arXiv:2304.14010v1 [math.OA] 27 Apr 2023

标架丛的非交换几何

Stefan Wagner *

摘要

我们通过证明以下结论来研究标架丛的非交换几何：每个 C*-代数非交换 SO(n) 主丛，在同构意义下，均由其相对于 SO(n) 标准表示的伴随非交换向量丛唯一确定。为此，我们给出一种构造过程，通过酉张量函子，将某类对应（记作 M）赋予一个自由的 C*-动力系统（$\mathcal{A}_M$，SO(n) α_M），使其相对于 SO(n) 标准表示的伴随非交换向量丛与 M 同构。

MSC2010：58B34，46L87（主要），55R10（次要） 关键词：非交换主丛、酉张量函子、对应、标架丛、伴随向量丛、旋转群。

1. 引言

经典几何中的向量丛通常作为与某个更深层对象——主丛——相关联的对象出现。具体而言，每个具有纤维 V 的向量丛 E 都自然地与一个主 GL(V)-丛相关联，称为 E 的标架丛，记作 Fr(E)。因此，标架丛是研究向量丛的关键工具。事实上，给定一个向量丛 E，可以利用其标架丛以函子方式为 E附加若干新的向量丛。此外，Fr(E) 上的联络会以一致的方式在所有伴随丛上诱导出协变导数，从而带来许多重要的几何构造。在黎曼几何中便是这种情形：对于一个黎曼流形 X，Fr(TX) 上的 Levi-Civita联络会在张量场上诱导出协变导数，进而得到 X的黎曼曲率。例如，黎曼旋量几何中也有类似情形：对于一个旋量流形 X，Fr(TX) 上的“自旋联络”会在旋量丛上诱导出协变导数，从而得到旋量丛上的狄拉克算子和拉普拉斯算子。

*Blekinge Tekniska Högskola, stefan.wagner@bth.se

然而，标架丛的非交换几何尚未得到系统研究，尽管非交换主丛的概念确实已经存在，并伴随着一种将非交换向量丛与之关联的自然过程（参见例如 [1, 8, 27] 及其中的参考文献）。据我们所知，对“标架丛”这一量子化概念的首次且唯一一次系统处理似乎归功于 S. Majid [16, 17, 18]（另见 [2, 第 5 节6]，其中给出了连贯的介绍）。为便于说明，我们简要回顾其主要思想。设 B 是一个配备微分结构的代数 (Ω^1, d)，该结构扮演普通流形的微分 1-形式的角色。对 的标架 本质上是一个在 B 之上的 Hopf-Galois 代数非交换主丛，它能够恢复 Ω^1，其含义是存在一个适当的伴随非交换向量丛，并且该向量丛同构于 Ω^1。需要注意的是，在这种方法中，结构量子群无需预先固定，因为可能存在若干不同的候选者。

在本文中，我们在非交换主丛的 C*-代数框架内，对 Majid 的方法作了一定补充。更确切地说，对于单位 C*-代数 $\mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{B}$ 上的某类对应，它在具有标准表示π 的 SO(n) 的普通标架丛中扮演伴随向量丛的角色 M，我们给出了一种构造过程，用于构造一个自由的 C*-动力系统（$\mathcal{A}_M$,SO(n) α_M），其不动点代数为 $\mathcal{B}$，并且其关于 SO(n) 的标准表示所对应的非交换向量丛与 M 同构。我们强调，对于紧阿贝尔群 SO(2) 这一特殊情形，这样的构造过程已经存在（参见 [26, 第 4]节），因此从现在起我们假设 $n \geq 3$。

尽管我们的构造过程具有拓扑性质，但我们希望其中的部分内容能够以某种方式延伸，从而包含更多几何信息。特别是，我们希望在未来的工作中能够构造出新的、有趣的特征类。相关地，我们还想指出，本文是一个更大计划的一部分，其目的是通过在非交换主丛的 C*-代数框架内系统地发展和研究黎曼旋量几何的关键构造与思想，为非交换黎曼旋量几何提供一种全新的视角。最后，我们想指出，只需稍加调整，我们的论证和结果即可推广到具有忠实不可约表示的半单李群。

文章结构

下面概述本文的内容。在介绍必要的预备知识与记号之后，我们在第 3 节——本文的主体部分——阐述非交换标架丛的方法。更具体地说，对于一个含单位元的 C*-代数$\mathcal{B}$ 以及 SO(n) 的标准表示π $n \geq 3$，我们引入本文所关注的核心概念，即 $\mathcal{B}$ 上的对应是“类型为 π的张量性的”（定义 3.1 和定义 3.5）。对于这样的对应，设 M，我们能够给出一个从小张量子范畴 $\mathcal{T}$ $\subseteq$Rep(SO(n)) 到对应的张量范畴 Corr($\mathcal{B}$) 的酉张量函子的构造过程；该小张量子范畴包含 Irr(SO(n)) 的代表元，并且 Corr($\mathcal{B}$) 是 $\mathcal{B}$ 上对应所构成的张量范畴。

该构造过程依赖于半单紧李群 SO(n) 的表示论，并自然地分为以下两个主要步骤:

1. 我们构造了一个小张量子范畴 $\mathcal{T}$ ⊂Rep(SO(n))，其中包含 Irr(SO(n)) 的表示对象，以及一个线性函子 Γ_M : $\mathcal{T}$ →Corr($\mathcal{B}$)，满足$\Gamma_M(\pi^{\otimes k}) = M^{\otimes k}$对所有整数 $k \geq 0$ 和 $\Gamma_M(T)^* = \Gamma_M(T^*)$，以及 $\mathcal{T}$ 中的所有态射T （推论 3.4）。2. 我们构造了自然的、$\mathcal{B}$-双线性的酉映射 $m_M(\sigma, \tau)$: $\Gamma_M(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_M(\tau)$ →$\Gamma_M(\sigma \otimes \tau)$，对所有 $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$成立（推论 3.10），并证明它们满足某个结合律条件（引理 3.11）。

综合起来，这些结果构成了一个酉张量函子 $\mathcal{T}$ →Corr($\mathcal{B}$)（定理 3.12），进而得到一个自由的 C*-动力系统（$\mathcal{A}_M$, SO(n) α_M)，其不动点代数为$\mathcal{B}$，并且 $\Gamma_{\mathcal{A}_M}(\pi) \cong M$，即 *noncommutative frame bundle associated with* M（推论 3.13）。为简便起见，我们将（$\mathcal{A}_M$, SO(n) α_M)的构造主要步骤置于附录 A 中。最后，我们给出一个分类结果，将标架丛与其伴随向量丛之间的经典对应推广开来（推论 3.15）。第 4 节专门讨论例子。事实上，设 V为 π 的表示空间。在第 4.1 节中，我们证明$\mathcal{B} \otimes V$是类型为 π 的张量性的。在第 4.2 节中，我们证明，在紧空间上、典型纤维为 V 且结构群为 SO(n) 的每个局部平凡厄米向量丛都是类型为 π 的张量性的，从而恢复标架丛的经典情形。在第 4.3 节和第 4.4 节中，我们介绍了迄今尚未被研究的、结构群为 SO(3) 的新自由 C*-动力系统，即*quantumprojective 7-space* 和 Cuntz 代数$\mathcal{O}_2$，（的偶部）；因此，通过考察它们相对于 π的伴随非交换向量丛，我们又得到两个类型为 π 的张量性对应例子。最后，在附录 B 中，为完整起见，我们简要讨论 SO(2) 的特殊情形。

2. 预备知识与记号

我们研究标架丛的非交换几何。本预备章节介绍所用到的最基本定义和记号。

首先列出一些标准参考文献。关于李理论和表示论的全面论述，可参阅Goodman和Wallach的杰出著作 [11]（另见 [4]）。关于纤维丛理论，尤其是主丛及其相关向量丛的全面介绍，可参阅Husemöller的著作 [13]，以及 [14] Nomizu和Kobayashi颇具影响力的论述。关于希尔伯特模结构理论的最新介绍，可参阅Raeburn和Williams的优秀著作 [24] 以及 [7] Echterhoff等人的回忆录。算子代数理论方面，我们的标准参考文献是Blackadar和Pedersen的著作 [3, 22] 。我们还采用非交换主丛的范畴论描述；关于范畴论所需的背景知识，可参阅专著 [9, 19, 21]。

