arXiv:2304.14023v1 [math.QA] 27 Apr 2023

顶点算子代数模范畴的德利涅张量积

ROBERT MCRAE

Abstract. 我们证明，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是顶点算子代数 U 和 V 的模的局部有限阿贝尔范畴，那么 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的德利涅张量积可以实现为顶点算子代数张量积 $U \otimes V$ 的某个模范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$。我们还证明，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 具有 Huang–Lepowsky–Zhang 的编织张量范畴结构，则在温和的附加条件下，$\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 也具有该结构，并且这一编织张量结构等价于德利涅张量积范畴上的自然编织张量结构。特别地，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 C_1-余有限 U 模和 V 模的范畴，且这些范畴在对偶模下封闭，则这些结果成立；在此情形下，我们证明 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是 C_1-余有限 $U \otimes V$ 模的范畴。若 U 和 V 是 $\mathbb{N}$-分次且 C_2-余有限的，则我们可以分别取 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 为所有分次受限的广义 U 模和 V 模的范畴。因此，作为一个应用，若两个 C_2- 余有限顶点算子代数的所有模所成的张量范畴都是刚性的，那么张量积顶点算子代数的所有模所成的张量范畴也是刚性的。我们利用这一点证明，辛费米子顶点算子超代数的偶子代数的表示范畴是非半单模张量范畴。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 5 2.1. 局部有限阿贝尔范畴 5 2.2. 编织张量范畴 8 2.3. 顶点算子代数与张量范畴 11 2.4. 张量积顶点算子代数 15 3. Deligne 张量积 16 3.1. $U \otimes V$-模范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 17 3.2. 射影 $U \otimes V$-模 21 3.3. $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 作为 Deligne 张量积 24 4. 张量积顶点算子代数的张量范畴 27 4.1. 融合积模 28 4.2. 编织张量范畴结构 33 4.3. $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 作为编织张量范畴 36 5. C_2-余有限的例子 39 附录 A. 定理 3.13 的证明 44 附录 B. 定理 4.10 的证明 51 参考文献 53

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类 17B69, 18M15, 81R10, 81T40.

1. Introduction

顶点算子代数是出现在数学和物理学多个领域中的代数结构。它们在二维共形量子场论的数学严谨研究方法中占据重要地位；通过 Huang定理 [Hu2]指出“强有理”顶点算子代数的表示范畴是半单模张量范畴，它们还与拓扑量子场论和三维流形不变量相关。Huang定理针对的是表示论为半单的顶点算子代数，而顶点算子的非半单模范畴在对数共形场论、三维和四维流形不变量以及非半单拓扑量子场论中也备受关注[CR，HL，CG，FG，CDGG]。然而，理解顶点算子代数的非半单表示论并不容易。例如，尽管 Huang、Lepowsky和Zhang[HLZ1]-[HLZ8] 已经找到了使顶点算子代数的模范畴具有自然编织张量范畴结构的充分条件，但尚不清楚每个顶点算子代数是否都有满足这些条件的非平凡模范畴。

本文研究顶点算子代数的张量积。特别地，对于顶点算子代数 U 和 V，假设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 U-模范畴和 V-模范畴，并且具有 Huang–Lepowsky–Zhang 编织张量范畴结构。那么，我们预期存在一个关于张量积顶点算子代数 $U\otimes V$ 的模的编织张量范畴，它以某种方式由 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 确定，其编织张量范畴结构与 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 上的结构具有自然的关联。事实上，由 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 确定的自然编织张量范畴确实存在，即它们的 Deligne 张量积 [De]；问题在于，它是否等价于一个 $U\otimes V$-模范畴。

对于任意两个 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的 Deligne 张量积是一个 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$，并配备一个双线性函子 $\otimes:\mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{C}$，该函子对两个变量都右正合；且对于任意 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$，与 $\otimes$ 复合会在右正合的 $\mathbb{C}$-线性函子 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}\to\mathcal{C}$ 和对两个变量都右正合的双线性函子 $\mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{C}$ 之间给出一个等价。例如，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是有限维代数 A 和 B 的有限维模范畴，则有限维 $A\otimes B$-模范畴是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的 Deligne 张量积。若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的 Deligne 张量积存在，则它在等价意义下唯一。若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是局部有限的，也就是说，态射空间是有限维的，且所有对象都有有限长度，那么 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 确实存在，并且是局部有限的 [De，LF]。

现在，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是顶点算子代数 U 和 V 的局部有限阿贝尔模范畴，那么人们自然会期待 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 等价于某个 $U\otimes V$-模范畴。事实上，根据 [CKM2，定理 5.5], ，如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中至少有一个是半单的，那么 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 等价于由有限直和的 $U\otimes V$- 模 $M\otimes W$ 构成的范畴，其中 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。然而，如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 都不是半单的，那么这个 $U\otimes V$-模范畴未必是阿贝尔范畴。因此，我们定义了一个不同的 $U\otimes V$-模范畴，以获得本文的第一个主要结果（见下文定理 3.15）：

定理 1.1. 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是关于分次受限广义 U-模和 V-模的局部有限阿贝尔范畴，且对取子商封闭。定义 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 为有限长度分次受限广义 $U\otimes V$-模 X 所构成的范畴，使得 X 中的任意向量都生成一个 U-子模，该子模是 $\mathcal{U}$ 的对象；并生成一个 V-子模，该子模是 $\mathcal{V}$ 的对象。那么，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的 Deligne 张量积，其中 $\otimes:\mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 由 U-模和 V-模的向量空间张量积给出。

证明此定理的关键步骤是证明：如果 P 是 $\mathcal{U}$ 中的射影对象，且 Q 是 $\mathcal{V}$中的射影对象，那么 $P \otimes Q$ 就是 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中的射影对象。这一点在定理 3.11中得到证明，随后可以利用射影对象的性质证明，在 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 都有充分多的射影对象这一特殊情形下，$\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 满足 Deligne 张量积的泛性质。要证明一般情形下 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是 Deligne 张量积，我们将这一特殊情形与如下事实结合起来（见 [德，命题 2.14]）：任意局部有限阿贝尔范畴都是由若干具有充分多射影对象的阿贝尔满子范畴构成的并。

现在设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是分别关于 U 模和 V 模的局部有限范畴，并且它们具有 [HLZ1]-[HLZ8]，的顶点代数型辫张量范畴结构，其融合积双函子为 $\boxtimes_U$： $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 和 $\boxtimes_V$： $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$。（我们称 $\boxtimes_U$ 和 $\boxtimes_V$ 为融合积，以避免与向量空间张量积 $U \otimes V$-模混淆。）于是，Deligne 张量积 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 的泛性质蕴含了 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 也是一个编织张量范畴（参见 [De，命题 5.17]，[EGNO，第 4.6]，节，或下文第 2.2 节的讨论），并且融合积双函子 $\boxtimes$： $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \times \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \to \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 满足

$$(M_1 \otimes W_1) \boxtimes (M_2 \otimes W_2) = (M_1 \boxtimes_U M_2) \otimes (W_1 \boxtimes_V W_2) \tag{1.1}$$

对于 M_1、$M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 以及 W_1、$W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。但是，目前尚不清楚 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 上的这一编织张量结构是否与 [HLZ1]-[HLZ8] 的编织张量结构一致。特别地，如果我们将 $\boxtimes$ 取为 $U \otimes V$-模的顶点代数融合积，并按照 [HLZ3, Definition 4.15]，中的定义，那么关系式 (1.1) 之前仅在 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中至少有一个为半单的情形下得到证明（见 [Lin, Lemma 2.16]，[CKLR, Proposition 3.3]，以及 [CKM2, Theorem 5.2]）。

在定理 4.3 中，我们证明了 $\boxtimes$ 的顶点代数融合积满足 (1.1)，且所需条件相当一般；特别地，我们不假设 $\mathcal{U}$ 或 $\mathcal{V}$ 为半单的。这是证明在温和条件下，Deligne 张量积 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 上的编织张量范畴结构确实是 [HLZ1]-[HLZ8] 所规定的顶点代数编织张量结构的关键步骤；详细表述见定理 4.11。我们还指出，如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是刚性张量范畴，且其对偶由 [FHL]，的对偶模给出，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 也是刚性的。

现在令 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别为 C_1-余有限 U-模与 V-模的范畴 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$。Nahm [Na]，最早引入了顶点算子代数模的 C_1-余有限条件，而 Huang [Hu1] 和 Miyamoto [Mi2] 的结果表明，一般而言，顶点算子代数的 C_1-余有限模范畴很可能具有 [HLZ1]-[HLZ8] 所构造的编织张量范畴结构。事实上，根据 [CJORY, CY]$\mathcal{C}_U^1$ ，如果 $\mathcal{C}_V^1$ 在对偶模 [FHL]，下封闭，那么它们确实是编织张量范畴；在这种情况下，它们也是局部有限阿贝尔范畴（见下文定理 2.7）。在定理 3.7 中，我们证明，若 U 和 V 按共形权 $\mathbb{N}$ 分次，且 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 是局部有限阿贝尔范畴，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{C}_U^1, \mathcal{C}_V^1)$ 恰好就是 C_1- 余有限 $U \otimes V$- 模的范畴。于是，定理 4.11 可表述如下（见定理 4.13）：

定理 1.2. 若 U 和 V 按照 $\mathbb{N}$共形权分级，且 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 对对偶模封闭，则 $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$ 具有 [HLZ1]-[HLZ8] 编织张量范畴结构，并且与 $\mathcal{C}_U^1 \otimes \mathcal{C}_V^1$编织张量等价。

在此定理中，我们可以将 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 替换为局部有限张量子范畴 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_U^1$和 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}_V^1$，在这种情况下，我们将 $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$ 替换为局部有限阿贝尔全子范畴$\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{C}_{U\otimes V}^1$(见推论4.12）。如果 U和 V满足 C_2-余有限条件（该条件最初由 Zhu [Zh] 引入，用于证明顶点算子代数的模的特征标的模不变性

），那么每个分次受限的广义 U-和 V-模都是C_1-余有限的。因此，定理1.2 给出：

推论1.3. 如果 U 和 V 是 $\mathbb{N}$分次的 C_2有限顶点算子代数，那么分次受限的广义 $U \otimes V$-模的范畴与分次受限的广义 U-模和 V-模的范畴的 Deligne 张量积编织张量等价。

有人猜想 [Hu4, CG, GR2] ，对于一个单的 $\mathbb{N}$分次、自逆共轭且 C_2有限的顶点算子代数，其分次受限广义模的范畴是一个模张量范畴（不一定是半单的），这是对 Huang 在半单情形下结果 [Hu2] 的推广。要证明这一猜想，根据[McR3，主定理 1]，，只需证明这类顶点算子代数的模的张量范畴具有刚性。因此，根据推论1.3，如果 U 和 V 的模范畴是非半单模张量范畴，那么 $U \otimes V$-模的范畴也同样如此。进一步地，根据顶点算子代数扩张理论[KO, HKL, CKM1]，，如果 A 是一个包含 $U \otimes V$作为顶点算子子代数的顶点算子代数，那么在某些条件下，分次受限广义 A-模的范畴也将是非半单模张量范畴（特别是， $U \otimes V$-模范畴中 A 的范畴维数应当非零）。事实上，这正是本文的主要动机之一，即使得能够利用扩张理论研究这样一个顶点算子代数的表示：该代数包含若干理解充分的顶点算子代数的张量积作为子代数。

在第5节中，我们考察一族 C_2-余有限顶点算子代数，这些代数在[CKM1, 第4.1节2]中有讨论。它们是三重态W-代数张量积的单流扩张 $\mathcal{W}_p$ [Ka1, AM, TW]，，我们在定理5.2中证明，它们的模范畴是非半单模张量范畴。这一族中最著名的例子是辛费米子超代数 SF_d，$d \in \mathbb{Z}_+$的偶子代数SF_d^+ 。这些超代数最初见于物理学文献[Ka2, Ka3, GK] ，是与配备辛形式的 $2d$维纯奇阿贝尔李超代数相关联的仿射顶点算子超代数。代数SF_d^+ 是$\mathcal{W}_2^{\otimes d}$的单流扩张，且$SF_1^+ \cong \mathcal{W}_2$ 本身 [Ka3, GK]。在定理 5.4中，我们利用 $\mathcal{W}_2$-模范畴上的刚性张量结构 [TW] （另见 [MY1]）、推论1.3以及顶点算子代数扩张理论，对单模和投射模 SF_d^+ 进行分类，并计算所有涉及单模和投射模的融合积。请注意，单 SF_d^+ -模已在[Ab], 中分类，而涉及单 SF_d^+ -模的融合规则已在 [AA], 中计算，不过这些融合规则并未给出完整的融合积。

在[Ru], Runkel 构造了一个编织张量范畴 $\mathcal{SF}_d$ ，他猜想该范畴与分次受限广义 SF_d^+ -模的范畴编织张量等价。范畴 $\mathcal{SF}_d$ 与可因子化带状拟霍普夫代数 [GR1、FGR], 的有限维表示范畴编织张量等价，因此是一个非半单模张量范畴。因此，我们关于 SF_d^+ -模范畴确实是非半单模张量范畴的结果（如下方推论 5.3 所述）与 Runkel 猜想一致。值得指出的是，该猜想最近已在 $d = 1$情形 [GN、CLR]中得到证明；或许可以结合本文的推论5.3 和定理5.4 以及[CLR], 的方法，证明所有 d的 Runkel 猜想。

此外，还有许多非C_2-余有限顶点算子代数已知满足定理1.2的假设，其中包括所有 Virasoro 顶点算子代数 [CJORY],许多仿射顶点算子代数[CY], 以及单态 W-代数 $\mathcal{M}_p$， $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ [CMY2，CMY3]。因此，现在可以利用扩张理论来研究含有这类顶点算子代数的张量积作为子代数的顶点

算子（超）代数。例如，在即将开展的与 Thomas Creutzig、Shashank Kanade 和 Jinwei Yang 的合作研究中，我们计划研究许多 1 级仿射顶点算子超代数的表示论；这些代数是由多个单态代数 $\mathcal{M}_2$ 与海森堡顶点算子代数的副本的张量积经简单流扩张得到的。

其他有趣的例子包括 [Ar], 的手征泛中心化子代数，它们包含与单李代数 W相关的两个仿射 $\mathfrak{g}$ -代数作为子代数。对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$， W-代数是 Virasoro 顶点算子代数。因此，一旦[CJORY] 中的 Virasoro 张量范畴得到透彻理解，就有望利用定理1.2 和扩张理论来研究有理层级下 $\mathfrak{sl}_2$ 的手征泛中心化子代数的表示论（无理层级的情形见[MY2] ，以及层级 -1的情形；此时相关的 Virasoro 范畴是半单的）。由于手征泛中心化子代数是 $\mathbb{Z}$-分次共形顶点代数（其共形权空间为无限维，且共形权没有下界），扩张理论或许是研究其表示的最佳途径；诸如 Zhu代数 [Zh], 这样仅适用于 $\mathbb{N}$-可分级模的方法，在此并不太有用。

我们注意到，本文中的几乎所有结果为简便起见都表述为两个顶点算子代数的张量积的情形，但通过对 N进行归纳，这些结果也适用于任意有限个 N 顶点算子代数的张量积。

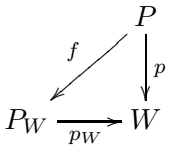
致谢。感谢 Thomas Creutzig、Shashank Kanade 和 Jinwei Yang 提出的意见以及进行的讨论。

2. 预备知识

本节回顾（张量）范畴的基本定义和结果，尤其是顶点算子代数的模的张量范畴。

2.1. 局部有限阿贝尔范畴。 关于这里的定义和性质，我们主要参考 [De、EGNO] 。回忆一下，一个范畴 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{C}$-线性加性范畴，如果中的所有态射集都是 $\mathcal{C}$ 上的 $\mathbb{C}$-向量空间，且态射的复合是双线性的， $\mathcal{C}$ 具有零对象，并且中的每个有限对象集都有直和。两个 $\mathcal{C}$ -线性加性范畴之间的函子称为 $\mathbb{C}$-线性的，如果它在态射上诱导出 $\mathbb{C}$-线性映射 $\mathbb{C}$。

一个 $\mathbb{C}$-线性加性范畴 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴，当且仅当 $\mathcal{C}$ 中的每个态射都有核和余核， $\mathcal{C}$ 中的每个单态射都是一个核，并且 $\mathcal{C}$ 中的每个满态射都是一个余核。若 $\mathcal{C}$ 中的每个态射集都是有限维的$\mathbb{C}$-向量空间，且 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都具有有限长度，则范畴 $\mathcal{C}$ 进一步称为局部有限。 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 的射影覆盖是一个满射 $p_W\colon\ P_W \twoheadrightarrow W$，其中 P_W 是射影对象，并且对于任意满射$p\colon\ P \twoheadrightarrow W$（其中 P 是射影对象），都存在一个满射 $f\colon\ P \twoheadrightarrow P_W$，使得图表



可交换。若一个局部有限的 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 满足： $\mathcal{C}$ 在同构意义下只有有限多个简单对象，并且 $\mathcal{C}$ 中的每个简单对象都有一个射影覆盖，则称其为有限范畴。

注 2.1. 任意本质小的局部有限 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 都等价于某个余代数 C [Ta]的有限维余模范畴；另见 [EGNO,

第 1.10] 节。如果 $\mathcal{C}$ 是有限的，那么 C 是有限维的，此时 $\mathcal{C}$ 也等价于代数 C^* 的模范畴。

若 $\mathcal{C}$ 是局部有限的，那么由于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都有有限长度， $\mathcal{C}$ 中的每个简单对象都有射影覆盖，当且仅当 $\mathcal{C}$ 有充分多的射影对象；也就是说，$\mathcal{C}$ 中的每个对象都是从某个投射对象出发的态射的像，或者等价地， $\mathcal{C}$中的每个对象都是某个投射对象之间的态射的余核。下面的命题是初等的，它表明局部有限阿贝尔范畴中的每个投射对象都是射影覆盖的有限直和：

命题 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个局部有限的 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴，且 W 是 $\mathcal{C}$中的一个简单对象。那么，满射 $p_W : P_W \twoheadrightarrow W$ 是 W 的射影覆盖，当且仅当 P_W是 $\mathcal{C}$中的一个不可分解射影对象。

