155$）。我们考虑了九种 $N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 取值：155（5（拉伸率）$\times$ 31（拉伸值））、186（6×31）、217（7×31）、305（5×61）、366（6×61）、427（7×61）、455（5×91）、546（6×91）和 637（7×91）。图 14(a) 和图 14(b) 分别展示了 $N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 对训练区间（即拟合误差）和总体测试区域（拉伸 + 压缩 + 剪切）中计算所得 err 值的影响。从图中可以看出，两个数据驱动模型在训练区间内的平均百分比相对误差都很小（err 最大值低于 5%），表明拟合精度始终较高。此外，两个模型的 err 随 $N_{v,\ \mathrm{iso}}$ 变化总体呈下降趋势。在测试范围内，两个数据驱动模型的响应存在显著差异。一方面，经典映射模型的平均百分比相对误差极高，且总体上随训练数据集大小增加而增大。另一方面，我们的数据驱动模型在所有考察的训练数据集大小下，平均百分比相对误差始终较小（< 20%），表明即使数据可用性有限，模型仍具有良好的预测性能。

6 总结与讨论

本文提出了一种框架，用于开发物理信息数据驱动本构模型，以描述软材料短时、应变率相关的力学响应。本研究的主要动机在于传统的基于连续体热力学的本构模型和基于机器学习的本构模型存在局限：前者由于数学形式固定，拟合和预测精度有限，且需要根据实验观测进行专家模型选择（例如选择超弹性模型）；而后者则需要

大量训练数据（为均匀采样应变空间而需要进行的实验在物理上并不可行），而且通常导致较差的样本外预测（泛化性能较差）。我们提出的框架将连续体热力学的物理信息特性与监督式机器学习高度准确且灵活的回归能力相结合，在消除这些局限方面迈出了重要一步。由此得到的数据驱动本构模型能够以高精度捕捉复杂的材料响应特征，无需专家干预；能够生成物理上合理且准确的样本外预测；并且只需少量训练数据即可完成训练，而这些数据可通过简单的现代实验获得。尽管其中一些特点此前已在超弹性和弹塑性问题中展现，本文进一步阐述了如何将这一通用框架扩展至有限变形下黏弹性材料的率相关响应。

我们的数据驱动本构模型的构建基于连续体热力学框架下由外部状态变量驱动的黏性耗散型黏弹性超弹性的一般化应力–应变–应变率方程。在这些方程中，总应力被加性分解为体积变形、等容超弹性和等容黏性超应力分量。这些应力分量分别表示为完整性基各分量的线性组合。这种线性关系使我们能够提出三个数据驱动$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$代理模型映射——$\mathcal{M}_{\mathrm{vol}}$、 $\mathcal{M}_{h,\,\mathrm{iso}}$和$\mathcal{M}_{v,\,\mathrm{iso}}$——分别刻画三个应力分量。这些代理模型将应变/应变率不变量映射到构成相应应力分量的完整性基系数。研究表明，这种模型构造确保了预测响应满足关键的基于物理的约束：局部作用原理、决定论、材料架构无关性、角动量平衡、各向同性材料对称性以及有限记忆。此外，得益于高斯过程回归监督学习方法（包括标准高斯过程回归和 C-GPR）的精确推断性质，以及 C-GPR 对特殊不等式约束的处理能力，所提出的代理模型还满足归一化条件和热力学第二定律。

通过将构成本构模型的三个代理模型分别拟合到一个规模较小、数值生成的训练数据集上，并将训练好的模型用于预测明显更广泛的测试范围内的材料响应，评估了每个代理模型的性能。每个训练数据集均来自一种变形模式，对应于常见的实验方案。在所有情况下，我们都将模型的性能与传统连续体热力学本构模型和经典机器学习映射模型进行了比较。结果表明，与$\widetilde{\quad}$其他建模框架相比，我们的模型在描述材料响应方面取得了显著改进。例如，从 $\mathcal{M}_{\mathrm{vol}}$ 模型在静水加载下的结果可以看出，我们的代理模型预测与真实值高度吻合，无论是在受限压缩的训练区间（$J \in [0.75, 1]$），还是在涵盖受限压缩和拉伸的总体测试区域（$J \in [0.5, 1.5]$）中都是如此。相比之下，传统体积新胡克模型在测试范围内产生了较大的预测误差，而经典映射模型不仅误差较大，还在受限拉伸中产生了不符合物理规律的软化响应。

在本研究中，经典映射方法始终会出现这样一种病理现象：对于训练时未考虑的变形模式，预测出不合理的／热力学不稳定的物理响应。例如，在用于评估$\mathcal{M}_{h,\mathrm{iso}}$ 代理模型的等容准静态加载案例中，以单轴拉伸为训练条件的经典映射模型在单轴压缩下违反了应力-伸长单调性和压缩-拉伸不对称性；在简单剪切加载下，无论施加何种变形，剪切应力均为零。在用于分析$\mathcal{M}_{v,\mathrm{iso}}$ 代理模型的等容动态加载案例中，以率相关单轴拉伸为训练条件的经典映射模型在压缩下预测出了拉伸应力，在简单剪切下则预测不出剪切应力。值得注意的是，文献中机器学习赋能的本构模型大多采用所谓的经典方法，即将应变分量映射到应力分量；显然，这不足以完成传统现象学建模和微观力学建模所擅长的任务。