关于群 令 G 为一个紧群。除非另有说明，我们假设 G 的所有表示均为有限维酉表示。我们将表示$\sigma\colon G\to\mathcal{U}(V_\sigma)$记作有序对（$\sigma$， V_σ），或简记为 σ。特别地，在不会产生歧义时，我们用$\mathbf{1}$表示平凡表示。我们用$\mathrm{Rep}(G)$表示其C*-张量表示范畴，用$\mathrm{Irr}(G)$表示不可约表示等价类的集合。略去记号上的区别，我们也用符号 σ 表示$\mathrm{Irr}(G)$中的元素，并在需要时为 $\sigma\in\mathrm{Irr}(G)$选取一个代表表示（σ， V_σ）。

第 3 节中的构造过程的关键要素之一，是关于半单紧李群 $\mathrm{SO}(n)$ 的不可约表示的以下结果，$n\geq 3$。

推论2.1 （例如，参见 [11, 定理5.5。21]）。令 π 为$\mathrm{SO}(n)$ 的标准表示， $n\geq 3$。*SO(n)* 的每个不可约表示都作为某个张量积表示 $\pi^{\otimes k}$ 的子表示出现， $k\geq 0$ （其中 $\pi^{\otimes 0}=1$）。

关于标架丛 令 X 为一个局部紧空间，并令 $q\colon E\to X$ 为 X 上的局部平凡（实或复）向量丛，其典型纤维为 V。标架丛

$$\mathrm{Fr}(E):=\bigcup_{x\in X}\mathrm{Iso}\,(V,E_x)\,,\qquad\qquad E_x:=q^{-1}(\{x\}),$$

关于典范右作用，带有 $\mathrm{GL}(V)$ 在 $\mathrm{Fr}(E)$ 上的典范右作用的主 $\mathrm{GL}(V)$-丛结构，并且以 $\mathrm{GL}(V)$ 的标准表示 (π,V) 为结构群的伴随向量丛 $\mathrm{Fr}(E)\times_{\mathrm{GL}(V)}V$ 恢复了 E，即作为 X 上的向量丛，$\mathrm{Fr}(E)\times_{\mathrm{GL}(V)}V\cong E$。为简化记号，我们使用相同的符号 $\mathrm{Fr}(E)$ 表示标架丛的任意约化。

关于希尔伯特模 设 B 为一个含幺 C*-代数。B 上的对应是一个 B-双模 M，配备内积 $\mathsf{h}\cdot,\cdot\mathsf{i}_{\mathcal{B}}\colon M\times M\to\mathrm{B}$，使其成为右希尔伯特 B-模，且 B 在 M 上的左作用由可伴随算子给出。给定 B 上的两个对应 M 和 N，我们将它们的张量积记作 $M\otimes_{\mathcal{B}}N$，其内积由 $\mathsf{h}x_1\otimes y_1,\ x_2\otimes y_2\mathsf{i}_{\mathcal{B}}=\mathsf{h}y_1,\mathsf{h}x_1,x_2\mathsf{i}_{\mathcal{B}}.y_2\mathsf{i}_{\mathcal{B}}$确定，其中 $x_1,x_2\in M$以及 $y_1,y_2\in N$均任取。我们还关注多重张量积。对于 B 上的对应 M 和非负整数 k，记 $M^{\otimes k}$ 为 M 与自身的k重张量积（取 $M^{\otimes 0}=\mathrm{B}$）。我们用 $\mathrm{Corr}(\mathrm{B})$ 表示 B 上对应所构成的 C*-张量范畴。

关于 C*-动力系统设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位的 C*-代数，且 G 是一个在 $\mathcal{A}$ 上通过 *-自同构 $\alpha_g:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，$g\in G$强连续作用的紧群。本文始终将这样的数据称为一个$C^*$-动力系统，简记为 $(\mathcal{A}\ G,\alpha)$，通常记其不动点代数为 $\mathcal{B}:=\mathcal{A}^G$。

注记 2.2. 与紧群的任意连续表示（可能是无限维的）一样，代数$\mathcal{A}$ 也可以分解为其同型分量；这意味着这些分量的代数直和构成$\mathcal{A}$ 的稠密 *-子代数（参见例如 [12, 定理 4.22]）。

我们也在很大程度上研究相关空间

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(\sigma) := \{x \in \mathcal{A} \otimes V_\sigma : (\forall g \in G)\,(\alpha_g \otimes \sigma_g)(x) = x\} \tag{1}$$

对于所有对象 σ in Rep(G)，其中每个对象关于典范左右作用以及 A 上右 A 值内积的限制，都是 B 上的对应，该内积由 $\mathrm{h}a \otimes v, b \otimes w\mathrm{i}_{\mathcal{A}} := \mathrm{h}v, wia^*b$ 对所有 $a, b \in$ A 和 $v, w \in V_\sigma$ 确定。尤其是，线性函子 $\Gamma_{\mathcal{A}}$: Rep(G) $\to$ Corr(B)，其在对象上的定义为 $\Gamma_{\mathcal{A}}(\sigma)$，在态射上的定义为 $\Gamma_{\mathcal{A}}(T) := 1_{\mathcal{A}} \otimes T$，连同自然的 B-双线性等距映射 $m_{\mathcal{A}}(\sigma, \tau)$: $\Gamma_{\mathcal{A}}(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_{\mathcal{A}}(\tau) \to \Gamma_{\mathcal{A}}$ ($\sigma \otimes \tau$)， $x \otimes y \mapsto x_{12}y_{13}$对于 Rep($G$) 中的所有对象 σ, τ，构成一个弱酉张量函子 Rep(G) →Corr(B)，从而可以在同构意义下重构 C*-动力系统 (A G, α)（见 [20, Sec. 2]）。

关于自由性 如果一个 C*-动力系统（$\mathcal{A}$ G， α）满足 自由 条件，即其 *Ellwood* 映射

$$\Phi : \mathcal{A} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{A} \to C(G, \mathcal{A}), \qquad \Phi(x \otimes y)(g) := x\alpha_g(y)$$

相对于 C(G， $\mathcal{A}$) 上的规范 C*-范数具有稠密像。Ellwood [8]最初针对量子群在 C*-代数上的作用引入了这一要求，现已知它等价于 Rieffel 饱和性 [25] 和 Peter-Weyl-Galois 条件 [1]。根据 [23, 命题 7.1.12 和定理 7.2.6], ，我们可以断言，紧群 G 在紧空间 P 上的连续作用r： $P \times G \to P$ 在经典意义下是自由的，当且仅当所诱导的 C*-动力系统（C(P) G， α）满足 $^{\alpha_g}$(f): $= f \circ {}^{r_g}$，并且在 Ellwood 意义下是自由的。因此，自由的 C*-动力系统为非交换主丛提供了一个自然的框架；在此背景下，（1）中的空间扮演关联向量丛的角色。特别地，它们作为右 $\mathcal{B}$-模是有限生成且投射的（参见，例如 [5, 定理 1.2]）。

另一个在非交换标架丛的构造中发挥重要作用的关键结果是，自由 C*-动力系统与所谓的酉张量函子存在双射对应（参见 [27, 第 5]节）；为方便读者，现回顾其定义。

定义 2.3。 设$\mathcal{B}$ 为一个含单位元的 C*-代数，且设 G 为一个紧群。一个酉张量函子 Rep(G) → Corr($\mathcal{B}$) 是一个线性函子 Γ : Rep(G) → Corr($\mathcal{B}$)，并配备自然的$\mathcal{B}$-双线性酉映射 $m(\sigma, \tau)$: $\Gamma(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma(\tau) \to \Gamma(\sigma \otimes \tau)$，对所有 $\sigma, \tau \in$Rep(G) 均成立，并满足以下条件:

(i) $\Gamma(1) =$B；对于 Rep(G) 中的每个对象 σ，映射 $m(1, \sigma)$ 将 $b \otimes x$ 映射到 $b \,.\, x$；同样地，对于所有 $b \in$B 和 $x \in \Gamma(\sigma)$， $m(\sigma, 1)$ 将 $x \otimes b$映射到 $x \,.\, b$。 (ii) 对于 Rep(G) 中的所有态射 T， $\Gamma(T)^* = \Gamma(T^*)$。 (iii) 对于 Rep($G$) 中的所有对象 σ、 τ、 ρ， $m(\sigma, \tau \otimes \rho)$ (id $\otimes_{\mathcal{B}} m(\tau, \rho)$) $= m(\sigma \otimes \tau, \rho)$ ($m(\sigma, \tau) \otimes_{\mathcal{B}}$ id)。

注记 2.4。 要通过酉张量函子 Rep(G) → Corr($\mathcal{B}$) 构造一个自由 C*-动力系统，只需取一个小的 C*-张量子范畴 $\mathcal{T} \subseteq$ Rep(G)，其中包含不可约表示集 Irr(G) 的代表元（参见 [20, 定理 2.3]）。