证明. 若 $p_W : P_W \twoheadrightarrow W$ 是 W的射影覆盖，则 P_W 是投射的。为证明 P_W 也是不可分解的，假设 $P_W = P_1 \oplus P_2$，且有包含 $i_1 : P_1 \to P$和 $i_2 : P_2 \to P$。由于 $p_W \neq 0$，对于 $k = 1$ 或 $k = 2$，我们有 $p_W \circ i_k \neq 0$ 。不失一般性，假设 $k = 1$，于是 $p_W \circ i_1$ 是满射，因为 W 是简单对象。此外， P_1 是投射的，因为它是一个投射对象的直和项。因此，由于 $p_W : P_W \twoheadrightarrow W$ 是一个射影覆盖，存在满射 $f : P_1 \twoheadrightarrow P_W$，使得 $p_W \circ f = p_W \circ i_1$。由此可知，$P_1$和 P_W 具有相同的有限长度，因此 P_2 的长度为 0。于是 $P_2 = 0$ ，且 P_W 是不可分解的。

反之，设 $p_W : P_W \twoheadrightarrow W$ 是一个满射，且 P_W 是不可分解的射影对象。于是，对于 $\mathcal{C}$ 中的任意满射 $p : P \twoheadrightarrow W$ ，其中 P 为射影对象，存在态射 $f : P \to P_W$ 和 $g : P_W \to P$，使得

$$p_W \circ f = p, \qquad p \circ g = p_W,$$

因为 P_W 和 P 都是射影对象。因此，对于任意 $N \in \mathbb{N}$,

$$p_W \circ (f \circ g)^N = p_W.$$

因此， $f \circ g$ 是 P_W 的一个自同态，由于 $p_W \neq 0$，它不是幂零的。由于 P_W 不可分解且具有有限长度，Fitting引理表明 $f \circ g$是一个同构；特别地， f 是满射。因此， $p_W : P_W \twoheadrightarrow W$ 是 W的一个射影覆盖。□

任意局部有限 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 都是有限阿贝尔全子范畴的并。事实上，对于任意对象 X 在 $\mathcal{C}$中，令 $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{C}$ 表示由 $X^{\oplus n}$的子商构成的全子范畴 $n \in \mathbb{N}$。则 $\langle X \rangle$ 是$\mathcal{C}$ 的阿贝尔子范畴，具有有限多个简单对象，并且根据 [De，命题 2.14]，它还具有充分多的射影对象。因此 $\langle X \rangle$ 是一个有限阿贝尔子范畴，而 $\mathcal{C}$ 中的任意对象都包含于这样的子范畴中。因此，尽管 $\mathcal{C}$ 可能没有任何非零射影对象， $\mathcal{C}$ 中的任意对象（实际上，中的任意有限个对象或任意态射） $\mathcal{C}$都包含于一个具有充分多射影对象的子范畴中。

现在设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴。给定Deligne 张量积，其对象为 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ [（参见，第 5] 节；另见 [EGNO，第 1 节11]）是一个 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$，并配备一个 $\mathbb{C}$-双线性函子

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$$

它关于两个变量都是右正合的，并满足以下泛性质：对于任意$\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{E}$ 以及 $\mathbb{C}$-双线性函子

$$\mathcal{B} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E},$$

存在唯一的（在自然同构意义下）右正合 $\mathbb{C}$-线性函子

$$\mathcal{F}:\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{E}$$

使得 $\mathcal{F}\circ\otimes=\mathcal{B}$。显然， $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 如果存在，则在等价意义下是唯一的。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都是局部有限的，那么 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 确实存在，并且它也是局部有限的，见 [De，命题 5。13]；完整证明另见 [LF，命题 22] 。

注 2.3。 如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别等价于余代数 C 和 D的有限维余模范畴，如注 2.1中所述，那么根据 [EGNO，命题 1.11，2],我们可以取 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 为有限维 $C\otimes D$-余模范畴。

注 2.4。 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$的 Deligne 张量积通常记作 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}$，但此处我们使用记号 $\otimes$ 而不是 $\boxtimes$，因为我们即将考虑顶点算子代数 U 和 V上的局部有限 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔模范畴，并将证明这类范畴的 Deligne 张量积由张量积顶点算子代数 $U\otimes V$上的某个模范畴给出。我们将保留 $\boxtimes$，用来表示顶点算子代数的阿贝尔编织单体（或张量）模范畴中的融合积。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$如果 $\mathcal{F}:\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{G}:\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}$ 是局部有限$\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴之间的右正合 $\mathbb{C}$-线性函子，那么存在一个唯一的（在自然同构意义下）函子

$$\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}:\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}\longrightarrow\widetilde{\mathcal{C}}\otimes\widetilde{\mathcal{D}}$$

使得图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}\times\mathcal{D} & \xrightarrow{\mathcal{F}\times\mathcal{G}} & \widetilde{\mathcal{C}}\times\widetilde{\mathcal{D}}\\ \downarrow\otimes & & \downarrow\otimes\\ \mathcal{C}\otimes\mathcal{D} & \xrightarrow{\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}} & \widetilde{\mathcal{C}}\otimes\widetilde{\mathcal{D}}\end{array}$$

可交换。此外，Deligne 张量积是一种交换且结合的运算。特别地，存在一个等价 $\sigma:$ $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{D}\otimes\mathcal{C}$ 使得图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}\times\mathcal{D} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D}\times\mathcal{C}\\ \downarrow\otimes & & \downarrow\otimes\\ \mathcal{C}\otimes\mathcal{D} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{D}\otimes\mathcal{C}\end{array}$$

可交换，且 存在一个等价 $\mathcal{A}:\ \mathcal{C}\otimes(\mathcal{D}\otimes\mathcal{E})\ \to(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D})\otimes\mathcal{E}$使得图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}\times(\mathcal{D}\times\mathcal{E}) & \xrightarrow{\cong} & (\mathcal{C}\times\mathcal{D})\times\mathcal{E}\\ \downarrow\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\times\otimes & & \downarrow\otimes\times\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\\ \mathcal{C}\times(\mathcal{D}\otimes\mathcal{E}) & & (\mathcal{C}\otimes\mathcal{D})\times\mathcal{E}\\ \downarrow\otimes & & \downarrow\otimes\\ \mathcal{C}\otimes(\mathcal{D}\otimes\mathcal{E}) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & (\mathcal{C}\otimes\mathcal{D})\otimes\mathcal{E}\end{array}$$

可交换。为了说明 $\mathcal{A}$的存在性，可以将 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$和 $\mathcal{E}$ 实现为某些余代数的有限维余模范畴，如备注 2.1 和 2.3中所述。因此，从现在起，对于两个以上局部有限 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴的 Deligne 张量积，我们将省略记号中的括号。

我们以关于右正合序列的一个有用的初等引理结束本小节；为完整起见，我们给出证明。

引理 2.5. 设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 为阿贝尔范畴，并设 $\mathcal{B}\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ 为一个关于两个变量均右正合的函子。给定两个右正合序列

$$W \xrightarrow{f} \widetilde{W} \xrightarrow{c} C \to 0, \qquad X \xrightarrow{g} \widetilde{X} \xrightarrow{d} D \to 0$$

分别在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中，以下是在 $\mathcal{E}$ 中的右正合序列：

$$\mathcal{B}(W,\widetilde{X})\oplus\mathcal{B}(\widetilde{W},X)\xrightarrow{F}\mathcal{B}(\widetilde{W},\widetilde{X})\xrightarrow{\mathcal{B}(c,d)}\mathcal{B}(C,D)\longrightarrow 0,$$

其中，$F=\mathcal{B}(f,\text{恒等映射 }\widetilde{X})\circ\pi_1+\mathcal{B}(\text{恒等映射}\widetilde{W},g)\circ\pi_2$ 和 π_1,π_2 表示显然的投影。

证明。由于 c 和 d 是满射，且 $\mathcal{B}$ 对两个变量都是右正合的，因此 $\mathcal{B}(c,d)$ 也是满射。此外，$\mathcal{B}(c,d)\circ F=0$，所以 $\operatorname{Im} F\subseteq\operatorname{Ker}\mathcal{B}(c,d)$。为证明 $\operatorname{Ker}\mathcal{B}(c,d)\subseteq\operatorname{Im} F$，考虑以下行和列均为右正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B}(W,X) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathrm{Id}_W,g)} & \mathcal{B}(W,\widetilde{X}) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathrm{Id}_W,d)} & \mathcal{B}(W,D) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(f,\mathrm{Id}_X)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(f,\mathrm{Id}_{\widetilde{X}})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(f,\mathrm{Id}_D)} & & \\
\mathcal{B}(\widetilde{W},X) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},g)} & \mathcal{B}(\widetilde{W},\widetilde{X}) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},d)} & \mathcal{B}(\widetilde{W},D) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(c,\mathrm{Id}_X)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(c,\mathrm{Id}_{\widetilde{X}})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(c,\mathrm{Id}_D)} & & \\
\mathcal{B}(C,X) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathrm{Id}_C,g)} & \mathcal{B}(C,\widetilde{X}) & \xrightarrow{\mathcal{B}(\mathrm{Id}_C,d)} & \mathcal{B}(C,D) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Then

$$\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},d)\left(\operatorname{Ker}\mathcal{B}(c,d)\right)\subseteq\operatorname{Ker}\mathcal{B}(c,\mathrm{Id}_D)=\operatorname{Im}\mathcal{B}(f,\mathrm{Id}_D)=\operatorname{Im}\mathcal{B}(f,d).$$

为方便起见，假设 $\mathcal{E}$ 的对象具有向量空间结构；这意味着$\widetilde{\ }$对于任意 $b\in\operatorname{Ker}\mathcal{B}(c,d)$，存在 $b_1\in\mathcal{B}(W,X)$，使得

$$\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},d)(b)=\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},d)\big(\mathcal{B}(f,\mathrm{Id}_{\widetilde{X}})(b_1)\big).$$

也就是说，

$$b-\mathcal{B}(f,\mathrm{Id}_{\widetilde{X}})(b_1)\in\operatorname{Ker}\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},d)=\operatorname{Im}\mathcal{B}(\mathrm{Id}_{\widetilde{W}},g),$$

这就推出 $b\in\operatorname{Im} F$，如所需。 □

2.2. 编织张量范畴。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴，这意味着存在一个函子 $\boxtimes\colon\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，一个单位元 $\mathbf{1}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，左、右单位同构 $l\colon\mathbf{1}\boxtimes\bullet\to\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 和 $r\colon\bullet\boxtimes\mathbf{1}\to\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，以及满足三角恒等式和五边形恒等式的结合子同构 $\mathcal{A}\colon\boxtimes\circ(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\times\boxtimes)\to\boxtimes\circ(\boxtimes\times\mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$（例如参见 [EGNO，定义 2.1.1]）。如果还存在一个满足六边形恒等式的自然编织同构 $\mathcal{R}\colon\boxtimes\to\boxtimes\circ\sigma$（其中 σ 交换$\mathcal{C}\times\mathcal{C}$的各因子；例如参见 [EGNO，定义 8.1.1]），那么$\mathcal{C}$ 就是一个编织幺半范畴。为避免与向量空间的张量积和范畴的 Deligne 张量积混淆，我们将（编织）幺半范畴中的函子 $\boxtimes$ 称为 $\mathcal{C}$上的“融合积”。本文中的所有幺半范畴都是 $\mathbb{C}$-线性的和加性的，并且 $\boxtimes$ 对两个变量均为 $\mathbb{C}$-双线性且右正合。如果这样的（编织）幺半范畴是阿贝尔的，我们就称其为（编织）张量范畴。

与 [EGNO], 不同，我们并不将“张量范畴”仅用于指称刚性的幺半范畴。不过，刚性是我们将要讨论的许多张量范畴所具有的一项重要性质

。在幺半范畴中，对象 X 若具有一个（左）对偶 (X^*, e_X, i_X)，则称其为（左）刚性的，其中 $X^* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$e_X\colon X^* \boxtimes X \to \mathbf{1}$ 是求值态射，$i_X\colon \mathbf{1} \to X \boxtimes X^*$ 是余求值态射，而两个刚性复合

$$X \xrightarrow{l_X} \mathbf{1} \boxtimes X \xrightarrow{i_X \boxtimes \mathrm{Id}_X} (X \boxtimes X^*) \boxtimes X \xrightarrow{\mathcal{A}^{-1}_{X,X^*,X}} X \boxtimes (X^* \boxtimes X) \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \boxtimes e_X} X \boxtimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_X} X$$

and

$$X^* \xrightarrow{r_{X^*}} X^* \boxtimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{X^*} \boxtimes i_X} X^* \boxtimes (X \boxtimes X^*) \xrightarrow{\mathcal{A}_{X^*,X,X^*}} (X^* \boxtimes X) \boxtimes X^* \xrightarrow{e_X \boxtimes \mathrm{Id}_{X^*}} \mathbf{1} \boxtimes X^* \xrightarrow{l_{X^*}} X^*$$

二者都是恒等映射。右对偶和右刚性也有类似的定义，但我们只考虑左、右对偶可以取为相同的范畴，因此本文只考虑左对偶。幺半范畴 $\mathcal{C}$ 若每个对象都有对偶，则称其为刚性的。在刚性幺半范畴中，对偶诱导出一个反变自函子，态射 f 的对偶 $f^*\ W \to X$ 由下述复合给出

$$X^* \xrightarrow{r_{X^*}} X^* \boxtimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{X^*} \boxtimes i_W} X^* \boxtimes (W \boxtimes W^*) \xrightarrow{\mathcal{A}_{X^*,W,W^*}} (X^* \boxtimes W) \boxtimes W^* \xrightarrow{(\mathrm{Id}_{X^*} \boxtimes f) \boxtimes \mathrm{Id}_{W^*})} (X^* \boxtimes X) \boxtimes W^* \xrightarrow{e_X \boxtimes \mathrm{Id}_{W^*}} \mathbf{1} \boxtimes W^* \xrightarrow{l_{W^*}} W^*.$$

有限张量范畴是同时也是刚性张量范畴的有限阿贝尔范畴。

编织带范畴是一个刚性编织张量范畴 $\mathcal{C}$，配备有一个自然扭结同构 $\theta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，其满足 $\theta_{\mathbf{1}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$，$\theta_{X^*} = \theta_X^*$ 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$成立，并满足平衡方程

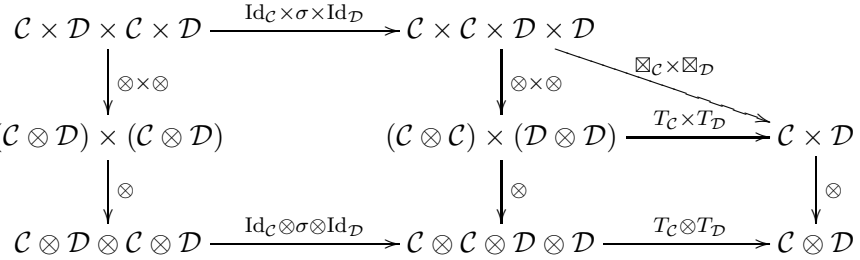
$$\theta_{X_1 \boxtimes X_2} = \mathcal{R}^2_{X_1,X_2} \circ (\theta_{X_1} \boxtimes \theta_{X_2}) \tag{2.1}$$

对 $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{R}^2_{X_1,\ X_2} = \mathcal{R}_{X_2,\ X_1} \circ \mathcal{R}_{X_1,\ X_2}$ 是双编织。模张量范畴是其编织为非退化的有限编织带状范畴，也就是说，如果对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$都有 $\mathcal{R}^2_{W,\ X} = \mathrm{Id}_{W \boxtimes X}$，那么对某个 $n \in \mathbb{N}$有 $W \cong \mathbf{1}^{\oplus n}$。由于人们通常还假设模张量范畴是半单的，因此我们有时会称其为“未必半单的模张量范畴”或“非半单模张量范畴”，以强调这里并未假设半单性。

现在令 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为两个局部有限编织张量范畴。则 Deligne 张量积 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 也是一个局部有限编织张量范畴（参见 [德利涅，命题 5。17] 或[EGNO，第 4 节6]）。更具体地说，由于函子 $\boxtimes_{\mathcal{C}}\colon\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 和 $\boxtimes_{\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$在两个变量上都是右正合的，它们诱导出右正合函子

$$T_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, \qquad T_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

使得 $T_{\mathcal{C}} \circ \otimes = \boxtimes_{\mathcal{C}}$ 和 $T_{\mathcal{D}} \circ \otimes = \boxtimes_{\mathcal{D}}$。于是我们得到一个交换图 ：



融合积 $\boxtimes$ 在 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 上的定义为复合

$$\boxtimes = (T_{\mathcal{C}}\otimes T_{\mathcal{D}})\circ(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\otimes\sigma\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{D}})\circ\otimes,$$

且交换图表明，对于 $M_1, M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 以及 $W_1, W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$,

$$(M_1\otimes W_1)\boxtimes(M_2\otimes W_2) = (M_1\boxtimes_{\mathcal{C}} M_2)\otimes(W_1\boxtimes_{\mathcal{D}} W_2). \tag{2.2}$$

如果 $f_i : M_i \to \sim$ $\sim M_i$ 且 g_i： $W_i \to W_i$ 对于 $i = 1$，2 是 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中的态射，分别为，则

$$(f_1\otimes g_1)\boxtimes(f_2\otimes g_2) = (f_1\boxtimes_{\mathcal{C}} f_2)\otimes(g_1\boxtimes_{\mathcal{D}} g_2). \tag{2.3}$$

由于

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}}(M_1\otimes W_1, M_2\otimes W_2)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_1,M_2)\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W_1,W_2) \tag{2.4}$$

（见 [De，命题 5.13] 或 [EGNO，命题 1.11.2]），（2.3）以及 $\mathbb{C}$-双线性完全确定了 $\otimes$: $\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$的像中对象之间的态射的融合积。 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 的单位对象是 $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$，并且在识别（2.2）下，

$$l_{M\otimes W} = l_M\otimes l_W, \qquad r_{M\otimes W} = r_M\otimes r_W \tag{2.5}$$

