arXiv:2304.14007v1 [math.OA] 27 Apr 2023

处处非散射乘子代数

EDUARD VILALTA

Abstract. 我们研究处处非散射 C*-代数 A 的乘子代数 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射的充分条件，也就是说，我们研究 $\mathcal{M}(A)$ 何时没有非零的初等理想商。特别地，我们证明：一个 σ-含单位元 C*-代数 A 具有以下性质之一：(i) 有限核维数，(ii) 实秩零，或 (iii) 具有 k-比较的稳定秩一；当且仅当 $\mathcal{M}(A)$ 具有相应性质时，它是处处非散射的。

1. Introduction

乘子代数正则性的研究遍及现有文献；例如参见 [Ell74], [Zha90], [Rør91], 和 [KNZ17]。其中一个值得注意的例子是对纯无穷性的研究，更具体地说，是研究一个 C*-代数何时具有纯无限乘子代数；参见 [Lin04], [Lin91], [KNP10], 和 [KNZ19]。当将这一条件放宽为弱纯无穷性（按照 [KR02] 的定义）时， [KR02，命题 4.11] 证明了：一个 C*-代数是弱纯无穷的，当且仅当其乘子代数是弱纯无穷的。一般而言，给定某一性质 $\mathcal{P}$，人们可以提出如下问题：如果一个 C*-代数 A 满足 $\mathcal{P}$，那么 $\mathcal{M}(A)$ 何时满足 $\mathcal{P}$?

本文研究上述问题中关于处处非散射这一性质的情形。这一概念确保代数具有足够的非交换性，并且可以用多种方式刻画。正如 [TV21b 定理 3.1], 所示，C*-代数 A 处处非散射，当且仅当它没有非零初等理想商。而这又等价于 A 的任何遗传子 C*-代数都不具有一维表示。每个弱纯无穷 C*-代数都是处处非散射的（[TV21b，例 3.3]）；但是，与弱纯无穷的情形不同，处处非散射 C*-代数的乘子代数未必处处非散射；参见例 5.2 和 5.3。

问题1.1。设 A 处处非散射。何时 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射?

问题1.1 的动机之一，是研究乘子代数何时没有特征，因为这一性质会带来重要的结构结果。例如，由 [Rob16 定理 3.2] 可知，处处非散射乘子代数中的每个元素都可以写成交换子的有限和，以及两个交换子的乘积之和。此外，若知道 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射，将对其酉群产生影响；参见 [CR21]。

C*-代数 A 的处处非散乱性也可以用其 Cuntz 半群 $\mathrm{Cu}(A)$ 来刻画。Cuntz 半群是由 [Cun78] 引入、并由 [CEI08] 进一步发展的 C*-代数的重要不变量；另见 [APT18], [APRT22], [TV22a] 以及 [Vil22]。具体而言， [TV21b 的定理 8.9] 表明，C*-代数处处非散射，当且仅当其 Cuntz 半群是弱 $(2,\omega)$-可除的，这是一种

Date: 2023年4月28日。作者获得了 MINECO（拨款编号：PID2020-113047GB-I00 和 PRE2018-083419）以及加泰罗尼亚政府研究与大学部（拨款编号：2021-SGR-01015）的部分资助。

由 Robert 和 Rørdam 在 [RR13] 中定义的概念，用于研究某些 C*-代数何时具有特征；另见第 2.3 段。因此，对问题1.1 的研究自然引出了对 Cu($\mathcal{M}(A)$) 的可除性性质的研究。在这种情况下，所涉及的主要可除性性质是弱 $(2,\omega)$-可除性及其有界对应概念，即弱 (m,n)-可除性；另见第 3 节。

尽管例 5.2 和 5.3 中的 C*-代数处处非散射（因此其 Cuntz 半群具有 $(2,\omega)$-可除性），但它们的可除性都是无界的，也就是说，对于每一对 m、$n\in\mathbb{N}$，都存在一个 Cuntz 类，对任意 $n'\leq n$ 而言，该类都不是弱 (m,n')-可除的。因此，我们提出如下问题：

问题 1.2. 设 A 是一个处处非散射的 C*-代数。何时存在 $n\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $a\in A_+$，$[a]$ 都是弱 $(2,n)$-可除的?

更一般地，何时可以找到 m、$n\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $a\in A_+$，$[a\otimes 1_m]$ 都是弱 $(2m,n)$-可除的?

第 4 节详细研究了这一问题，并给出了若干可以肯定回答问题 1.2 的例子。此外，我们还证明，有界可除性可以由幺半群的软部分刻画；参见定理 4.10。

我们将在第5节证明，只要问题1.2的答案是肯定的，问题1.1的答案也必然是肯定的。

定理 1.3（5.11）。设 A 是一个 σ-含单位元的 C*-代数。假设对于 A 中每个正元素的正交序列 $(a_i)_i$，存在 m、$n\in\mathbb{N}$，使得 $[a_i\otimes 1_m]$ 对每个 i 都是弱 $(2m,n)$-可除的。那么 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射。

利用第4节对有界可除性的研究，以及处处非散射性会传递到理想这一事实（[TV21b，命题4.2]），可得：

定理 1.4（5.12）。设 A 是一个 σ-含单位元的 C*-代数。假设 A 具有（i）实秩零，或（ii）有限核维数，或（iii）具有 k-比较性质的稳定秩一。那么，当且仅当 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射时，A 处处非散射。

此外，将上述 (iii) 中的稳定秩一替换为具有满射秩映射的条件，可以得到更一般的结论；参见命题4.3和备注4.4。

我们通过证明定理 1.3 关于稳定 C*-代数的一个弱逆命题来结束本节：

定理 1.5 (5.18). 设 A 是一个 σ-含单位元的稳定 C*-代数。假设 $\mathcal{M}(A)$ 是处处非散射的。那么，对于每个 $a\in A_+$ 和 $m\in\mathbb{N}$，存在 n，使得 $[a]$ 是弱 (m,n)-可除的。

第 3 节和第 4 节中的大多数结果都可以直接推广到抽象 Cuntz 半群，即简写为 Cu-半群的更一般框架；例如参见 [APT18] 和 [GP22]。然而，由于本文关注的是乘子代数（目前尚无已知的 Cu 对应物），为简化记号，我们用 C*-代数的语言陈述所有结果。

致谢。作者感谢 Hannes Thiel 对本文初稿提出的意见。

2. 预备知识

2.1（处处非散乱性与全局 Glimm 性质）。按照 [TV21b 的定义 A], , C*-代数若其任何商都不包含

极小开投影，则称为处处非散射。根据 [TV21b 定理 3.1], ，C*-代数 A 处处非散射，当且仅当 A 的每个非零理想商都不是初等的。

如果对每个 $a \in A_+$ 和 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个 *-同态φ: $M_2(C_0(0,1]) \to \overline{aAa}$，使得 φ 的像包含 $(a-\varepsilon)_+$，则称 C*-代数 A 具有全局 Glimm 性质（[KR02，定义 4.12]）。

若 C*-代数具有全局 Glimm 性质，则它处处非散射。反之是否成立仍是一个开放问题，这被称为全局 Glimm 问题；参见[APRT22], [ER06], 和 [TV22b]。

具有全局 Glimm 性质的 C*-代数的例子包括单的非初等 C*-代数、 $\mathcal{Z}$-稳定 C*-代数，以及纯无限 C*-代数。无迹 C*-代数均处处非散射。

2.2（Cuntz 半群）。对于 C a-代数b 中的任意一对正元素*，若A 对某个序列（ $a \precsim b$ ） $a = 有_n\, r_n b r_n^*$ $\lim r_n$，则记作$_n$ 。当 A且 a 时，也称 b与 $a \sim b$Cuntz 等价，记作 $a \precsim b$ 。

Cuntz 半群 Cu(A) 定义为商（$A \otimes \mathcal{K}_+$）/ $\sim$ ，其序由 $\precsim$ 诱导，加法由对角加法诱导；详情参见[Cun78] 和 [CEI08] 。

给定 Cu(x) 中的元素 $y \in$ 、A，当存在 $x \ll y$ （ $a \in$ ） $A \otimes \mathcal{K}$以及+使得 $\varepsilon > 0$ （ $x \leq$ [) $a - \varepsilon$且$_+$] 时，记作 $y = [a]$。如 [CEI08], 所示，Cu(A)中的每个递增序列都有上确界，并且每个元素都可以写成某个 $\ll$-递增序列的上确界。

近年来，Cuntz 半群得益于对抽象 Cuntz 半群（简称 Cu-半群）的研究。相关的良好参考文献包括[APT11], [APT18], 以及 [GP22]。在本文中，我们不会使用 Cu-半群的语言（推论 4.12 除外），但仍将利用 C*-代数的 Cuntz 半群始终满足的一些抽象性质。这些性质为:

(O5) 给定 $x', x, y', y, z \in$ Cu(A)，满足 $x + y \leq z$、 $x' \ll x$ 和 $y' \ll y$，则存在 $c \in$ Cu(A)，使得 $y' \ll c$ 和 $x' + c \leq y \leq x + c$。

(O6) 给定 $x' \ll x \ll y+z$，存在 $v \leq x, y$ 以及 $w \leq x, z$，使得 $x' \leq v+w$。

关于相应的证明，请参阅 [APT18，第 4.6] 条命题（另见 [RW10]）以及 [Rob 13]。

2.3（Cuntz 半群中的可除性）。设 A 为一个 C*-代数，设 $x \in$ Cu(A)，并取 $n \geq 1$ 和 $m \geq 2$。按照 [RR13], 的说法，如果对于任意 $x' \ll x$，都存在元素 y_1、.....、y_n，使得 $x' \leq y_1 + \ldots + y_n$，并且对于每个 $j \leq n$ 都有 $my_j \leq x$，则称 x 是弱（m， n）-可除的。类似地，如果前述条件对 n 没有任何上界成立，也就是说允许 n 取决于 x'，则称 x 是弱（m， ω）-可除的。

如果总可以令 $y_1 = \ldots = y_n$，则称元素 x 是（m， n）-可除的（分别为（m， ω）-可除的）。

当且仅当其 C*-代数的 Cuntz 半群中的每个元素对于每个 m 都是弱 (m,ω)-可除的，该代数才是处处非散射的；而当且仅当每个元素对于每个 m 都是 (m,ω)-可除的，C*-代数才具有全局 Glimm 性质；分别参见[TV21b，定理 8.9] 和 [TV22b，定理 3.6] 。

3. Finite divisibility

本节回顾 [RR13] 中引入的有限可除性概念；参见定义 3.1。我们证明它们的主要性质（引理 3.3），并研究 Cu(A) 包含一个由具有有限可除性的元素组成的上确界稠密子集的若干情形。我们还找到了有限弱可除性蕴含有限可除性的充分条件；参见定理 3.14。

定义 3.1（[RR13]）。设 a 是一个 C*-代数 A的正元素，并设$m \geq 2$。我们将 $\mathrm{div}_m([a])$ 和 $\mathrm{Div}_m([a])$ 定义为满足以下条件的最小正整数 n、n'：$[a] \in \mathrm{Cu}(A)$ 分别是弱（m，n）-可除的和（m，n'）-可除的。

如果不存在这样的 n 或 n'，则令 $\mathrm{div}_m([a]) = \infty$ 或 $\mathrm{Div}_m([a]) = \infty$。

注 3.2。若正元素 $a \in A_+$ 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中的类满足 $[a] \ll [a]$，则称其为紧的。每个投影都会产生一个紧的 Cuntz 类，而在某些情况下，这些就是唯一的紧类；参见 [BC09]。

给定一个紧元素 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$，则 $[a]$ 是弱 (m, ω)-可除的，当且仅当 $\mathrm{div}_m([a]) < \infty$。

然而，对于非紧元素 $[a]$，$\mathrm{div}_m([a]) < \infty$ 并不等价于 $[a]$是弱 (m, ω)-可除的；参见例 3.6 和注 5.10。