3. 非交换标架丛

本节介绍我们研究非交换标架丛的方法。更确切地说，对于一个含幺 C*-代数 $\mathcal{B}$ 以及一种定义在$\mathcal{B}$ 上的特殊对应，它扮演着相对于 SO(n) 的标准表示 π 而言、与普通标架丛相关联的向量丛的角色， $n \geq 3$，我们称之为 M，我们给出一种构造过程，用以构造一个自由 C*-动力系统（$\mathcal{A}_M$， SO(n) α_M），其不动点代数为$\mathcal{B}$，并且 $\Gamma_{\mathcal{A}_M}(\pi) \cong M$，即与 M相关联的非交换标架丛（ $n = 2$情形见附录 B）。核心思想是，将一个从小张量子范畴 $\mathcal{T} \subseteq$Rep(SO(n)) 到 Corr($\mathcal{B}$) 的酉张量函子组合起来，其中该子范畴包含 Irr(SO(n)) 的代表元（参见注记 2.4）。

我们首先介绍本文的主要概念:

定义 3.1。 设 $\mathcal{B}$ 是一个含幺 C*-代数，且 π 是 SO(n) 的标准表示， $n \geq 3$。我们称对应 M 在 $\mathcal{B}$ 上属于类型 π，若存在单射线性映射 $\varphi_{k,\ l}\colon C_{k,\ l} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(n)}\left(V_\pi^{\otimes k},\ V_\pi^{\otimes l}\right) \to \mathcal{L}\left(M^{\otimes k},\ M^{\otimes l}\right)$，对所有整数 $k,\ l \geq 0$，使得满足以下相容条件:

(C) $\varphi_{l,m}(T')\varphi_{k,l}(T) = \varphi_{k,m}(T'T)$ 对所有 $k, l, m \geq 0$, $T \in C_{k,l}$，以及 $T' \in C_{l,m}$ 均成立。(A) $\varphi_{k,l}(T)^* = \varphi_{l,k}(T^*)$ 对所有 $k, l \geq 0$ 和 $T \in C_{k,l}$ 均成立。(U) $\varphi_{k,k}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ 对所有 $k \geq 0$ 均成立。

从现在起，设$\mathcal{B}$ 为一个含单位元的 C*-代数，设 π 为 SO(n) 的标准表示，$n \geq 3$，并设 M 为$\mathcal{B}$ 上的一个 π型对应。此外，为简便起见，记 $V := V_\pi$。首先，我们构造一个小张量子范畴$\mathcal{T} \subseteq$Rep(G)，其中包含 Irr(SO(n)) 的代表元以及一个线性函子 $\Gamma_M : \mathcal{T} \to$ Corr($\mathcal{B}$)。为此，对于每个 $\sigma \in$ Irr(SO(n))，我们选取一个代表元 (σ, V_σ)，使其成为某个张量积表示 $(\pi^{\otimes k}, V^{\otimes k})$, $k \geq 0$ 的子表示（参见推论2.1）。特别地，对于 $1 \in$ Irr(SO(n))，我们选取平凡表示 $(1, \mathbb{C})$。此外，我们考虑全子范畴$\mathcal{S} \subseteq$ Rep(G)，其对象由族 (σ, V_σ)， $\sigma \in$ Irr(SO(n)) 所生成的所有有限张量积表示组成。

设 $(\sigma,\ V_\sigma)$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个对象。根据构造，存在一个整数 $k \geq 0$，使得 $(\sigma,\ V_\sigma)$ 是 $\left(\pi^{\otimes k},\ V^{\otimes k}\right)$ 的子表示。令 P_σ 为从 $V^{\otimes k}$ 到 V_σ 的正交投影。显然，$P_\sigma \in C_{k,\ k}$，因此 $\varphi_{k,\ k}(P_\sigma)$ 在 $M^{\otimes k}$ 上作为可伴随算子作用。此外，条件（ C ）和（ A ）结合起来意味着 $\varphi_{k,\ k}(P_\sigma)$ 是一个投影，由此可得

$$\Gamma_M(\sigma) := \varphi_{k,k}(P_\sigma)\left(M^{\otimes k}\right) \tag{2}$$

是 $\mathcal{B}$ 上的一个对应。因此，对于 $\mathcal{S}$ 中的每个对象 $(\sigma,\ V_\sigma)$，我们都有一个可用的 $\mathcal{B}$ 上的对应。注意，根据条件（U），对于所有整数 $k \geq 0$， $\Gamma_M\left(\pi^{\otimes k}\right) = M^{\otimes k}$。

接下来，设 (σ, V_σ) 和 (τ, V_τ) 是 $\mathcal{S}$中的对象，并设 $T\colon V_\sigma \to V_\tau$是一个态射。我们的目标是通过态射 $\Gamma_M(T)$，建立对应 $\Gamma_M(\sigma)$ 与 $\Gamma_M(\tau)$ 之间的关系。

为此，设 $k,l \geq 0$ 为整数，使得 (σ, V_σ) 和 (τ, V_τ) 分别是$(\pi^{\otimes k}, V^{\otimes k})$ 和 $(\pi^{\otimes l}, V^{\otimes l})$的子表示，并设 P_σ 和 P_τ 分别是从 $V^{\otimes k}$ 到 V_σ 以及从 $V^{\otimes l}$ 到 V_τ的正交投影。我们定义映射 $W_T\colon V^{\otimes k} \to V^{\otimes l}$ 为

$$W_T(x) := \begin{cases} T(x) & \text{for } x \in V_\sigma, \\ 0 & \text{for } x \in V_\sigma^\perp \subseteq V^{\otimes k}. \end{cases}$$

注意到 $W_T^* = W_{T^*}$。此外，容易看出 $W_T \in C_{k,\,l}$，因此我们可以考察它在映射 $\varphi_{k,\,l}$ 下的像。事实上，我们有

$$\varphi_{l,l}(P_\tau)\varphi_{k,l}(W_T) \overset{(\mathrm{C})}{=} \varphi_{k,l}(P_\tau W_T) = \varphi_{k,l}(W_T)$$

这意味着 $\mathrm{ran}(\varphi_{k,\,l}(W_T)) \subseteq \Gamma_M(\tau)$。有了这一点，我们令

$$\Gamma_M(T) := \varphi_{k,l}(W_T)\,|^{\Gamma_M(\tau)}_{\Gamma_M(\sigma)}\colon \Gamma_M(\sigma) \to \Gamma_M(\tau).$$

值得注意的是 $W_{P_\sigma} = P_\sigma$，因此 $\Gamma_M(P_\sigma) = \varphi_{k,\,k}(P_\sigma)$，并且 $\mathrm{ran}(\Gamma_M(P_\sigma)) = \Gamma_M(\sigma)$。此外，我们立刻看出 $\Gamma_M(\mathrm{id}_{V_\sigma}) = \mathrm{id}_{\Gamma_M(\sigma)}$。
仔细遵循上述构造并应用定义 3.1 中的假设，我们立即得到：

Le命题 3.2。 对于 S 中的对象 (σ, V_σ)、(τ, V_τ) 和 (ρ, V_ρ)，以下断言成立：

1. $\Gamma_M(T + cT') = \Gamma_M(T) + c\Gamma_M(T')$ 对所有态射 $T, T'\colon V_\sigma \to V_\tau$和 $c \in \mathbb{C}$.
2. $\Gamma_M(T'T) = \Gamma_M(T')\Gamma_M(T)$ 对所有态射 $T\colon V_\sigma \to V_\tau$和 $T'\colon V_\tau \to V_\rho$均成立。

引理 3.3. 设 (σ, V_σ) 和 (τ, V_τ) 是 S 中的对象，且 $T\colon V_\sigma \to V_\tau$是一个态射。那么 $\Gamma_M(T)^* = \Gamma_M(T^*)$。

证明。 设 $x \in \Gamma_M(\sigma)$，并设 $y \in \Gamma_M(\tau)$。由于 $\varphi_{k,l}(W_T)^* \overset{(\mathrm{A})}{=} \varphi_{l,k}(W_T^*) = \varphi_{l,k}(W_{T^*})$，我们得出

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_M(T)(x), y\rangle_{\mathcal{B}} &= \langle \varphi_{k,l}(W_T)(x), y\rangle_{\mathcal{B}} = \langle x, \varphi_{k,l}(W_T)^*(y)\rangle_{\mathcal{B}} \\ &= \langle x, \varphi_{l,k}(W_{T^*})(y)\rangle_{\mathcal{B}} = \langle x, \Gamma_M(T^*)(y)\rangle_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