需要注意的是，在等容准静态加载情况下，即使是传统的 Yeoh模型在压缩过程中也产生了不符合物理规律的软化响应。众所周知，不符合物理规律的模型预测是由热力学一致性问题引起的（Upadhyay 等人（ 2019b））。不出所料，在等容动态加载情况下可以看到，经典映射模型的预测结果在压缩和剪切变形模式下均通过负内耗散违反了热力学第二定律（这两种变形模式在训练过程中未被考虑）。与这些替代模型类型不同，我们的物理信息数据驱动代理模型在所有所研究的变形模式（训练和测试）下均产生了符合物理规律的力学响应，并且其预测误差始终处于最低水平（在三种模型类型中）。

我们的本构模型具有物理信息特性，不仅能促进准确且符合物理规律的预测，还能依据物理定律限制可能的代理模型参数的解空间，从而无需大量训练数据集（Karniadakis 等，2021年）。值得注意的是，我们的模型在低数据量情形和有限数据量情形（由实验限制所致）下均能发挥作用，使其能够外推至简单实验未涵盖的应力状态

已见。对于本研究中的三种代理模型，在整个测试范围内，使用相对较小的训练数据集也能获得相当不错的预测精度，这些数据集与实验文献中常见的数据集类似。此外，随着训练数据集大小增加，预测精度通常也会提高（值得注意的是，此时仍处于有限数据量情形，并利用了与易于开展的实验相一致的变形模式合成数据）。另一方面，基于经典机器学习的映射模型在训练数据集较小时产生了很大的预测误差，而且这些误差不一定会随数据量增加而减小。事实上，在静水和等容动态加载情形下，这些黑箱模型的预测误差在采用大型数据集进行训练时反而增大，同时在测试范围内出现了高度不符合物理规律的预测。总体而言，即使是经典映射模型在任何情形下取得的最低平均百分比相对误差，也达到我们代理模型峰值平均百分比相对误差的数倍。

请注意，所提出的数据驱动本构模型仅适用于高应变率变形下占主导地位的短时响应。在足够缓慢的加载速率下，松弛和蠕变等长时效应会变得十分重要。此外，我们当前的模型将材料各向同性作为基于物理的约束之一。尽管许多软材料（例如水凝胶、组织和弹性体）被认为是各向同性的，但其中一些材料具有各向异性（例如大脑的白质（Eskandari 等（2021））））。未来的工作将致力于在当前框架中加入长时效应和各向异性建模能力，同时利用直接实验数据。

致谢

本研究得到美国国立卫生研究院国家神经疾病与卒中研究所项目编号 U01NS112120 的支持。NB 衷心感谢空军科学研究办公室项目编号 FA9550-22-1-0075 的支持。

附录 A. 黏弹超弹性本构模型广义应力方程的推导

从式（14）出发，黏弹超弹性软材料中的总应力可写为

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}+\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}+\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}=2\frac{\partial U(J)}{\partial\mathbf{C}}+2\frac{\partial\bar{W}_h(\bar{I}_1,\bar{I}_2)}{\partial\mathbf{C}}+2\frac{\partial\bar{W}_v(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\bar{J}_2,\bar{J}_3,\bar{J}_4,\bar{J}_5,\bar{J}_6,\bar{J}_7)}{\partial\dot{\mathbf{C}}} \tag{60}$$

利用链式法则对各个应力分量展开一次，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}+\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}+\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}\\&=2\frac{dU(J)}{dJ}\frac{\partial J}{\partial\mathbf{C}}+2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\bar{W}_h(\bar{I}_1,\bar{I}_2)}{\partial\bar{I}_j}\frac{\partial\bar{I}_j}{\partial\mathbf{C}}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{\partial\bar{W}_v(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\bar{J}_2,\bar{J}_3,\bar{J}_4,\bar{J}_5,\bar{J}_6,\bar{J}_7)}{\partial\bar{J}_k}\frac{\partial\bar{J}_k}{\partial\dot{\mathbf{C}}}\end{aligned} \tag{61}$$

进一步利用链式法则展开上述方程中不变量（即 $\partial\bar{I}_j/\partial\mathbf{C}$ 和 $\partial\bar{J}_k/\partial\mathbf{C}$）的导数（见文献15中这些不变量的表达式），

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{S}_{\mathrm{vol}}+\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}}+\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}}\\&=2\frac{dU(J)}{dJ}\frac{\partial J}{\partial\mathbf{C}}+2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\bar{W}_h}{\partial\bar{I}_j}\left(\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{C}}\right)^{\mathrm{T}}:\frac{\partial\bar{I}_j}{\partial\bar{\mathbf{C}}}\right)+2\sum_{k=1}^{7}\frac{\partial\bar{W}_v}{\partial\bar{J}_k}\left(\left(\frac{\partial\dot{\bar{\mathbf{C}}}}{\partial\dot{\mathbf{C}}}\right)^{\mathrm{T}}:\frac{\partial\bar{J}_k}{\partial\dot{\bar{\mathbf{C}}}}\right)\end{aligned} \tag{62}$$

利用以下结果可以简化公式（62）中的各个应力分量[2]，

$$\frac{\partial J}{\partial\mathbf{C}}=\frac{\partial(\det\mathbf{C})^{1/2}}{\partial\mathbf{C}}=\frac{1}{2}J\mathbf{C}^{-1},\quad\frac{\partial\bar{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{C}}=\frac{\partial\dot{\bar{\mathbf{C}}}}{\partial\dot{\mathbf{C}}}=J^{-2/3}\left(\mathbb{I}-\frac{1}{3}\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)=J^{-2/3}\mathbb{P}^{\mathrm{T}} \tag{63}$$