我们首先总结 $\mathrm{div}_m()$ 的主要性质。下面引理的第 (iii) 部分类似于 [KR02，引理 4.9]，，而 (iv) 是 [RR13，命题 3.6] 的 Cu 类比。

回顾一下，给定 $x, y \in \mathrm{Cu}(A)$，下确界 $x \wedge \infty y$ 总是存在；见 [APRT21，注 2.6]。这里，∞y 表示元素 $\sup_n ny$。

引理 3.3. 设 A 为一个 C*-代数，且设 $x = [a] \in \mathrm{Cu}(A)$ 和 $m \in \mathbb{N}$。则，

(i) $\mathrm{div}_m(x) \leq \mathrm{div}_{m'}(x)$，只要 $m \leq m'$。(ii) $\mathrm{div}_m([a]) \leq N(\mathrm{div}_m([b_1]) + \ldots + \mathrm{div}_m([b_r]))$，只要

$$[b_1], \ldots, [b_r] \leq [a] \leq N([b_1] + \ldots + [b_r]).$$

(iii) $\mathrm{div}_m([a + b]) \leq \mathrm{div}_m([a]) + \mathrm{div}_m([b])$。

(iv) 给定 $x, y \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $y \leq x$ 且 $x \wedge \infty y = y$，则 $\mathrm{div}_m(y) \leq \mathrm{div}_m(x)$。

(v) 对 $\mathrm{Cu}(A)$ 中每个上升序列 $(x_k)_k$，若其上确界为 x，则 $\mathrm{div}_m(x) \leq \sup_k \mathrm{div}_m(x_k)$。

证明。 (i) 直接由 $\mathrm{div}_m([a])$ 的定义可得。

为证明 (ii)，设 $n_j = \mathrm{div}_m([b_j])$，其中 $j = 1, \ldots, r$。不妨设所有量都是有限的，否则结论显然成立。

取 $x \ll [a]$。由于 $[a] \leq N[b_1] + \ldots + N[b_r]$，我们可以找到元素 x_j，使得$x_j \ll [b_j]$ 且 $x \leq Nx_1 + \ldots + Nx_r$。元素 $[b_j]$ 是弱 (m, n_j)-可除的，因此我们可以找到元素 $y_{1,j}, \ldots, y_{n_j,j}$，使得

$$my_{i,j} \leq [b_j], \quad \text{and} \quad x_j \leq y_{1,j} + \ldots + y_{n_j,j}$$

对每个 i 和 j 都成立。

利用 $[b_j] \leq [a]$，可得 $my_{i,j} \leq [a]$。此外，由于我们还有 $x \leq N \sum_j x_j$，可推出 $x \leq N \sum_{i,j} y_{i,j}$。因此，$\mathrm{Div}_m([a]) \leq N(n_1 + \ldots + n_r)$，证毕。

注意，给定 $a, b \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，我们有 $[a + b] \leq [a] + [b]$ and $[a], [b] \leq [a + b]$。因此，(iii) 直接由 (ii) 得出。

对于 (iv)，令 $x, y \in \mathrm{Cu}(A)$ 如上所述。与前面一样，我们可以假设 $\mathrm{div}_m(x) = n$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。取 $y' \ll y$，并利用 x 的弱 (m, n)-可除性，得到满足第 2.3 段中关于 y' 和 x 的性质的元素 $y_1, \ldots, y_n$。

由于对每个 j 都有 $my_j \leq x$，且 $x \wedge \infty y = y$，可得 $m(y_j \wedge \infty y) \leq x \wedge \infty y = y$。现在很容易验证，元素 $y_j \wedge \infty y$ 满足第 2.3 段中关于 y' 和 y 的条件，正如所要求的。

为证明 (v)，假设上确数 $\sup_k \mathrm{div}_m(x_k)$ 是有限的，因为否则无需证明。令 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\sup_k \mathrm{div}_m(x_k) \leq n$，并取 $x' \in \mathrm{Cu}(A)$ 使得 $x' \ll x$。由于 $x = \sup_k x_k$，可知对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $x' \ll x_k$。因此，利用 $\mathrm{div}_m(x_k) \leq n$，我们得到元素 y_1，...，y_n，满足

$x' \leq y_1 + \ldots + y_n$ 并且对于每个 j 都有 $my_j \leq x_k \leq x$。由此得到 $\mathrm{div}_m(x) \leq n$，如所要求。□

回顾一下，若对于每个 2-拟迹 τ，只要存在 $\delta > 0$ 使得 $\lim_n \tau(a^{1/n}) \leq (1-\delta) \lim_n \tau(b^{1/n})$，就有 $[a] \leq [b]$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$，则称 C*-代数 A 具有严格比较性质；更多详情请参见 [ERS11]。

引理 3.4. 设 A 为 C*-代数，$[a] \in$ 属于 $\mathrm{Cu}(A)$，且 $m \in \mathbb{N}$。那么，

$$\mathrm{div}_{km}(k[a]) \leq \mathrm{div}_m([a])$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$。

If A has strict comparison, one has $\mathrm{div}_m([a]) \leq \mathrm{div}_{k(m+1)}(k[a])$.

证明. 设 $n = \mathrm{div}_m([a])$，不妨设其有限，并取 $x \ll k[a]$。那么，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $x \ll k[(a-\varepsilon)_+]$。由于 $[(a-\varepsilon)_+] \ll [a]$，存在 y_1、……、$y_n \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$[(a-\varepsilon)_+] \leq y_1 + \ldots + y_n, \quad \text{and} \quad my_j \leq [a]$$

对每个 j。

特别地，可得

$$x \ll k[(a-\varepsilon)_+] \leq ky_1 + \ldots + ky_n, \quad \text{and} \quad m(ky_j) \leq k[a],$$

这意味着 $\mathrm{div}_{km}(k[a]) \leq n$，如所求。

现在假设 A 具有正元素的严格比较，并令 $n = \mathrm{div}^{k(m+1)}(k[a])$。与之前一样，我们可以假设 n 是有限的。令 $x \ll [a]$，这意味着 $kx \ll k[a]$。于是，存在 $z_1, \ldots, z_n$，使得 $x \leq kx \leq z_1 + \ldots + z_n$ 且 $k(m+1)z_j \leq k[a]$。因此，有 $(km+1)mz_j \leq km(m+1)z_j \leq (km)[a]$。

利用 [ERS11，命题 6.2]，，可得 $mz_j \leq [a]$。这意味着 $\mathrm{div}_m([a]) \leq \mathrm{div}^{k(m+1)}(k[a])$。□

注记 3.5. 设 A 是一个 C*-代数，并设 $m \in \mathbb{N}$。假设对每个 $a \in A_+$，都有 $\mathrm{div}_m([a]) < \infty$。特别地，引理 3.3 (ii) 意味着，对每个 $b \in M_n(A)_+$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mathrm{div}_m([b]) < \infty$。

事实上，给定 $b \in M_n(A)_+$，存在元素 $b_1, \ldots, b_n \in A_+$ 以及 $N \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $i \leq n$ 都有 $[b_i] \leq [b] \leq N([b_1] + \ldots + [b_n])$；参见 [APT20, 4.2] 以及 [TV22b, 引理 3.3]。

根据引理 3.3 (ii)，我们有 $\mathrm{div}_m(b) < \infty$，如所要求。

例 3.6. 设 $(A_k)_k$ 是一族含单位元的 C*-代数，使得

$$k \leq \mathrm{div}_2([1_{A_k}]) \leq 7k$$

对每个 k 均成立。

根据 [RR13，定理 7.9]，，这类 C*-代数可以取为单的、含单位元的无限维 AH-代数。利用 [TV21b，命题 4.13]，可知，$A := \oplus_k A_k$ 处处非散射。因此，$\mathrm{Cu}(A)$ 中的每个元素都是弱 $(2, \omega)$-可除的。

考虑元素 $x = \sup_n \sum_{k=1}^n [1_{A_k}] \in \mathrm{Cu}(\oplus_k A_k)$，并将 ι_k 记为所诱导的包含 $\mathrm{Cu}(A_k) \to \mathrm{Cu}(\oplus_k A_k)$。于是，

$$\iota_k([1_{A_k}]) \leq x, \quad \text{and} \quad x \wedge \infty\iota_k([1_{A_k}]) = \iota_k([1_{A_k}]).$$

因此，引理 3.3 (iv) 表明

$$k \leq \mathrm{div}_2(\iota_k([1_{A_k}])) \leq \mathrm{div}_2(x).$$

这表明 x 是弱 $(2, \omega)$-可除的，但 $\mathrm{div}_2(x) = \infty$；另见推论 5.16。

现在我们将注意力转向 C*-代数，其 Cuntz 半群 $\mathrm{Cu}(A)$ 满足：每个元素（或者至少该元素的某个有限倍）都具有有限弱可除性。

为了研究这类 C*-代数，我们需要以下定义：

定义 3.7。设 A 是一个 C*-代数，并设 $a \in A_+$。我们定义

$$\mathrm{mDiv}([a]) = \inf\{\mathrm{Div}_{2m}(m[a]) \mid m \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathrm{mdiv}([a]) = \inf\{\mathrm{div}_{2m}(m[a]) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

我们将 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}}$ （分别地，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}}$ 和$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mDiv}}$）记为 $\mathrm{Cu}(A)$ 中由满足以下条件的元素 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$ 组成的子集：对某个$m \geq 1$ ，有 $\mathrm{div}_{2m}([a]) < \infty$ （分别地，$\mathrm{mdiv}([a]) < \infty$ 和 $\mathrm{mDiv}([a]) < \infty$）。由引理 3.3 可知，子集 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}}$ 和 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}}$ 总是 $\mathrm{Cu}(A)$ 的子半群。

注意，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} \subseteq \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}}$，并且容易看出，只要 $\mathrm{Cu}(A)$ 无孔，就有 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}}$。

例 3.8。若 $A = \mathbb{C}$，则其 Cuntz 半群同构于 $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。容易验证，当且仅当 $x \geq m$ 时，$\mathrm{div}_m(x) < \infty$ 。因此，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}} = \{0, 2, 3, \ldots, \infty\}$。

例 3.9. 每个迹上 $\mathcal{Z}$-稳定的 C*-代数 A 都满足 $\mathrm{Cu}(A) = \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}}$。更一般地，回忆一下，如果对每一对 x'、$x \in \mathrm{Cu}(A)$ 满足 $x' \ll x$ 和 $k \in \mathbb{N}$，则称 C*-代数是 N-几乎可除的（见 [Win12]）；此时存在 $y \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$ky \leq x, \quad \text{and} \quad x' \leq (k+1)(N+1)y.$$

因此，如果 A 对某个 $N \in \mathbb{N}$ 是 N-几乎可除的，则同样有 $\mathrm{Cu}(A) = \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}}$。

根据 [RT17，定理 3.1], ，任何核维数为 N 且没有非零单纯纯无限理想商的处处非散射 C*-代数都是 N-几乎可除的。这包括具有有限核维数的剩余稳定有限处处非散射 C*-代数，以及具有有限分解秩的处处非散射 C*-代数。因此，有 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$。

正如我们将在命题4.1中看到的，对于任意有限核维数的处处非散射 CA-代数，都有 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}} = \mathrm{Cu}(A)$。事实上，还可以得到更强的结论：$\mathrm{Cu}(\oplus_{i=1}^{\infty} A)_{\mathrm{mDiv}} = \mathrm{Cu}(\oplus_{i=1}^{\infty} A)$。

例 3.10。如 [TV21b，定理 9.1], 所示，处处非散射、实秩零 C*-代数的 Cuntz 半群中的每个元素 x 都是弱可除的，也就是说，存在 y、z 使得 $x = 2y + 3z$。特别地，可以得到

$$2(y+z) \leq x \leq 3(y+z).$$

因此，对于每个 x ，都有 $\mathrm{div}_2(x) \leq 3$ ，从而 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$。