□

我们接下来考察全子范畴 $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Rep}(\mathrm{SO}(n))$，其对象是$\mathcal{S}$中对象的有限直和。显然，$\mathcal{T}$是 $\mathrm{Rep}(\mathrm{SO}(n))$ 的小张量子范畴。此外，对于 $\mathcal{T}$中的对象 $\sigma = \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_m$，我们定义

$$\Gamma_M(\sigma) := \Gamma_M(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \Gamma_M(\sigma_m).$$

此外，对于 $\cdots \oplus \sigma_r$和 $\cdots \oplus \tau_s$中位于 $\mathcal{T}$的两个对象 $\sigma = \sigma_1 \oplus$与 $\tau = \tau_1 \oplus$，我们注意到

$$\mathrm{Hom}_G(V_\sigma, V_\tau) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_G(V_{\sigma_i}, V_{\tau_j}),$$

因此，每个态射 $T\colon V_\sigma \to V_\tau$ 都可以唯一地写成一个矩阵，其元素属于所有符合条件的配对 i,j对应的 $\mathrm{Hom}_G(V_{\sigma_i}, V_{\tau_j})$。给定这样一个态射 $T=(T_{ij})$，我们定义

$$\Gamma_M(T) := (\Gamma_M(T_{ij}))$$

根据这些定义，很容易验证引理 3.2 和引理 3.3 对 T 中的对象及其间的态射同样成立。综上，我们已经证明：

推论 3.4. *T 是 $\mathrm{Rep}(SO(n))$ 的一个小张量子范畴，包含 SO(n) 的不可约表示集的代表元。此外，映射 $\Gamma_M : T \to \mathrm{Corr}(\mathcal{B})$，对对象定义为 $\Gamma_M(\sigma)$，对态射定义为 $\Gamma_M(T)$，是一个线性函子，使得对于所有整数 $k \geq 0$ 以及 T 中的所有态射 T，均有 $\Gamma_M(\pi^{\otimes k}) = M^{\otimes k}$ $\Gamma_M(T)^* = \Gamma_M(T^*)$。*

完成第一项任务后，我们现在转而构造对所有 $\sigma,\tau \in T$均成立的自然的、$\mathcal{B}$-双线性且酉的映射 $m_M(\sigma,\tau)\colon \Gamma_M(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_M(\tau) \to \Gamma_M(\sigma\otimes\tau)$。为此，我们考虑对所有整数 $k,l \geq 0$均成立的典范乘法映射 $m_M(k,l)\colon M^{\otimes k} \otimes_{\mathcal{B}} M^{\otimes l} \to M^{\otimes(k+l)}$。这些映射显然是 $\mathcal{B}$-双线性且酉的，并注意到

$$m_M(k,l+m)\,(\mathrm{id}\otimes_{\mathcal{B}} m_M(l,m)) = m_M(k+l,m)\,(m_M(k,l)\otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}) \tag{3}$$

对所有整数 k，l，$m \geq 0$。此外，我们施加另一个条件，以确保映射 $\varphi_{k,\,l}$ 对所有整数 k，$l \geq 0$ 在张量积运算下相容：

定义 3.5。 设 $\mathcal{B}$ 是一个含幺 C*-代数，且 π 是 SO(n) 的标准表示，$n \geq 3$。我们称一个对应 M 上的 $\mathcal{B}$ 具有类型 π 的张量性对应 π (参见定义 3.1)，当且仅当满足以下相容条件：

(T) $m_M(k,l)\big(\varphi_{k,k}(T)\otimes_{\mathcal{B}} \varphi_{l,l}(T')\big) = \varphi_{k+l}(T\otimes T')m_M(k,l)$ for all $k,l \geq 0$, $T \in C_{k,k}$, and $T' \in C_{l,l}$.

注 3.6。显然，每个自由 C*-动力系统（$\mathcal{A}$ G，α），其不动点代数为$\mathcal{B}$，都可通过考察 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ (π)，得到一个在$\mathcal{B}$ 上的类型为 π 的张量性对应。

在本节余下部分中，我们假设 M 是 π 型的张量性的。设 (σ, V_σ) 和 (τ, V_τ) 是 S 中的对象，设 $k,l \geq 0$ 是整数，使得 (σ, V_σ) 和 (τ, V_τ) 分别是 $(\pi^{\otimes k}, V^{\otimes k})$ 和 $(\pi^{\otimes l}, V^{\otimes l})$ 的子表示，并设 P_σ 和 P_τ 分别是 $V^{\otimes k}$ 到 V_σ 以及 $V^{\otimes l}$ 到 V_τ 的正交投影。那么，$(\sigma\otimes\tau, V_\sigma\otimes V_\tau)$ 是 $(\pi^{\otimes(k+l)}, V^{\otimes(k+l)})$ 的子表示，而 $P_\sigma\otimes P_\tau$ 是 $V^{\otimes(k+l)}$ 到 $V_\sigma\otimes V_\tau$ 的正交投影。记

$$\begin{aligned} m_M(\sigma,\tau) &: \Gamma_M(\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(\tau) \to \Gamma_M(\sigma\otimes\tau) \\ m_M(\sigma,\tau) &:= \underbrace{\varphi_{k+l}(P_\sigma\otimes P_\tau)}_{=\Gamma_M(P_\sigma\otimes P_\tau)} m_M(k,l)\restriction^{\Gamma_M(\sigma\otimes\tau)}_{\Gamma_M(\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(\tau)} \end{aligned} \tag{4}$$

容易看出，映射 $m_M(\sigma,\tau)$ 是良定义的且是 $\mathcal{B}$-双线性的。此外，条件 (T) 表明

$$m_M(\sigma,\tau) = m_M(k,l)\big(\underbrace{\varphi_{k,k}(P_\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\varphi_{l,l}(P_\tau)}_{=\Gamma_M(P_\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(P_\tau)}\big)\restriction^{\Gamma_M(\sigma\otimes\tau)}_{\Gamma_M(\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(\tau)} \tag{5}$$

我们接下来给出一系列引理。

引理 3.7。对于所有态射 $T\colon\ V_\sigma\to V_\sigma$ 和 $T'\colon\ V_\tau\to V_\tau$，均有 $m_M(\sigma、\tau)\ (\Gamma_M(T)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M\ (T')\ =\Gamma_M\ (T\otimes T')\ m_M\ (\sigma、\tau)$。

证明。设 $T\colon\ V_\sigma\to V_\sigma$ 和 $T'\colon\ V_\tau\to V_\tau$ 为态射。利用条件 (T) 和 (C)，在定义域 $\Gamma_M(\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(\tau)$ 上，我们推出

$$\begin{aligned}
m_M(\sigma,\tau)\left(\Gamma_M(T)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(T')\right) &= \varphi_{k+l}(P_\sigma\otimes P_\tau)m_M(k,l)\left(\varphi_{k,k}(W_T)\otimes_{\mathcal{B}}\varphi_{l,l}(W_{T'})\right)\\
&= \varphi_{k+l}(P_\sigma\otimes P_\tau)\varphi_{k+l}(W_{T\otimes T'})m_M(k,l)\\
&= \varphi_{k+l}((P_\sigma\otimes P_\tau)W_{T\otimes T'})m_M(k,l)\\
&= \varphi_{k+l}(W_{T\otimes T'}(P_\sigma\otimes P_\tau))m_M(k,l)\\
&= \varphi_{k+l}(W_{T\otimes T'})\varphi_{k+l}(P_\sigma\otimes P_\tau)m_M(k,l)\\
&= \varphi_{k+l}(W_{T\otimes T'})m_M(\sigma,\tau) = \Gamma_M(T\otimes T')m_M(\sigma,\tau).\quad\square
\end{aligned}$$

引理 3.8。映射 $m_M\ (\sigma、\tau)$ 是等距的。

证明。设 $x\in\Gamma_M(\sigma)$，并设 $y\in\Gamma_M(\tau)$。由 (5)，有

$$\langle m_M(\sigma,\tau)(x\otimes_{\mathcal{B}}y), m_M(\sigma,\tau)(x\otimes_{\mathcal{B}}y)\rangle_{\mathcal{B}} = \langle m_M(k,l)(x\otimes_{\mathcal{B}}y), m_M(k,l)(x\otimes_{\mathcal{B}}y)\rangle_{\mathcal{B}}.$$

因此，该断言由映射 $m_M(k、l)$ 为酉映射这一事实得出。 $\square$

引理 3.9. 映射 $m_M(\sigma,\tau)$ 是满射的。

证明。我们的证明从以下观察开始:

$$M^{\otimes k}\otimes_{\mathcal{B}}M^{\otimes l} = \Gamma_M(\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(\tau)\oplus\ker\left(\varphi_{k,k}(P_\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\varphi_{l,l}(P_\tau)\right).$$