对 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。结合律同构和编织同构由下式给出

$$\mathcal{A}_{M_1\otimes W_1, M_2\otimes W_2, M_3\otimes W_3} = \mathcal{A}_{M_1,M_2,M_3}\otimes\mathcal{A}_{W_1,W_2,W_3} \tag{2.6}$$

and

$$\mathcal{R}_{M_1\otimes W_1, M_2\otimes W_2} = \mathcal{R}_{M_1,M_2}\otimes\mathcal{R}_{W_1,W_2} \tag{2.7}$$

对 $M_1, M_2, M_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $W_1, W_2, W_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。

Let $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 是一个全子范畴，其对象同构于有限个 Deligne 张量积对象 $M\otimes W$ 的直和。由于 $\boxtimes$ 是 $\mathbb{C}$-双线性的，若 $X_1 = \bigoplus_{i_1\in I_1} M_{i_1}\otimes W_{i_1}$ 且 $X_2 = \bigoplus_{i_2\in I_2} M_{i_2}\otimes W_{i_2}$，则可以通过自然同构将其识别为

$$X_1\boxtimes X_2 = \bigoplus_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2} (M_{i_1}\boxtimes_{\mathcal{C}} M_{i_2})\otimes(W_{i_1}\boxtimes_{\mathcal{D}} W_{i_2}) \tag{2.8}$$

通过自然同构

$$F_{X_1,X_2} = \sum_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2} q^{(i_1,i_2)}_{X_1\boxtimes X_2}\circ(\pi^{i_1}_{X_1}\boxtimes\pi^{i_2}_{X_2}),$$

其中 $\pi^{i_k}_{X_k}$： $X_k\to M_{i_k}\otimes W_{i_k}$ 对 $k = 1$，2 是投影，而 $q^{(i_1,i_2)}{}_{X_1\boxtimes X_2}$ 是到$\sim$（2.8）右侧直和中的包含。因此 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 是$\sim\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$的一个带编织的幺半子范畴。此外，态射在 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$中的融合积，以及单位同构、结合律同构和编织同构，都可利用自然同构 F、$\mathbb{C}$-双线性 $\boxtimes$ 以及 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$中单位同构、结合律同构和编织同构的自然性，由（2.3）、（2.5）、（2.6）和（2.7）完全确定。

如果 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 分别是具有对偶 M^* 和 W^* 的刚性对象，那么 $M\otimes W$ 在 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 中是具有对偶 $M^*\otimes W^*$、求值 $e_{M\otimes W} = e_M\otimes e_W$ 和余求值 $i_{M\otimes W} = i_M\otimes i_W$ 的刚性对象，因为我们可以作如下恒等映射

$$(M^*\otimes W^*)\boxtimes(M\otimes W) = (M^*\boxtimes_{\mathcal{C}} M)\otimes(W^*\boxtimes_{\mathcal{C}} W),$$
$$(M\otimes W)\boxtimes(M^*\otimes W^*) = (M\boxtimes_{\mathcal{C}} M^*)\otimes(W\boxtimes_{\mathcal{C}} W^*).$$

此外，若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有缎带扭结 $\theta_{\mathcal{C}}$ 和 $\theta_{\mathcal{D}}$，则 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ 具有缎带扭结 θ，其特征为 $\theta_{M\otimes W} = (\theta_{\mathcal{C}})_M\otimes(\theta_{\mathcal{D}})_W$，其中 $M\in$ 属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$W\in$ 属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。

2.3. 顶点算子代数与张量范畴。 我们采用 [FLM、LL] 中对顶点算子代数的定义。特别地，顶点算子代数 V 是一个分次向量空间 $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_{(n)}$，其上带有顶点算子映射

$$\begin{aligned} Y_V : V &\to (\operatorname{End} V)[[x,x^{-1}]] \\ v &\mapsto Y_V(v,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\, x^{-n-1}, \end{aligned}$$

真空向量 $\mathbf{1}\in V_{(0)}$ 使得 $Y_V(\mathbf{1},x)=$ 恒等映射$_V$，以及共形向量 $\omega\in V_{(2)}$，其顶点算子 $Y_V(\omega,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)\,x^{-n-2}$ 在 V上生成 Virasoro 李代数的表示。对于 $n\in\mathbb{Z}$， $V_{(n)}$ 是具有特征值 n的 $L(0)$-特征子空间，我们称 $V_{(n)}$ 中的任意非零向量具有共形权 n。

给定一个顶点算子代数 V，一个弱 V-模 是 V 作为顶点代数来考虑时的一个模，如 [LL中的定义 4.1 所述。1], 其中不要求具有共形权分次。特别地，一个弱 V-模 W 是一个配备了顶点算子的向量空间

$$\begin{aligned} Y_W : V &\to (\operatorname{End} W)[[x,x^{-1}]] \\ v &\mapsto Y_W(v,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\, x^{-n-1}. \end{aligned}$$

除其他公理外，该顶点算子满足 $Y_W(\mathbf{1},x)=$ 恒等映射$_W$，并且 $Y_W(\omega,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)\,x^{-n-2}$ 在 W上生成 Virasoro代数的作用。按照 [HLZ1], 中的定义，一个广义 V-模是一个弱 V-模 W，它分解为广义 $L(0)$-特征子空间的直和，即 $W=\bigoplus_{h\in\mathbb{C}}W_{[h]}$，其中 $W_{[h]}$ 是具有广义特征值 h的广义 $L(0)$-特征子空间。我们称 $W_{[h]}$中非零向量的共形权为 h。一个分次受限的广义 V- 模是一个广义 V- 模 W，满足对于任意 $h\in\mathbb{C}$，$\dim W_{[h]}<\infty$，并且对于所有充分负的 $n\in\mathbb{Z}$， $W_{[h+n]}=0$。

任意单的，或更一般地说不可分解的广义 V-模 W 的共形权都包含于 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$的一个陪集中；参见 [HLZ1，注2。20]因此，若 W还进一步是分次受限的，则其共形权包含于 $h+\mathbb{N}$ 对于某个$h\in\mathbb{C}$。更一般地，任意有限长度的广义 V-模 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$的共形权都包含于 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$的有限个陪集的并中。

若 $W=\bigoplus_{h\in\mathbb{C}}W_{[h]}$是一个分次向量空间，则 $W'=\bigoplus_{h\in\mathbb{C}}W_{[h]}^*$是它的分次对偶。若$W$是一个分次受限的广义 V-模，则 W' 也具有一个 V-模结构，称为对偶 [FHL], ，其定义为

$$\langle Y_{W'}(v,x)w',w\rangle=\langle w',Y_W(e^{xL(1)}(-x^{-2})^{L(0)}v,x^{-1})w\rangle \tag{2.9}$$

对于 $v\in V$、 $w\in W$ 和 $w'\in W'$。

为了得到顶点算子代数的模的编织张量范畴，我们需要[FHL]中的交织算子概念；另见 [HLZ2]。

定义 2.6. 设 V 是一个顶点算子代数， W_1、 W_2 和 W_3 是弱 V-模。类型为 $\binom{W_3}{W_1\,W_2}$ 的交织算子是一个线性映射

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} : W_1\otimes W_2 &\to W_3[\log x]\{x\} \\ w_1\otimes w_2 &\mapsto \mathcal{Y}(w_1,x)w_2=\sum_{h\in\mathbb{C}}\sum_{k\in\mathbb{N}}(w_1)_{h;k}^{\mathcal{Y}}w_2\,x^{-h-1}(\log x)^k \end{aligned}$$

它满足以下性质：

（1）下截断：对于所有的 $w_1 \in W_1$、 $w_2 \in W_2$ 和 $h \in \mathbb{C}$，存在 $N \in \mathbb{Z}$，使得如果 $n \in \mathbb{Z}_{\geq N}$，则 $(w_1)_{h+n;\,k} w_2 = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

(2) Jacobi 恒等式：对于 $v \in V$ 和 $w_1 \in W_1$,

$$x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right) Y_{W_3}(v, x_1)\mathcal{Y}(w_1, x_2) - x_0^{-1}\delta\left(\frac{-x_2 + x_1}{x_0}\right)\mathcal{Y}(w_1, x_2)Y_{W_2}(v, x_1)$$
$$= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right)\mathcal{Y}(Y_{W_1}(v, x_0)w, x_2),$$

其中 $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$ 是形式 delta 函数。

(3) $L(-1)$-导数性质：对于 $w_1 \in W_1$,

$$\frac{d}{dx}\mathcal{Y}(w_1, x) = \mathcal{Y}(L(-1)w_1, x).$$

若 W_3 由向量 $(w_1)_{h;k} w_2$（其中 $w_1 \in W_1$、 $w_2 \in W_2$、 $h \in \mathbb{C}$和 $k \in \mathbb{N}$）张成，则类型为 $\binom{W_3}{W_1\, W_2}$ 的交织算子 $\mathcal{Y}$ 是满射；不过，实际上，若 $\mathcal{Y}$ 是满射，则 W_3 已由向量 $(w_1)_{h;0} w_2$（其中 $w_1 \in W_1$、 $w_2 \in W_2$和 $h \in \mathbb{C}$）张成（例如参见 [MY1，引理 2.2]）。等价地，当 W_1、 W_2和 W_3 是具有共形权空间分解的广义 V-模时， $\mathcal{Y}$ 是满射，当且仅当 W_3由 $\mathcal{Y}(w_1, 1)w_2$ 在 W_3的共形权空间上的投影（其中 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$）张成。此处，对于 $z \in \mathbb{C}^\times$， $\mathcal{Y}(\cdot, z)\cdot$ 表示 $P(z)$-交织映射（采用 [HLZ3]的术语），它是将 $\mathcal{Y}$ 中的形式变量 x 替换为复数z得到的，并使用某个对数分支来计算 $\log z$ 的幂和 z的非整数次幂。 $P(z)$-交织映射的像包含于代数完备化

$$\overline{W}_3 = \prod_{h\in\mathbb{C}} (W_3)_{[h]}.$$

如果 z 是正实数，我们总是使用实值对数分支 ln 在交织算子中代入 $x \mapsto z$。

现在设 $\mathcal{C}$ 是顶点算子代数 V的广义模范畴。 $\mathcal{C}$ 中两个对象 W_1 和 W_2 的融合积是一个三元组 $(W_1 \boxtimes W_2, \mathcal{Y}_{W_1,W_2})$，其中 $W_1 \boxtimes W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，且 $\mathcal{Y}_{W_1,W_2}$ 是类型为 $\binom{W_1\boxtimes W_2}{W_1\, W_2}$的交织算子，满足以下泛性质：对于任意 $W_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 以及类型为 $\binom{W_3}{W_1\, W_2}$的交织算子 $\mathcal{Y}$，存在唯一的 V-模同态 f： $W_1 \boxtimes W_2 \to W_3$，使得 $f \circ \mathcal{Y}_{W_1,W_2} = \mathcal{Y}$。这里使用“融合积”这一术语，而不是“张量积”，是为了避免与向量空间的张量积和范畴的 Deligne 张量积混淆。如果 W_1 和 W_2 在 $\mathcal{C}$ 中的融合积存在，则融合积交织算子 $\mathcal{Y}_{W_1,W_2}$ 是满射[HLZ3，命题 4.23]。

如果 $\mathcal{C}$ 中任意一对对象的融合积 $\mathbb{C}$都存在，那么融合积就定义了一个 $\boxtimes$： $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 它在两个变量上都是右正合的 [HLZ3，命题 4。26]。两个态射 f_1 ： $W_1 \to X_1$ 和 f_2 ： $W_2 \to X_2$ 在 $\mathcal{C}$ 中的融合积是唯一的V-模同态

$$f_1 \boxtimes f_2 : W_1 \boxtimes W_2 \longrightarrow X_1 \boxtimes X_2,$$

由（$W_1 \boxtimes W_2$、$\mathcal{Y}_{W_1,\ W_2}$）的泛性质诱导，使得

$$(f_1 \boxtimes f_2) \circ \mathcal{Y}_{W_1,W_2} = \mathcal{Y}_{X_1,X_2} \circ (f_1 \otimes f_2). \tag{2.10}$$

我们还得到自然的左单位同构和右单位同构

$$l_W : V \boxtimes W \longrightarrow W, \qquad r_W : W \boxtimes V \longrightarrow W$$

对于满足以下条件的任意对象 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$l_W(\mathcal{Y}_{V,W}(v,x)w) = Y_W(v,x)w, \qquad r_W(\mathcal{Y}_{W,V}(w,x)v) = e^{xL(-1)}Y_W(v,-x)w \tag{2.11}$$

对于所有的 $v \in V$ 和 $w \in W$。此外，还存在一个自然编织同构

$$\mathcal{R}_{W_1,W_2} : W_1 \boxtimes W_2 \longrightarrow W_2 \boxtimes W_1$$

对于所有的 $W_1, W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，满足以下条件

$$\mathcal{R}_{W_1,W_2}(\mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,x)w_2) = e^{xL(-1)}\mathcal{Y}_{W_2,W_1}(w_2,e^{\pi i}x)w_1 \tag{2.12}$$

对于所有的 $w_1 \in W_1$ 和 $w_2 \in W_2$。范畴 $\mathcal{C}$ 还具有一个缎带扭结，对于任意 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$e^{2\pi i L(0)}$ 其定义为 $\theta_W =$。

因此 $\mathcal{C}$ 如果具有一个自然的结合同构 $\mathcal{A}$： $\boxtimes \circ (\text{恒等映射}_{\mathcal{C}} \times \boxtimes) \to \boxtimes \circ (\boxtimes \times \text{恒等映射}_{\mathcal{C}})$，并且该同构满足三角形、五边形和六边形恒等式，那么它将是一个编织幺半范畴（如果它是阿贝尔的，则为编织张量范畴）。关于此类结合同构的存在条件及其构造，见 [HLZ6]-[HLZ8]。当这些条件满足时，结合同构

$$\mathcal{A}_{W_1,W_2,W_3} : W_1 \boxtimes (W_2 \boxtimes W_3) \longrightarrow (W_1 \boxtimes W_2) \boxtimes W_3$$

W_1、W_2、$W_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$由下式给出

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}_{W_1,W_2,W_3}}\,&(\mathcal{Y}_{W_1,W_2\boxtimes W_3}(w_1,r_1)\mathcal{Y}_{W_2,W_3}(w_2,r_2)w_3)\\ &= \mathcal{Y}_{W_1\boxtimes W_2,W_3}(\mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,r_1-r_2)w_2,r_2)w_3\end{aligned} \tag{2.13}$$

对于任意 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$以及 $w_3 \in W_3$，并且对于任意选取的 r_1、$r_2 \in \mathbb{R}_+$ 满足 $r_1 > r_2 > r_1 - r_2$。我们使用对数分支 ln，将正实数代入交织算子中的形式变量，并假设等式（2.13）两边的交织映射复合绝对收敛到代数完备化 $W_1 \boxtimes (W_2 \boxtimes W_3)$和$(W_1 \boxtimes W_2) \boxtimes W_3$ 中的元素，~~分别记为$\mathcal{A}_{W_1、W_2以及W_3}$，表示分次线性~~映射 $\mathcal{A}_{W_1、W_2以及W_3}$ ~~到代数完备~~化的自然延拓。

由于 [HLZ6]-[HLZ8] 中关于$\mathcal{C}$ 中结合子同构存在性的条件相当技术性，我们列举一些满足这些条件的例子。首先，假设 V是 $\mathbb{N}$-分次的，并且 C_2-余有限，即 $\dim V/C_2(V) < \infty$ 其中

$$C_2(V) = \mathrm{span}\{u_{-2}v \mid u, v \in V\}.$$

由 [Hu3]（另见 [CM 第 3 节1] 以及 [McR3 引理 2.10] 中的讨论）可知，所有分次受限的广义 V-模所组成的范畴 Rep(V) 是有限阿贝尔范畴和编织张量范畴。特别地，如果 V 是 $\mathbb{N}$ 分次且 C_2-余有限的，那么 Rep(V) 是有限编织带状范畴当且仅当它是刚性的。Huang 在 [Hu2] 中证明，如果 V 还具有单性和自逆共轭性，并且 Rep(V) 是半单的，那么 Rep(V) 是模张量范畴。如果 V 是单的且自逆共轭，但 Rep(V) 不是半单的，那么一般尚不清楚 Rep(V) 是否刚性；然而，如果它是刚性的，那么它是一个非半单模张量范畴 [McR3，主定理 1]。

当 V 不一定是 C_2-余有限时，我们考虑由 C_1-余有限的 V-模组成的范畴 $\mathcal{C}_V^1$，这些模满足 $\dim W/C_1(W) < \infty$，其中

$$C_1(W) = \mathrm{span}\{v_{-1}w \mid w \in W,\, v \in V,\, \mathrm{wt}\, v > 0\}.$$

任意 C_1-余有限的 V-模都是有限生成的（例如参见 [CMY1，命题 2.1]）。具体而言，如果 W是 C_1-余有限的，使得 $W = T + C_1(W)$ 对某个有限维分次子空间 T成立，那么 W 由形如以下形式的向量张成

$$v_{-1}^{(1)} v_{-1}^{(2)} \cdots v_{-1}^{(k)} t \tag{2.14}$$

对于 $t \in T$以及具有正共形权的齐次 $v^{(1)}$、$v^{(2)}$、.....、$v^{(k)} \in V$，因此 W由 T的一个有限张成集生成。

定理 2.7。如果 $\mathcal{C}_V^1$ 在对偶模下闭，则：

(1) 任意 C_1-余有限 V-模的子模都是 C_1-余有限的，并且 $\mathcal{C}_V^1$ 是一个局部有限阿贝尔范畴。(2)范畴 $\mathcal{C}_V^1$ 具有由以下给出的顶点代数型辫张量范畴结构：[HLZ1]-[HLZ8]，，并带有缎带扭结。

证明。对于 (1)，容易看出 $\mathcal{C}_V^1$ 在商对象和有限直和下闭。对于子模，设 $W \subseteq X$，其中 X 是 C_1-余有限的。那么 W' 是 X'的一个商对象，并且 X'是 C_1-余有限的，因为 $\mathcal{C}_V^1$ 在对偶模下闭。因此 W' 是 C_1-余有限的，从而 $W \cong (W')'$也是如此。所以 $\mathcal{C}_V^1$ 在子模下闭。此外， $\mathcal{C}_V^1$ 中的态射空间是有限维的，因为 $\mathcal{C}_V^1$ 中的任意同态 $f : W \to X$ 完全由其在 W的有限生成集 S 上的取值确定，而 $f(S)$ 包含于 X的有限个有限维共形权空间的直和中。