如上面的例 3.10 所述，处处非散射、实秩零 C*-代数的 Cuntz 半群中的每个元素都具有有限可除性。下面的引理 3.11 和 3.13 表明，对于（非初等）单 C*-代数以及拓扑维数零的处处非散射 C*-代数的一个上确界稠密子集，同样的结论也成立。然而，这并不一定意味着此类 C*-代数中的每个元素都具有有限可除性。

回忆一下，如果 $x = 2x$，则元素 $x \in \mathrm{Cu}(A)$ 是幂等元。在单 C*-代数的 Cuntz 半群中，只有一个非零幂等元，我们将其记为 ∞。

引理 3.11. 设 A 是一个单的、非初等 C*-代数。那么，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}}$ 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中是上确界稠密的。

如果 A 不是稳定有限的，那么 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$。

证明。设 $m \in \mathbb{N}$。如果 A 是单的且非初等的，则由 [Rob13，命题 5.2.1] 可知，$\mathrm{Cu}(A)$ 是 (m, ω)-可除的。

设 $x \in \mathrm{Cu}(A)$ 满足 $x \ll \infty$。那么，利用 x 是 (m, ω)-可除的这一事实，存在一个非零元素 $y \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $my \leq x$。利用 $x \ll \infty = \infty y$,

我们得到 $n \in \mathbb{N}$，使得 $x \leq ny$。这意味着 $\mathrm{div}_m(x) \leq n$。由于 ∞ 中紧包含的元素所构成的子集在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中关于上确界稠密，结论得证。

现在假设 A 不是稳定有限的。那么，$\mathrm{Cu}(A)$ 中的元素 ∞ 是紧的；例如参见 [Thi17，引理 6.21]，或 [Bos22，定理 2.6] 的证明。

由此可知，$\mathrm{Cu}(A)$ 中的每个元素都紧包含于 ∞ 中。利用上述论证，我们得到 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$。□

注 3.12。检查证明可知，引理 3.11 稍具一般性：对于 C*-代数 A，只要 $\mathrm{Cu}(A)$ 中的每个幂等倍元素都是紧的，就有 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$。

按照 [BP09，注 2.5 (vi)]，中的定义，当一个 C*-代数的本原理想空间具有由紧开子集构成的基时，该代数具有拓扑维数零。所有具有理想性质的 C*-代数都是此类例子。

引理 3.13. 设 A 是一个拓扑维数零的可分处处非散射 C*-代数。那么 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}}$ 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中稠密。

证明. 取 $x \in \mathrm{Cu}(A)$，并假设存在 $x' \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $x' \ll x \ll \infty x'$。

设 $M \in \mathbb{N}$ 满足 $x \leq Mx'$。利用 x 是弱 (m,ω)-可除的这一事实，可得 $y_1, \ldots, y_n$，使得 $my_i \leq x$ 且 $x' \leq y_1 + \ldots y_n$。因此，有 $x \leq My_1 + \ldots + My_n$，并且得到 $\mathrm{div}_m(x) \leq Mn$。

由 [TV22b, 命题4.18] 可知，这样的元素 x 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中上确界稠密，证毕。□

3.1. 全局 Glimm 问题。我们以研究何时 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$ 蕴含 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{Div}} = \mathrm{Cu}(A)$ 来结束本节。更具体地说，我们研究有限弱可除性的元素何时具有有限可除性。鉴于它与全局 Glimm 问题（见第 2.1 段）的相似之处，可以将其称为离散全局 Glimm 问题。

遵循 [TV22b 第 6], 节中的思想，我们得到：

定理 3.14。设 A 为满足 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$ 的 C*-代数。假设存在 $k \in \mathbb{N}$ 以及映射 N，$M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得

（i）只要 $x' \ll x \leq ny, nz$，就存在 $t \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $x' \ll N(n)t$ 且 $t \ll y, z$；（ii）只要 $x' \ll x$ 且 $2x \ll y + 2nz$，就存在 $g \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $2g \ll y$ 且 $x' \ll g + M(n)z$；（iii）只要对于 $i = 1, 2$，有 $x_1 + f$，$x_2 + f \ll y$ 且 $x_i' \ll x_i \ll f$，就能找到 $z_1, z_2 \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $z_1 + z_2 \ll y$ 且 $x_1' + x_2' \ll kz_1, kz_2$。则，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{Div}} = \mathrm{Cu}(A)$。

证明。假设 (i)-(iii) 均成立，并令 $x \in \mathrm{Cu}(A)$。根据假设，我们有 $\mathrm{div}_m(x) < \infty$，这意味着 $\mathrm{div}_2(x) < \infty$。令 $n := \mathrm{div}_2(x)$。我们将通过证明以下结论来说明 $\mathrm{Div}_2(x) < \infty$：

$$\mathrm{Div}_2(x) \leq \Big(N\big(\max\{N(2N_{2,n}), M(n)\}\big) + N\big(N(2N_{2,n})\big)\Big)N(k),$$

其中 $N_{2,\ n} := (N \circ \overset{n}{\ldots} \circ N)(2)$。

令 $x' \in \mathrm{Cu}(A)$ 满足 $x' \ll x$，并取 y', y 使得 $x' \ll y' \ll y \ll x$。那么，由于 x 是 $(2,n)$-可除的，我们得到 $y_1, \ldots, y_n$，满足 $y \ll \sum y_j$ 并且 $2y_j \leq x$ 对每个 j 均成立。取满足 $y \ll \sum y_j'$ 的 $y_j' \ll y_j$。根据 [TV22b，引理 2.2]，对每个 j，我们得到一个元素 r_j，使得 $y_j + r_j \leq x \leq 2r_j$ 且 $y_j' \leq r_j$。

利用 (i)，我们得到满足 $y \ll N_{2,\ n}r$ 且对每个 j 都有 $r \leq r_j$ 的 $r \in \mathrm{Cu}(A)$。取满足 $y \ll N_{2,\ n}r'$ 的 $r' \ll r$。在 $r' \ll r \leq x$ 处应用 (O5)，得到满足 $r' + c \leq x \leq r + c$ 的 $c \in \mathrm{Cu}(A)$。

特别地，由于有 $y_j + r \leq x \leq r + c$，我们得到

$$\begin{aligned} 2y &\leq 2y_1 + \ldots + 2y_n \leq (2y_1 + \ldots + 2y_n) + r \\ &\leq (y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_n) + r + c \leq \ldots \leq r + (2n)c. \end{aligned}$$

利用 (ii)，我们可以找到元素 g'、$g \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$2g \ll r, \quad y' \ll g' + M(n)c, \quad \text{and} \quad g' \ll g.$$

应用 [TV22b，引理 2.2] 于 $2g \ll r$，我们可以找到 $d \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $g' + d \leq r \leq 2d$。因此，我们有 $y' \ll y \leq N_{2,\,n} r' \leq 2N_{2,\,n} d$。由 (i)，我们可以找到 $f \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$y' \leq N(2N_{2,n})f, \quad \text{and} \quad f \ll r', d.$$

将 (O6) 应用于 $x' \ll y' \ll g' + M(n)c$，可找到元素 s'、s、t'、$t \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$x' \ll s' + t', \quad s' \ll s \leq y', g', \quad \text{and} \quad t' \ll t \leq y', M(n)c.$$

令 $N_1 := N(\max\{N(2N_{2,\,n})\ M(n)\})$，以及 $N_2 := N(N(2N_{2,\,n}))$。将 (i) 应用于 $t' \ll t \leq M(n)c$ 和 $t' \ll t \leq y' \leq N(2N_{2,\,n})f$，我们得到 $x_1 \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $x_1 \ll c$、f 和 $t' \ll N_1 x_1$。取 x_1'、$x_1'' \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $x_1' \ll x_1'' \ll x_1$ 和 $t' \leq N_1 x_1'$。

再次使用 (i)，但这次在 $s' \ll s \leq y' \leq N(2N_{2,\,n})f$ 处，我们得到 $x_2 \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $x_2 \ll f$、s 以及 $s' \ll N_2 x_2$。和之前一样，取 x_2'、$x_2'' \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $x_2' \ll x_2'' \ll x_2$ 以及 $s' \leq N_2 x_2'$。

有

$$x_1 + f \ll c + r' \leq x, \quad x_2 + f \ll s + d \leq g' + d \leq r \leq x, \quad \text{and} \quad x_1, x_2 \ll f.$$

由 (iii)，我们找到 z_1、$z_2 \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$z_1 + z_2 \leq x, \quad \text{and} \quad x_1'' + x_2'' \ll k z_1, k z_2.$$

最后一次应用 (i)，我们找到 $z \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$z \leq z_1, z_2, \quad \text{and} \quad x_1' + x_2' \leq N(k)z.$$

元素 z 满足 $2z \leq z_1 + z_2 \leq x$，并且

$$x' \leq t' + s' \leq (N_1 + N_2)(x_1' + x_2') \leq (N_1 + N_2)N(k)z,$$

如所需。 □

可以验证，具有实秩零或稳定秩一的 C*-代数满足上述定理 3.14 中的 (i)–(iii)。特别地，这恢复了 [APRT22 定理 5.5] 的离散部分。

推论 3.15. 设 A 为一个 C*-代数。假设 A 具有稳定秩一或实秩零。那么，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Cu}(A)$ 当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{Div}} = \mathrm{Cu}(A)$。

证明. 若 A 具有实秩零，则使用例 3.10。对于稳定秩一的 C*-代数，只需检查若干证明即可：

[APRT22，引理 5.3] 蕴含 (i) 成立，其中 $N = 2n - 1$.

[TV22b 引理 5.5]，的证明若改用弱消去而非残余稳定有限性，则可得到定理 3.14 中的 (ii)，其中 $k = 2$。

最后，(iii) 可通过查阅 [TV21b, 7.6-7.8] 得出，因为当 A具有稳定秩一时，无需假设某个元素为幂等元即可使用 (O8)；详见 [TV21b] 中的定义 7.2 和命题 7.5。□

注3.16. 实际上可以证明，只要 A 具有稳定秩一，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mdiv}} = \mathrm{Cu}(A)$ 当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{mDiv}} = \mathrm{Cu}(A)$。事实上，给定 $x \in \mathrm{Cu}(A)$ 使得 $\mathrm{div}_{2m}(mx) < \infty$，由 [APRT22, 定理 5.5] 可直接推出 $\mathrm{Div}_{2m}(mx) < \infty$。

根据例 3.10，对于实秩零 C*-代数，同样的结果也成立。

问题3.17. 设 A 是一个 C*-代数，满足 $\mathrm{Cu}(A) = \mathrm{Cu}_{\mathrm{mdiv}}(A)$。$A$ 何时满足 $\mathrm{Cu}(A) = \mathrm{Cu}_{\mathrm{mDiv}}(A)$?