[2]推导式（63）的第二部分时使用以下标准结果：给定一个标量 ϕ 以及二阶张量$\mathbf{Y}$和$\mathbf{Z}$，有 $\frac{\partial(\alpha\mathbf{Y})}{\partial\mathbf{Z}}=\alpha\frac{\partial\mathbf{Y}}{\partial\mathbf{Z}}+\mathbf{Y}\otimes\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{Z}}$。$\dot{\bar{\mathbf{C}}}=\frac{d(J^{-2/3}\mathbf{C})}{dt}=J^{-2/3}\dot{\mathbf{C}}-\frac{2}{3}J^{-5/3}\dot{J}\mathbf{C}$，其中 $\dot{J}=\frac{J}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{F}^{-1})$ $\frac{\partial\dot{J}}{\partial\dot{\mathbf{C}}}=\frac{J}{2}\mathbf{C}^{-1}$。

$\mathbb{P}$ 称为参考构形四阶投影张量（Holzapfel（2000））,

$$\mathbb{P} := \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \tag{64}$$

，$\mathbb{I}$ 为四阶单位张量（用指标记号表示，$\mathbb{I}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$，其中 δ 是克罗内克δ符号）。张量$\mathbb{P}$ 将任意二阶张量投影到其参考构形偏量分量，即$\mathbb{P} : \mathbf{Z} = \mathrm{Dev}\mathbf{Z}$，其中$\mathbf{Z}$ 是任意二阶张量。注意，$\mathrm{Dev}\mathbf{Z} = \mathbf{Z} - \frac{1}{3}(\mathbf{Z} : \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}$。

将式（63）代入式（62），并利用 $\mathbb{P}$的投影性质，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{S}_{\mathrm{vol}} + \mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}} + \mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}} \\ &= J\frac{dU}{dJ}\mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3}\left[2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_j}\mathrm{Dev}\left(\frac{\partial \bar{I}_j}{\partial \bar{\mathbf{C}}}\right)\right] + J^{-2/3}\left[2\sum_{k=1}^{7}\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_k}\mathrm{Dev}\left(\frac{\partial \bar{J}_k}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}}\right)\right]\end{aligned} \tag{65}$$

不变量 I_j 关于$\mathbf{C}$ 的导数以及不变量 J_k 关于$\mathbf{C}$ 的导数为

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \bar{I}_1\mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} \tag{66a}$$

$$\frac{\partial \bar{J}_1}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \bar{J}_2}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = 2\dot{\bar{\mathbf{C}}}, \quad \frac{\partial \bar{J}_3}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = \bar{J}_3\dot{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} \tag{66b}$$

$$\frac{\partial \bar{J}_4}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = \bar{\mathbf{C}}, \quad \frac{\partial \bar{J}_5}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = (\bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{C}}), \quad \frac{\partial \bar{J}_6}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = \bar{\mathbf{C}}^2 = \bar{I}_1\bar{\mathbf{C}} - \bar{I}_2\mathbf{I} + \bar{\mathbf{C}}^{-1}, \quad \frac{\partial \bar{J}_7}{\partial \dot{\bar{\mathbf{C}}}} = (\bar{\mathbf{C}}^2\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{C}}^2) \tag{66c}$$

注意，结果 $\bar{\mathbf{C}}^2 = \bar{I}_1\bar{\mathbf{C}} - \bar{I}_2\mathbf{I} + \bar{\mathbf{C}}^{-1}$ 由凯莱–哈密顿定理得出（Holzapfel，2000）。将式（66）代入式（65），可得

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{S}_{\mathrm{vol}} + \mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}} + \mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}} \\ &= J\frac{dU}{dJ}\mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3}\left[2\left(\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_2}\right)\mathrm{Dev}(\mathbf{I}) - 2\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_2}\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}})\right] \\ &\quad + J^{-2/3}\left[2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_1}\mathrm{Dev}(\mathbf{I}) + 4\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_2}\mathrm{Dev}(\dot{\bar{\mathbf{C}}}) + 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_3}\mathrm{Dev}(\dot{\bar{\mathbf{C}}}^{-1}) + 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_4}\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}})\right. \\ &\quad + 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_5}\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{C}}) + 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_6}(\bar{I}_1\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}) + \mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}^{-1}) - \bar{I}_2\mathrm{Dev}(\mathbf{I})) \\ &\quad \left. + 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_7}\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}^2\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{C}}^2)\right]\end{aligned} \tag{67}$$

根据式（67），构成黏弹超弹性软材料总应力的三个应力分量可表示为

$$\mathbf{S}_{\mathrm{vol}} = \zeta_1(J)\mathbf{C}^{-1} \tag{68}$$

$$\mathbf{S}_{h,\mathrm{iso}} = J^{-2/3}\left[\Gamma_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2)\mathrm{Dev}(\mathbf{I}) + \Gamma_2(\bar{I}_1, \bar{I}_2)\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}})\right] \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{v,\mathrm{iso}} = J^{-2/3}\big[&\Phi_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\mathbf{I}) + \Phi_2(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}) + \\ &\Phi_3(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}^{-1}) + \Phi_4(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\dot{\bar{\mathbf{C}}}) + \\ &\Phi_5(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\dot{\bar{\mathbf{C}}}^{-1}) + \Phi_6(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{C}}) + \\ &\Phi_7(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{J}_1, \ldots, \bar{J}_7)\mathrm{Dev}(\bar{\mathbf{C}}^2\dot{\bar{\mathbf{C}}} + \dot{\bar{\mathbf{C}}}\bar{\mathbf{C}}^2)\big]\end{aligned} \tag{70}$$