此外，我们有 $\ker\left(\varphi_{k+l}(P_\sigma\otimes P_\tau)m_M(k,l)\right) = \ker\left(\varphi_{k,k}(P_\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\varphi_{l,l}(P_\tau)\right)$，这由条件 (T) 显然成立。由于 $\mathrm{ran}\left(\varphi_{k+l}(P_\sigma\otimes P_\tau)m_M(k,l)\right) = \Gamma_M(\sigma\otimes\tau)$，可得 $\mathrm{ran}(m_M(\sigma,\tau)) = \Gamma_M(\sigma\otimes\tau)$，如所需。 $\square$

总结如下:

推论 3.10。由 $(\ m_M\sigma,\tau)\colon\Gamma_M(\sigma)\otimes_{\mathcal{B}}\Gamma_M(\tau)\to\Gamma_M(\sigma\otimes\tau)$ 给出的映射(4)对于所有对象 σ,τ *in S* 都是自然的、*B*-双线性的且为酉的。

注意，对于所有整数 $k,l \geq 0$， $m_M(\pi^{\otimes k}, \pi^{\otimes l}) = m_M(k,l)$。我们的下一个断言是，对于 S 中的所有对象 σ, τ，映射 $m_M(\sigma,\tau)$ 满足以下结合律条件：

引理 3.11。我们有

$$m_M(\sigma, \tau \otimes \rho)\,(\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{B}} m_M(\tau,\rho)) = m_M(\sigma \otimes \tau, \rho)\,(m_M(\sigma,\tau) \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id})$$

对所有对象 σ、τ、$\rho \in S$。

证明。设 (σ, V_σ)、(τ, V_τ) 和 (ρ, V_ρ) 为 S 中的对象。此外，设 k、l 和 m 为非负整数，使得 (σ, V_σ)、(τ, V_τ) 和 (ρ, V_ρ) 分别是 $(\pi^{\otimes k}$、$V^{\otimes k})$、$(\pi^{\otimes l}$、$V^{\otimes l})$ 以及 $(\pi^{\otimes m}$、$V^{\otimes m})$ 的子表示，并设 P_σ、P_τ 和 P_ρ 分别为 $V^{\otimes k}$ 到 V_σ、$V^{\otimes l}$ 到 V_τ 以及 $V^{\otimes m}$ 到 V_ρ 的正交投影。在定义域 $\Gamma_M(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_M(\tau) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_M(\rho)$ 上，我们得到

$$\begin{aligned}
&m_M(\sigma, \tau \otimes \rho)\,(\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{B}} m_M(\tau,\rho)) \\
&\overset{(4)}{=} \varphi_{k+l+m}(P_\sigma \otimes (P_\tau \otimes P_\rho)) m_M(k, l+m)\,(\varphi_{k,k}(P_\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} (\varphi_{l+m}(P_\tau \otimes P_\rho) m_M(l,m))) \\
&\overset{(\mathrm{T})}{=} \varphi_{k+l+m}(P_\sigma \otimes P_\tau \otimes P_\rho)\varphi_{k+l+m}(P_\sigma \otimes P_\tau \otimes P_\rho) m_M(k, l+m)\,(\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{B}} m_M(l,m)) \\
&\overset{(3)}{=} \varphi_{k+l+m}(P_\sigma \otimes P_\tau \otimes P_\rho)\varphi_{k+l+m}(P_\sigma \otimes P_\tau \otimes P_\rho) m_M(k+l, m)\,(m_M(k,l) \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}) \\
&\overset{(\mathrm{T})}{=} \varphi_{k+l+m}((P_\sigma \otimes P_\tau) \otimes P_\rho) m_M(k+l, m)\,(\varphi_{k+l}(P_\sigma \otimes P_\tau) m_M(k,l) \otimes_{\mathcal{B}} \varphi_{m,m}(P_\rho))\,. \\
&\overset{(4)}{=} m_M(\sigma \otimes \tau, \rho)\,(m_M(\sigma,\tau) \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id})\,.
\end{aligned}$$

□

最后，我们再次考察小张量范畴 $\mathcal{T} \subseteq$Rep(SO(n))。对于 $\mathcal{T}$ 中的两个对象$\sigma = \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_r$和 $\tau = \tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_s$，我们定义

$$m_M(\sigma,\tau) := \bigoplus_{i,j} m_M(\sigma_i, \tau_j).$$

直接验证可知，该公式为 $\mathcal{B}$-双线性酉映射 $m_M(\sigma,\tau)\colon \Gamma_M(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_M(\tau) \to \Gamma_M(\sigma \otimes \tau)$；对于满足以下条件的 $\mathcal{T}$ 中所有对象 σ, τ，

$$m_M(\sigma, \tau \otimes \rho)\,(\mathrm{id} \otimes_{\mathcal{B}} m_M(\tau,\rho)) = m_M(\sigma \otimes \tau, \rho)\,(m_M(\sigma,\tau) \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id})$$

对于 $\mathcal{T}$ 中的所有对象 σ, τ, ρ。现在我们可以陈述本文的主要结果：

定理 3.12。线性函子 $\Gamma_M : T \to \mathrm{Corr}(B)$，连同对于所有 $\sigma, \tau \in T$ 的自然的 B-双线性酉映射 $m_M(\sigma,\tau)\colon \Gamma_M(\sigma) \otimes_{\mathcal{B}} \Gamma_M(\tau) \to \Gamma_M(\sigma \otimes \tau)$，构成一个酉张量函子，使得 $\Gamma_M(\pi^{\otimes k}) = M^{\otimes k}$ 对所有整数 $k \geq 0$ 均成立。

有了酉张量函子 T $\to$Corr(B)，我们现在可以应用 [20, 定理 2.3] 中介绍的构造过程 [27，（另见 [27, 定理 5.6]），从而得到一个自由的 C*-动力系统 (A_M, SO(n) α_M)，其不动点代数为 B，且$\Gamma_{\mathcal{A}_M}(\pi) \cong M$。这就是与 M相关联的所需非交换标架丛。为便于说明，我们在附录 A 中简要概述 (A_M, SO(n) α_M) 的构造主要步骤。

推论 3.13。 设 B 是一个含幺 C^*-代数，且 π 是 $\mathrm{SO}(n)$ 的标准表示， $n \geq 3$。B 上每个类型为 π 且具有张量性的对应 M，都会为某个小张量子范畴 T 生成一个酉张量函子 $T \to \mathrm{Corr}(B)$，其中 T 是 $\mathrm{Rep}(SO(n))$ 的小张量子范畴，包含 $\mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))$ 的表示代表元，并且对所有整数 $k \geq 0$都有 $\Gamma_M(\pi^{\otimes k}) = M^{\otimes k}$，从而得到一个自由的 C^*-动力系统 $(A_M, \mathrm{SO}(n)\ \alpha_M)$，其不动点代数为 B，且$\Gamma_{\mathcal{A}_M}(\pi) \cong \Gamma_M(\pi) = M$。

注记 3.14。 根据自由 C*-动力系统的一般理论，可知 M，因此 Γ_M（σ） 对于所有 $\sigma \in \mathcal{T}$，作为右$\mathcal{B}$-模必然是有限生成且投射的（参见例如 [5, 定理 1。2]）。

我们以一个分类结果结束本节，该结果扩展了标架丛与其关联向量丛之间的经典对应。为此，我们考虑结构群为 SO(n) 且不动点代数为 $\mathcal{B}$ 的自由 C*-动力系统的等价类，其中等价关系是保持$\mathcal{B}$ 的等变 *-同构；此外，还考虑关于$\mathcal{B}$ 的对应的等价类，其中等价关系是关于 $\mathcal{B}$ 的双线性同构。结合推论 3.13 与 [20,定理 2.3], ，可得:

推论 3.15。 设 B 为含幺 C^*-代数，且 π 为 $\mathrm{SO}(n)$ 的标准表示， $n \geq 3$。映射 [（A, $\mathrm{SO}(n)\ \alpha$）] $\mapsto$ [$\Gamma_{\mathcal{A}}$（π）] 在结构群为 C^*动力系统的等价类（结构群为 $\mathrm{SO}(n)$ ）与不动点代数 B，以及关于 B 的、具有 π型张量性的对应的等价类之间建立双射对应，其逆由 $[M] \mapsto$ [（A_M，$\mathrm{SO}(n)\ \alpha_M$）]给出。