4. 可除性有界

本节重点讨论这样一类 C*-代数，其中元素的可除性存在一个全局上界。也就是说，我们考察满足以下条件的 C*-代数 A：存在 n、$m \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $a \in A_+$，都有 $\mathrm{div}_m([a]) \leq n$。更一般地，我们关注满足 $\sup_{a \in A_+} \mathrm{div}_{2m}(m[a]) < \infty$（对于某个 $m \in \mathbb{N}$）的代数。正如我们将在定理 5.11 中看到的，这些代数将具有处处非散射乘子代数。

我们首先给出有界可除性成立的充分条件（命题4.1和4.3），并证明具有这一性质的 C*-代数在扩张下封闭（命题 4.5）。注意到，我们已经见过一些例子，例如迹态 $\mathcal{Z}$-稳定的 C*-代数，或实秩零的 C*-代数；参见例3.9和3.10。

在定理 4.10 中，我们证明软元素集刻画了 C*-代数具有有界可除性倍数的情形，并据此推出：对于具有 Cuntz 覆盖维数零的单、弱消去 C*-代数，该性质成立；参见推论4.12。

如 [RT17, 中所述，目前尚不清楚 $\dim_{\mathrm{nuc}}(A) < \infty$（其中 A 现为无处稠密）是否意味着对于每个 $a \in A_+$ 都有 $\mathrm{div}(a) < \infty$。然而，仍可得到以下结果，这是 [RT17，命题3.2] 的直接推论。

命题4.1. 设 A 是一个处处非散射的 C*-代数，其有限核维数至多为 k。那么，对于每个 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$，有

$$\mathrm{div}_{4(k+1)}(2(k+1)[a]) \leq 8(k+1)^2.$$

特别地，对于有限核维数的处处非散射 C*-代数，总有 $\mathrm{mdiv}([a]) < \infty$。

证明. 若 A 处处非散射且核维数至多为 k，则 $A \otimes \mathcal{K}$ 也具有同样的性质。

令 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$。将问题转移到遗传 C*-代数 $\overline{a(A \otimes \mathcal{K})a}$ 后，不妨设 a 在 $A \otimes \mathcal{K}$ 中是满的；注意，根据 [TV21b，命题4.1]，，$\overline{a(A \otimes \mathcal{K})a}$ 仍然处处非散射，并且根据 [WZ10，命题2.5]，其核维数至多为 k。

回顾 [TV21b，定理3.1]，$A \otimes \mathcal{K}$ 处处非散射，当且仅当它没有有限维不可约表示。根据 [RT17，命题3.2]，，存在 $[b] \in \mathrm{Cu}(A)$ 使得

$$[(a-\varepsilon)_+] \leq 4(k+1)[b], \quad \text{and} \quad 4(k+1)[b] \leq 2(k+1)[a].$$

因此，我们得到 $2(k+1)[(a-\varepsilon)_+] \leq 8(k+1)^2[b]$。由于 $2(k+1)[a]$ 可以表示为满足 $\varepsilon \to 0$ 的元素 $2(k+1)[(a-\varepsilon)_+]$ 的上确界，因此可得 $\mathrm{div}_{4(k+1)}(2(k+1)[a]) < 8(k+1)^2$，，如所要求。□

我们将 $F(A)$ 记作中心序列代数，其定义见 [Kir06，定义 1.1]。给定一个可分、含单位元的 C*-代数 A，目前尚不清楚 A 具有$\mathcal{Z}$-稳定性是否等价于 $F(A)$ 不具有任何特征；见 [KR15]。尽管这一问题仍未解决，但已有如下结果，见 [Chr17，第二部分，文章 B，命题 2.8]。

命题 4.2（[Chr17]）。设 A 为一个可分的 C*-代数。假设 $F(A)$ 不具有任何特征。那么，对每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 n，使得 $\mathrm{div}_m([a]) \leq n$ 对所有 $a \in A_+$ 均成立。

证明。由 [RR13，推论 5.6] 可知，$F(A)$ 没有特征，当且仅当 $\mathrm{div}_2([1]) < \infty$ 在 $\mathrm{Cu}(F(A))$ 中成立。令 $n_0 = \mathrm{div}_2([1])$。[Chr17，第二部分 B，命题 2.8] 表明，对于每个 $a \in A_+$，都有 $\mathrm{div}_2([a]) \leq n_0$。

归纳论证现在表明，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $\sup_{a \in A_+} \mathrm{div}_m([a]) < \infty$；例如参见 [TV22b，引理 3.4]。□

给定 $[a], [b] \in \mathrm{Cu}(A)$，回顾一下，只要存在 $\gamma < 1$，使得对于每个 $\lambda \in F(\mathrm{Cu}(A)) \cong \mathrm{QT}(A)$，都有 $\lambda([a]) \leq \gamma\lambda([b])$，我们就记作 $[a] <_s [b]$；参见 [RT17，2.1]。

设 $k \in \mathbb{N}$。按照 [Win12, Definition 2.1]，的定义，若对任意 $[a], [b_0], \ldots, [b_k] \in \mathrm{Cu}(A)$，只要 $[a] <_s [b_i]$ 对所有 i 成立，就有 $[a] \leq \sum_i [b_i]$，则称 C*-代数 A 具有k-比较。

还请回忆，若 $L(F(\mathrm{Cu}(A)))$ 中的每个元素都可实现为秩函数，则称 A 具有满射秩映射；详情见 [APRT22, Section 7]。

命题 4.3. 设 A 是具有 k-比较的处处非散射 C*-代数。假设 A 中具有满射秩映射的可分 C*-子代数构成一个 σ-完备且共尾的族。那么，对每个$[a] \in \mathrm{Cu}(A)$，$\mathrm{Div}_{2(k+1)}((k+1)[a]) \leq 4(k+1)^3$。

证明。令 $x := [a]$。根据 [TV21a，命题 6.1] 以及 [FHL+21，命题 3.8.1],存在一个可分的子 C*-代数 $B \subseteq A$，它具有满射秩映射，处处非散射，包含 x，并且由此诱导的包含映射 $\mathrm{Cu}(B) \to \mathrm{Cu}(A)$ 是一个序嵌入。

根据定义，$L(F(\mathrm{Cu}(B)))$ 中的每个元素都可以实现为一个秩函数。因此，存在 $y \in \mathrm{Cu}(B)$，使得 $\widehat{y} = \frac{1}{(k+1)}\widehat{x}$。特别地，这意味着

$$2(k+1)\widehat{y} \leq \frac{2}{3}\widehat{x}, \quad \text{and} \quad \widehat{x} \leq 3(k+1)\widehat{y} = \frac{3}{4}(4(k+1))\widehat{y}.$$

应用 k-比较，可得到 $2(k+1)y \leq (k+1)x$ 以及 $x \leq 4(k+1)^2 y$ 在 $\mathrm{Cu}(B)$ 中成立。利用映射 $\mathrm{Cu}(B) \to \mathrm{Cu}(A)$ 是一个序嵌入这一事实，在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中同样成立。因此，我们有

$$2(k+1)y \leq (k+1)x \leq 4(k+1)^3 y,$$

如所需。□

注 4.4. 如 [APRT22, 定理 7.14]，所示，稳定秩一的可分、处处非散射 C*-代数总有一个满射秩映射。因此，上述命题 4.3 适用于所有具有 k-比较的稳定秩一 C*-代数。

事实上，[APRT22, 定理 8.12] 证明了，稳定秩一的可分、处处非散射 C*-代数具有 k-比较，当且仅当它具有严格比较。因此，对每个 $x \in \mathrm{Cu}(A)$，都有 $\mathrm{div}_2(x) \leq 4$。此外，对证明稍作修改即可得出，$\mathrm{Cu}(A)$ 几乎可除（即 0-几乎可除）。

下面的结果是 [TV21b, 命题 4.2] 的推广。

命题 4.5. 设 I 是 C*-代数 A 的一个理想。假设存在 m_0、m_1、n_1、$n_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathrm{div}_{2m_0}(m_0[a]) \leq n_0, \quad \textit{and} \quad \mathrm{div}_{2m_1}(m_1[b]) \leq n_1$$

对于每个 $a \in (A/I)_+$ 以及每个 $b \in I_+$。于是，

$$\mathrm{div}_{2m_0m_1}((m_0m_1)[c]) \leq m_0(m_1n_0 + n_1)$$

对于每个 $c \in A_+$。

反之，对于每个 $a \in (A/I)_+$，有 $\mathrm{div}_{2m}(m[a])$、$\mathrm{div}_{2m}(m[b]) \leq n$；并且当 $\sup_{c\in A_+} \mathrm{div}_{2m}(m[c]) \leq n$ 对某些 m、$n \in \mathbb{N}$ 成立时，有 $b \in I_+$。

证明。由 [CRS10] 可知，$\mathrm{Cu}(I)$ 可以被视为 $\mathrm{Cu}(A)$ 的一个理想，并且 $\mathrm{Cu}(A/I)$ 自然同构于商 $\mathrm{Cu}(A)/\mathrm{Cu}(I)$。以下我们将使用这些识别，而不明确写出这些同构。

设 $c \in A_+$，并令 $x := [c]$。记 $\mathrm{Cu}(\pi)\colon \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{Cu}(A/I)$ 为诱导商映射。给定 $\mathrm{Cu}(A)$ 中的 x'、x''，使得 $x' \ll x'' \ll x$，我们可以对 $\mathrm{Cu}(A/I)$ 应用有界可除性，从而得到 $\mathrm{Cu}(A)$ 中的元素 y''_j、y'_j、$y_j \in$，对于 j =1，...，n_0，使得

$$(2m_0)\,\mathrm{Cu}(\pi)(y_j) \leq \mathrm{Cu}(\pi)(m_0 x), \quad \mathrm{Cu}(\pi)(m_0 x'') \leq \mathrm{Cu}(\pi)(y''_1) + \ldots + \mathrm{Cu}(\pi)(y''_{n_0}),$$

并且对每个 j 都有 $y''_j \ll y'_j \ll y_j$。注意，这是可行的，因为 $\mathrm{Cu}(\pi)(x) = [\pi(c)]$，且 $\mathrm{Cu}(\pi)(x)$ 在 $(A/I)_+$ 中有一个代表元。

取 $w \in \mathrm{Cu}(I)$，使得 $w = 2w$，并且

$$(2m_0)y'_j \ll (2m_0)y_j \leq m_0 x + w, \quad \text{and} \quad m_0 x'' \leq y''_1 + \ldots + y''_{n_0} + w.$$

利用 [TV21b，命题 7.8]，，我们可找到元素 $z'_j, z_j \in \mathrm{Cu}(A)$，满足

$$(2m_0)z_j \ll m_0 x, \quad y''_j \ll z'_j + w, \quad \text{and} \quad z'_j \ll z_j$$

对每个 $j = 1, \ldots, n_0$ 都有。

特别地，我们有

$$x' \ll x'' \leq m_0 x'' \leq z'_1 + \ldots + z'_{n_0} + w.$$

应用 (O6)，得到一个元素 $r \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$x' \ll z'_1 + \ldots + z'_{n_0} + r, \quad \text{and} \quad r \leq x'', w.$$

注意到，由于 $r \leq x''$，可知对于某个 $b \in A_+$，有 $r = [b]$。此外，由于我们还有 $[b] \leq w$，可得 $b \in I_+$。取满足 $x' \leq z'_1 + \ldots + z'_{n_0} + r'$ 的 $r' \ll r$。现在，利用 $\mathrm{div}_{2m_1}(m_1[b]) \leq n_1$，可得到元素 r_1、.....、r_{n_1}，使得

$$(2m_1)r_i \ll m_1 r, \quad \text{and} \quad m_1 r' \ll r_1 + \ldots + r_{n_1}$$

对每个 $i \leq n_1$ 均成立。

因此可知

$$(m_0 m_1)x' \leq (m_0 m_1)z'_1 + \ldots + (m_0 m_1)z'_{n_0} + m_0 r_1 + \ldots + m_0 r_{n_1}$$

and

$$(2m_0 m_1)z'_j \leq (m_0 m_1)x, \quad (2m_0 m_1)r_i \leq (m_0 m_1)r \leq (m_0 m_1)x$$

对每个 i 和 j 均成立。

这证明了

$$\mathrm{div}_{2m_0 m_1}((m_0 m_1)x) \leq m_0(m_1 n_0 + n_1),$$

如所要求的。

反向结论可由标准论证得出；参见 [TV22b，命题 3.9]。

□

前面的结果经过相应修改后同样适用于用 Div() 代替 div() 的情况。在此情形下，考察 [TV22b，定理 3.10] 可得如下结论：

定理 4.6. 设 I 是 C*-代数 A 的一个理想。假设存在 m_0、m_1、n_0、$n_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathrm{Div}_{2m_0}(m_0[a]) \leq n_0, \quad \textit{and} \quad \mathrm{Div}_{2m_1}(m_1[b]) \leq n_1$$