为完成 (1) 的证明，还需证明每个 C_1-余有限 V-模 W 都具有有限长度。我们首先证明 W 具有一个单子模；为此，我们将 奇异向量 定义为一个非零齐次 $w \in W$，满足：对于 $v_n w = 0$，若 v_n 是一个降低共形权的顶点算子模，则 W 具有共形权h 的奇异向量仅对应有限多个 $h \in \mathbb{C}$。事实上，由于根据假设 W' 是 C_1-余有限的，存在一个有限维分次子空间 $T \subseteq W'$，使得 $W' = T + C_1(W)$，并且 W'由形如 (2.14) 的向量张成。那么，如果 $w \in W$ 是一个奇异向量，

$$\langle v_{-1}^{(1)} v_{-1}^{(2)} \cdots v_{-1}^{(k)} t, w \rangle = 0$$

除非 $k = 0$，因为 $v_{-1}^{(1)}$ 提高共形权，因此其伴随算子（由 (2.9) 可得）是降低共形权的顶点算子模的线性组合。由此可知， w 的共形权是 T中出现的有限多个共形权之一。

设 h 具有最大的实部，使得 W 含有一个共形权为 h的奇异向量。共形权为 h 的奇异向量空间是 Zhu代数 $A(V)$上的有限维模，该代数在 [Zh]中定义。因此，这个奇异向量空间包含一个单$A(V)$-子模，而这个单 $A(V)$-子模生成一个单 V-子模 W（它是单的，因为任何非零真子模都将包含一个奇异向量，其权的实部会大于 h）。因此，当 C_1-余有限 V-模在 $\mathcal{C}_V^1$ 下对偶封闭时，它包含一个单子模。

因此，对于任意 C_1-余有限 W，我们可以得到一个子模升链

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \cdots \subseteq W$$

使得 W_{i+1}/W_i 是 C_1-余有限 V-模 W/W_i 的单子模（当 $W_i \neq W$时），否则为$W_{i+1} = W$。令 $X = \bigcup_{i \geq 1} W_i$；它是 C_1-余有限的，因而是有限生成的，因为$\mathcal{C}_V^1$ 对取子模封闭。由于 X 的有限个生成元包含于某个 W_i中，子模升链趋于稳定，因此对于所有充分大的 i，都有 $W_i = W$。所以 W 具有有限长度，从而完成定理第（1）部分的证明。

第（2）部分实质上已在 [CJORY，第 4] 节以及 [CY，第 3]节中得到证明；另见[McR2，定理2。3]。 □

注 2.8。 如果 V 是 $\mathbb{N}$-分次且 C_2-余有限的，那么任意分次受限的广义V-模都具有有限长度 [Hu3] ，因而是有限生成的。于是， [Mi1，引理 2。4] 关于单生成弱 V-模的张成集表明，每个 V- 模都是 C_1- 余有限的。因此，对于 V）$= \mathcal{C}_V^1$， $\mathbb{N}$- 分次 C_2- 余有限的 V 表示范畴成立。

注 2.9。 非C_2-余有限顶点算子代数 V 满足以下条件：$\mathcal{C}_V^1$ 对偶模在其中封闭，因而满足定理2.7的结论；其中包括所有 Virasoro 顶点算子代数[CJORY], 许多仿射顶点算子（超）代数 [CY], 以及单态顶点算子代数 $\mathcal{M}$（p）对于 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ [CMY3]。

2.4. 张量积顶点算子代数。现在我们讨论张量积顶点算子代数的模；为简单起见，我们着重讨论两个顶点算子代数的张量积，但所有结果都可以迭代，从而得到关于两个以上顶点算子代数的张量积的结果。因此，设 U 和 V 是顶点算子代数。则 $U \otimes V$ 也是一个顶点算子代数，其顶点算子为

$$Y_{U\otimes V}(u_1 \otimes v_1, x)(u_2 \otimes v_2) = Y_U(u_1, x)u_2 \otimes Y_V(v_1, x)v_2,$$

真空向量 $\mathbf{1} = \mathbf{1}_U \otimes \mathbf{1}_V$，共形向量为 $\omega = \omega_U \otimes \mathbf{1}_V + \mathbf{1}_U \otimes \omega_V$。类似地，若 M是一个广义 U- 模，且 W 是一个广义 V- 模，则 $M \otimes W$ 是一个广义$U \otimes V$- 模。根据 [FHL，定理 4.7，4], 每个分次受限的单 $U \otimes V$-模都是一个单 U-模与一个单 V-模的向量空间张量积。

任何广义 $U \otimes V$-模 X 都可限制为弱 U-模和弱 V-模，且 U与 V的作用彼此交换。我们用 $L_U(n)$ 和 $L_V(n)$ 表示 X 上分别与共形向量 ω_U 和 ω_V对应的、彼此交换的 Virasoro 算子，而 $L(n)$ 表示与 ω对应的 Virasoro 算子。

若 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$分别是 U-模和 V-模的局部有限阿贝尔范畴，则存在一个右正合函子，它从 Deligne 张量积 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ 映到所有广义 $U \otimes V$-模构成的范畴，并将 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ 中的 Deligne 张量积对象映为 U-模与 V-模的向量空间张量积。这解释了我们为何用 $\otimes$ 同时表示 Deligne 张量积和向量空间张量积。事实上，本文的主要目标之一是证明，Deligne 张量积 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ 可以与一个适当的局部有限阿贝尔范畴 $U \otimes V$-模相等。为证明这一点，我们尤其需要证明，向量空间张量积 $U \otimes V$-模之间的同态来自 U-模同态与 V-模同态的张量积（回顾（2.4））：

命题 2.10. 设 M_1、 M_2 是弱 U-模，且 W_1、 W_2 是弱 V-模。则自然线性映射

$$\mathrm{Hom}_U(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_V(W_1, W_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{U\otimes V}(M_1 \otimes W_1, M_2 \otimes W_2)$$

是单射。如果 M_1、 M_2 是分次受限的广义 U-模，且 $\mathrm{Hom}_V(W_1, W_2)$ 是有限维的，则它也是满射。

证明。为证明该自然线性映射是单射，我们证明：如果 $\sum_i f_i \otimes g_i$ 作为一个 $U \otimes V$-同态 $M_1 \otimes W_1 \to M_2 \otimes W_2$为零，那么它作为 $\mathrm{Hom}_U(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_V(W_1, W_2)$ 中的向量也为零。我们可以假设态射 g_i：$W_1 \to W_2$线性无关，于是只需证明每个 $f_i = 0$。事实上，对于任意

$m_1 \in M_1$、$w_1 \in W_1$ 和 $m_2^* \in M_2^*$，我们得到

$$\sum_i \langle m_2^*, f_i(m_1)\rangle g_i(w_1) = (m_2^* \otimes \mathrm{Id}_{W_2})\Big(\sum_i f_i(m_1) \otimes g_i(w_1)\Big)$$
$$= (m_2^* \otimes \mathrm{Id}_{W_2})\Big(\Big(\sum_i f_i \otimes g_i\Big)(m_1 \otimes w_1)\Big) = 0.$$

因此，对于任意 $m_2^* \in M_2^*$ 和 $m_1 \in M_1$，有 $\sum_i \langle m_2^*, f_i(m_1)\rangle g_i = 0$；由于 g_i 线性无关，这意味着对于每个 i，有 $\langle m_2^*, f_i(m_1)\rangle = 0$。于是每个 $f_i = 0$ 都成立，因为其所有矩阵系数均为零。这证明了所需的单射性。

为证明当 M_1、M_2 是分次受限的广义 U-模且 $\mathrm{Hom}_V(W_1, W_2)$ 是有限维时，自然线性映射也是满射，设 $F\colon M_1 \otimes W_1 \to M_2 \otimes W_2$ 是一个 $U \otimes V$-模同态，并设 $\{g_i\}$ 是 $\mathrm{Hom}_V(W_1, W_2)$ 的一个（有限）基。于是对于任意 $m_2' \in M_2'$ 和 $m_1 \in M_1$，我们可以写成

$$(m_2' \otimes \mathrm{Id}_{W_2}) \circ F(m_1 \otimes \bullet) = \sum_i c_i(m_2' \otimes m_1) \cdot g_i$$

对于某些 $c_i \in (M_2' \otimes M_1)^*$。由于 F 特别是一个与 $L_U(0)$ 对易的 U-同态，并且由于 g_i 线性无关，当 m_2' 和 m_1 具有不同的共形权时，$c_i(m_2' \otimes m_1) = 0$。因此，对于每个 i 以及每个 $m_1 \in M_1$，$c_i(\bullet \otimes m_1)$ 定义了 $(M_2')' \cong M_2$ 的一个元素，于是我们得到一个线性映射 $f_i\colon M_1 \to M_2$，其特征为

$$\langle m_2', f_i(m_1)\rangle = c_i(m_2' \otimes m_1)$$

对于 $m_2' \in M_2'$, $m_1 \in M_1$。我们证明每个 f_i 都是一个 U-模同态：对于 $u \in U$ 和 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_i \langle m_2', f_i(u_n m_1)\rangle g_i &= \sum_i c_i(m_2' \otimes u_n m_1) \cdot g_i = (m_2' \otimes \mathrm{Id}_{W_2}) \circ F(u_n m_1 \otimes \bullet)\\ &= (m_2' \otimes \mathrm{Id}_{W_2}) \circ (u_n \otimes \mathrm{Id}_{W_2}) \circ F(m_1 \otimes \bullet)\\ &= (u_n^o m_2' \otimes \mathrm{Id}_{W_2}) \circ F(m_1 \otimes \bullet) = \sum_i \langle u_n^o m_2', f_i(m_1)\rangle g_i\\ &= \sum_i \langle m_2', u_n f_i(m_1)\rangle g_i\end{aligned}$$

其中 u_n^o 是与算子 M_2上的算子 u_n 相伴的 M_2' 上的算子。由于 g_i 线性无关，且 $m_2' \in M_2'$ 是任意的，因此可得，对每个 $m_1 \in M_1$，$f_i(u_n m_1) = u_n f_i(m_1)$，也就是说，每个 f_i 都是一个 U-模同态。最后，我们证明 $F = \sum_i f_i \otimes g_i$：对于所有的 $m_1 \in M_1$, $w_1 \in W_1$, $m_2' \in M_2'$和 $w_2^* \in W_2^*$，有

$$\begin{aligned}\langle m_2' \otimes w_2^*, F(m_1 \otimes w_1)\rangle &= \langle w_2^*, (m_2' \otimes \mathrm{Id}_{W_2}) \circ F(m_1 \otimes w_1)\rangle\\ &= \sum_i \langle m_2', f_i(m_1)\rangle \langle w_2^*, g_i(w_1)\rangle = \sum_i \langle m_2' \otimes w_2^*, (f_i \otimes g_i)(m_1 \otimes w_1)\rangle,\end{aligned}$$

正如所要求的。 □

3. Deligne tensor products

设 U 和 V 是顶点算子代数。本节将证明，U-模与 V-模的局部有限阿贝尔范畴的 Deligne 张量积，可以与某个 $U \otimes V$-模范畴等同。

3.1. $U\otimes V$-模范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是 U-模与 V-模的局部有限阿贝尔范畴，且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中至少一个是半单的，那么根据 [CKM2，定理 5.5]，它们的 Deligne 张量积等价于由那些同构于有限个 $M\otimes W$ 的直和的 $U\otimes V$-模构成的范畴，其中 $M\in\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$, $W\in\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。然而，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 均非半单，则这个 $U\otimes V$-模范畴不一定是阿贝尔范畴。因此，一般而言，我们需要一个不同的 $U\otimes V$-模范畴：

定义 3.1. 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别为分次受限广义 U-模和 V-模的加性范畴。定义 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 为满足以下条件的有限长度分次受限广义 $U\otimes V$-模范畴：由 X 中任意向量生成的 U-子模是 $\mathcal{U}$ 中的一个对象，并且由 X 中任意向量生成的 V-子模是 $\mathcal{V}$ 中的一个对象。

根据定义，显然 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 对子模和有限直和封闭。如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对商对象封闭，则它对商对象也封闭。由于 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的每个对象都具有有限长度，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的每个对象都是有限生成的，并且是分次受限的；因此，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的态射空间是有限维的。因此，如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是对商对象封闭的分次受限广义 U-模和 V-模的加性范畴，则 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是一个局部有限阿贝尔范畴。

命题 3.2. $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的任意对象都是一组模 $M\otimes W$ 的有限直和的同态像，其中 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。

证明. 任意 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$ 都是有限生成的，因此只需考虑 X 由单个向量 b 生成的情形。设 M 为由 b 生成的 U-子模，设 W 为由 b 生成的 V-子模。根据 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的定义，M 是 $\mathcal{U}$ 的一个对象，而 W 是 $\mathcal{V}$ 的一个对象。由于 M 由向量 u_nb （其中 $u\in U$ 且 $n\in\mathbb{Z}$）张成（见 [LL，命题 4.5.6]），我们尝试定义一个满射

$$p: M\otimes W\to X$$
$$\sum_i u_{n_i}^{(i)}b\otimes w\mapsto\sum_i u_{n_i}^{(i)}w.$$

要使 p 定义良好，我们需要证明，若 $\sum_i u_{n_i}^{(i)}b=0$，则对所有 $w\in W$ 也有 $\sum_i u_{n_i}^{(i)}w=0$。事实上，对于某些 $v^{(j)}\in V$, $m_j\in\mathbb{Z}$，有 $w=\sum_j v_{m_j}^{(j)}b$，因此若 $\sum_i u_{n_i}^{(i)}b=0$，则

$$\sum_i u_{n_i}^{(i)}w=\sum_{i,j}u_{n_i}^{(i)}v_{m_j}^{(j)}b=\sum_{i,j}v_{m_j}^{(j)}u_{n_i}^{(i)}b=0 \tag{3.1}$$

因为 U 和 V 在 X 上的作用彼此交换。

我们仍需证明 p 是一个 $U\otimes V$-模同态；只需证明 p 既是一个 U-模同态，也是一个 V- 模同态。首先，对于 $v\in V$、$n\in\mathbb{Z}$、$m=\sum_i u_{n_i}^{(i)}b\in M$和 $w\in W$，我们有

$$v_np(m\otimes w)=\sum_i v_nu_{n_i}^{(i)}w=\sum_i u_{n_i}^{(i)}v_nw=p(m\otimes v_nw),$$

因此 p 是一个 V-模同态。记 $w=\sum_j v_{m_j}^{(j)}b$，则（3.1）中的计算表明 $p(m\otimes w)=\sum_j v_{m_j}^{(j)}m$。因此，对于 $u\in U$和 $n\in\mathbb{Z}$,

$$u_np(m\otimes w)=\sum_j u_nv_{m_j}^{(j)}m=\sum_j v_{m_j}^{(j)}u_nm=p(u_nm\otimes w),$$

因此 p 也是一个 U-模同态。 □

命题 3.3。设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对子商封闭，且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的所有对象都具有有限长度。如果 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，则 $M \otimes W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$。反之，如果 $M \otimes W$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的一个对象，且 M 和 W 是有限生成的，那么 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。

证明。如果 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，那么 $M \otimes W$ 具有有限长度，等于 M 和 W 的长度之积。现在对于任意 $b = \sum_i m_i \otimes w_i \in M \otimes W$，令 $\langle b \rangle_U$ 为由 b 生成的 U-子模 $M \otimes W$。然后，假设 w_i 线性无关，

$$\langle b \rangle_U \subseteq \sum_i \langle m_i \rangle_U \otimes w_i \cong \bigoplus_i \langle m_i \rangle_U.$$

由于 $\mathcal{U}$ 对子模和有限直和封闭，所以 $\langle b \rangle_U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$。类似地，由 b 生成的 V-子模 $M \otimes W$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个对象，这表明 $M \otimes W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$。

反之，若 $M \otimes W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$，则对于任意非零的 $m \in M$和 $w \in W$， $m \otimes w$生成一个 U-子模，该子模同构于 M 的一个子模，并且也是 $\mathcal{U}$中的一个对象。由于 M 是有限生成的，它因此是有限多个此类子模的直和的同态像。于是 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，因为 $\mathcal{U}$ 对有限直和和商对象封闭；类似地， $W \in$Ob$(\mathcal{V})$。□

$\widetilde{\ }$令 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$为 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$的加性全子范畴，它由那些同构于如下有限直和的模组成：对 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$， $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，取 $M \otimes W$。

推论3.4. 若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对子商封闭，且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的所有对象都具有$\widetilde{\ }$有限长度，则 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$中的每个对象都是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$中的某个态射的余核。

证明。对于任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$，由命题$\widetilde{\ }$3.2，存在一个满射 $p\colon \bigoplus_i M_i \otimes W_i \to X$，其中 $\bigoplus_i M_i \otimes W_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$；由命题 3.3。由于 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 对$\widetilde{\ }$子模封闭，因此也存在一个满射 $q\colon \bigoplus_j M_j \otimes W_j \to \mathrm{Ker}\ p$，其中同样有 $\bigoplus_j M_j \otimes W_j \in \widetilde{\ }\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$。因此，$(X,p)$ 是 q 的余核。□

前述推论的条件意味着 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是局部有限阿贝尔范畴；在这种情况下， $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 也是局部有限阿贝尔范畴。在此情形下，我们可以确定 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的所有简单对象：

命题 3.5. 若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对子商封闭，且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的所有对象都具有有限长度，则一个 $U \otimes V$-模是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的简单对象，当且仅当它同构于 $M \otimes W$，其中 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 是简单对象，且 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。

证明。如果 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 是单对象，那么根据 [FHL，命题 4.7， $M \otimes W$ 是一个简单的 $U \otimes V$-模，2] 并且根据命题 3.3，是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的一个对象。反之，根据 [FHL，定理 4.7， 4], $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的任意简单对象都同构于 $M \otimes W$，其中 M是一个简单的 U-模，而 W 是一个简单的 V-模。于是，根据命题 3.3， $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。□

在温和条件下，如果 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$是， $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 在对偶模运算下封闭 ：

命题 3.6. 如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对子商和对偶模封闭，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 对对偶模封闭。

证明。对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$，其对偶 X' 是一个有限长度的、分次受限的广义 $U\otimes V$-模，其合成因子是 X 的合成因子的对偶模。还需证明，任意 $b'\in X'$ 生成一个 U-子模 $\langle b'\rangle_U$ 和一个 V-子模 $\langle b'\rangle_V$，它们分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的对象。