其中

$$\zeta_1(J) = J\frac{dU}{dJ} \tag{71a}$$

$$\Gamma_1(\bar{I}_1,\bar{I}_2) = 2\left(\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_2}\right), \quad \Gamma_2(\bar{I}_1,\bar{I}_2) = -2\frac{\partial \bar{W}_h}{\partial \bar{I}_2} \tag{71b}$$

$$\Phi_1(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 2\left(\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_1} - \bar{I}_2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_6}\right), \quad \Phi_2(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 2\left(\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_4} + \bar{I}_1\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_6}\right), \tag{71c}$$

$$\Phi_3(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_6}, \quad \Phi_4(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 4\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_2}, \quad \Phi_5(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 2\bar{J}_3\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_3},$$

$$\Phi_6(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_5}, \quad \Phi_7(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_7) = 2\frac{\partial \bar{W}_v}{\partial \bar{J}_7}$$

式（68–70）构成式（14）中广义函数型本构方程的另一种形式，并用于本研究的物理信息映射方法。当然，传统本构模型会将系数 ζ_1、 Γ_1、 Γ_2、 Φ_1、…、 Φ_7 显式表示为模型参数的函数。表 A1 列出了几种常用黏弹超弹性本构模型的这些系数。我们的物理信息数据驱动模型不受这类显式数学表达式拟合能力的限制，可以直接从实验数据中学习不变量与系数之间的映射。

表 A.1： 常用体积变形能量密度函数（U）的完整性基系数：Simo–Miehe 模型（Simo 和 Miehe（1992年））、体积新胡克模型（De Rooij 和 Kuhl（2016年））以及体积Ogden模型（Ogden（1997年））

模型	U	ζ_1
Simo–Miehe 模型	$\frac{\kappa}{2}\left(\frac{J^2-1}{2} - \ln J\right)$	$\frac{\kappa}{2}\left(J^2-1\right)$
体积新胡克模型	$\frac{\kappa}{2}\left(J-1\right)^2$	$\kappa J\left(J-1\right)$
体积Ogden模型	$\frac{\kappa}{\beta^2}\left(\frac{1}{J^\beta} - 1 + \beta\ln J\right)$	$\frac{\kappa}{\beta}\left(1 - \frac{1}{J^\beta}\right)$

表 A.2： 常用超弹性应变能密度函数中完备基的系数（W_h）：新胡克模型（Rivlin（1948年a）；Treloar（1943年））、Mooney–Rivlin模型和广义Rivlin模型（Mooney（1940年）；Rivlin（1948年b））、Yoeh模型（Yeoh（1993））、Gent模型（Gent（1996））以及Gent–Gent模型（Pucci 和 Saccomandi（2002年））

模型	$\bar{W}_h$	Γ_1	Γ_2
新胡克模型	$A_{10}\left(\bar{I}_1-3\right)$	$2A_{10}$	0
Mooney–Rivlin模型	$A_{10}\left(\bar{I}_1-3\right) + A_{01}\left(\bar{I}_2-3\right)$	$2\left(A_{10} + \bar{I}_1 A_{01}\right)$	$-2A_{01}$
广义里夫林模型	$A_{10}\left(\bar{I}_1-3\right) + A_{01}\left(\bar{I}_2-3\right) + A_{11}\left(\bar{I}_1-3\right)\left(\bar{I}_2-3\right)$	$2(A_{10} + \bar{I}_1 A_{01} + A_{11}(\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_1 + \bar{I}_2 - 3))$	$-2\left(A_{01} + A_{11}(\bar{I}_1-3)\right)$
Yeoh模型	$C_1\left(\bar{I}_1-3\right) + C_2\left(\bar{I}_1-3\right)^2$	$2C_1 + 4C_2\left(\bar{I}_1-3\right)$	0
Gent模型	$-\frac{\mu J_m}{2}\ln\left(1 - \frac{\bar{I}_1-3}{J_m}\right)$	$\frac{\mu}{1-\frac{\bar{I}_1-3}{J_m}}$	0
Gent–Gent模型	$-\frac{\mu J_m}{2}\ln\left(1 - \frac{\bar{I}_1-3}{J_m}\right) + \frac{3C_2}{2}\ln\left(\frac{\bar{I}_2}{3}\right)$	$\frac{\mu}{1-\frac{\bar{I}_1-3}{J_m}} + 3C_2\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}$	$-3\frac{C_2}{\bar{I}_2}$

表 A.3： 常用黏性耗散势（W_v）中的完备基系数：Pioletti模型（Pioletti 等人（1998年））、广义Pioletti模型（Kulkarni 等人（2016年））以及 Upadhyay–Subhash–Spearot（USS）模型（Upadhyay 等人（2020b年、2022a年））

模型	$\bar{W}_v$	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7
Pioletti模型	$\frac{\eta'}{4}\left(\bar{I}_1-3\right)\bar{J}_2$	0	0	0	$\eta'\left(\bar{I}_1-3\right)$	0	0	0
广义Pioletti模型	$\eta\left(\bar{I}_1-3\right)^\beta\bar{J}_2$	0	0	0	$4\eta\beta(\bar{I}_1-3)^{\beta-1}$	0	0	0
Upadhyay–Subhash–Spearot模型	$k_{11}\bar{J}_2\sqrt{\bar{I}_1-3} + \frac{k_{21}}{c_{21}}\bar{J}_5^{c_{21}}\sqrt{\bar{I}_2-3}$	0	0	0	$4k_{11}\sqrt{\bar{I}_1-3}$	0	$2k_{21}\bar{J}_5^{c_{21}-1}\sqrt{\bar{I}_2-3}$	0