4. 例子

本节专门讨论例子。为简便起见，我们继续将 SO(n) 的标准表示写作 (π, V)， $n \geq 3$。

4.1. 例子：秩为 n 的自由模

设 B 是一个带单位的 C*-代数。在此例中，我们考察张量积$M := \mathrm{B} \otimes V$，它相对于由典范左右作用以及由 $\mathrm{h}b \otimes v, b' \otimes v'\mathrm{i}_{\mathcal{B}} := \mathrm{h}v, v'\mathrm{i}b^*b'$ 确定的右 B-值内积，对于所有 $b, b' \in \mathrm{B}$ 和 $v, v' \in V$，自然构成 B 上的对应。注意到，在典范同构 $\mathrm{B}^{\otimes k} \cong \mathrm{B}$ 下，对于所有整数 $k \geq 0$，有 $M^{\otimes k} = \mathrm{B} \otimes V^{\otimes k}$。对于整数 k、$l \geq 0$、 $T \in C_k$、ι和 $x \in M^{\otimes k}$，令 $\varphi_{k,l}(x) := \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes T(x)$，即可得到 $M^{\otimes l}$ 中的一个元素。这给出单射线性映射 $\varphi_{k,l} \colon C_{k,l} \to \mathrm{L}(M^{\otimes k}, M^{\otimes l})$，对于所有整数 k、$l \geq 0$，使得 M 是 π型的张量性对象，这一点很容易验证。由附录 A 中介绍的构造过程可知，相应的自由 C*-动力系统 $(\mathrm{A}_M, \mathrm{SO}(n)\ \alpha_M)$ 等价于 (B $\otimes_{\min} C(\mathrm{SO}(n)), \mathrm{SO}(n)\ \alpha)$，其中 $\otimes_{\min}$ 表示 C*-代数的极小张量积，而作用 α 由对第二个张量因子中的自变量进行右平移给出。

4.2. 示例：经典向量丛

设 X 是一个紧空间，并设 $q\colon E\to X$ 是一个局部平凡厄米向量丛，其典型纤维为 V，结构群为 SO(n)，厄米度量为 $x\mapsto \mathrm{h}\cdot,\cdot\mathrm{i}_x$。在此例中，我们考察空间 $M:=\Gamma(E)$，即 $q\colon E\to X$ 的连续截面空间；相对于由逐点乘法给出的显然的（双）模结构以及对 $s,t\in\Gamma(E)$ 定义的内积 $\mathrm{h}\cdot,\cdot\mathrm{i}_{C(X)}$，其中 $\mathrm{h}s,t\mathrm{i}_{C(X)}(x):=\mathrm{h}s(x),t(x)\mathrm{i}_x$，$x\in X$，它构成 $C(X)$ 上的对应。若 E 是平凡的，则$M\cong C(X)\otimes V$，因此，除同构外，我们处于例 4.1 的情形。特别地，有 $\mathsf{A}_M\cong C(X)\otimes_{\min}C(\mathrm{SO}(n))$，这表明 A_M 是交换的，其特征空间由平凡标架丛 $\mathrm{Fr}(E)\cong X\times\mathrm{SO}(n)$ 给出。若 E 是非平凡的，则利用丛图可类似地得出 M 是 π 型的张量性对象。设 $(\mathsf{A}_M,\mathrm{SO}(n),\alpha_M)$ 是相应的自由 C*- 动力系统。稍加思考即可看出，对于所有 $\sigma,\tau\in\mathsf{T}$，有 $m(\sigma,\tau)=\mathrm{flip}(m(\tau,\sigma))$，其中 flip 表示逐纤维张量翻转。由此可知 A_M 是交换的，因此根据几何构造的唯一性（除同构外），有 $\mathsf{A}_M\cong C(\mathrm{Fr}(E))$。

注 4.1。若 X 是闭可定向流形，则其切空间是一个局部平凡厄米向量丛，典型纤维为 V，结构群为 SO(n)。

4.3. 示例：量子射影 7-空间

在本例中，我们引入一个新的自由 C*-动力系统，其结构群为 SO(3)。特别地，相对于 SO(3) 的标准表示 π，其伴随非交换向量丛给出了一个张量性对应的另一实例，类型为 π（参见注 3.6）。据我们所知，迄今为止，文献中尚未研究过这一非交换主丛。

首先，我们回顾经典 *SU(2) Hopf 纤维化在四维球面上的一个非交换 C$\mathrm{SU}(2)$-代数版本（关于 Hopf-Galois 扩张背景下的推广，见 [15] ）。令 $\theta\in\mathbb{R}$，并令 θ' 为反对称的 4×4-矩阵，其中 $\theta'_{1,\ 2}=\theta'_{3,\ 4}=0$ 以及 $\theta'_{1,\ 3}=\theta'_{1,\ 4}=\theta'_{2,\ 3}=\theta'_{2,\ 4}=\theta/2$。Connes-Landi 球面 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^7_{\theta'})$ 是由正规元 z_1、……、z_4 生成的泛单幺 C*-代数，并满足以下关系：

$$z_iz_j=e^{2\pi\imath\theta'_{i,j}}\,z_jz_i,\qquad z_j^*z_i=e^{2\pi\imath\theta'_{i,j}}\,z_iz_j^*,\qquad \sum_{k=1}^{4}z_k^*z_k=1$$

对所有 $1\le i,\ j\le4$。根据 [27, 例 3.5], ，它带有一个 SU(2) 的自由作用 α，对每个 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 在生成元上的作用为

$$\alpha_U:(z_1,\dots,z_4)\mapsto(z_1,\dots,z_4)\begin{pmatrix}U&0\\0&U\end{pmatrix}.$$

相应的不动点代数是由正规元 w_1，w_2 和一个自伴元 x 生成的普适含幺 C*-代数 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^4_\theta)$，满足

$$w_1 w_2 = e^{2\pi\imath\theta}\, w_2 w_1, \qquad w_2^* w_1 = e^{2\pi\imath\theta}\, w_1 w_2^*, \qquad w_1^* w_1 + w_2^* w_2 + x^* x = 1.$$

为继续讨论，我们考虑正规子群 $N := \{\pm 1\} \subseteq \mathrm{SU}(2)$。[26, 命题 3.18] 表明，诱导的 C*-动力系统 $(\mathrm{A}(\mathbb{S}^7_{\theta'})^N, \mathrm{SU}(2)/N, \alpha\restriction_{\mathrm{SU}(2)/N})$ 也是自由的。因此，通过（简单地）令 $\mathrm{A}(\mathbb{P}^7_{\theta'}) := \mathrm{A}(\mathbb{S}^7_{\theta'})^N$，并通过泛覆盖映射 $p : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ 将 SO(3) 与 $\mathrm{SU}(2)/N$ 识别，我们便得到所述的结构群为 SO(3) 的自由 C*-动力系统，即

$$(\mathcal{A}(\mathbb{P}^7_{\theta'}), \mathrm{SO}(3), \alpha\restriction_{\mathrm{SU}(2)/N} \circ \bar{p}^{-1}),$$

$\bar{p}$ 是 $\mathrm{SU}(2)/N \to$SO(3) 的诱导同构。注意，$\mathcal{A}(\mathbb{P}^7_{\theta'})^{\mathrm{SO}(3)} = \mathcal{A}(\mathbb{S}^4_\theta)$。最后，我们由注 3.6 得出，$\Gamma_{\mathcal{A}(\mathbb{P}^7_{\theta'})}(\pi)$ 是 π 型的张量性的。

4.4. 示例：Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$的偶部

在本例中，我们展示另一个具有结构群 SO(3) 的自由 C*-动力系统实例，因此也是一个具有类型 π张量性的对应。显然，这个自由 C*-动力系统在其他文献中尚未被研究过。

首先，我们回顾一下，Cuntz 代数$\mathcal{O}_2$ 是由两个元素 S_1 和 S_2 生成的具有单位元的普适 C*-代数，它们满足 $S_i^* S_j = \delta_{ij}$ 和 $S_1 S_1^* + S_2 S_2^* = 1$（参见 [6]）。由于 [10, 命题 8.4],，它带有 SU(2) 的自由作用 α，该作用对每个 $U := \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(2)$ 在生成元上的作用为

$$\alpha_U : (S_1, S_2) \mapsto (aS_1 + bS_2, -\bar{b}S_1 + \bar{a}S_2).$$

现在，与上面例 4.3 中完全相同的论证表明，所诱导的 C*-动力系统（$\mathcal{O}_2^N$，SO(3) $\alpha\restriction_{\mathrm{SU}(2)/N} \circ \bar{p}^{-1}$）是自由的，并且进一步表明，$\Gamma_{\mathcal{O}_2^N}(\pi)$ 是 π 型的张量性的。