由于 $L(0)$、$L_U(0)$ 和 $L_V(0)$ 在 X' 上两两可交换，X' 的每个有限维广义 $L(0)$-特征空间都是关于 $L_U(0)$ 和 $L_V(0)$ 的同时广义特征空间的直和。因此 $b'=\sum_i b'_i$，其中每个 b'_i 关于 $L_U(0)$ 和 $L_V(0)$ 都是齐次的。于是 $\langle b'\rangle_U$ 是 $\bigoplus_i\langle b'_i\rangle_U$ 的一个子商，因此由于 $\mathcal{U}$ 对子商和有限直和封闭，如果每个 $\langle b'_i\rangle_U\in$ 都属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，则 $\langle b'\rangle_U\in$ 属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$。因此，我们归结为如下情形：b' 是关于 $L_U(0)$ 和 $L_V(0)$ 的广义特征向量，其广义特征值分别为 h_U 和 h_V。在此情形下，$\langle b'\rangle_U$ 是一个广义 U-模，其 $L_U(0)$-权包含于 $h_U+\mathbb{Z}$ 中；对于 $n\in\mathbb{Z}$，广义 $L_U(0)$- 特征值 h_U+n 的 $L_U(0)$- 权空间包含于 $L(0)$- 权空间 $(X')_{[h_U+h_V+n]}=X^*_{[h_U+h_V+n]}$ 中。由于 X 是一个分次受限的广义 $U\otimes V$-模，$\langle b'\rangle_U$ 是一个分次受限的广义 U-模。因此，$\langle b'\rangle_U$ 具有一个 U-模对偶 $\langle b'\rangle'_U$。

现在，U-模包含 $i\colon \langle b'\rangle_U\to X'$对偶化为一个 U-模映射 $i'\colon X\to\langle b'\rangle'_U$，使得对于 $b\in X$ 和 $m\in\langle b'\rangle_U$，

$$\langle i'(b),m\rangle=\langle i(m),b\rangle.$$

由于存在 $b\in X$ 使得对于任意非零的 $m\in\langle b'\rangle_U\subseteq X'$都有 $\langle i(m)\ b\rangle\neq 0$，所以 $\langle b'\rangle_U$ 中 $\operatorname{Im} i'\subseteq\langle b'\rangle'_U$ 的湮没子为 0。这意味着 i' 是满射，因为 $\langle b'\rangle_U$ 是分次受限的。又由于 X 具有有限长度，任意有限的 $U\otimes V$-模滤子

$$0=X_0\subseteq X_1\subseteq X_2\subseteq\cdots\subseteq X_n=X,$$

其中每个 X_j/X_{j-1}都是单的，诱导出一个 U-模滤子

$$0=i'(X_0)\subseteq i'(X_1)\subseteq i'(X_2)\subseteq\cdots\subseteq i'(X_n)=\langle b'\rangle'_U$$

使得 $i'(X_j)/i'(X_{j-1})$ 是 X_j/X_{j-1} 的同态像。根据 [FHL，定理 4.7。4]，$X_j/X_{j-1}\cong M_j\otimes W_j$对于某个单的 U-模 M_j和单的 V-模 W_j；因此，由于$i'(X_j)/i'(X_{j-1})$ 是分次受限的，所以它同构于 M_j 的有限个副本的有限直和。由此可得，$\langle b'\rangle'_U$ 是一个有限长度的 U-模，因而是有限生成的。

对于 $\{b_i\}$ 的有限多个生成元，选取 $c_i\in X$ 使得 $i'(c_i)=b_i$。那么 $\langle b'\rangle'_U$是 $\bigoplus_i\langle c_i\rangle_U$的一个商对象，并且每个 $\langle c_i\rangle_U\in$属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，因为 $X\in$属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$。因此，$\langle b'\rangle'_U\in$ 属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，而 $\langle b'\rangle''_U\cong\langle b'\rangle_U$ 也同样如此，因为 $\mathcal{U}$ 在对偶模运算下封闭。类似地，$\langle b'\rangle_V\in$属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，从而完成 $X'\in$属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$ 的证明。□

对于下一个关键结果，$\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$将分别是 C_1-余有限 U-模和 V-模的范畴：

定理 3.7。假设 U 和 V 按共形权进行 $\mathbb{N}$-分次。如果 $\mathcal{C}^1_U$ 和 $\mathcal{C}^1_V$这两个由 C_1-余有限、受分次限制的广义 U-模和 V-模组成的范畴在子模下封闭，并且 $\mathcal{C}^1_U$和 $\mathcal{C}^1_V$中的所有对象都具有有限长度，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{C}^1_U,\mathcal{C}^1_V)=\mathcal{C}^1_{U\otimes V}$。

证明。为证明 $\mathcal{D}(\mathcal{C}^1_U,\mathcal{C}^1_V)\subseteq\mathcal{C}^1_{U\otimes V}$，注意到 $\mathcal{D}(\mathcal{C}^1_U,\mathcal{C}^1_V)$ 对子商封闭。因此，$\mathcal{D}(\mathcal{C}^1_U,\mathcal{C}^1_V)$ 中任一对象的合成因子都是 $\mathcal{D}(\mathcal{C}^1_U,\mathcal{C}^1_V)$ 中的对象，故根据命题 3.5，它们具有 $M\otimes W$ 这种形式，其中 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^1_U)$ 且 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^1_V)$。$C_1$-余有限的 U-模与 V-模的张量积是一个 C_1-余有限的 $U\otimes V$-模，因此 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中任一对象的合成因子都是 $\mathcal{C}^1_{U\otimes V}$ 中的对象。现在，若 X_1 是一个 $U\otimes V$-模，且有一个 C_1-余有限子模 X_2，使得 X_1/X_2 是 C_1-余有限的，那么 X_1 也是 C_1-余有限的（见 [Hu3，引理 2.11]）。因此，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的任一对象都是 C_1-余有限的。

反过来，设 X 是任意一个 C_1-余有限的 $U\otimes V$-模，因此对某个有限维子空间 T，有 $X = T + C_1(X)$。我们可以假设 T 关于 $L_U(0)$ 和 $L_V(0)$ 的广义特征值是双分次的。我们断言， X 由下列所有向量张成

$$u^{(1)}_{-1}u^{(2)}_{-1}\cdots u^{(k)}_{-1}v^{(1)}_{-1}v^{(2)}_{-1}\cdots v^{(l)}_{-1}t \tag{3.2}$$

使得 $t \in T$, $u^{(i)} \in U$ 对于 $i = 1,\dots k$ 而言是权为 $u^{(i)} > 0$ 的齐次元素，并且 $v^{(j)} \in V$ 对于 $j = 1,\dots,l$ 而言是权为 $v^{(j)} > 0$ 的齐次元素。为证明这一断言，我们使用一个 $\mathbb{N}$- 分次 $X = \bigoplus_{n=0}^{\infty} X(n)$, 使得对于 $m \in \mathbb{Z}$ 和齐次的 $u \in U, v \in V$,

$$(u\otimes v)_m X(n) \subset X(n + \operatorname{wt} u + \operatorname{wt} v - m - 1).$$

具体而言，由于 X 是分次受限的，我们可以取 $X(n) = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} X_{[h_\mu+n]}$，其中对于任意陪集 $\mu \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$，若 X 在 μ 中具有共形权， h_μ 则 X 是 μ 中实部最小的共形权（若 h_μ 的共形权均不包含于 X 中，则 μ 任意）。我们将对 n 进行归纳，证明 $X(n)$ 由向量（3.2）张成。

事实上，我们可以将任意 $b \in X(n)$ 写成 $b = t + \sum_i (u^{(i)}\otimes v^{(i)})_{-1}b^{(i)}$，其中 $t \in T$ 和齐次的 $u^{(i)} \in U$、 $v^{(i)} \in V$ 以及 $b^{(i)} \in X$ 满足 $\operatorname{wt} u^{(i)} + \operatorname{wt} v^{(i)} > 0$。如果 $b \in X(0)$，那么每个 $b^{(i)} = 0$ 都成立，因为 $(u^{(i)}\otimes v^{(i)})_{-1}$ 是次数为 $\operatorname{wt} u^{(i)} + \operatorname{wt} v^{(i)} > 0$ 的算子，所以在此情形下 $b \in T$。对于一般的 n，我们有

$$\begin{aligned}
b &= t + \sum_i (u^{(i)}\otimes v^{(i)})_{-1}b^{(i)} = t + \sum_i \sum_{j\in\mathbb{Z}} u^{(i)}_{-j-1}v^{(i)}_{j-1}b^{(i)} \\
&= t + \sum_i u^{(i)}_{-1}v^{(i)}_{-1}b^{(i)} + \sum_i \sum_{j>0} \left(u^{(i)}_{-j-1}v^{(i)}_{j-1} + v^{(i)}_{-j-1}u^{(i)}_{j-1}\right) b^{(i)} \\
&= t + \sum_i u^{(i)}_{-1}v^{(i)}_{-1}b^{(i)} + \sum_i \sum_{j>0} \frac{1}{j!}\left((L_U(-1)^j u^{(i)})_{-1}v^{(i)}_{j-1} + (L_V(-1)^j v^{(i)})_{-1}u^{(i)}_{j-1}\right) b^{(i)},
\end{aligned}$$

最后一步使用了 U-模和 V-模的 $L(-1)$-导数性质。由于 U 和 V 是 $\mathbb{N}$-分次的，并且对于每个 i 都有 $\operatorname{wt} u^{(i)} + \operatorname{wt} v^{(i)} > 0$，因此 $u^{(i)}$ 和 $v^{(i)}$ 中一个具有严格正的共形权，另一个具有非负的共形权。因此，对于 $j > 0$, $L_U(-1)^j u^{(i)}$ 和 $L_V(-1)^j v^{(i)}$ 具有严格正的权，而 $v^{(i)}_{j-1}b^{(i)}$ 和 $u^{(i)}_{j-1}b^{(i)}$ 的次数小于 n。类似地，如果 $\operatorname{wt} u^{(i)} > 0$, 则 $\deg v^{(i)}_{-1}b^{(i)} < n$; 而如果 $\operatorname{wt} v^{(i)} > 0$, 则 $\deg u^{(i)}_{-1}b^{(i)} < n$。因此，通过对 n 进行归纳，任意 $b \in X(n)$ 都属于向量 (3.2) 的张成空间。

既然我们知道 X 由向量（3.2）张成，考虑子空间 e

$$W = \operatorname{span}\{v^{(1)}_{-1}v^{(2)}_{-1}\cdots v^{(l)}_{-1}t \mid t \in T,\, v^{(j)} \in V,\, \operatorname{wt} v^{(j)} > 0,\, j = 1,\dots,l\}.$$

该空间在 L_V（0）下稳定，并按广义 L_V（0）特征值分次，因为 T 也是如此。对于任意 $h \in \mathbb{C}$，广义 L_V（0）特征子空间 $W_{[V,h]}$ 中 W 对应于广义特征值 h 的部分是有限维的，这是因为 T 以及 V 的每个共形权空间都是有限维的，并且因为 v_{-1} 在 $\operatorname{wt} v > 0$ 时严格提高共形权。现在，由于顶点算子模 u_n 对于 $u \in U$， $n \in \mathbb{Z}$ 保持广义 L_V（0）特征值，张成集（3.2）意味着

$$X_{[V,h]} = \operatorname{span}\{u^{(1)}_{-1}u^{(2)}_{-1}\cdots u^{(k)}_{-1}w \mid w \in W_{[V,h]},\, u^{(i)} \in U,\, \operatorname{wt} u^{(i)} > 0,\, i = 1,\dots,k\}$$

是 X 的广义 $L_V(0)$ -特征空间，其广义特征值为 h。由于 $W_{[V,h]}$ 是有限维的，因此每个 $X_{[V,h]}$ 都是 X的 C_1-余有限 U-子模。又由于根据假设， $\mathcal{C}^1_U$ 在

子模下封闭， X 中的任意向量都会生成一个 C_1-余有限 U-子模。同样， X 中的任意向量都会生成一个 C_1-余有限 V-子模。

还需证明 X 具有有限长度。由于 X 是 C_1-余有限的，它具有有限生成集 $\{b_i\}$ （该生成集可以是子空间 T的张成集）。每个 b_i 都生成一个 C_1-余有限的 U-子模 $\langle b_i\rangle_U$ 和一个 C_1-余有限的 V-子模 $\langle b_i\rangle_V$，并且与命题 3.2 中相同的证明表明， X 是 $\bigoplus_i \langle b_i\rangle_U \otimes \langle b_i\rangle_V$的同态像。由于根据假设，每个$\langle b_i\rangle_U$ 和 $\langle b_i\rangle_V$ 都具有有限长度，因此 X也具有有限长度。这就完成了如下证明：任何 C_1-余有限的 $U\otimes V$-模都是 $\mathcal{D}(\mathcal{C}_U^1,\mathcal{C}_V^1)$中的一个对象。□

推论 3.8。 如果 U 和 V 是 $\mathbb{N}$-分次的，并且 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 在对偶下封闭，那么 $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$ 在子模和对偶下封闭，是一个局部有限阿贝尔范畴，并且具有[HLZ1]-[HLZ8]的编织张量范畴结构。

证明。 根据定理 2.7和 3.7， $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1=\mathcal{D}\left(\mathcal{C}_U^1,\ \mathcal{C}_V^1\right)$ ，且 $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$在子模下封闭（根据 $\mathcal{D}\left(\mathcal{C}_U^1,\right.$ $\left.\mathcal{C}_V^1\right)$ 的定义），并且在对偶模下封闭（根据命题 3.6）。于是$\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$ 由定理 2.7是一个局部有限编织张量范畴。 □

3.2. 射影 $U\otimes V$-模。在本小节中， $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$将是分别由分次受限广义 U-模和 V-模构成的局部有限阿贝尔范畴，并且在子商下封闭，因此定义 3.1 中的 $U\otimes V$-模范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 也是一个局部有限阿贝尔范畴。我们将证明，如果单 U-模和 V-模 M及W分别在 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$ 中具有射影覆盖，那么 $M\otimes W$在 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中也具有射影覆盖。因此，如果 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$具有充分多的射影对象，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 也具有充分多的射影对象。由命题 3.3 可知，如果 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，那么 $M\otimes W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$。

设一个简单的 U-模 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 具有射影覆盖 $p_M\colon\ P_M\twoheadrightarrow M$在 $\mathcal{U}$中。不难证明， P_M由任意一个 $\overline{m}\in P_M\setminus\operatorname{Ker}p_M$生成（例如参见[McR3，引理 5。13]）。也就是说，$\operatorname{Ker}\ p_M$是 P_M的唯一极大真子模。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$这意味着，如果 M 是任意一个简单的 U-模，那么任意同态 $P_M\to M$ 要么为 0，要么与 p_M具有相同的核。因此

$$\operatorname{Hom}_U(P_M,\widetilde{M})=\begin{cases}\mathbb{C}\cdot p_M & \text{if}\quad \widetilde{M}=M\\ 0 & \text{if}\quad \widetilde{M}\ncong M\end{cases}. \tag{3.3}$$

对于 $\mathcal{V}$ 中不可约 V-模的射影覆盖，同样的论证也成立。

引理 3.9。设 $p_M\colon\ P_M\twoheadrightarrow M$ 和 $p_W\colon\ P_W\twoheadrightarrow W$ 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中简单模的射影覆盖。那么，$P_M\otimes P_W$ 具有唯一的极大真子模，该子模由 $p_M\otimes p_W\colon\ P_M\otimes P_W\twoheadrightarrow M\otimes W$ 的核给出。

证明。由于 $P_M\otimes P_W$ 是有限长度的 $U\otimes V$-模，任意极大真子模都是$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$满射 p 的核：$P_M\otimes P_W\to M\otimes W$，其中 M 和 W 分别是不可约的 U-模和V-模。我们需要证明 $\operatorname{Ker}\ p=\operatorname{Ker}(p_M\otimes p_W)$。

令 $\overline{m}\in P_M\setminus\operatorname{Ker}\ p_M$ 和 $\overline{w}\in P_W\setminus\operatorname{Ker}\ p_W$ 是 P_M 和 P_W 的生成向量。于是

$$p_{\overline{w}}\colon P_M\xrightarrow{\cong}P_M\otimes\overline{w}\hookrightarrow P_M\otimes P_W\xrightarrow{p}\widetilde{M}\otimes\widetilde{W}$$

是弱 U-模的同态，其像是有限个副本的直和$\widetilde{\ }$的 M。由于 p非零且 $P_M\otimes\overline{w}$生成 $P_M\otimes P_W$，我们有 $p_{\overline{w}}\neq 0$，因此$\widetilde{\ }\operatorname{Im}p_{\overline{w}}\cong M$由（3.3）可知。因此我们可以假设 $M=M$。接着由$\widetilde{\ }$作为弱 $M\otimes W$-模的完全 U可约性以及 Jacobson 密度定理，容易证明每一个

$\sim$ $\sim U$-模同态 $M \to M \otimes W$具有以下形式: $m \mapsto m \otimes \widetilde{w}$，其中某个 $\widetilde{w} \in W$。因此，我们有一个分解

$$p_{\overline{w}} : P_M \xrightarrow{c \cdot p_M} M \xrightarrow{m \mapsto m \otimes \widetilde{w}} M \otimes \widetilde{W}$$

对于某些 $c \in \mathbb{C}$ 和 $\widetilde{w} \in W$，使得 $p(\overline{m} \otimes \overline{w}) = p_M(\overline{m}) \otimes (c \cdot \widetilde{w})$。

用同样的论证，我们可以假设 $W = W$，于是对于某个 $m \in M$，有 $p(\overline{m} \otimes \overline{w}) = \widetilde{m} \otimes p_W(\overline{w})$。将 $\widetilde{m}$ 在包含 $p_M(\overline{m})$ 的 M 的一组基中展开，并利用

$$p_M(\overline{m}) \otimes (c \cdot \widetilde{w}) = \widetilde{m} \otimes p_W(\overline{w}),$$