对于每个 $a \in I_+$ 以及每个 $b \in (A/I)_+$，均成立。于是，存在仅依赖于 m_0、m_1、n_0、n_1 的 M、$N \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathrm{Div}_{2M}(M[c]) \leq N$$

对每个 $c \in A_+$。

反之，对于每个 $a \in (A/I)_+$，$\mathrm{Div}_{2m}(m[a])$、$\mathrm{Div}_{2m}(m[b]) \leq n$，并且当 $\sup^{c \in A_+} \mathrm{Div}_{2m}(m[c]) \leq n$ 对某些 m、$n \in \mathbb{N}$ 成立时，$b \in I_+$。

正如引理 3.11 中所指出的，拥有一个由具有有限可除性的元素组成的上确界稠密子集，并不意味着每个元素都具有这一性质。然而，下面的命题 4.8 表明，只需检验强软元素的有限可除性即可（这些元素一般并非上确界稠密）。

4.7（强软元素与收缩）。设 A 是一个 C*-代数。按照 TV23], 中的定义，我们用 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$ 表示强软元素的集合，即满足以下条件的元素：对于每个 $x' \ll x$，存在 $t \in \mathrm{Cu}(A)$ 使得 $x' + t \leq x \leq \infty t$。当 A 是剩余稳定有限时，$[a] \in \mathrm{Cu}(A)$ 是强软的，当且仅当 $\overline{aAa}$ 没有非零的含幺商；参见 TV23，命题 4.16]。

在某些假设下，给定任意 $x \in \mathrm{Cu}(A)$，都可以找到其下方最大的强软元素。在这种情况下，我们将映射 $\sigma\colon \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$记作该映射，它将元素 x 映射为被x支配的最大强软元素。

如 [Thi20, 命题 2.9], 所示，只要 A 可分、单且具有稳定秩一，就可以定义此映射。事实上，可以证明 σ 是保序且保上确界的幺半群态射。

在 [AVTV23, 定理 5.6], 中证明了，只要A 可分、具有全局 Glimm 性质，且其 Cuntz 半群左软可分，就总能定义 σ；也就是说，对于任意满足以下条件的三个元素 y、$t \in S$ 和 $x \in S_{\mathrm{soft}}$，

$$x + t \ll y + t, \quad t \ll \infty y, \quad \text{and} \quad t \ll \infty x,$$

我们有 $x \ll y$；参见 [AVTV23, 定义 3.2]。如 [AVTV23, 第 3],节所述，具有严格比较或稳定秩一的 C*-代数，其 Cuntz 半群是左软可分的。

在此情形下，σ 是一个保持序和上确界的超可加映射，并且当 $x \leq \infty t$时满足 $x \leq \sigma(x) + t$。

命题 4.8. 设 A 是一个具有全局 Glimm 性质的可分 C*-代数，且 $\mathrm{Cu}(A)$ 是左软可分的；设 $x \in \mathrm{Cu}(A)$ 和 $m \in \mathbb{N}$。则

$$\mathrm{div}_m(\sigma(x)) - 1 \leq \mathrm{div}_m(x) \leq \mathrm{div}_m(\sigma(x)) + 1.$$

证明。首先，为证明 $\mathrm{div}_m(\sigma(x)) \leq \mathrm{div}_m(x) + 1$，设对某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathrm{div}_m(x) = n$，因为否则无需证明。

令 $s \ll \sigma(x)$。利用 σ 保持递增序列的上确界这一事实，可以找到 $x' \ll x$，使得 $s \ll \sigma(x')$。

根据 [TV23，命题 7.7], ，存在 $t \in \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$，使得 $(nm)t \leq x \leq \infty t$。注意到 $(nm)t \leq \sigma(x)$，因为 t 是强软的。利用 x 是弱 (m,n)-可除的这一事实，可找到 $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$\sigma(x') \leq z_1 + \ldots + z_n, \quad \text{and} \quad mz_j \leq x$$

对于每个 j。

现在，利用对每个 i 都有 $z_i \leq \infty t$，我们得到

$$\sigma(x') \leq z_1 + \ldots + z_n \leq (\sigma(z_1) + t) + z_2 + \ldots + z_n \leq \sigma(z_1) + \ldots + \sigma(z_n) + nt.$$

此外，利用 σ 是超可加的，我们还得到 $m\sigma(z_j) \leq \sigma(mz_j) \leq \sigma(x)$。由于 $n(mt) \leq \sigma(x)$，我们推得 $\mathrm{div}_n(\sigma(x)) \leq n + 1$，如所需。

为证明 $\mathrm{div}_m(x) \leq \mathrm{div}_m(\sigma(x)) + 1$，取 $t \in \mathrm{Cu}(A)$ 使得 $mt \leq x \leq \infty t$。注意到这是可行的，因为 A 具有全局 Glimm 性质，因此 $\mathrm{Cu}(A)$ 是 (m,ω)-可除的；参见第 2.3 段。因此，我们有$x \leq \sigma(x) + t$。令 $x' \ll x$。由于 $x' \ll \sigma(x) + t$，我们可以使用 (O6) 得到一个元素 y，使得 $x' \ll y + t$，其中 $y \ll \sigma(x)$。

设 n 满足 $\sigma(x)$ 是弱 (m,n)-可除的。那么，存在 $z_1, .., z_n$ 满足

$$y \leq z_1 + \ldots + z_n, \quad \text{and} \quad mz_j \leq \sigma(x)$$

对每个 j。

我们得到

$$x' \leq z_1 + \ldots + z_n + t, \quad mt \leq x, \quad \text{and} \quad mz_j \leq \sigma(x) \leq x$$

对每个 j，这意味着 $\mathrm{div}_m(x) \leq n + 1$。 □

引理 4.9. 设 A 是一个 C*-代数，并设 $s,t \in \mathrm{Cu}(A)$。假设 s 是强软的。那么，元素 $s \wedge \infty t$ 在 $\mathrm{Cu}(A)$ 中是强软的。

证明。令 $x', x \in \mathrm{Cu}(A)$ 满足 $x' \ll x \ll s \wedge \infty t$。根据定义，这意味着 $x' \ll s$ 和 $x' \ll \infty t$。

由于 s 是强软的，我们可以找到 $y \in \mathrm{Cu}(A)$ 使得 $x' + y \leq s \leq \infty y$。因此，利用与幂等元取下确界是幺半群同态这一事实（[APRT21，第 2] 节），我们有

$$x' + y \wedge \infty t = (x' + y) \wedge \infty t \leq s \wedge \infty t \leq \infty y \wedge \infty t = \infty(y \wedge \infty t).$$

这表明 $s \wedge \infty t$ 是强软的。 □

当 $\mathrm{Cu}(A)$ 不是左软可分时，我们仍有如下结论：

定理 4.10。设 A 是一个具有全局 Glimm 性质的 C*-代数。那么，以下条件等价：

(i) 存在 $n, m \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)$，$\mathrm{div}_{2m}(m[a]) \leq n$；(ii) 存在 $n, m \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $[a] \in \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$，$\mathrm{div}_{2m}(m[a]) \leq n$。

证明。(i) 推出 (ii) 是显然的。

为证明逆命题，设 x'、$x \in \mathrm{Cu}(A)$ 满足 $x' \ll x$。由 [TV23，命题 7.7] 可知，存在满足 $y \leq x \leq \infty y$ 的 $y \in \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$。特别地，有 $x' \ll \infty y$。

根据 [TV23，命题 5.6],，我们可以取 y'、$y'' \in \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$，使得 $y' \ll y'' \ll y$ 且 $x' \ll \infty y'$。由于 y'' 是软的，我们找到 $t \in \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$，使得 $y' + t \leq y'' \leq \infty t$；参见 [TV23，命题 4.13]。现在，根据 (O5)，存在满足以下条件的 $c \in \mathrm{Cu}(A)$

$$y'' + c \leq x \leq y + c.$$

因此，我们有

$$y' + (c + t) \leq x \leq y + c \leq y + (c + t).$$

利用 $x' \leq \infty y'$，我们得到

$$x' \leq x \wedge \infty y'' \leq (y + (c + t)) \wedge \infty y'' = y \wedge \infty y'' + (c + t) \wedge \infty y''$$

and

$$y \wedge \infty y'', (c + t) \wedge \infty y'' \leq x.$$

根据引理 4.9，元素 $y \wedge \infty y''$ 和 $t \wedge \infty y''$ 是强软的。此外，注意到可以得到

$$(c + t) \wedge \infty y'' = c \wedge \infty y'' + t \wedge \infty y''$$

其中 $c \wedge \infty y'' \leq \infty y'' \leq \infty(t \wedge \infty y'')$。

利用 [TV23 定理 4.16],，我们推得 $(c+t)\wedge\infty y''$ 也是强软的。换言之，对于 $x'\ll x$ 的每一对元素 x'、$x\in \mathrm{Cu}(A)$，我们都能找到 s_1、$s_2\in \mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$，使得

$$s_1, s_2 \leq x, \quad \text{and} \quad x' \leq s_1 + s_2.$$

特别地，ms_1、$ms_2\leq mx$ 和 $mx'\leq ms_1+ms_2$。
根据引理 3.3 (ii)，我们有

$$\mathrm{div}_{2m}(mx)\leq \mathrm{div}_{2m}(ms_1)+\mathrm{div}_{2m}(ms_2)\leq 2n,$$

如所需。 □

推论 4.11. 设 A 是一个具有全局 Glimm 性质的 C*-代数。假设 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$ 是满足 $\sup_{s\in S}\mathrm{div}_{2k}(ks)<\infty$ 的 Cu-半群 S 的一个收缩，其中 $k\in\mathbb{N}$。那么，存在 n、$m\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $[a]\in\mathrm{Cu}(A)$，都有 $\mathrm{div}_{2m}(m[a])\leq n$。

证明。利用 $\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$ 是 S 的一个收缩，可得

$$\mathrm{div}_{2k}(ky)\leq \sup_{s\in S}\mathrm{div}_{2k}(ks)<\infty$$

对每个 $y\in\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$。
应用定理 4.10，存在 $n,m\in\mathbb{N}$，使得对于每个$x\in \mathrm{Cu}(A)$，$\mathrm{div}_{2m}(mx)\leq n$。□

回顾 [TV22a，定义 3.1]：若对任意 $x'\ll x\ll y_1+y_2$，都存在 $z_1,z_2\in \mathrm{Cu}(A)$，使得$x'\leq z_1+z_2\leq x$，则称 $\mathrm{Cu}(A)$ 具有覆盖维数零。维数零的例子包括任意实秩零 C*-代数的 Cuntz 半群，以及其他半群，例如 Jacelon-Razak 代数的 Cuntz 半群；参见 [TV22a，第 5] 节。

若只要对于某个元素 z，$x\ll y$在 $x+z\ll y+z$ 时就成立，我们便称 Cuntz 半群为弱消去的。根据 [RW10，定理 4.3]，稳定秩一 C*-代数的 Cuntz 半群具有弱消去性。

推论 4.12. 设 A 是一个覆盖维数零的单、非初等 C*-代数。假设 $\mathrm{Cu}(A)$ 是弱消去的。那么存在 $n\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $[a]\in\mathrm{Cu}(A)$，都有 $\mathrm{div}_2([a])\leq n$。

证明。首先假设 A 是可分的。 [TV22a，定理 7.10] 表明，$\mathrm{Cu}(A)_{\mathrm{soft}}$是一个几乎可除 Cu-半群 S的收缩；另见 [TV22a，命题 7.13]的证明。

如例 3.10 中所述，几乎可除性意味着对于每个元素 $s\in S$，都有 $\mathrm{div}_2(s)\leq 3$。因此，在此情形下，结论由上面的推论 4.11 得出。
如果 A 不是可分的，则可以使用与命题 4.3 的证明中相同的技巧来得到所需结论。□