A. 从酉张量函子构造自由 C*-动力系统

本节简要概述如何利用第 3 节中构造的酉张量函子 $\mathcal{T} \to \mathrm{Corr}(\mathcal{B})$，构造自由 C*-动力系统 $(\mathcal{A}_M, \mathrm{SO}(n)\ \alpha_M)$。构造的某些部分需要处理共轭表示。实际上，给定 SO(n) 的一个不可约表示$^-$（σ, V_σ），我们将其共轭表示（$\bar{\sigma}, V_\sigma$）与最初选取的代表元中与之等价的不可约表示等同$^-$，并滥用记号，将后者也记为（$\bar{\sigma}, V_\sigma$）。

首先，我们构造一个代数 A_M。为此，我们考虑代数直和

$$A_M := \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))} \Gamma_M(\bar{\sigma}) \otimes V_\sigma .$$

此外，对于 $\sigma, \tau \in \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))$，$x \otimes v \in \Gamma_M(\bar{\sigma}) \otimes V_\sigma$，以及 $y \otimes w \in \Gamma_M(\bar{\tau}) \otimes V_\tau$，我们按以下规则定义乘积

$$(x \otimes v) \bullet (y \otimes w) := \sum_{k=1}^{N} \left(\Gamma_M \left(\bar{S}_k \right)^* \otimes S_k^* \right) (m(\bar{\sigma}, \bar{\tau})(x \otimes y) \otimes v \otimes w) \in \sum_{k=1}^{N} \Gamma_M \left(\bar{\sigma}_k \right) \otimes V_{\sigma_k},$$

其中 $\{S_1, \ldots, S_N\}$ 是完备的等距交织算子集 $S_k \colon V_{\sigma_k} \to V_\sigma \otimes V_\tau$，$\sigma_k \in \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))$，其对应的共轭表示为 $S_k \colon V_{\sigma_k} \to V_\sigma \otimes V_\tau$。将此乘积双线性延拓，便在 A_M 上得到一个乘法；由于酉张量函子定义中的条件 (iii)，该乘法满足结合律。注意，B 可视为 A_M 中与平凡表示的等价类对应的子代数。其次，我们将 A_M 赋予一个 *-代数结构。为此，取 $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))$。我们定义一个对合映射 $^+ \colon \Gamma_M(\sigma) \to \Gamma_M(\bar{\sigma})$，令 $x^+ := m_x^*(\Gamma_M(R)(1_\mathcal{B}))$，其中 $R \colon \mathbb{C} \to V_\sigma \otimes \bar{V}_\sigma$ 是任意交织算子，而 $m_x \colon \Gamma_M(\bar{\sigma}) \to \Gamma_M(\sigma \otimes \bar{\sigma})$ 表示映射 $m_x(y) := m(\sigma, \bar{\sigma})(x \otimes y)$。现在，对于 $x \otimes v \in \Gamma_M(\bar{\sigma}) \otimes V_\sigma$，令 $(x \otimes v)^+ := x^+ \otimes \bar{v}$，并将其共轭线性地延拓为 A_M上的对合映射。第三，我们赋予 A_M 一个由 $\mathrm{SO}(n)$- 自同构构成的作用，记为 a_M；该作用在每个直和项 $\Gamma_M(\bar{\sigma}) \otimes V_\sigma$, $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))$ 上由 $\mathrm{SO}(n)$ 在第二个张量因子上的相应酉表示给出。总之，我们构造了一个 *-代数 A_M，并赋予 $\mathrm{SO}(n)$ 在 A_M 上的由 *-自同构构成的作用。

我们注意到，每个直和项 $\Gamma_M(\bar{\sigma}) \otimes V_\sigma$, $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{SO}(n))$，相对于典范 B-双模结构以及由 $\mathrm{h}x \otimes v, y \otimes w\mathrm{i}_\mathcal{B} := \mathrm{h}x, y\mathrm{i}_\mathcal{B}\mathrm{h}v, w\mathrm{i}$ 确定的 B 值内积，对于所有 $x, y \in \Gamma_M(\bar{\sigma})$ 和 $v, w \in V_\sigma$，自然构成一个 B 上的对应。由此可知，A_M 具有右预希尔伯特 B-模的结构。我们将其完备化记作 $\mathfrak{H}_M$。容易验证，A_M 上的左乘给出了一个忠实的 *-表示 $\lambda \colon A_M \to \mathrm{L}(\mathfrak{H}_M)$。此外，显然，$a_M$可扩张为一个酉表示 $U_M \colon \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{U}(\mathfrak{H}_M)$。

现在，我们可以引入自由 C*-动力系统 $(\mathrm{A}_M, \mathrm{SO}(n), \alpha_M)$。具体而言，令 A_M为 $\lambda(A_M)$ 关于 $\mathrm{L}(\mathfrak{H}_M)$ 上算子范数的闭包。此外，α_M 由酉表示 U_M 实现，也就是说，对于所有 $g \in \mathrm{SO}(n)$ 和 $x \in \mathrm{A}_M$，有 $(\alpha_M)_g(x) = (U_M)_g x (U_M)_g^*$。最后，$(\mathrm{A}_M, \mathrm{SO}(n), \alpha_M)$ 如所述是自由的，因为我们最初从一个酉张量函子出发。关于这一构造的更详细说明，请参见 [20,第 2] 节。

B. SO(2) 的特殊情形

在本节中，我们简要讨论 SO(2) 的特殊情形。更确切地说，对于一个含单位元的 C*-代数 $\mathcal{B}$，我们证明自由的、结构群为 SO(2) 的 C*-动力系统与不动点代数 B 以及 Morita 等价B-双模之间存在双射对应。

其不动点代数为 $\mathcal{B}$ 。我们首先回顾 Irr(SO(2) $\cong \mathbb{Z}$。现在，设 ($\mathcal{A}$,SO(2) α) 是一个自由的 C*-动力系统，其不动点代数为 $\mathcal{B}$。每个等型分量 $A(k)$， $k \in \mathbb{Z}$，都是一个 Morita 等价 $\mathcal{B}$-双模，其内积为 ${}_{\mathcal{B}}\langle x, y\rangle := xy^*$ 以及 $\langle x, y\rangle_{\mathcal{B}} := x^*y$对于所有 $x, y \in A(k)$。此外，典范乘法映射

$$\Psi_{k_1,k_2} : A(k_1) \otimes_{\mathcal{B}} A(k_2) \to A(k_1 + k_2), \qquad x \otimes_{\mathcal{B}} y \mapsto xy$$

对于所有 k_1， $k_2 \in \mathbb{Z}$，它们都是 Morita 等价的 $\mathcal{B}$-双模的同构，并且对于所有 k_1， k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$，以下结合律条件成立：

$$\Psi_{k_1+k_2,k_3}(\Psi_{k_1,k_2} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_{k_3}) = \Psi_{k_1,k_2+k_3}(\mathrm{id}_{k_1} \otimes_{\mathcal{B}} \Psi_{k_2,k_3}). \tag{6}$$

注意到 $A(0) = \mathrm{B}$，并且在典范同构 $\mathrm{B} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{B} \cong \mathrm{B}$ 下，$\Psi_{0,0} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$。等型分量 $A(k)$, $k \in \mathbb{Z}$，连同映射 Ψ_{k_1,k_2}, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$，构成所谓的因子系统，并允许在同构意义下重构 C*-动力系统 (A, SO(2) α)（参见 [26, 定义 4.5]）。反过来，设 B 是一个含幺 C*-代数，并设 N是一个 Morita 等价的 B-双模，其对偶模为 $\bar{N}$，并且有同构

$$\Psi_{1,-1} : N \otimes_{\mathcal{B}} \bar{N} \to \mathcal{B}, \qquad x \otimes \tilde{y} \mapsto {}_{\mathcal{B}}\langle x, y\rangle,$$

and

$$\Psi_{-1,1} : \bar{N} \otimes_{\mathcal{B}} N \to \mathcal{B}, \qquad \tilde{x} \otimes y \mapsto \langle x, y\rangle_{\mathcal{B}}.$$

注意，Morita 等价条件 B$h x, y$i $. z = x .$ hy, zi$_{\mathcal{B}}$对所有 $x, y, z \in N$成立，这意味着 Ψ_1, $_{-1} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_N \otimes_{\mathcal{B}} \Psi_{-1,1}$ 以及 $\Psi_{-1,1} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_{\bar{N}} = \mathrm{id}_{\bar{N}} \otimes_{\mathcal{B}} \Psi_{1,-1}$。现在的任务是构造一个自由的 C*-动力系统 ($\mathrm{A}_N$, SO(2) α_N)，其不动点代数为 B，且 $A_N(1) = N$。为此，我们应用 [26, 定理 4.21]，这相当于构造一个与 N相关联的因子系统：首先，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们通过如下方式构造一个 Morita 等价 B-双模 $N(k)$:

$$N(k) := \begin{cases} \mathcal{B} & k = 0 \\ N^{\otimes k} & k > 0 \\ \bar{N}^{\otimes -k} & k < 0. \end{cases}$$