我们看到 $\widetilde{m}$ 是 $p_M(\overline{m})$ 的倍数，因此 $p(\overline{m} \otimes \overline{w}) \in \mathbb{C} \cdot (p_M(\overline{m}) \otimes p_W(\overline{w}))$。因此 $p \in \mathbb{C}^\times \cdot (p_M \otimes p_M)$，因为 $\overline{m} \otimes \overline{w}$ 生成了 $P_M \otimes P_W$，于是 $\mathrm{Ker}\ p = \mathrm{Ker}(p_M \otimes p_W)$，证毕。□

前述引理表明，由 $(P_M \otimes P_W) \setminus \mathrm{Ker}(p_M \otimes p_W)$ 中任一向量生成的子模不可能是真子模，因为它不包含于唯一的极大真子模 $\mathrm{Ker}(p_M \otimes p_W)$ 中。因此我们有：

推论 3.10。 在引理 *3.9*的设定下， $P_M \otimes P_W$ 由其中任意向量单生成 $(P_M \otimes P_W) \setminus \mathrm{Ker}(p_M \otimes p_W)$。

利用这一推论，我们现在证明：

定理 3.11。设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是由分次受限的广义 U模和 V模构成的局部有限阿贝尔范畴，并且对所有子商封闭；设 $p_M : P_M \twoheadrightarrow M$和 $p_W : P_W \twoheadrightarrow W$ 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$中简单对象的射影覆盖。那么$p_M \otimes p_W : P_M \otimes P_W \twoheadrightarrow M \otimes W$是 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中 $M \otimes W$的射影覆盖。特别地，如果 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$具有充分多的射影对象，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 也具有充分多的射影对象，并且$\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中的每个射影对象都是 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$中的射影对象的张量积的有限直和。

证明。第二个结论由第一个结论推出，因为 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是一个局部有限阿贝尔范畴。现在考虑一个图表

$$\begin{array}{ccc} & & P_M \otimes P_W \\ & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

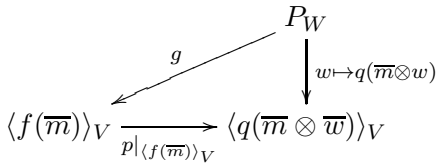
在 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中，其中 p 是满射。我们固定生成向量 $\overline{m} \in P_M \setminus \mathrm{Ker}\ p_M$ 和 $\overline{w} \in P_W \setminus \mathrm{Ker}\ p_W$。由于 p 是满射，存在 $b \in X$ 使得

$$p(b) = q(\overline{m} \otimes \overline{w}).$$

令 $\langle b \rangle_U \subseteq X$ 和 $\langle q(\overline{m} \otimes \overline{w}) \rangle_U \subseteq Y$ 分别为由 b 和 $q(\overline{m} \otimes \overline{w})$ 生成的 U-子模；根据 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 的定义，它们是 $\mathcal{U}$ 的对象。因此，由于 P_M 在 $\mathcal{U}$ 中是射影的，存在一个 U-模同态 $f : P_M \to \langle b \rangle_U$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} & & P_M \\ & \overset{f}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle m \mapsto q(m \otimes \overline{w})} \\ \langle b \rangle_U & \xrightarrow[p|_{\langle b \rangle_U}]{} & \langle q(\overline{m} \otimes \overline{w}) \rangle_U \end{array}$$

交换。接下来，令 $\langle f(\overline{m})\rangle_V \subseteq X$ 和 $\langle q(\overline{m}\otimes\overline{w})\rangle_V \subseteq Y$ 为由所指向量生成的 V-子模；由于 X 和 Y 是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的对象，它们是 $\mathcal{V}$ 的对象。因此，存在一个 V- 模同态 $g\colon P_W \to \langle f(\overline{m})\rangle_V$，使得图表



可交换。

We 现在可以如下构造一个映射 $F\colon P_M\otimes P_W \to X$。由于 $\overline{m}$ 生成了 P_M ，

$$P_M = \mathrm{span}\{u_n\overline{m}\,|\,u\in U, n\in\mathbb{Z}\}$$

由[LL，P 命题 4.5.6]。因此，对于 $m=\sum_i u^{(i)}_{n_i}\overline{m}\in P_M$ 和 $w\in P_W$，我们尝试 t

$$F(m\otimes w)=\sum_i u^{(i)}_{n_i}g(w).$$

如命题 3.2 的证明中一样，我们需要证明：若 $\sum_i u^{(i)}_{n_i}\overline{m}\in P_M$ 消失，则 $\sum_i u^{(i)}_{n_i}g(w)$ 对任意 $w\in P_W$ 也消失。事实上，由于 $g(w)\in\langle f(\overline{m})\rangle_V$对任意这样的 w 都成立，我们可以将 $g(w)=\sum_j v^{(j)}_{k_j}f(\overline{m})$ 写成某些 $v^{(j)}\in V$ 和 $k_j\in\mathbb{Z}$ 的形式。然后

$$\sum_i u^{(i)}_{n_i}g(w)=\sum_{i,j}u^{(i)}_{n_i}v^{(j)}_{k_j}f(\overline{m})=\sum_j v^{(j)}_{k_j}\sum_i f(u^{(i)}_{n_i}\overline{m})=0 \tag{3.4}$$

由于顶点算子 $Y_X(u^{(i)},x)$ 和 $Y_X(v^{(j)},x)$ 交换，且由于 f 是一个 U-模同态。这表明 F 定义良好。

现在我们证明 F 是一个 $U\otimes V$-模同态。首先，对于 $v\in V$、 $n\in\mathbb{Z}$、$m=\sum_i u^{(i)}_{n_i}\overline{m}\in P_M$ 和 $w\in P_W$，我们有

$$v_nF(m\otimes w)=\sum_i v_nu^{(i)}_{n_i}g(w)=\sum_i u^{(i)}_{n_i}g(v_nw)=F(m\otimes v_nw)$$

由于 g 是一个 V-模同态。这表明 F是一个 V-模同态。为证明 F 也是一个 U-模同态，固定任意 $w\in P_W$ 并写作 $g(w)$。然后，(3.4) 中的计算表明，对于任意 $m\in P_M$，

$$F(m\otimes w)=\sum_j v^{(j)}_{k_j}f(m).$$

Cons因此，对于任意 $u\in U$、 $n\in\mathbb{Z}$、 $m\in P_M$，以及我们任意固定的 $w\in P_W$，

$$u_nF(m\otimes w)=\sum_j u_nv^{(j)}_{k_j}f(m)=\sum_j v^{(j)}_{k_j}f(u_nm)=F(u_nm\otimes w),$$

从而表明， F 也是一个 U-模同态。

我们现在 c 计算 $p\circ F$：对于任意 $m=\sum_i u^{(i)}_{n_i}\overline{m}\in P_M$和 $w\in P_W$，根据定义可得

$$(p\circ F)(m\otimes w)=\sum_i p(u^{(i)}_{n_i}g(w))=\sum_i u^{(i)}_{n_i}(p\circ g)(w)=\sum_i u^{(i)}_{n_i}q(\overline{m}\otimes w)=q(m\otimes w).$$

这就完成了以下证明： $P_M \otimes P_W$在 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中是射影的。为证明它是 $M \otimes W$的射影覆盖，注意到 $p_M \otimes p_W$： $P_M \otimes P_W \to M \otimes W$是满射；于是根据命题 2.2，只需证明 $P_M \otimes P_W$ 是不可分解的。若确实如此

$$P_M \otimes P_W = X_1 \oplus X_2$$

对于非零直和项 X_1 和 X_2，则会存在满射

$$p_1 : X_1 \to M_1 \otimes W_1, \qquad p_2 : X_2 \to M_2 \otimes W_2$$

对于单 U-模 M_1， M_2 以及单 V-模 W_1， W_2。但这是不可能的，因为这样 $\operatorname{Ker} p_1 \oplus X_2$ 和 $X_1 \oplus \operatorname{Ker} p_2$将会是$P_M \otimes P_W$的两个不同的极大真子模，这与引理 3.9 矛盾。□

注 3.12. 如果 U 和 V 是 $\mathbb{N}$-分次且 C_2-余有限的，并且我们取 $\mathcal{U} = \mathrm{Rep}(U)$ 和$\mathcal{V} = \mathrm{Rep}(V)$ 为分次受限的广义 U-模和 V-模所构成的满范畴，那么 [Hu3，定理 3.24] 表明 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 具有充分多的射影对象。在此情况下，回顾注 2.8 和定理 3.7， $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathrm{Rep}(U \otimes V)$，因此定理 3.11 表明，单 $U \otimes V$-模的射影覆盖是单 U-模和 V-模的射影覆盖的张量积。

3.3. $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$作为 Deligne 张量积。 设 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$是局部有限阿贝尔范畴，其对象分别为 U-模和 V-模，并且对取子商封闭。则 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$关于 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$的 Deligne 张量积存在；在本小节中，我们将证明 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$等价于定义 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$中的范畴 3.1，并配备显然的 $\mathbb{C}$-双线性函子

$$\otimes : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$$

（回顾命题 3.3），该函子关于两个变量都是正合的。

回顾第 2.1 节，由任意 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 生成的阿贝尔全子范畴 $\langle M \rangle$ 是 $\mathcal{U}$ 的有限阿贝尔子范畴，对于 $\mathcal{V}$ 也同样如此。我们将利用 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的这些子范畴，将 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 实现为有限阿贝尔全子范畴的并；由于为了证明 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是 Deligne 张量积，我们需要考察 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中的右正合序列 $X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$，因此我们将为任意无序三元组 X_1、 X_2、 $X_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$ 关联这样一个子范畴。因此，对于 $i = 1$、2、3，我们利用命题 3.2 固定一个满射 $\bigoplus_{n_i} M_{n_i} \otimes W_{n_i} \to X_i$，其中 $M_{n_i} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$， $W_{n_i} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。然后我们定义

$$\mathcal{D}_{X_1, X_2, X_3} = \mathcal{D}(\langle \oplus_{i=1,2,3} \oplus_{n_i} M_{n_i} \rangle, \langle \oplus_{i=1,2,3} \oplus_{n_i} W_{n_i} \rangle). \tag{3.5}$$

这是 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 的一个阿贝尔全子范畴，并且根据命题 3.3，它包含 X_1、 X_2 和 X_3。此外，由于$\langle \oplus_{i=1,2,3} \oplus_{n_i} M_{n_i} \rangle$ 和$\langle \oplus_{i=1,2,3} \oplus_{n_i} W_{n_i} \rangle$ 是有限阿贝尔范畴，命题 3.5 蕴含 $\mathcal{D}_{X_1, X_2, X_3}$ 至多同构意义下有有限多个简单对象，而定理 3.11 蕴含 $\mathcal{D}_{X_1, X_2, X_3}$ 中的任意简单模都有一个射影覆盖。因此，$\mathcal{D}_{X_1, X_2, X_3}$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 的一个有限阿贝尔全子范畴，其中包含 X_1、 X_2 和 X_3。为简便起见，我们用记号 $\mathcal{D}_{X_1, X_2} = \mathcal{D}_{X_1, X_1, X_2}$（它等于 $\mathcal{D}_{X_1, X_2, X_2}$）表示 $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$，并用 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{X, X, X}$ 表示 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$。容易看出

$$\mathcal{D}_{X_i} \subseteq \mathcal{D}_{X_i, X_j} \subseteq \mathcal{D}_{X_1, X_2, X_3}$$

对于 i、 $j = 1$、2、3。

要使 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 成为 $\mathcal{U}$and $\mathcal{V}$ 的 Deligne 张量积，我们需要证明，双变量均为右正合的双线性函子 $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{C}$ 能唯一地诱导出适当的右正合函子 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \to \mathcal{C}$。我们的思路是，首先利用投射对象的性质，证明每个 $\mathcal{D}_X \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 都是子范畴 $\langle \oplus_n M_n \rangle$ and

$\langle\oplus_n W_n\rangle$和，因此，$\mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{C}$这个在双变量上均为右正合的函子会诱导出一个右正合函子$\mathcal{D}_X\to\mathcal{C}$。接下来，我们希望将定义在这些子范畴上的函子“粘合”成一个函子$\mathcal{D}(\mathcal{U}、\mathcal{V})\to\mathcal{C}$；我们将利用子范畴$\mathcal{D}_{X_i、X_j}$和$\mathcal{D}_{X_1、X_2、X_3}$来证明这些函子可以相容地粘合起来。证明的大部分内容与顶点算子代数并无特别关系，因此我们将大部分工作用于证明下述关于阿贝尔范畴的一般定理；这一结果或许为专家所熟知，或易于证明，但为求完整，我们在附录A中给出证明：

~定理 3.13. 设 $\mathcal{D}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴，设 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}$ 是一个加性全子范畴，并假设对于任意无序三元组 X_1、X_2、$X_3\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，存在一个阿贝尔全子范畴 $\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}\subseteq\mathcal{D}$，其包含 X_1、X_2 和 X_3，且具有充分多的射影对象，~使得 $\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}$ 中的每个投射对象都属于 $\mathcal{D}$，并且对于所有 i、$j=1$、2、3，

$$\mathcal{D}_{X_i,X_i,X_i}\subseteq\mathcal{D}_{X_i,X_i,X_j}=\mathcal{D}_{X_i,X_j,X_j}\subseteq\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}.$$

~设 $\mathcal{G}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性函子，其中 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴，并且对于任意~X_1、X_2、$X_3\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 以及 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}\cap\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3})$，存在一个右正合序列

$$Q_X\xrightarrow{q_X}P_X\xrightarrow{p_X}X\longrightarrow 0,$$

其中 P_X 和 Q_X 是 $\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}$ 中的投射对象，使得 $(\mathcal{G}(X)\ \mathcal{G}(p_X))$ 是 $\mathcal{C}$ 中 $\mathcal{G}(q_X)$ 的余核。那么存在唯一的（在自然同构意义下）右正合函子 $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\cong\mathcal{G}$。

注 3.14。在定理 3.13 中，我们可以将结论 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\cong\mathcal{G}$替换为如下结论：$\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$恰好等于 $\mathcal{G}$。事实上，给定 $\mathcal{F}:\ \mathcal{D}\to\mathcal{C}$以及一个自然同构~$\eta:\ \mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\to\mathcal{G}$，我们可以定义一个新的函子 $\mathcal{F}:\ \mathcal{D}\to\mathcal{C}$在对象上的作用为

$$\widetilde{\mathcal{F}}(X)=\begin{cases}\mathcal{G}(X) & \text{if}\quad X\in\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\\ \mathcal{F}(X) & \text{if}\quad X\notin\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\end{cases},$$

在态射上的作用为

$$\widetilde{\mathcal{F}}(f:X_1\to X_2)=\begin{cases}\eta_{X_2}\circ\mathcal{F}(f)\circ\eta_{X_1}^{-1} & \text{if}\quad X_1,X_2\in\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\\ \mathcal{F}(f)\circ\eta_{X_1}^{-1} & \text{if}\quad X_1\in\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}},\ X_2\notin\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\\ \eta_{X_2}\circ\mathcal{F}(f) & \text{if}\quad X_1\notin\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}},\ X_2\in\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\\ \mathcal{F}(f) & \text{if}\quad X_1,X_2\notin\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\end{cases}.$$

~ ~于是 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}=\mathcal{G}$，并且存在一个自然同构 $\tilde{\eta}$:
$\mathcal{F}\to\mathcal{F}$，其定义为

$$\widetilde{\eta}_X=\begin{cases}\eta_X & \text{if}\quad X\in\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\\ \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)} & \text{if}\quad X\notin\mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathcal{D}}\end{cases},$$

~因此，如果 $\mathcal{F}$ 是右正合的，那么
$\mathcal{F}$ 也是右正合的。

现在我们将利用定理 3.13 来证明本小节的主要定理：

定理 3.15. 如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是分次受限广义 U-模和 V-模的局部有限阿贝尔范畴，并且对其子商封闭，那么 $(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})\ \otimes)$ 是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$的 Deligne 张量积。

证明。我们需要证明，对于任意阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 以及任意 $\mathbb{C}$-双线性函子 $\mathcal{B}\colon \mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{C}$，其关于两个变量都是右正合的，都存在唯一的（在自然同构意义下）右正合函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})\to\mathcal{C}$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}\times\mathcal{V} & \xrightarrow{\mathcal{B}} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle\otimes}\downarrow & \nearrow_{\mathcal{F}} & \\ \mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}) & & \end{array}$$

成立。我们将在 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 的情形下应用定理 3.13，其中 $\mathcal{D}$ 是由 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中所有与模的有限直和 $M\otimes W$ 同构的 $U\otimes V$-模构成的加性全子范畴，$M\in$ 属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，$W\in$ 属于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。根据定理 3.11，(3.5) 中定义的有限阿贝尔子范畴 $\mathcal{D}_{X_1}$、X_2、X_3 满足定理 3.13 的假设。

现在，我们构造一个函子 $\mathcal{G}$ 使得其中每个 M_i 对于 $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，且每个 $W_i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，并通过一组包含与投影

$$q_X^{(i)}: M_i\otimes W_i\longrightarrow X,\qquad \pi_X^{(i)}: X\longrightarrow M_i\otimes W_i$$

使得

$$\pi_X^{(i)}\circ q_X^{(j)}=\delta_{i,j}\mathrm{Id}_{M_i\otimes W_i},\qquad \sum_i q_X^{(i)}\circ\pi_X^{(i)}=\mathrm{Id}_X.$$

于是，对 $\mathcal{D}$ 的对象，我们定义

$$\mathcal{G}(X)=\bigoplus_i \mathcal{B}(M_i,W_i).$$

对于 $\mathcal{D}$ 中的一个态射 $f\colon X\to X\cong\bigoplus_j M_j\otimes W_j$，我们有一个态射

$$\pi_{\widetilde{X}}^{(j)}\circ f\circ q_X^{(i)}: M_i\otimes W_i\longrightarrow \widetilde{M_j}\otimes\widetilde{W_j}$$

对所有的 i、j。我们希望将 $\mathcal{B}$ 应用于这些态射，然后定义

$$\mathcal{G}(f)=\sum_{i,j} q_{\mathcal{G}(\widetilde{X})}^{(j)}\circ\mathcal{B}(\pi_{\widetilde{X}}^{(j)}\circ f\circ q_X^{(i)})\circ\pi_{\mathcal{G}(X)}^{(i)}.$$

然而，$\pi_{\widetilde{X}}^{(j)}\circ f\circ q_X^{(i)}$ 是 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 中的一个态射，而不是 $\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ 中的态射，因此我们需要确定如何将 $\mathcal{B}$ 解释为 $\mathcal{D}$ 中态射上的映射。