5. Nowhere scattered corona and multiplier algebras

本节研究 σ 含单位元、处处非散射的 C*-代数 A 的乘子代数何时处处非散射。我们的主要结果是：当 $\sup^{a\in A_+}\mathrm{div}_{2m}(m[a])<\infty$ 对某个 $m\in\mathbb{N}$ 成立时，情况便是如此；见定理 5.11。请注意，上确界并不是取遍 Cuntz 半群的所有元素（即取遍$A\otimes\mathcal{K}$），而仅取那些在 A_+ 中具有代表元的元素。该集合被称为 [APT20, 4.2] 中 Cuntz 半群的尺度。

作为一项应用，我们在定理 5.12 中证明，具有有限核维数、或实秩零、或稳定秩一且满足 k-比较的处处非散射 C*-代数，其乘子代数也都处处非散射。我们还在定理 5.18 中证明

对于稳定的 C*-代数，乘子代数处处非散射意味着代数中的每个元素都具有有限可除性。

我们先从一些例子开始本节：

例 5.1. 令 A 为一个弱纯无穷 C*-代数。KR02 中的命题 4.11] 证明了 $\mathcal{M}(A)$ 是弱纯无穷的，因此根据 TV21b 中的例 3.3]，它处处非散射。

作为一个类似的例子，由 [Lin04] 可知，一个具有连续尺度的单、 σ-含单位元、非初等（即处处非散射）C*-代数具有纯无限冠代数。根据 [TV21b 中的命题 4.2]，这意味着 $\mathcal{M}(A)$ 是处处非散射的；另见 [KNZ19] 和 [Lin91]。

下面的例子出现在 [TV21b 的例 4.14、4.15]中。为方便读者，现将它们重述如下。

例 5.2. 令 A_k 为来自 [RR13]的一族可分、单 AH-代数（见例 3.6）。正如 [RR13 中的推论 8.6], 所示，乘积 $\prod_k A_k$ 具有一个一维不可约表示。根据 [TV21b 中的定理 3.1], ，这意味着 $\prod_k A_k$ 不是处处非散射的。因此， $A := \oplus A_k$ 是一个处处非散射的 C*-代数，其乘子代数 $\mathcal{M}(A) \cong \prod_k A_k$ 却不是处处非散射的。

例 5.3。在 [Sak71 中，定理 1], Sakai 构造了一个单 C*-代数 A ，使得其导出代数 $D(A)$ 满足 $D(A)/A \cong \mathbb{C}$。利用对于单 C*- 代数有 $D(A) \cong \mathcal{M}(A)$ （参见 [Ped72, 命题 2.6] 之后的注释），可以看出$\mathcal{M}(A)$ 不可能处处非散射。

由定理 5.11 和命题4.1 可知， A 具有无限核维数。 [Sak71 的推论 1] 已经表明， A 不是 $\mathcal{Z}$-稳定的。

下面的引理将在命题 5.9 的证明中发挥重要作用。

引理 5.4。设 A 是一个 C*-代数。以下各项等价：

（i） A 处处非散射。（ii）对于任意 $a \in A_+$ 和 $n \in \mathbb{N}$，类 $[a \otimes 1_n] \in \mathrm{Cu}(A)$ 是弱（$2n, \omega$）-可除的。（iii）对于任意 $a \in A_+$，存在 $n = n(a) \in \mathbb{N}$，使得类 $[a \otimes 1_n] \in \mathrm{Cu}(A)$ 是弱（$n+1, \omega$）-可除的。

证明。由 [TV21b，第 8.9] 定理可知， A 处处非散射，当且仅当 $\mathrm{Cu}(A)$ 中的每个元素都是弱（$2, \omega$）-可除的。利用 [TV21b，第 8.9],定理可得，对每个 $n \in \mathbb{N}$，每个元素都是（$2n, \omega$）-可除的。这证明了（i）蕴含（ii），而（ii）蕴含（iii）是显然的。

为证明（iii）蕴含（i），反设 A 并非处处非散射。那么，根据 [TV21b，第 3.1] 定理，存在理想 $I \subseteq J \subseteq A$，使得 J/I 是初等的，即 $\mathrm{Cu}(J/I) \cong \mathrm{Cu}(\mathbb{C}) \cong \overline{\mathbb{N}}$; 参见[Eng14，第 4.4.4]定理。

注意，由于我们假设 A 满足（iii），因此 I 和 J/I 也满足（iii）。设 ϕ 是从 $\mathrm{Cu}(J/I)$ 到$\overline{\mathbb{N}}$的同构。现在，由[TV22b，引理 3.3] 可知，对于每个正元素 $b \in （I/J）\otimes \mathcal{K}$，存在$a \in （I/J）+$，使得 $[b] \leq \infty[a]$ 属于 $\mathrm{Cu}(I/J)$。因此，设 $a \in （I/J）+$ 满足$\phi（[a]） \neq 0$。我们得到 $1 \ll 1 \leq \phi（[a]）$，并利用 Rørdam 引理（例如参见[Thi17，第 2.30]定理），存在 $a' \in （I/J）+$，使得 $1 = \phi（[a']）$。

取 $n \in \mathbb{N}$，使得 $[a' \otimes 1_n]$ 是弱 $(n+1, \omega)$-可除的。由于 ϕ 是一个同构，我们必有 $\phi([a' \otimes 1_n]) = n$ 也是弱 $(n+1, \omega)$-可除的。然而，满足 $(n+1)x \leq n$ 为零的唯一元素是 $x \in \overline{\mathbb{N}}$。这与 $[a' \otimes 1_n]$ 的弱 $(n+1, \omega)$-可除性矛盾。

因此， A 没有非零初等理想商，正如所要求的。 □

注 5.5。在上述引理 5.4 中“(iii) $\implies$ (i)”的证明中，我们使用了如下事实：C*-代数处处非散射，当且仅当它没有初等理想商。正如 [TV21b，命题 8.8], 所示，满足 (O5)-(O8) 的 Cu-半群 S 没有初等理想商，当且仅当 S 中的每个元素都是弱 $(2,\omega)$-可除的。

鉴于此，人们可能会预期，对于满足 (O5)-(O8) 的每个 Cu-半群，‘(iii) $\implies$ (i)’都成立；也就是说，只要对于每个元素 $x \in S$，都存在 n_x 使得 $n_x x$ 是弱 (n_x+1,ω)-可除的，那么 S 中的每个元素都是弱 $(2,\omega)$-可除的。

然而，事实并非如此：例如， $S = \{0, 1, \infty\}$ 是一个满足 (O5)-(O8) 的 Cu-半群。 S 不是弱 $(2,\omega)$-可除的，但 S 中的每个元素都有一个适当无限倍元。因此，它满足 (iii)，但不满足 (i)。

这种差异的原因在于，在抽象 Cuntz 半群的语境中， $\overline{\mathbb{N}}$ 并不是唯一的初等 Cu-半群。事实上， $\{0, 1, \infty\}$ 是初等的；参见 [TV21b，第 8] 节。

下面的引理 5.6 出自 [KR02, 引理 4.10], ，其中运用了一些来自[Ell74]的思想。该引理是在弱纯无穷性的假设下陈述的，但仔细检查其证明可以发现，实际上并不需要这一假设。 [KNZ17, 定理 4.2]中也以不同的方式并通过不同的证明陈述了这一结果。

引理 5.6. 设 A 是一个 σ-含单位元 C*-代数，设 $T \in \mathcal{M}(A)_+$，并设 $\varepsilon > 0$。则A 具有一个递增的可数近似单位 $(e_n)_n$，其元素为正收缩，且满足$e_{n+1}e_n = e_n$，使得

$$T = a + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1}^{1/2} T f_{2n-1}^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}^{1/2} T f_{2n}^{1/2}, \qquad f_n := e_n - e_{n-1}$$

其中 $e_0 = 0$ 和 $a \in A$ 满足 $\|a\| \leq \varepsilon$。

在命题 5.9 的证明中，我们还需要以下结果：

引理 5.7. 设 A 是一个 C*-代数，且 a、$b \in A_+$ 是满足 mdiv($[a]$)、mdiv($[b]$) $< \infty$的元素。则 mdiv($[a+b]$) $< \infty$。

特别地，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $(a+b) \otimes 1_n$ 具有一个 $(n+1,\omega)$-可除类。

证明。取 n_a、$n_b \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{div}_{2n_a}(n_a[a])$、$\mathrm{div}_{2n_b}(n_b[b]) < \infty$。

利用 $n_a n_b[a+b] = [a \otimes 1_{n_a n_b} + b \otimes 1_{n_a n_b}]$，我们可以应用引理 3.3 (iii)，得到

$$\mathrm{div}_{2n_a n_b}(n_a n_b[a+b]) \leq \mathrm{div}_{2n_a n_b}(n_a n_b[a]) + \mathrm{div}_{2n_a n_b}(n_a n_b[b]).$$

因此，对两个加项应用引理 3.4，我们得到

$$\mathrm{div}_{2n_a n_b}(n_a n_b[a+b]) \leq \mathrm{div}_{2n_a}(n_a[a]) + \mathrm{div}_{2n_b}(n_b[b]) < \infty,$$

如所需。 □

引理 5.8。设 A 是一个 σ-含单位元 C*-代数，并设 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ 是 A 中由两两正交元素组成的有界序列，使得 $R = \sum_i a_i$ 严格收敛，并且对每个 $i \geq 1$ 都有 $a_i \perp e_{i-1}$，其中 $(e_i)_i$ 是引理 5.6 中的一个近似单位。

设 $m \in \mathbb{N}$。那么，对于每个 $\varepsilon_0 > 0$，都有

$$\mathrm{div}_{2m}(m[R]) \leq \sup_i \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \mathrm{div}_{2m}(m[(a_i - \varepsilon)_+])$$

在 Cu($\mathcal{M}(A)$) 中。

证明。令 $\varepsilon_0 > 0$。假设 $n := \sup_i \sup_{\varepsilon \le \varepsilon_0} \mathrm{div}_{2m}(m[(a_i - \varepsilon)_+])$ 是有限的，因为否则无需证明。固定 $\varepsilon \le \varepsilon_0$ positive。根据假设，对于每个 i，$(a_i - \frac{\varepsilon}{4})_+ \otimes 1_m$ 都是弱 $(2m, n)$-可除的。因此，我们可以找到元素$b_{i,\ j} \in A \otimes \mathcal{K}$，其中 $j = 1$、.....、n，使得

$$m[(a_i - \varepsilon/3)_+] \le [b_{i,1}] + \ldots + [b_{i,n}], \quad \text{and} \quad 2m[b_{i,j}] \le m[(a_i - \varepsilon/4)_+]$$

对每个 i 和 j。

由 [RR13，引理 2.3(i)] 可知，存在元素$c_{i,\ j} \in M_m(A)_+$，满足$c_{i,\ j} \precsim b_{i,\ j}$，使得

$$(a_i - 2\varepsilon/3)_+ \otimes 1_m = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}.$$

设$d_{i,\ j} := ((a_i - 2\varepsilon/3)_+ \otimes 1_m)c_{i,\ j}((a_i - 2\varepsilon/3)_+ \otimes 1_m) \in M_m(A)$。注意，$d_{i,\ j}$ 中的每个元素都属于$\overline{a_i A a_i}$，因此与 e_{i-1}正交。此外，由于对于每个固定的 j，序列$(d_{i,\ j})_i$ 有界，故每个由此诱导的逐项序列也有界。这表明和（严格收敛） $R_j := \sum_i d_{i,\ j}$ 属于$M_m(\mathcal{M}(A))$。

因此，我们有

$$(R - 2\varepsilon/3)_+^3 \otimes 1_m = \sum_{j=1}^{n} R_j$$

因此， $m[(R - \varepsilon)_+] \ll \sum_{j=1}^{n} [R_j]$。

令 $\delta > 0$ 使得 $m[(R - \varepsilon)_+] \le \sum_{j=1}^{n} [(R_j - \delta)_+]$。应用 [KNZ17，引理 2.2]at

$$d_{i,j} \otimes 1_{2m} \precsim c_{i,j} \otimes 1_{2m} \precsim b_{i,j} \otimes 1_{2m} \precsim (a_i - \varepsilon/4)_+ \otimes 1_m$$