其次，我们定义 Morita 等价$\mathcal{B}$-双模同构

$$\Psi_{k_1,k_2} : N(k_1) \otimes_{\mathcal{B}} N(k_2) \to N(k_1 + k_2)$$

对所有 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$，按如下方式处理：对于非负整数，我们只需取张量积 $\otimes_{\mathcal{B}}$，负整数的情形也类似。注意， $N(0) = \mathrm{B}$，并且在典范同构 $\mathrm{B} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{B} \cong \mathrm{B}$ 意义下，$\Psi_{0,0} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$。为处理奇偶性混合的整数，我们反复使用映射 $\Psi_{1,-1}$ 和 $\Psi_{-1,1}$。由 $\Psi_{1,-1} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_1 = \mathrm{id}$ $_1 \otimes_{\mathcal{B}} \Psi_{-1,1}$ 和 $\Psi_{-1,1} \otimes_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_{-1} = \mathrm{id}_{-1} \otimes_{\mathcal{B}} \Psi_{1,-1}$，可得方程 (6) 对所有 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ 均成立。因此，模 $N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ 与映射 Ψ_{k_1,k_2}, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

构成一个因子系统，它给出一个自由的 C*-动力系统（$\mathcal{A}_N$，SO(2) α_N），其不动点代数为 $\mathcal{B}$，且 $A(1) = N$ 符合要求。我们接下来考察映射

$$(\mathcal{A}, \mathrm{SO}(2), \alpha) \mapsto A(1), \qquad \text{and} \qquad N \mapsto (\mathcal{A}_N, \mathrm{SO}(2), \alpha_N).$$

稍加思考即可看出，事实上，正如本节开头所声称的那样，它们互为逆。转而考虑集合 Ext($\mathcal{B}$,SO(2))，即具有结构群 SO(2) 和不动点代数 $\mathcal{B}$ 的自由 C*- 动力系统的等价类集合（关于 $\mathcal{B}$ 上的 SO(2)-等变同构），以及集合 Pic($\mathcal{B}$)，即 Morita 等价 $\mathcal{B}$-双模的等价类集合，也就是$\mathcal{B}$的 Picard 群，我们可以断言

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{B}, \mathrm{SO}(2)) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{B}), \qquad [(\mathcal{A}, \mathrm{SO}(2), \alpha)] \mapsto [A(1)].$$

是一个双射。

注记 B.1。 上述对应也可以由一个涉及群上同调的更抽象结果得到。事实上，由于群上同调 $\mathrm{H}^n_{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z}, \mathcal{U}\mathcal{Z}(\mathcal{B}))$ 对每个 $n > 1$都消失，因此该对应由 [26, 推论 5.9 和定理 514]得到。

注记 B.2。 如果对于某个紧空间 X，$\mathcal{B} = C(X)$，并且 N 是某个线丛 L 在 X上的 $C(X)$-截面模，那么 $\mathcal{A}_N \cong C(\mathrm{Fr}(L))$（参见，例如，[27, 第 6] 节）。

注记 B.3. 关于强分次环这一纯代数情形的类似讨论，请参见著作 [2, 第 5.2 节。3]。

最后，我们建立结构群为 SO(2) 的自由 C*-动力系统与其关于 SO(2) 标准表示的伴随非交换向量丛之间的关系。为此，我们回顾一下，SO(2) 的标准表示并不可约。事实上，作为 SO(2)-模，有 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}(1, \imath) \bigoplus \mathbb{C}(1, -\imath)$。

推论 B.4. 设 $(A, \mathrm{SO}(2)\ \alpha)$ 是一个自由 *C**-动力系统。此外，设 π 是 *SO*$\mathrm{SO}(2)$ 的标准表示。那么 $\Gamma_{\mathcal{A}}(\pi) = A(1) \oplus A(-1)$。特别地，对于一个含幺 *C**-代数 *B* 以及一个 *Morita* 等价 *B*-双模 N，若其对偶模为 N，则有$\Gamma_{\mathcal{A}_N}(\pi) = N \bigoplus N$。

致谢

作者谨向 Ludwik Dabrowski、Karl-Hermann Neeb 和 Sergey Neshveyev 致谢，感谢他们在交谈和通信中给予的帮助；作者尤其感谢 Kay Schwieger，在过去数年间与他进行了许多技术讨论，这些讨论深刻影响了本研究。

参考文献

[1] P. Baum、K. D. Commer 和 P. M. Hajac。《紧量子群对含幺 C* 代数的自由作用》。《数学文献》，22：825–849，2017 年。[2] E. Beggs 和 S. Majid。《量子黎曼几何》。数学科学基础丛书。施普林格国际出版公司，2020 年。[3] B. Blackadar。《算子代数》。《C* 代数与冯·诺伊曼代数理论》，《数学科学百科全书》第 122 卷。柏林：施普林格，2006 年。[4] T. Bröcker 和 T. tom Dieck。《紧李群表示》，《数学研究生教材》第 98 卷。施普林格出版社，纽约，1985 年。[5] K. D. Commer 和 M. Yamashita。《由紧量子群的自由作用构造有限指标 C* 代数包含》。《数学科学研究所出版物》，49(4)：709–735，2013 年。[6] J. Cuntz。《由等距算子生成的简单 C^* 代数》。《数学物理通讯》，57：173–185，1977 年。[7] S. Echterhoff、S. Kaliszewski、J. Quigg 和 I. Raeburn。《C* 动力系统不可约性定理的范畴论方法》。《美国数学学会回忆录》，180(850)：viii+169，2006 年。[8] D. A. Ellwood。《主作用的新刻画》。《泛函分析杂志》，173(1)：49–60，2000 年。[9] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《张量范畴》，《数学调查与专著》第 205 卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会（AMS），2015 年。[10] O. Gabriel。《紧量子群作用在 Cuntz 代数上的不动点》。《亨利·庞加莱年刊》，15(5)：1013–1036，2014 年。[11] R. Goodman 和 N. R. Wallach。《对称性、表示与不变量》，《数学研究生教材》第 255 卷。施普林格出版社，纽约，2009 年。[12] K. H. Hofmann 和 S. A. Morris。《紧群的结构》，《德古意特数学研究》第 25 卷。德古意特，柏林，2013 年。[13] D. Husemöller。《纤维丛》，《数学研究生教材》第 20 卷。施普林格出版社，纽约，1994 年。[14] S. Kobayashi 和 K. Nomizu。《微分几何基础》。第一卷。《威利经典文库》。约翰·威立父子公司，纽约，1996 年。[15] G. Landi 和 W. v. Suijlekom。《由非交换球面得到的主丛》。《数学物理通讯》，260(1)：203–225，2005 年。[16] S. Majid。《量子群与编织群的黎曼几何》。《几何与物理杂志》，30(2)：113–146，1999 年。[17] S. Majid。《量子群和有限群的黎曼几何及非普适微分》。《数学物理通讯》，225(1)：131–170，2002 年。[18] S. Majid。《标准 q球面的非交换黎曼几何与自旋几何》。《数学物理通讯》，256(2)：255–285，2005 年。[19] B. Mitchell。《范畴论》。纽约和伦敦：学术出版社。XI，273 页（1965 年），1965 年。[20] S. Neshveyev。《非遍历作用的对偶性理论》。《明斯特数学杂志》，7(2)：414–437，2013 年。

[21] S. Neshveyev 和 L. Tuset。《紧量子群及其表示范畴》，《专门课程》第 20 卷。法国数学学会，巴黎，2013 年。[22] G. K. Pedersen。《C》*《-代数及其自同构群》。纯粹与应用数学（阿姆斯特丹）。学术出版社，伦敦，2018 年。第二版，由 Søren Eilers 和 Dorte Olesen 编辑并撰写序言。[23] C. N. Phillips。《等变 K 理论与 C 上群作用的自由性》*《-代数》，《数学讲义》第 1274 卷。施普林格，1987 年。[24] I. Raeburn 和 D. Williams。《Morita 等价与连续迹 C》*《-代数》，《数学调查与专著》第 60 卷。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会（AMS），1998 年。[25] M. A. Rieffel. 群在 C*-代数上的适当作用。载于《算子代数映射》，《数学进展》第 84 卷，第 141–182 页。Birkhäuser，1991 年。[26] K. Schwieger 和 S. Wagner. 第一部分，紧阿贝尔群在 C*-代数上的自由作用。《Adv. Math.》，317：224–266，2017 年。[27] K. Schwieger 和 S. Wagner. 第三部分，紧量子群在 C*-代数上的自由作用。《SIGMA》，13(062)：19 页，2017 年。