附录 B. 材料未变形状态下的不变量

当材料处于未变形状态时，若$\mathbf{F} = \mathbf{C} = \mathbf{I}$，不变量 J 为 1，因此张量 $\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}$ 变为相同。然而，变形率张量$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{C}$并不相等。一般而言，$\mathbf{C}$ 由下式给出

$$\dot{\bar{\mathbf{C}}} = J^{-2/3}\dot{\mathbf{C}} - \frac{2}{3}J^{-5/3}\dot{J}\mathbf{C}, \quad \text{where } \dot{J} = \frac{J}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{F}^{-1}\right) \tag{72}$$

将未变形状态下$\mathbf{F}$、$\mathbf{C}$和 J 的取值代入式 (72)，可得未变形状态下张量$\mathbf{C}$ 与$\mathbf{C}$之间的关系

$$\text{Undeformed state: } \dot{\bar{\mathbf{C}}} = \dot{\mathbf{C}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{C}})\mathbf{I} \tag{73}$$

利用结果$\mathbf{C} = \mathbf{C} = \mathbf{I}$ 以及式 (73) 中$\mathbf{C}$ 的表达式，可得未变形状态下的不变量（见式 (15)）

$$\bar{I}_1 = 3, \quad \bar{I}_2 = 3 \tag{74a}$$

$$\bar{J}_1 = 0, \quad \bar{J}_2 = \frac{2}{3}\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{C}}^2\right), \quad \bar{J}_3 = \det\left(\dot{\mathbf{C}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{C}})\mathbf{I}\right) \tag{74b}$$

$$\bar{J}_4 = 0, \quad \bar{J}_5 = \frac{2}{3}\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{C}}^2\right), \quad \bar{J}_6 = 0, \quad \bar{J}_7 = \frac{2}{3}\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{C}}^2\right) \tag{74c}$$

请注意，在上述不变量中，只有 $\bar{J}_1$、 $\bar{J}_4$ 和 $\bar{J}_6$ 在未变形状态下为零。应变不变量 $\bar{I}_1$ 和 $\bar{I}_2$ 取非零常数值 3。最后，不变量 $\bar{J}_2$、 $\bar{J}_3$、 $\bar{J}_5$ 和 $\bar{J}_7$ 仍是所施加加载速率的函数（另请注意：在此条件下 $\bar{J}_2 = \bar{J}_5 = \bar{J}_7$）。

参考文献

Ahsanizadeh, S., Li, L., 2015年。基于短期和长期内部变量的软组织黏弹超弹性本构建模。《Bio Medical Engineering OnLine》14，29。doi:10.1186/s12938-015-0023-7。Beda, T., 2014年。超弹性模型构建与参数估计的一种方法：本构模型综述。《European Polymer Journal》50，97–108。doi:10.1016/j.eurpolymj.2013.10.006。Bracq, A., Haugou, G., Bourel, B., Maréchal, C., Lauro, F., Roth, S., Mauzac, O., 2018年。钝性弹道冲击下黏弹超弹性聚合物凝胶的建模。《国际冲击工程杂志》118，78–90。doi:10.1016/j.ijimpeng.2018.04.001。Bracq, A., Haugou, G., Delille, R., Lauro, F., Roth, S., Mauzac, O., 2017年。用于评估弹道钝性创伤的合成凝胶应变率依赖性实验研究。《生物医学材料力学行为杂志》72，138–147。doi:10.1016/j.jmbbm.2017.04.027。Brown, R.P., 2006年。《橡胶物理测试》。Springer-Verlag，纽约。网址：http://link.springer.com/ 10.1007/0-387-29012-5, doi:10.1007/0-387-29012-5。Budday, S., Sommer, G., Birkl, C., Langkammer, C., Haybaeck, J., Kohnert, J., Bauer, M., Paulsen, F., Steinmann, P., Kuhl, E., Holzapfel, G., 2017年。人脑组织的力学表征。《Acta Biomaterialia》48，319–340。doi:10.1016/j.actbio.2016.10.036。Chen, B., Shen, L., Zhang, H., 2023年。一种用于评估具有相关随机材料属性的结构可靠性的混合正交本征分解–异方差稀疏高斯过程回归模型。《Structural Safety》100，102289。Coleman, B.D., Noll, W., 1963年。考虑热传导与黏度的弹性材料热力学。Archive for Rational Mechanics and Analysis 13，167–178。doi:10.1007/BF01262690。Datta, A., Banerjee, S., Finley, A.O., Gelfand, A.E., 2016年。关于用于大规模空间数据的最近邻高斯过程模型。《Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics》8，162–171。