事实上，由于根据假设 $\mathcal{B}$ 关于态射双线性，对于任意 M_1、$M_2\in\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 以及 W_1、$W_2\in\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，我们有一个线性映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M_1,M_2)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(W_1,W_2)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}(M_1,W_1),\mathcal{B}(M_2,W_2))$$
$$f\otimes g\mapsto\mathcal{B}(f,g).$$

将此与命题 2.10 结合可得到一个线性映射

$$\mathcal{B}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}(M_1\otimes W_1,M_2\otimes W_2)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}(M_1,W_1),\mathcal{B}(M_2,W_2)).$$

我们利用此映射 $\mathcal{B}$ 定义 $\mathcal{G}\colon \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 在态射上的作用，随后很容易证明 $\mathcal{G}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性函子。此外，若 $X=M\otimes W$ 属于 $\otimes\colon \mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{D}$ 的像，则可以选取 $q_X^{(i)}=\pi_X^{(i)}=$ 恒等映射$_X$，因此不妨假设 $\mathcal{G}\circ\otimes=\mathcal{B}$。

现在固定 X_1、X_2、$X_3 \in \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 以及 $X \cong \bigoplus_i M_i \otimes W_i \in \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3})$。回顾 (3.5)，对于某些有限阿贝尔子范畴 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$，有 $\mathcal{D}_{X_1}$、$_{X_2}$、$_{X_3} = \mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$。由命题 3.3 可知，每个 $M_i \in \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，且每个 $W_i \in \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。因此，对任意 i，存在右正合序列

$$Q_M \xrightarrow{q_M} P_M \xrightarrow{p_M} M_i \longrightarrow 0, \qquad Q_W \xrightarrow{q_W} P_W \xrightarrow{p_W} W_i \longrightarrow 0$$

使得 P_M, Q_M在 $\mathcal{U}$中是射影的，且 P_W, Q_W在 $\mathcal{V}$中是射影的。该

$$(Q_M \otimes P_W) \oplus (P_M \otimes Q_W) \xrightarrow{F} P_M \otimes P_W \xrightarrow{p_M \otimes p_W} M_i \otimes W_i \longrightarrow 0$$

在$\mathcal{D}_{X_1}$、$_{X_2}$、$_{X_3}$中是右正合的，其中 $F =$（$q_M \otimes$恒等映射$_{P_W}$）$\circ \pi_1 +$（恒等映射$_{P_M} \otimes q_W$）$\circ \pi_2$，且 F 和 $p_M \otimes p_W$ 的定义域在$\mathcal{D}_{X_1}$、$_{X_2}$中是射影的；$_{X_3}$ 由定理3.11可知。

现在，由于 $\mathcal{B}$ 在两个变量上都是右正合的，引理2.5 推出

$$\mathcal{B}(Q_M, P_W) \oplus \mathcal{B}(P_M, Q_W) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathcal{B}(P_M, P_W) \xrightarrow{\mathcal{B}(p_M, p_W)} \mathcal{B}(M_i, W_i) \longrightarrow 0$$

在 $\mathcal{C}$中是右正合的，其中 $F = \mathcal{B}(q_M,$ 恒等映射$_{P_W}) \circ \pi_1 + \mathcal{B}($恒等映射$_{P_M}, q_W) \circ \pi_2$。因为 $\mathcal{G} \circ \otimes = \mathcal{B}$,$\mathcal{G}(P_M \otimes P_W) = \mathcal{B}(P_M, P_W)$，$\mathcal{G}(M_i \otimes W_i) = \mathcal{B}(M_i, W_i)$, 且 $\mathcal{G}(p_M \otimes p_W) = \mathcal{B}(p_M, p_W)$, 又因为 $\mathcal{G}$ 也具有 $\mathbb{C}$-线性，因此在自然同构意义下保持直和，所以存在一个同构

$$G : \mathcal{G}((Q_M \otimes P_W) \oplus (P_M \otimes Q_W)) \longrightarrow \mathcal{B}(Q_M, P_W) \oplus \mathcal{B}(P_M, Q_W)$$

使得 $\mathcal{G}(F) = F \circ G$。因此，对于每个 i，$(\mathcal{G}(M_i \otimes W_i)\ \mathcal{G}(p_M \otimes p_W))$ 都是 $\mathcal{G}(F)$ 的余核。由于 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{C}$-线性的，因而保持直和，我们可以对上述右正合序列按 i取直和，从而得到一个右正合序列

$$Q_X \xrightarrow{q_X} P_X \xrightarrow{p_X} X \longrightarrow 0$$

使得 Q_X和 P_X是 $\mathcal{D}_{X_1}$的射影对象，$_{X_2,X_3}$，且 $(\mathcal{G}(X)\ \mathcal{G}(p_X))$ 是 $\mathcal{C}$中的 $\mathcal{G}(q_X)$ 的余核。由定理 3.13 可知，存在唯一的右正合 $\mathbb{C}$-线性函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to \mathcal{C}$，使得 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \cong \mathcal{G}$。

与备注 3.14中一样，我们可以在必要时修改 $\mathcal{F}$，使得 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$恰好等于 $\mathcal{G}$，因此

$$\mathcal{F} \circ \otimes = \mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \circ \otimes = \mathcal{G} \circ \otimes = \mathcal{B}.$$

尚需证明，若 $\mathcal{F}\colon \mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to \mathcal{C}$ 是任意一个右正合函子，满足 $\mathcal{F} \circ \otimes = \mathcal{B}$,

，则 $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$。由 $\mathcal{F}$的唯一性，只需证明 $\mathcal{F} \circ \otimes = \mathcal{B}$ 推出$\sim$ $\sim\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \cong \mathcal{G}$。事实上，由于 $\mathcal{D}$中的所有对象都是 $\otimes$像中的对象的有限直和，且 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$和 $\mathcal{G}$都是 $\mathbb{C}$-线性的，因而在自然同构意义下保持有限直和，所以 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$和 $\mathcal{G}$都由它们在$\sim\otimes$像上的限制唯一确定。特别地，可以直接构造一个自然同构 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \to \mathcal{G}$。至此，证明了 $(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})\ \otimes)$ 是 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$的 Deligne 张量积。□

4. Tensor categories for tensor product vertex operator algebras

设 U 和 V 为顶点算子代数。在本节中，我们从 U-模和 V-模的张量范畴构造 $U \otimes V$-模的张量范畴。我们的目标是证明：如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是 U-模和 V-模的局部有限编织张量范畴，那么范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的 $U \otimes V$-模具有顶点代数型辫张量范畴结构，正如 [HLZ1]-[HLZ8]，中所述；该结构等价于 Deligne 张量积 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ 上从编织张量范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 继承的编织张量结构。

4.1. 融合积模。在本小节中，我们证明，在相当一般的条件下，两个向量空间张量积 $U \otimes V$-模的融合积是两个融合积的张量积。我们将在以下情形下证明这一点：

假设 4.1. 设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别为广义 U-模、V-模和 $U \otimes V$-模的范畴，并满足以下条件：

- $\mathcal{D}$ 中的所有对象都分解为关于 $L_U(0)$ 和 $L_V(0)$ 的广义特征空间，即 $\mathcal{D}$ 中的对象既是广义 U-模，也是广义 V-模。
- 若 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，则 $M \otimes W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。
- $\mathcal{U}$ 或 $\mathcal{V}$ 中任一对象的共形权都包含在 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$的有限多个陪集中。
- 若 $\mathcal{Y}$是一个类型为 $\binom{X}{M_1\ M_2}$ 的 U-模交织算子，其中 M_1、$M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，则 Im $\mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$。类似地，若 $\mathcal{Y}$是一个类型为 $\binom{X}{W_1\ W_2}$ 的 V-模交织算子，其中 W_1、$W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 且 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，则 Im $\mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。

假设4.1 中的第三个假设保证，对于任意 U-模交织算子 $\mathcal{Y}_U$，其类型为 $\binom{M_3}{M_1\ M_2}$，以及任意 V-模交织算子 $\mathcal{Y}_V$，其类型为 $\binom{W_3}{W_1\ W_2}$，其中 $M_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $W_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，对于 $i = 1$、2、3，有

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_U \otimes \mathcal{Y}_V : (M_1 \otimes W_1) \otimes (M_2 \otimes W_2) &\to (M_3 \otimes W_3)[\log x]\{x\} \\ (m_1 \otimes w_1) \otimes (m_2 \otimes w_2) &\mapsto \mathcal{Y}_U(m_1, x)m_2 \otimes \mathcal{Y}_V(w_1, x)w_2 \end{aligned}$$

是一个定义良好的线性映射，满足下截断条件，并且还是一个 $U \otimes V$-模交织算子，其类型为 $\binom{M_3 \otimes W_3}{M_1 \otimes W_1\ M_2 \otimes W_2}$；参见 [ADL，第 2.2] 节。特别地，如果 $(M_1 \boxtimes_U M_2, \mathcal{Y}_{M_1,\ M_2})$ 是 $\mathcal{U}$ 中 M_1 和 M_2 的融合积，并且 $(W_1 \boxtimes_V W_2, \mathcal{Y}_{W_1,\ W_2})$ 是 $\mathcal{V}$ 中 W_1 和 W_2 的融合积，那么

$$\mathcal{Y}_{M_1,M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2} : (M_1 \otimes W_1) \otimes (M_2 \otimes W_2) \longrightarrow (M_1 \boxtimes_U M_2) \otimes (W_1 \boxtimes_V W_2)[\log x]\{x\}$$

是一个 $U \otimes V$-模交织算子，其中这三个 $U \otimes V$-模都是 $\mathcal{D}$ 的对象。

我们将证明 $\mathcal{Y}_{M_1,M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2}$ 是一个融合积交织算子。为此，我们需要一个引理，它是 [DL 命题 13.18] 和 [ADL 命题 2.11] 的一个版本；其证明方法与 [McR2 引理 B.1] 相同。在引理的陈述中，$X_{[h]}$ 表示弱 $U \otimes V$-模 X 中特征值为 h 的广义 $L_V(0)$-特征子空间，其中该模可分解为广义 $L_V(0)$-特征子空间；P_h 表示相对于 X 的广义 $L_V(0)$-特征子空间分解到 $X_{[h]}$ 上的投影。由于 U 和 V 在弱 $U \otimes V$-模上的作用彼此对易，每个 $X_{[h]}$ 都是 X 的弱 U-子模。

引理 4.2. 设 M_1 和 M_2 是弱 U-模，W_1 和 W_2 是广义 V-模，且 X 是一个可分解为广义 $L_V(0)$-特征子空间的弱 $U \otimes V$-模。如果 $\mathcal{Y}$ 是一个类型为 $\binom{X}{M_1 \otimes W_1\ M_2 \otimes W_2}$ 的$U \otimes V$-模交织算子，那么对于 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$、$h \in \mathbb{C}$，

$$\mathcal{Y}^{(h)}_{w_1,w_2} = x^{-L_V(0)} P_h \mathcal{Y}(\cdot \otimes x^{L_V(0)} w_1, x)(\cdot \otimes x^{L_V(0)} w_2)$$

是一个类型为 $\binom{X_{[h]}}{M_1\ M_2}$ 的弱 U-模交织算子。

利用这一引理，我们现在证明本小节的主要结果，它推广了[Lin，引理 2。16]，[CKLR，命题 3。3]，和 [CKM2，定理5.2(1)]：

定理 4.3。在假设 *4.1*下，设 $(M_1 \boxtimes_U M_2, \mathcal{Y}_{M_1,\ M_2})$ 是 $\mathcal{U}$ 中 M_1和 M_2 的融合积，且 $(W_1 \boxtimes_V W_2, \mathcal{Y}_{W_1,\ W_2})$ 是 $\mathcal{V}$ 中 W_1 和 W_2 的融合积。那么

$$((M_1 \boxtimes_U M_2) \otimes (W_1 \boxtimes_V W_2), \mathcal{Y}_{M_1,M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2})$$

是 $\mathcal{D}$ 中 $M_1 \otimes W_1$ 和 $M_2 \otimes W_2$ 的融合积。

证明。我们需要证明，对于任意 $U \otimes V$-模型交织算子 $\mathcal{Y}$ of type$\binom{X}{M_1 \otimes W_1\ M_2 \otimes W_2}$ where $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，存在唯一的 $U \otimes V$-模映射

$$F : (M_1 \boxtimes_U M_2) \otimes (W_1 \boxtimes_V W_2) \longrightarrow X$$

使得 $F \circ (\mathcal{Y}_{M_1,\ M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,\ W_2}) = \mathcal{Y}$。对于任意这样的 $\mathcal{Y}$，以及任意 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$、$h \in \mathbb{C}$，考虑交织算子 $\mathcal{Y}^{(h)}_{w_1,\ w_2}$ 其类型为 $\binom{X_{[h]}}{M_1\ M_2}$，来自该引理。由于$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，假设 4.1 蕴含 Im $\mathcal{Y}^{(h)}_{w_1,\ w_2} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$。因此，根据 $\mathcal{U}$中融合积的泛性质，存在唯一的 U-模映射

$$f^{(h)}_{w_1,w_2} : M_1 \boxtimes_U M_2 \longrightarrow X_{[h]}$$

使得 $f^{(h)}_{w_1,\ w_2} \circ \mathcal{Y}_{M_1,\ M_2} = \mathcal{Y}^{(h)}_{w_1,\ w_2}$。映射 $(w_1, w_2) \mapsto f_{(h)w_1,\ w_2}$是双线性的，因此对于任意 $m \in M_1 \boxtimes_U M_2$，存在一个线性映射

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_m : W_1 \otimes W_2 &\to X[\log x]\{x\} \\ w_1 \otimes w_2 &\mapsto \sum_{h \in \mathbb{C}} x^{L_V(0)} f^{(h)}_{x^{-L_V(0)}w_1, x^{-L_V(0)}w_2}(m), \end{aligned}$$

其中对于齐次的 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$,

$$f^{(h)}_{x^{-L_V(0)}w_1, x^{-L_V(0)}w_2} = x^{-\mathrm{wt}_V w_1 - \mathrm{wt}_V w_2} \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{j+k}}{j!k!} (\log x)^{j+k} f^{(h)}_{L_V^{nil}(0)^j w_1, L_V^{nil}(0)^k w_2},$$

且 $L_V^{nil}(0)$ 表示作用在广义 V-模上的 $L_V(0)$ 的局部幂零部分 e.

我们断言，对于任意 $m \in M_1 \boxtimes_U M_2$，$\mathcal{Y}_m$ 是一个类型为 $\binom{X}{W_1\ W_2}$ 的 V-模交织算子。为证明这一点，我们可以取 m 为 $\mathcal{Y}_{M_1}$ 中 $y^h(\log y)^0$ 的系数，其中 $M_2(m_1, y)m_2$ 对某些 $h \in \mathbb{C}$ 和齐次 $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ 而言成立；根据[MY1，引理 2.2]，由于 $\mathcal{Y}_{M_1,M_2}$ 是满射，这些系数张成 $M_1 \boxtimes_U M_2$。因此，$\mathcal{Y}_m(w_1, x)w_2$ 是以下表达式的一个系数

$$\begin{aligned} &\sum_{h \in \mathbb{C}} x^{L_V(0)} f^{(h)}_{x^{-L_V(0)}w_1, x^{-L_V(0)}w_2}(\mathcal{Y}_{M_1,M_2}(m_1, y)m_2) \\ &\quad = \sum_{h \in \mathbb{C}} x^{L_V(0)} \mathcal{Y}^{(h)}_{x^{-L_V(0)}w_1, x^{-L_V(0)}w_2}(m_1, y)m_2 \\ &\quad = \sum_{h \in \mathbb{C}} \left(\frac{x}{y}\right)^{L_V(0)} P_h \mathcal{Y}\left(m_1 \otimes \left(\frac{x}{y}\right)^{-L_V(0)} w_1, y\right)\left(m_2 \otimes \left(\frac{x}{y}\right)^{-L_V(0)} w_2\right) \\ &\quad = \sum_{h \in \mathbb{C}} x^{L_V(0)} P_h y^{L_U(0)} \mathcal{Y}\left(y^{-L_U(0)} m_1 \otimes x^{-L_V(0)} w_1, 1\right)(y^{-L_U(0)} m_2 \otimes x^{-L_V(0)} w_2) \\ &\quad = x^{L_V(0)} y^{L_U(0)} \mathcal{Y}\left(y^{-L_U(0)} m_1 \otimes x^{-L_V(0)} w_1, 1\right)(y^{-L_U(0)} m_2 \otimes x^{-L_V(0)} w_2) \\ &\quad = \left(\frac{y}{x}\right)^{L_U(0)} x^{L(0)} \mathcal{Y}\left(y^{-L_U(0)} m_1 \otimes x^{-L_V(0)} w_1, 1\right)(y^{-L_U(0)} m_2 \otimes x^{-L_V(0)} w_2) \\ &\quad = \left(\frac{x}{y}\right)^{-L_U(0)} \mathcal{Y}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{L_U(0)} m_1 \otimes w_1, x\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{L_U(0)} m_2 \otimes w_2\right), \end{aligned}$$

利用 L的 (0)-共轭性质 [HLZ2，命题 3.36(b)]，其中交织算子为 $\mathcal{Y}$。现在我们提取 $y^{\eta-\mathrm{wt}\, m_1-\mathrm{wt}\, m_2}(\log\, y)^0$, 的系数，也就是说，我们取

$$m = (m_1)^{\mathcal{Y}_{M_1,M_2}}_{\mathrm{wt}_U\, m_1+\mathrm{wt}_U\, m_2-\eta-1;0} m_2$$

对于任意的 $\eta \in \mathbb{C}$。由于 $\mathrm{wt}_U\, m = \eta$以及 $f_{(h),\ w_1,\ w_2}$对于任意的$w_1 \in W_1$、 $w_2 \in W_2$和 $h \in \mathbb{C}$都是一个 U-模同态，根据 $\mathcal{Y}_m$ 的定义，$\mathrm{Im}\, \mathcal{Y}_m \subseteq X^{[\eta]}$，其中 $X^{[\eta]}$是 X的广义 L_U(0)-特征子空间，对应的特征值为 η。令 $P^\eta\colon X \to X^{[\eta]}$ 表示关于 X的广义 L_U(0)-特征空间分解的投影。于是可知， $\mathcal{Y}_m(w_1,x)w_2$ 是 $\log\, y$ 中的常数项

$$e^{L_U^{nil}(0)\log y} x^{-L_U(0)} P^\eta \mathcal{Y}(x^{L_U(0)} e^{-L_U^{nil}(0)\log y} m_1 \otimes w_1, x)(x^{L_U(0)} e^{-L_U^{nil}(0)\log y} m_2 \otimes w_2).$$