我们可以找到元素 $r_{i,\ j}$ 使得

$$(d_{i,j} - \delta)_+ \otimes 1_{2m} = r_{i,j}(a_i \otimes 1_m)r_{i,j}^*, \quad \text{and} \quad \sup_i \|r_{i,j}\|^2 \le \frac{4}{\varepsilon} \sup_i \|d_{i,j} \otimes 1_{2m}\|.$$

Set $x_{i,j} := (a_i \otimes 1_m)^{1/2} r_{i,j}^* (d_{i,j} \otimes 1_{2m} - \delta)_+$. We get

$$x_{i,j}^* x_{i,j} = (d_{i,j} - \delta)_+^3 \otimes 1_{2m}, \quad \text{and} \quad x_{i,j} x_{i,j}^* \in \overline{(a_i \otimes 1_m) M_m(A)(a_i \otimes 1_m)},$$

其中，对于每个固定的 j，$\left((a_i \otimes 1_m)^{1/2} r_{i,\ j}^*\right)_i$ 和 $\left(r_{i,\ j}^* (d_{i,\ j} \otimes 1_{2m} - \delta)_+\right)_i$ 都是有界序列。

令 $x_{i,\ j}(s, r)$ 表示 $x_{i,\ j}$ 的（s，r）项。按照 [KNZ17，命题 4.4],中的方法，现在可以证明下列各和都严格收敛

$$x_j(s, r) := \sum_i x_{i,j}(s, r).$$

设 $x_j := (x_j(s, r))_{s,\ r} \in M_{m,\ 2m^2}(\mathcal{M}(A))$。则有

$$x_j^* x_j = (R_j - \delta)_+^3 \otimes 1_{2m} \sim (R_j - \delta)_+ \otimes 1_{2m},$$

and

$$x_j x_j^* \in \overline{(R \otimes 1_m) M_m(\mathcal{M}(A))(R \otimes 1_m)}.$$

因此，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，在 $\mathrm{Cu}(\mathcal{M}(A))$ 中有 $2m[(R_j - \delta)_+] \le m[R]$。由于 $[R] = \sup_{0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0} [(R - \varepsilon)_+]$，所以 $m[R]$ 是弱（$2m$，n）可除的，正如所要证明的那样。□

设序列 $(x_i)_i$ in C*-代数 A 是正交的，即该序列中的元素两两正交，也就是说，当 $i \le j$ 时，$x_i x_j = 0$。

命题 5.9. 设 A 是一个 σ-含单位元 C*-代数。假设对于 A 中的每个正元素的正交序列 $(a_i)_i$，都存在 m、$n \in \mathbb{N}$，使得对于每个 i，$\mathrm{div}_{2m}(m[a_i]) \leq n$。那么对于每个 $T \in \mathcal{M}(A)/A$，$\mathrm{div}_{2m}(m[T]) < \infty$。

特别地，$\mathcal{M}(A)/A$ 处处非散射。

证明。令 $\pi\colon \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(A)/A$ 表示商映射。利用引理 5.6 和 5.8，我们推得冠代数中的每个正元素都可以写成$\pi(R_1) + \pi(R_2)$，其中 $\mathrm{mdiv}(R_1)$，$\mathrm{mdiv}(R_2) < \infty$。

利用引理 5.7，对于每个元素 $T \in \mathcal{M}(A)$，都有 $\mathrm{mdiv}(\pi(T)) < \infty$ 在 $\mathcal{M}(A)/A$ 中。引理 5.4 表明，冠代数处处非散射，正如所要求的。

□

注 5.10。令 A 为例 5.3 中的单、处处非散射 C*-代数。由上述命题 5.9 可知，必定存在一个元素 $a \in (\oplus_{i=1}^{\infty} A)_+$，使得 $\mathrm{mdiv}([a]) = \infty$。

利用命题 5.9，我们现在可以证明本文的主要结果。

定理 5.11。设 A 是一个 σ-含单位元的 C*-代数。假设对于 A 中的每个正元素正交序列 $(a_i)_i$，存在 m、$n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{div}_{2m}(m[a_i]) \leq n$ 对每个 i 都成立。那么 $\mathcal{M}(A)$ 是处处非散射的。

证明。利用处处非散射性与扩张相容这一事实（[TV21b，命题 4.2]），该结果直接由命题 5.9 得出。□

由 [PR04] 中的结果可知，单、可分、实秩零 C*-代数的乘子代数不具有特征。下面的定理 5.12 (i) 推广了这一结果。

定理 5.12 。设 A 是一个 σ-含单位元的 C*-代数。假设 t A具有 (i) 实秩零，或 (ii) 有限核维数，或 (iii) k-比较以及一个满射秩映射。那么，当且仅当 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射时，A 处处非散射。

证明。假设 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射。 [TV21b，命题 4.2] 表明，A 也处处非散射。

反之，假设 A 处处非散射。由例 3.10、命题4.1 和命题 4.3，分别可知 (i)、(ii) 和 (iii) 蕴含 A_+ 中每个正元素序列（正交或不正交）都具有一致有界的多重可除性。因此，我们可以使用定理 5.11 得到所需结果。□

问题 5.13。设 A 是一个处处非散射的 C*-代数，使得对于每个 $a \in A_+$，$\mathrm{mdiv}([a]) < \infty$。能否推出 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射?

注意到，这将意味着例 5.3 中的单 C*-代数包含一个具有无限可除性的 $(2, \omega)$-可除元素。

备注5.14。上述定理5.11中的假设并不等价于处处非散射性，即使在单或 σ-含单位元的情形下也不等价：

(1) 例 5.2 中的例子是 σ-含单位元的。因此，存在满足 σ-含单位元、处处非散射的 C*-代数，但它们不满足定理 5.11 中的条件。(2) 根据引理 3.11，在单、非初等 C*-代数 A的 Cuntz 半群中，具有有限可除性的类的集合是上稠密的。然而，正如例 5.3 中明确说明的那样，这还不足以使乘子代数 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射。

此外，注意到，如果定理 5.11 的逆命题对某个 C*-代数族成立，那么该族中的任意含单位元、处处非散射的 C*-代数 A 都必须满足 $\sup^{a \in A_+} \mathrm{div}_{2m}(m[a_i]) < \infty$，其中某个 m。

作为引理 5.8 的另一项应用，我们可以研究乘子代数何时具有特征：

命题 5.15. 设 A 是一个 σ-含单位元的 C*-代数，并设 $(e_i)_i$ 是引理 5.6 中的一个近似单位。假设

$$\sup_i \sup_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0} \operatorname{div}_{2m}(m[(e_i - e_{i-1} - \varepsilon)_+]) < \infty$$

对某个 $\varepsilon_0 > 0$ 成立。

那么， $\mathcal{M}(A)$ 不具有特征。

证明. 利用引理 5.8，我们看到 $\mathcal{M}(A)$ 中的单位 $1 = \sum_i (e_i - e_{i-1})$ 满足 $\operatorname{div}_{2m}(m[1]) < \infty$。

由 [RR13，推论 5.6]，结论立即得到。 □

特别地，命题 5.15 恢复了 [RR13，推论 8.5]：

推论 5.16。只要 $\operatorname{div}_2([1_i])$ 的上确界是有限的，含单位元 C*-代数 A_i 的乘积就不具有特征。

5.1. 稳定 C*-代数。 σ-含单位元的稳定 C*-代数 A 的乘子代数已得到广泛研究。例如， [Rør91] 研究了 A 的冠代数何时为单代数，而在 [NW10] 中，研究表明，利用其乘子代数，具有有限核维数的处处非散射 C*-代数具有余子因子分解性质。

在下文中，我们将证明，对于每个 $a \in A_+$ ，若 $\mathcal{M}(A)$ 要成为处处非散射的，则 $\operatorname{mdiv}([a])$ 必须是有限的；见定理 5.18。因此，如果问题 5.13 的答案是肯定的，这将意味着： σ-含单位元的稳定 C*-代数的乘子代数处处非散射，当且仅当该代数中的每个元素都具有某个有限可除性的倍数。

下面的引理 5.17 在 [TV22b] 中针对 (m,ω)-可除性进行了表述。现在我们给出关于弱 (m,ω)-可除性的类似表述，该表述只需假设该元素具有可除性，而不必假设整个 Cuntz 半群具有可除性。

引理 5.17. 设 A 为一个 C*-代数，且 $a \in (A \otimes \mathcal{K})_+$。那么，如果 $[a]$ 是弱 (m,ω)-可除的，则存在一个序列 $(y_n)_n \subseteq \operatorname{Cu}(A)$，使得对于每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $my_j \le [a] \le \sum_{j=1}^{\infty} y_j$。

证明。设 ε_n 为一个收敛到 0 的严格递减序列，并令 $x_n := [(a - \varepsilon_n)_+]$。我们将归纳地找出元素 $y_{k,\,j}$、 c_n ，使得

$$x_n \le \sum_{k=1}^{n} \sum_j y_{k,j}, \quad \text{and} \quad my_{k,j} \le [a].$$

首先，利用弱 (m,ω)-可除性得到 $y_{1,\,j}$ ，使得 $x_1 \le \sum_j y_{1,\,j}$ 并且 $my_{1,\,j} \le [a]$。

现在假设我们已经证明了对每个 $k \le n$ 都成立。利用 $x_{n-1} \ll x_n \le [a]$ 处的 (O5)，可得到 $c \in \operatorname{Cu}(A)$，使得 $x_{n-1} + c \le [a] \le x_n + c$。特别地，有 $x_{n+1} \ll [a] \le x_n + c$。取 $c' \ll c$ ，使得 $x_{n+1} \le x_n + c'$。

利用 $c' \ll c \le x$ 处的 (m,ω)-可除性，可得到元素 $y_{n+1,\,j}$ ，使得 $c' \le \sum_j y_{n+1,\,j}$ ，并且对每个 j 都有 $my_{n+1,\,j} \le x$ 。我们有

$$x_{n+1} \le x_n + c' \le \sum_{k=1}^{n} \sum_j y_{k,j} + \sum_j y_{n+1,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_j y_{k,j},$$

如所需。

对 n取上确界后，可以看出序列 $(y_{n,\,j})_{n,\,j}$ 满足所需条件。□

注意，一般而言，无法调整之前的证明来说明：当 $[a]$ 为 $(2,m)$-可除时，存在 $y_1,\dots,y_m$，使得 $2y_j \leq [a] \leq y_1+\ldots+y_m$。

然而，对于乘子代数处处非散射的 σ-含单位元 C*-代数，情况确实如此：

定理 5.18. 设 A 是一个 σ-含单位元、稳定的 C*-代数。假设 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射。那么，对于任意 $a \in A_+$ 和 $m \in \mathbb{N}$，存在有限多个元素 $y_1,\dots,y_n \in \mathrm{Cu}(A)$，使得

$$my_j \leq [a] \leq y_1+\ldots+y_n$$

对于任意 $j \leq n$。

特别地，对于任意 $a \in A_+$，$\mathrm{mdiv}(a) < \infty$。

证明。设 $a \in A_+$ 和 $m \in \mathbb{N}$。根据 [APRT22，命题 2.8]，存在一个投影 $p_a \in \mathcal{M}(A)$，使得对于每个 $x \in \mathrm{Cu}(A)$，有 $x \leq [a]$ 当且仅当 $x \leq [p_a]$ 属于 $\mathrm{Cu}(\mathcal{M}(A))$。

假设 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射。因此，根据 [TV21b，定理 8.9]，$\mathrm{Cu}(\mathcal{M}(A))$ 关于 m，ω 弱可除。由注 3.2 可知，对于每个投影 $p \in \mathcal{M}(A)$，$\mathrm{div}_m([p]) < \infty$。