De Rooij, R., Kuhl, E., 2016年。脑组织本构建模：当前观点。《应用力学评论》68，1–16。doi:10.1115/1.4032436。Eskandari, F., Shafieian, M., Aghdam, M.M., Laksari, K., 2021年。结构各向异性与力学各向异性：轴突纤维对脑白质材料性质的贡献。《生物医学工程年鉴》49，991–999。doi:10.1007/s10439-020-02643-5。Fontenele, F.F., Andarawis-Puri, N., Agoras, M., Bouklas, N., 2022年。非单调加载下软复合材料中的纤维塑性与椭圆性丧失。《国际固体与结构杂志》249，111628。网址：https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111628https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020768322001536，doi:10.1016/j.ijsolstr.2022.111628。Frankel, A.L., Jones, R.E., Swiler, L.P., 2020年。超弹性材料的张量基高斯过程模型。《建模与计算机器学习杂志》1，1–17。doi:10.1615/jmachlearnmodelcomput.2020033325，arXiv:1912.10872。Fuhg, J., Bouklas, N., Jones, R., 2022a年。通过张量基神经网络从数据中学习超弹性各向异性。《固体力学与物理学杂志》168，105022。网址：https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/S0022509622002058，doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105022。Fuhg, J.N., Bouklas, N., 2022年。通过概率机器学习和空间填充采样研究物理信息驱动的各向同性与各向异性本构模型。《应用力学与工程中的计算方法》394，114915。doi:10.1016/j.cma.2022.114915。Fuhg, J.N., Böhm, C., Bouklas, N., Fau, A., Wriggers, P., Marino, M., 2021a年。模型与数据驱动的本构响应：在多尺度计算框架中的应用。《国际工程科学杂志》167，103522。doi:10.1016/j.ijengsci.2021.103522。Fuhg, J.N., Fau, A., Nackenhorst, U., 2021b年。克里金自适应采样方法的最新进展与比较综述。《工程计算方法档案》28，2689–2747。Fuhg, J.N., Marino, M., Bouklas, N., 2022b年。用于数据驱动本构模型的局部近似高斯过程回归：开发及与神经网络的比较。《应用力学与工程中的计算方法》388，114217。Gao, Z., Lister, K., Desai, J.P., 2010年。肝组织本构建模：实验与理论。《生物医学工程年鉴》38，505–516。doi:10.1007/s10439-009-9812-0。Garcia-Gonzalez, D., Jérusalem, A., Garzon-Hernandez, S., Zaera, R., Arias, A., 2018年。横观各向同性软组织的连续介质力学本构框架。《固体力学与物理学杂志》112，209–224。doi:10.1016/j.jmps.2017.12.001。Gent, A.N., 1996年。一种新的橡胶本构关系。《橡胶化学与技术》69，59–61。doi:10. 5254/1.3538357。Germain, P., 1998年。连续介质力学中的泛函概念。《力学》33，433–444。doi:10.1023/A: 1004304224398。Ghaboussi, J., Pecknold, D.A., Zhang, M., Haj-Ali, R.M., 1998年。神经网络本构模型的自适应渐进训练。《国际工程数值方法杂志》42，105–126。doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19980515)42:1<105::AID-NME356>3.0.CO;2-V。Harrigan, T.P., Roberts, J.C., Ward, E.E., Merkle, A.C., 2010年。使用人头部有限元模型，在模拟爆炸条件下关联轻型创伤性脑损伤的组织响应与解剖位置，载于：Herold, K.E., Vossoughi, J., Bentley, W.E.（编），《第26届南方生物医学工程会议SBEC 2010》，2010年4月30日至5月2日，美国马里兰州大学公园市，施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡。第18–21页。Holzapfel, G.A., 2000年。《非线性固体力学：工程连续介质方法》。约翰·威立父子公司，奇切斯特，英格兰。网址：https://books.google.co.uk/books/about/Nonlinear_Solid_Mechanics.html?id=_ZkeAQAAIAAJ&source=kp_cover&redir_esc=y。Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2001年。有限应变下纤维增强复合材料的黏弹性模型：连续介质基础、计算方面与应用。《应用力学与工程中的计算方法》190，4379–4403。doi:10.1016/S0045-7825(00)00323-6。Hooke, R., 1678年。《论回复力讲义，或论弹簧：阐释弹性体的回复力》。卡特勒讲座，John Martyn。网址：https://books.google.com/books?id=LAtPAAAAcAAJ。Huang, D., Fuhg, J.N., Weißenfels, C., Wriggers, P., 2020年。一种基于正交本征分解的机器学习塑性模型。《应用力学与工程中的计算方法》365，113008。doi:10.1016/ j.cma.2020.113008。