然后，由于我们有 $[a] \leq [p_a] \ll [p_a]$，存在元素 z_1，…，$z_n \in \mathrm{Cu}(\mathcal{M}(A))$，使得

$$[a] \leq [p_a] \leq z_1+\ldots+z_n, \quad \text{and} \quad mz_j \leq [p_a]$$

对于每个 $j \leq n$。

由于 $\mathcal{M}(A)$ 是一个 C*-代数，根据 [APRT21，注 2.6]，我们知道对于每个 j，下确界 $y_j := z_j \wedge \infty[a]$ 存在。该元素的任意代表元都包含于由 a 生成的理想中，因此必然是 A 中的正元素。因此，对于每个 j，我们有 $[a] \leq y_1+\ldots+y_n$ 属于 $\mathrm{Cu}(\mathcal{M}(A))$，且 $y_j \in \mathrm{Cu}(A)$。

此外，我们还得到 $my_j = m(z_j \wedge \infty[a]) \leq [p_a]$。因此，$my_j \leq [a]$ 属于 $\mathrm{Cu}(\mathcal{M}(A))$。

最后请注意，由于 A 是 $\mathcal{M}(A)$的一个理想，A 中的一对元素在 $\mathcal{M}(A)$中 Cuntz 次等价，当且仅当它们在 A中 Cuntz 次等价；例如参见 [Thi17，命题 2.18]。

因此，我们有

$$[a] \leq y_1+\ldots+y_n, \quad \text{and} \quad my_j \leq [a]$$

属于 $\mathrm{Cu}(A)$，正如所需。 □

注 5.19。请注意，存在稳定且处处非散射的 C*-代数，其乘子代数并非处处非散射。事实上，只需取例 3.6 中的 A 即可。根据 [TV21b，命题 4.12]，$A \otimes \mathcal{K}$ 是一个处处非散射的 C*-代数，其中包含一个具有无限可除性的 $(2,\omega)$-可除元素。

由定理 5.18 可知，$\mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ 不可能是处处非散射的。

本文研究了乘子代数 $\mathcal{M}(A)$ 处处非散射的条件。一个似乎复杂得多的问题是，何时 $\mathcal{M}(A)$ 具有全局 Glimm 性质。

问题 5.20。假设 A具有全局 Glimm 性质。何时$\mathcal{M}(A)$ 也具有全局 Glimm 性质?

请注意，只要 $\sup_{a \in A_+} \mathrm{Div}_{2m}(m[a]) < \infty$ and$\mathcal{M}(A)/A$ 满足某个足以确保全局 Glimm 问题得到肯定解的条件，此问题就有肯定解。例如，Lin 和 Ng 在 [LN16] 中证明，$\mathcal{M}(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})/\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K}$ 具有实秩零。因此，由于 $\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K}$ 满足定理 5.11 的条件，我们得到 $\mathcal{M}(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})/\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K}$ 处处非散射。根据 [ER06]（另见 [TV22b，命题 7.4]），$\mathcal{M}(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})/\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K}$ 具有全局 Glimm 性质。因此，根据 [TV22b，定理 3.10]，$\mathcal{M}(\mathcal{Z} \otimes \mathcal{K})$也具有全局 Glimm 性质。

References

[APRT21] R. Antoine, F. Perera, L. Robert和 H. Thiel, C*-代数上拟迹的 Edwards条件, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **151** (2021), 525–547。[APRT22] R. Antoine, F. Perera, L. Robert和 H. Thiel, 稳定秩一 C*-代数及其 Cuntz 半群, *Duke Math. J.* **171** (2022), 33–99。[APT18] R. Antoine, F. Perera和 H. Thiel, Cuntz 半群的张量积与正则性, *Mem. Amer. Math. Soc.* **251** (2018), viii+191。[APT20] R. Antoine, F. Perera和 H. Thiel, 超积 C*-代数的 Cuntz 半群, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **102** (2020), 994–1029。[APT11] P. Ara, F. Perera和 A. S. Toms, 算子代数的 K-理论。C*-代数的分类, 载于 *Aspects of operator algebras and applications, Contemp. Math.* **534**, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2011年, 第1–71页。[AVTV23] A. Asadi-Vasfi, H. Thiel和 E. Vilalta, 软 Cuntz半群的维数与比较半径, 准备中, 2023年。[Bos22] J. Bosa, 稳定元素与性质（S）, *J. Math. Anal. Appl.* **512** (2022), 论文编号126171, 16页。[BP09] L. G. Brown 和 G. K. Pedersen, 低秩或低维的极限与 C*-代数, *J. Operator Theory* **61** (2009), 381–417。[BC09] N. P. Brown 和 A. Ciuperca, 稳定有限 C*-代数上的 Hilbert模同构, *J. Funct. Anal.* **257** (2009), 332–339。[CR21] A. Chand 和 L. Robert, 酉元群的单纯性、有界正规生成与自动连续性, Adv. Math.（即将出版）, 预印本（arXiv: 2108 09796 . [ ] 2021 math.OA）, 。[Chr17] M. S. Christensen, *Regularity of* C *-algebras and central sequence algebras*, 2017年, 博士论文——哥本哈根大学（丹麦）。[CRS10] A. Ciuperca, L. Robert和 L. Santiago, 理想与商的 Cuntz 半群及广义 Kasparov稳定化定理, *J. Operator Theory* **64**(2010), 155–169。[CEI08] K. T. Coward, G. A. Elliott和 C. Ivanescu, 作为 C*-代数不变量的 Cuntz 半群, *J. Reine Angew. Math.* **623** (2008), 161–193。[Cun78] J. Cuntz, 单 C*-代数上的维数函数, *Math. Ann.* **233** (1978), 145–153。[Ell74] G. A. Elliott, 拟阵 C^*-代数的导子。II, *Ann. of Math. (2)* **100**(1974), 407–422。[ERS11] G. A. Elliott, L. Robert和 L. Santiago, C*-代数上的下半连续迹锥, *Amer. J. Math.* **133** (2011), 969–1005。[ER06] G. A. Elliott 和 M. Rørdam, Hausdorff矩序列的扰动及其在实秩零 C*-代数理论中的应用, 载于 *Operator Algebras: The Abel Symposium 2004, Abel Symp.* **1**, Springer, 柏林, 2006年, 第97–115页。[Eng14] M. Engbers, 单纯 Cuntz 半群的分解, 博士论文, WWU 明斯特大学, 2014年。[FHL+21] I. Farah, B. Hart, M. Lupini, L. Robert, A. Tikuisis, A. Vignati和 W. Winter, C*-代数的模型论, *Mem. Amer. Math. Soc.* **271** (2021), viii+127。[GP22] E. Gardella 和 F. Perera, C*-代数的 Cuntz 半群现代理论, 预印本（arXiv:2212.02290 [math.OA]）, 2022年。[KNZ17] V. Kaftal, P. W. Ng和 S. Zhang, 乘子代数中正元素的严格比较, *Canad. J. Math.* **69** (2017), 373–407。[KNZ19] V. Kaftal, P. W. Ng S. Zhang *J. Operator* 和 , 纯无限 *Theory* **82** 2019 307 355 冠代数, ( ), –。[Kir06] E. Kirchberg, C*-代数中的中心序列与强纯无限代数, 载于 *Operator Algebras: The Abel Symposium 2004, Abel Symp.* **1**, Springer, 柏林, 2006年, 第175–231页。[KR02] E. Kirchberg和 M. Rørdam, 无限非单 C*-代数：吸收 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_\infty$, *Adv. Math.* **167** (2002), 195–264。[KR15] E. Kirchberg 和 M. Rørdam, 中心序列 C*-代数何时具有特征, *Internat. J. Math.* **26** (2015), 1550049, 32页。[KNP10] D. Kucerovsky, P. W. Ng和 F. Perera, 单 C^*-代数的纯无限冠代数, *Math. Ann.* **346** (2010), 23–40。[Lin91] H. X. Lin, 具有连续尺度的单 C^*-代数与单纯冠代数, *Proc. Amer. Math. Soc.* **112** (1991), 871–880。[Lin04] H. Lin, 单纯冠 C^*-代数, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 3215–3224。

[LN16] H. Lin 和 P. W. Ng *J. Funct.* , *Anal.* **270** 2016 1220 1267
稳定化 Jiang-Su 代数的冠代数, （），–。[NW10] P. W. Ng 和 W. Winter，核维数与余子因子分解性质，*Int. Math. Res. Not.* **2010**（2010），261—278。[Ped72] G. K. Pedersen，弱
* * *Duke* 半连续性在 C -代数理
Math. J. **39** 1972 431 450
论中的应用，（），–。[PR04] F. Perera 和
M. Rørdam * *J.* ，实秩零 C -代数的
Funct. Anal. **217** 2004 142 170
AF-嵌入，（），–。[Rob13] L. Robert，Cuntz 半群上的泛函锥，*Math. Scand.* **113**（2013），161–186。[
Rob16] L. Robert，关于 *C**-代数的李理想，*J. Operator Theory* **75**（2016），387–408。[RR
13] L. Robert 和 M. Rørdam * *Proc. Lond. Math.* ,
Soc. (3) **106** 2013 1330 1370
C -代数的可除性，（），–。[RT17] L. Robert 和 A. Tikuisis，非单 C*-代数的核维数与 $\mathcal{Z}$-稳定性，
Trans. Amer. Math. Soc. **369**（2017），4631–4670。[Rør91] M. Rørdam，稳定 C -代数的乘子代数中的
理想，（），–。[RW10] M. Rørdam 和
W. Winter *J. Reine Angew. Math.* ，重新审视 Jiang-Su
642 2010 129 155
代数，（），–。[Sak71] S. Sakai，单 C*-代数的导子。III，*Tohoku Math. J. (2)* **23**（1971），559–564。
[Thi17] H. Thiel，Cuntz 半群，讲义可见 www.math.uni- muenster.de/u/hannes.thiel/，2017。[Thi
20] H. Thiel， * *Comm.* 稳
Math. Phys. **377** 2020 37 76
定秩一的单 C -代数中的算子秩，（），–。[TV21a] H. Thiel 和
E. Vilalta *Internat. J.* ，Cuntz 半群的覆盖维
Math. **32** 2021 27 2150100
数 II，（），p.，论文编号 。[TV21b] H. Thiel 和 E. Vilalta，处处非散射 C*-代数，J. Noncommut.
Geom.（即将出版），预印本（arXiv:2112.09877 [math.OA]），2021。[TV22a] H. Thiel 和 E. Vilalta，
Cuntz 半群的覆盖维数，*Adv. Math.* **394**（2022），44页，文章编号 108016。[TV22b] H. Thiel 和
E. Vilalta，全局 Glimm 性质，*Trans. Amer. Math. Soc.* **376**，（2023），4713-4744。DOI：
10.1090/tran/8880，2022。[TV23] H. Thiel 和 E. Vilalta，软的 C*-代数，预印本（arXiv:2304.11644 [
math.OA]），2023。[Vil22] E. Vilalta，Cuntz 半群的 AI-代数的局部刻画，（），论文编号 。
J. Math. Win
Anal. Appl. **506** 2022 125612, 47
12] W. Winter $\mathcal{Z}$ * *Invent. Math.* ,
187 2012 259 342
纯 C -代数的核维数与 -稳定性，（），–。[WZ10] W. Winter 和 J. Zacharias，C*-代数的核维数，
Adv. Math. **224**（2010），461–498。[Zha90] S. Zhang，乘子代数的 Riesz 分解性质与理想结构，
J. Operator Theory **24**（1990），209–225。

Eduard Vilalta, Departament de Matemàtiques,
Universitat Autònoma de Barcelona,08193 Bellaterra, Barcelona, Spain.*Email address*:
evilalta@mat.uab.cat*URL*: www.eduardvilalta.com