Jiang, Y., Wang, Y., Peng, X., 2015年。《人类脊柱韧带的黏弹超弹性本构模型》。《细胞生物化学与生物物理学》71, 1147–1156. doi:10.1007/s12013-014-0322-9. Jung, S., Ghaboussi, J., 2006年。《自学习模拟中率相关材料行为的表征》。《应用力学与工程中的计算方法》196, 608–619. doi:10.1016/j.cma.2006.06.006. Karniadakis, G.E., Kevrekidis, I.G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., Yang, L., 2021年。《物理信息机器学习》。《自然综述：物理》3, 422–440. doi:10.1038/s42254-021-00314-5. Kim, S., Shin, H., Rhim, S., Rhee, K.Y., 2019年。《硬质聚氨酯泡沫压痕事件的超弹性与超泡沫本构模型标定》。《复合材料B辑：工程》163, 297–302. doi:10.1016/j.compositesb.2018.11.045. Kulkarni, S.G., Gao, X.L., Horner, S.E., Mortlock, R.F., Zheng, J.Q., 2016年。《软组织的横观各向同性黏弹超弹性本构模型》。《固体数学与力学》21, 747–770. doi:10.1177/1081286514536921. Laurent, L., Le Riche, R., Soulier, B., Boucard, P.A., 2019年。《梯度增强元模型概述及其应用》。《工程计算方法档案》26, 61–106. Lefik, M., Schrefler, B., 2003年。《作为有限元代码增量非线性本构模型的人工神经网络》。《应用力学与工程中的计算方法》192, 3265–3283. doi:10.1016/ s0045-7825(03)00350-5. Limbert, G., Middleton, J., 2004年。《一种横观各向同性黏弹超弹性材料：在生物软结缔组织建模中的应用》。《国际固体与结构杂志》41, 4237–4260. doi:10.1016/j.ijsolstr.2004.02.057. Liu, I.S., 2012年。《关于Mooney–Rivlin材料模型的注记》。《连续介质力学与热力学》24, 583–590. doi:10.1007/s00161-011-0197-6. Liu, M., Liang, L., Sun, W., 2020年。《用于生物软组织的通用型基于物理信息神经网络的本构模型》。《应用力学与工程中的计算方法》372, 113402. doi:10.1016/j.cma. 2020.113402. Logarzo, H.J., Capuano, G., Rimoli, J.J., 2021年。《智能本构定律：通过机器学习实现非弹性均匀化》。《应用力学与工程中的计算方法》373, 113482. doi:10.1016/j.cma.2020. 113482. Lu, Y., Zhu, H., Richmond, S., Middleton, J., 2010年。《高应变率下骨骼肌组织的黏弹超弹性模型》。《生物力学杂志》43, 2629–2632. URL: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/ pii/S0021929010003179, doi:10.1016/j.jbiomech.2010.05.030. Luo, K., Upadhyay, K., Subhash, G., Spearot, D.E., 2019年。《高剪切应变率下聚乙二醇二丙烯酸酯水凝胶的瞬态流变行为》。《大分子》52, 5860–5871. doi:10.1021/acs. macromol.9b00820. Malvern, L.E., 1969年。《连续介质力学导论》. 普伦蒂斯·霍尔出版社。Marrel, A., Iooss, B., Van Dorpe, F., Volkova, E., 2008年。《利用高斯过程对复杂计算机代码进行建模的高效方法》。《计算统计与数据分析》52, 4731–4744. Matérn, B., 1960年。《空间变异：瑞典国家森林研究所报告》。《统计学讲义》36, 21. Miller, K., Chinzei, K., 2002年。《脑组织在拉伸状态下的力学性质》。《生物力学杂志》35, 483–490. doi:10.1016/S0021-9290(01)00234-2. Mooney, M., 1940年。《大变形弹性理论》。《应用物理学杂志》11, 582–592. doi:10.1063/1. 1712836. Nie, X., Sanborn, B., Weerasooriya, T., Chen, W., 2013年。《牛脑组织的高应变率体积与剪切响应》。《国际冲击工程杂志》53, 56–61. doi:10.1016/j.ijimpeng.2012.07.012. Ogden, R., 1997年。《非线性弹性变形》. 多佛土木与机械工程丛书，多佛出版社。URL: https://books.google.com/books?id=2u7wCaojfbEC. Park, H., Kim, N., Lee, J., 2014年。《用于预测期权价格的参数模型与非参数机器学习模型：KOSPI 200指数期权的实证比较研究》。《应用专家系统》41, 5227–5237. Payne, T., Mitchell, S., Bibb, R., Waters, M., 2015年。《新型多材料人体软组织运动冲击替代物的评估》。《生物医学材料力学行为杂志》41, 336–356. doi:10.1016/j.jmbbm.2014.09.018.

Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., Michel, V., Thirion, B., Grisel, O., Blondel, M., Prettenhofer, P., Weiss, R., Dubourg, V., 等, 2011年。《Scikit-learn：Python中的机器学习》。《机器学习研究杂志》12, 2825–2830. Peng, C.Y., Wu, C.J., 2014年。《确定性计算机实验克里金建模中块金效应的选择》。《计算与图形统计杂志》23, 151–168. Pensoneault, A., Yang, X., Zhu, X., 2020年。《施加非负性约束的高斯过程回归》。《理论与应用力学快报》10, 182–187. Pioletti, D., Rakotomanana, L., Benvenuti, J.F., Leyvraz, P.F., 1998年。《大变形下的黏弹性本构定律》。《生物力学杂志》31, 753–757. doi:10.1016/S0021-9290(98)00077-3. Pioletti, D.P., 2006年。《基于力学现象时间尺度的黏弹性本构定律》，载于：《生物组织力学》。Springer-Verlag，柏林/海德堡，第399–404页。doi:10.1007/3-540-31184-X_28. Pioletti, D.P., Rakotomanana, L.R., 2000年。《生物软组织的非线性黏弹性定律》。《欧洲力学杂志——A/固体》19, 749–759. doi:10.1016/S0997-7538(00)00202-3. Pucci, E., Saccomandi, G., 2002年。《关于类橡胶材料Gent模型的注记》。《橡胶化学与技术》75, 839–852. doi:10.5254/1.3547687. Rasmussen, C.E., 2003年。《机器学习中的高斯过程》，载于：机器学习暑期学校，Springer，第63–71页。Reese, S., Govindjee, S., 1998年。《有限黏弹性理论及其数值方面》。《国际固体与结构杂志》35, 3455–3482. doi:10.1016/S0020-7683(97)00217-5. Rivlin, R., 1948a年。《各向同性材料的大弹性变形。I. 基本概念》。《伦敦皇家学会哲学汇刊。A辑，数学与物理科学》240, 459–490. doi:10.1098/rsta. 1948.0002. Rivlin, R., 1948b年。《各向同性材料的大弹性变形。IV. 一般理论的进一步发展》。《伦敦皇家学会哲学汇刊。A辑，数学与物理科学》241, 379–397. doi:10.1098/rsta.1948.0024. Rocha, I., Kerfriden, P., van der Meer, F., 2021年。《通过概率机器学习即时构建用于并发多尺度力学分析的替代本构模型》。《计算物理学杂志：X》9, 100083. Saraf, H., Ramesh, K.T., Lennon, A.M., Merkle, A.C., Roberts, J.C., 2007年。《软人体组织动态体积与剪切响应的测量》。《实验力学》47, 439–449. doi:10.1007/s11340-007-9052-x. Sasson, A., Patchornik, S., Eliasy, R., Robinson, D., Haj-Ali, R., 2012年。《用于髓核置换的壳聚糖水凝胶的超弹性力学行为——实验测试与本构建模》。《生物医学材料力学行为杂志》8, 143–153. doi:10.1016/j.jmbbm.2011.12.008. Simo, J., 1987年。《关于完全三维有限应变黏弹性损伤模型：公式构建与计算方面》。《应用力学与工程中的计算方法》60, 153–173. doi:10.1016/0045-7825(87) 90107-1. Simo, J.C., Miehe, C., 1992年。《有限应变下的关联耦合热塑性：公式构建、数值分析与实现》。《应用力学与工程中的计算方法》98, 41–104. doi:10.1016/0045-7825(92)90170-O. Treloar, L.R.G., 1943年。《长链分子网络的弹性——II》。《法拉第学会汇刊》39, 241–246. doi:10.1039/TF9433900241. Treloar, L.R.G., 1944年。《不同变形类型下硫化橡胶的应力-应变数据》。《法拉第学会汇刊》40, 59. doi:10.1039/tf9444000059. Truesdell, C., Noll, W., 2004年。《非线性力学场论》. 第3版，施普林格柏林出版社，海德堡。doi:10.1007/978-3-662-10388-3. Upadhyay, K., Alshareef, A., Knutsen, A.K., Johnson, C.L., Carass, A., Bayly, P.V., Pham, D.L., Prince, J.L., Ramesh, K.T., 2022a年。《基于非线性黏弹超弹性本构框架的个体特异性三维人头模型的开发与验证》。《皇家学会界面杂志》19, 1–27. doi:10.1098/rsif.2022. 0561. Upadhyay, K., Bhattacharyya, A., Subhash, G., Spearot, D.E., 2019a年。《软聚合物的准静态与高应变率简单剪切表征》。《实验力学》59, 733–747. doi:10.1007/s11340-019-00507-1.

Upadhyay, K., Giovanis, D.G., Alshareef, A., Knutsen, A.K., Johnson, C.L., Carass, A., Bayly, P.V., Shields, M.D., Ramesh, K., 2022b年. 计算人体头部模型中的数据驱动不确定性量化. 《应用力学与工程中的计算方法》398, 115108. doi:10.1016/j.cma.2022.115108. Upadhyay, K., Spearot, D., Subhash, G., 2021年. 软材料应变率依赖性的验证性拉伸表征. 《国际冲击工程杂志》156, 103949. doi:10.1016/j.ijimpeng.2021.103949. Upadhyay, K., Subhash, G., Spearot, D., 2019b年. 各向同性超弹性固体本构方程的基于热力学的稳定性判据. 《固体力学与物理学杂志》124, 115–142. doi:10.1016/j.jmps.2018.09.038. Upadhyay, K., Subhash, G., Spearot, D., 2020a年. 基于主要变形模式的水凝胶超弹性本构建模及其在三维应力状态下的验证. 《国际工程科学杂志》154, 103314. doi:10.1016/j.ijengsci.2020.103314. Upadhyay, K., Subhash, G., Spearot, D., 2020b年. 应变率敏感软材料的黏弹超弹性本构建模. 《固体力学与物理学杂志》135, 103777. doi:10.1016/j.jmps.2019.103777. Van Rossum, G., Drake, F.L., 2009年. 《Python 3参考手册》. CreateSpace, Scotts Valley, CA. Vogel, A., Rakotomanana, L., Pioletti, D.P., 2017年. 黏弹超弹性应变能函数，载于：《活体器官生物力学》. Elsevier, pp. 59–78. doi:10.1016/B978-0-12-804009-6.00003-1. Williams, C., Rasmussen, C., 1995年. 用于回归的高斯过程. Advances in neural information processing systems 8. Wu, X., Garrett, J.H., J., Ghaboussi, J., 1990年. 材料行为的表征：基于神经网络的模型，载于：1990 IJCNN国际神经网络联合会议, pp. 229–234 vol.1. doi:10.1109/IJCNN.1990. 137574. Yang, L., Shim, V., Lim, C., 2000年. 一种用于橡胶本构行为建模的黏弹超弹性方法. 《国际冲击工程杂志》24, 545–560. doi:10.1016/S0734-743X(99)00044-5. Yeoh, O.H., 1993年. 橡胶应变能函数的若干形式. 《橡胶化学与技术》66, 754–771. doi:10.5254/1.3538343. Yousefi, A.A.K., Nazari, M.A., Perrier, P., Panahi, M.S., Payan, Y., 2018年. 一种黏弹超弹性本构模型及其在牛舌组织中的应用. 《生物力学杂志》71, 190–198. doi:10.1016/j.jbiomech.2018. 02.008. Zhurov, A.I., Limbert, G., Aeschlimann, D.P., Middleton, J., 2007年. 一种用于牙周膜的可压缩横向各向同性黏弹超弹性组织本构模型. 《生物力学与生物医学工程中的计算机方法》10, 223–235. doi:10.1080/13639080701314894.