也就是说，

$$\mathcal{Y}_m(w_1,x)w_2 = x^{-L_U(0)} P^\eta \mathcal{Y}(x^{L_U(0)} m_1 \otimes w_1, x)(x^{L_U(0)} m_2 \otimes w_2),$$

这是一个 V-模交织算子，其类型为 $\binom{X^{[\eta]}}{W_1\, W_2}$，根据引理 4.2，其中$U$ 和 V 的角色互换。

由于每个 $\mathcal{Y}_m$ 都是一个交织算子，根据假设，其在 X 中的像是 $\mathcal{V}$的一个对象。因此，对于每个 $m \in M_1 \boxtimes_U M_2$，存在唯一的 V-模同态

$$f_m : W_1 \boxtimes_V W_2 \longrightarrow X$$

使得 $f_m \circ \mathcal{Y}_{W_1,\ W_2} = \mathcal{Y}_m$。由于 $\mathcal{Y}_m$关于 m是线性的，因此 f_m也是线性的，于是现在可以定义

$$F : (M_1 \boxtimes_U M_2) \otimes (W_1 \boxtimes_V W_2) \longrightarrow X$$

by

$$F(m \otimes w) = f_m(w)$$

对于 $m \in M_1 \boxtimes_U M_2$ 和 $w \in W_1 \boxtimes_V W_2$。根据定义，该映射是一个 V-模同态，但我们需要验证它同时也是一个 U-模同态。由于 $\mathcal{Y}_{W_1,\ W_2}$是类型为 $\binom{W_1 \boxtimes_V W_2}{W_1\, W_2}$的满射交织算子，因此只需证明

$$u_n F(m \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,y)w_2) = F(u_n m \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,y)w_2)$$

对于 $u \in U$、 $n \in \mathbb{Z}$、 $m \in M_1 \boxtimes_U M_2$、 $w_1 \in W_1$和 $w_2 \in W_2$。事实上，

$$\begin{aligned} u_n F(m \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,y)w_2) &= u_n f_m(\mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,y)w_2) = u_n \mathcal{Y}_m(w_1,y)w_2 \\ &= \sum_{h\in\mathbb{C}} u_n y^{L_V(0)} f^{(h)}_{y^{-L_V(0)}w_1,\, y^{-L_V(0)}w_2}(m) = \sum_{h\in\mathbb{C}} y^{L_V(0)} f^{(h)}_{y^{-L_V(0)}w_1,\, y^{-L_V(0)}w_2}(u_n m) \\ &= \mathcal{Y}_{u_n m}(w_1,y)w_2 = f_{u_n m}(\mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,y)w_2) = F(u_n m \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,y)w_2), \end{aligned}$$

正如所要求的。

最后，我们需要证明 $F_{\mathcal{Y}} \circ (\mathcal{Y}_{M_1,\ M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,\ W_2}) = \mathcal{Y}$。对于 $m_1 \in M_1$、 $w_1 \in W_1$、$m_2 \in M_2$ 和 $w_2 \in W_2$，我们计算

$$\begin{aligned} &F\left((\mathcal{Y}_{M_1,M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2})(m_1 \otimes w_1, x)(m_2 \otimes w_2)\right) \\ &\quad = F(\mathcal{Y}_{M_1,M_2}(m_1,x)m_2 \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,x)w_2) = f_{\mathcal{Y}_{M_1,M_2}(m_1,x)m_2}(\mathcal{Y}_{W_1,W_2}(w_1,x)w_2) \\ &\quad = \sum_{h\in\mathbb{C}} x^{L_V(0)} f^{(h)}_{x^{-L_V(0)}w_1,\, x^{-L_V(0)}w_2}(\mathcal{Y}_{M_1,M_2}(m_1,x)m_2) \\ &\quad = \sum_{h\in\mathbb{C}} x^{L_V(0)} \mathcal{Y}^{(h)}_{x^{-L_V(0)}w_1,\, x^{-L_V(0)}w_2}(m_1,x)m_2 = \mathcal{Y}(m_1 \otimes w_1, x)(m_2 \otimes w_2), \end{aligned}$$

根据定义。这表明所需的 F 存在，而其唯一性是因为 $\mathcal{Y}_{M_1,\ M_2}\otimes\mathcal{Y}_{W_1,\ W_2}$ 是一个满射交织算子，这一点的证明与 [CKM2，定理 5 中的证明完全相同。2]。□

上述定理意味着，如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中存在融合积，那么 $\mathcal{D}$ 中的向量空间张量积模也存在融合积。我们希望将融合积的存在性推广到 $\mathcal{D}$ 的更一般对象。首先，假设 $\mathcal{D}$ 对有限~直和封闭，并定义 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{D}$ 的全子范畴，该子范畴由广义 $U\otimes V$-模 $M\otimes W$ 的有限直和组成，其中 $M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 且 $W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。根据定理 4.3~和 [HLZ3，命题 4.24]，，如果 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 都对融合积封闭，则 $\mathcal{D}$ 中的每一对对象在 $\mathcal{D}$ 中都有一个融合积。事实上，存在一个自然同构

$$\left(\bigoplus_{i_1\in I_1}M_{i_1}\otimes W_{i_1}\right)\boxtimes\left(\bigoplus_{i_2\in I_2}M_{i_2}\otimes W_{i_2}\right)\cong\bigoplus_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2}(M_{i_1}\boxtimes_U M_{i_2})\otimes(W_{i_1}\boxtimes_V W_{i_2})$$

在这些假设下。为了为 $\mathcal{D}$ 中的所有对象对获得融合积，我们现在施加一些额外条件：

假设 4.4。范畴 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{D}$ 满足：

- $\mathcal{U}$（或 $\mathcal{V}$）中的每一对对象在 $\mathcal{U}$（或 $\mathcal{V}$）中都有融合积。
- 范畴 $\mathcal{D}$ 对有限直和和余核封闭，并且 $\mathcal{D}$ 中的每个对象~都同构于 $\mathcal{D}$ 中某个态射的余核。

~在此假设下，$\mathcal{D}$ 中的对象存在融合积，而且我们也可以对 $\mathcal{D}$中的态射取融合积。也就是说，对于 $\mathcal{D}$中的态射 $f_1:P_1\to Q_1$ 和 $f_2:P_2\to Q_2$，$f_1\boxtimes f_2:\ P_1\boxtimes P_2\to Q_1\boxtimes Q_2$ 是满足下述条件的唯一态射

$$(f_1\boxtimes f_2)\circ\mathcal{Y}_{P_1,P_2}=\mathcal{Y}_{Q_1,Q_2}\circ(f_1\otimes f_2),\tag{4.1}$$

由融合积的泛性质（$P_1\boxtimes P_2$，$\mathcal{Y}_{P_1,\ P_2}$）诱导，如（2.10）所示。

定理 4.5。 在假设 *4.1* 和 *4.4*下，$\mathcal{D}$ 中的每一对对象在 $\mathcal{D}$中都有融合积。

证明。 设 X_1，$X_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。我们已经知道，当 $X_1\boxtimes X_2$，$\mathcal{Y}_{X_1,\ X_2}$时，(X_1，$X_2\in$~$\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 存在。一般而言，根据假设4.4，存在右正合序列

$$Q_i\xrightarrow{q_i}P_i\xrightarrow{p_i}X_i\longrightarrow 0$$

对于 i ~$=1$，满足 $P_i,Q_i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。于是我们将 $X_1\boxtimes X_2$ 定义为.....的余核 f

$$(q_1\boxtimes\mathrm{Id}_{P_2})\circ\pi_1+(\mathrm{Id}_{P_1}\boxtimes q_2)\circ\pi_2:(Q_1\boxtimes P_2)\oplus(P_1\boxtimes Q_2)\longrightarrow P_1\boxtimes P_2,\tag{4.2}$$

其中，π_1 和 π_2 是到第一和第二个直和项的投影。令 $p:\ P_1\boxtimes P_2\to X_1\boxtimes X_2$ 为满射余核态射。现在考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
(Q_1\otimes P_2)\oplus(P_1\otimes Q_2) & \xrightarrow{F_\otimes} & P_1\otimes P_2 & \xrightarrow{p_1\otimes p_2} & X_1\otimes X_2 & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{Y}_{Q_1,P_2}\oplus\mathcal{Y}_{P_1,Q_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Y}_{P_1,P_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \exists!\,\mathcal{Y}_{X_1,X_2}} & & \\
((Q_1\boxtimes P_2)\oplus(P_1\boxtimes Q_2))[\log x]\{x\} & \xrightarrow{F_\boxtimes} & (P_1\boxtimes P_2)[\log x]\{x\} & \xrightarrow{p} & (X_1\boxtimes X_2)[\log x]\{x\} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中， $F_{\boxtimes}$ 是态射（4.2），而 $F_{\otimes}$ 是将（4.2）中的所有 $\boxtimes$ 替换为 $\otimes$后得到的线性映射。图表的两行均为右正合，且由（4.1）可知左侧方块可交换。因此，唯一的线性映射

$$\mathcal{Y}_{X_1,X_2} : X_1 \otimes X_2 \longrightarrow (X_1 \boxtimes X_2)[\log x]\{x\}$$

满足

$$p \circ \mathcal{Y}_{P_1,P_2} = \mathcal{Y}_{X_1,X_2} \circ (p_1 \otimes p_2)$$

由余核的泛性质 $(X_1 \otimes X_2, p_1 \otimes p_2)$ 诱导。由于 $\mathcal{Y}_{P_1,\ P_2}$ 满足下截断、Jacobi 恒等式和 $L(-1)$ 导数性质，并且由于 p_1、 p_2 和 p 是 $U \otimes V$- 模同态，可以直接证明它是类型为 $\binom{X_1 \boxtimes X_2}{X_1\ X_2}$ 的交织算子 $\mathcal{Y}_{X_1,\ X_2}$。

我们证明 $(X_1 \boxtimes X_2, \mathcal{Y}_{X_1,\ X_2})$ 满足 $\mathcal{D}$ 中融合积的泛性质。首先，由于 $\mathcal{D}$ 对余核封闭， $X_1 \boxtimes X_2$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个对象。现在，如果 $\mathcal{Y}$ 是类型为 $\binom{X_3}{X_1\ X_2}$ 的交织算子，其中 $X_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，那么 $\mathcal{Y} \circ (p_1 \otimes p_2)$ 是类型为 $\binom{X_3}{P_1\ P_2}$ 的交织算子，因此存在唯一的态射 $G\colon P_1 \boxtimes P_2 \to X_3$，使得

$$G \circ \mathcal{Y}_{P_1,P_2} = \mathcal{Y} \circ (p_1 \otimes p_2).$$

于是利用上述交换图，

$$G \circ F_{\boxtimes} \circ (\mathcal{Y}_{Q_1,P_2} \oplus \mathcal{Y}_{P_1,Q_2}) = G \circ \mathcal{Y}_{P_1,P_2} \circ F_{\otimes} = \mathcal{Y} \circ (p_1 \otimes p_2) \circ F_{\otimes} = 0.$$

由于 $\mathcal{Y}_{Q_1,\ P_2} \oplus \mathcal{Y}_{P_1,\ Q_2}$ 是满射，因此可推出 $G \circ F_{\boxtimes} = 0$ 也是满射。于是，根据余核的泛性质（$X_1 \boxtimes X_2$， p），存在唯一的映射 $F\colon\ X_1 \boxtimes X_2 \to X_3$，使得 $F \circ p = G$。现在我们得到

$$F \circ \mathcal{Y}_{X_1,X_2} \circ (p_1 \otimes p_2) = F \circ p \circ \mathcal{Y}_{P_1,P_2} = G \circ \mathcal{Y}_{P_1,P_2} = \mathcal{Y} \circ (p_1 \otimes p_2).$$

由于 $p_1 \otimes p_2$ 是满射，因此可推出 $F \circ \mathcal{Y}_{X_1,\ X_2} = \mathcal{Y}$。此外， F 是具有此性质的唯一映射，因为 $\mathcal{Y}_{X_1,\ X_2}$ 是满射；这由 p 的满射性以及 $\mathcal{Y}_{P_1,\ P_2}$ 可得。这证明了 X_1 和 X_2 在 $\mathcal{D}$ 中具有融合积。□

现在我们讨论满足假设 4.1 和 4.4 的范畴 $\mathcal{U}$、 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{D}$。设 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 分别为 C_1-余有限分次限制广义 U-模和 V-模的范畴。根据 [Mi2, 主要定理], ， $\mathcal{C}_U^1$ 或 $\mathcal{C}_V^1$ 中的每一对对象都有一个 C_1-余有限融合积。一般而言， $\mathcal{C}_U^1$ 或 $\mathcal{C}_V^1$ 可能不是局部有限阿贝尔范畴，因为尚不清楚这些范畴是否对取子模封闭，也不清楚其中的所有对象是否具有有限长度（不过根据定理 2.7，如果 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 对取对偶模封闭，则这些性质成立）。因此，我们限制于局部有限阿贝尔子范畴 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}_V^1$，然后按照定义 3.1 取 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$。

推论 4.6. 若 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}_V^1$ 是对商对象和融合积封闭的局部有限阿贝尔子范畴，则 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中的每一对对象在 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中都有融合积。特别地，对于任意 $M_1, M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $W_1, W_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$,

$$((M_1 \boxtimes_U M_2) \otimes (W_1 \boxtimes_V W_2), \mathcal{Y}_{M_1,M_2} \otimes \mathcal{Y}_{W_1,W_2})$$

是 $M_1 \otimes W_1$ 和 $M_2 \otimes W_2$ 在 $\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 中的一个融合积。

证明。 对于假设 4.1中的第一个条件，任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$ 都分解为广义 $L_U(0)$-特征子空间，因为 X 是 U-子模的并，而这些子模都是 $\mathcal{U}$中的对象 $\mathcal{U}$，且 U中的所有对象都是广义 X-模。类似地，L_V也分解为广义 (0)-特征子空间。假设 4.1 中的第二个条件由命题 3.3得出，并且

第三个条件成立，因为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的所有对象都具有有限长度。对于第四个条件，设 $\mathcal{Y}$ 是一个类型为 $\binom{X}{M_1\ M_2}$ 的 U-模交织算子，其中 M_1、$M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$，且 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$。由于 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_U^1$，$\mathrm{Im}\ \mathcal{Y}$ 根据 [CMY1，推论 2.12]（这是对 [Mi2，关键定理] 的略微加强）是 C_1-余有限的。因此存在一个满态射 $M_1 \boxtimes_U M_2 \to \mathrm{Im}\ \mathcal{Y}$，其中 $M_1 \boxtimes_U M_2$ 是 $\mathcal{C}_U^1$ 中 M_1 与 M_2 的融合积。由于 $\mathcal{U}$ 对融合积和商对象封闭，$\mathrm{Im}\ \mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的一个对象。因此，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 满足假设 4.1 的第四个条件；同样，$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 也满足该条件。因此，该推论的第二个结论由定理 4.3 得出。

现在我们假设假设 4.4中的第一个条件成立，而第二个条件由推论 3.4保证。因此，该推论的第一个结论由定理 4.5推出。□

4.2. 编织张量范畴结构。我们继续假设假设 4.1 成立，并且还假设广义 $U \otimes V$-模范畴 $\mathcal{D}$ 对有限直和封闭，且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 都具有 [HLZ1]-[HLZ8] 的顶点代数编织幺半群结构。特别地，$U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，因此 $U \otimes V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。我们将首先证明，由 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$、$W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 的模 $M \otimes W$ 的有限直和构成的 $\mathbb{C}$-线性加性子范畴 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ 具有 [HLZ1]-[HLZ8] 的编织幺半群结构。然后我们将证明，在附加条件下，$\mathcal{D}$ 也是一个编织幺半群（或张量）范畴。

首先，根据定理4.3 和 [HLZ3，命题 4。24]，$\mathcal{D}$ 在融合积下闭合。因此，我们自动得到 $\mathcal{D}$中态射的融合积、由（2.10）、（2.11）和（2.12）分别给出的自然单位同构和自然编织同构。在特别地，对于对象 $X_1 = \bigoplus_{i_1 \in I_1} M_{i_1} \otimes W_{i_1}$ 和 $X_2 = \bigoplus_{i_2 \in I_2} M_{i_2} \otimes W_{i_2}$ 属于 $\mathcal{D}$的情形，我们取

$$X_1 \boxtimes X_2 = \bigoplus_{(i_1,i_2) \in I_1 \times I_2} (M_{i_1} \boxtimes_U M_{i_2}) \otimes (W_{i_1} \boxtimes_V W_{i_2}) \tag{4.3}$$

带有融合积交织算子 $\mathcal{Y}_{X_1,\ X_2} = \sum_{(i_1,\ i_2) \in I_1 \times I_2} \mathcal{Y}_{X_1}^{(i_1,i_2)}{}_{,\ X_2}$，其中 $\mathcal{Y}^{(i_1,i_2)}{}_{X_1,\ X_2}$ 是复合

$$\begin{aligned} X_1 \otimes X_2 &\xrightarrow{\pi_{X_1}^{(i_1)} \otimes \pi_{X_2}^{(i_2)}} (M_{i_1} \otimes W_{i_1}) \otimes (M_{i_2} \otimes W_{i_2}) \\ &\xrightarrow{\mathcal{Y}_{M_{i_1},M_{i_2}} \otimes \mathcal{Y}_{W_{i_1},W_{i_2}}} ((M_{i_1} \boxtimes_U M_{i_2}) \otimes (W_{i_1} \boxtimes_V W_{i_2}))\,[\log x]\{x\} \\ &\xrightarrow{q_{X_1 \boxtimes X_2}^{(i_1,i_2)}} (X_1 \boxtimes X_2)[\log x]\{x\}; \end{aligned}$$

这里的 π's 和 q's 是显然的投影和包含。

在对融合积进行这种识别后，（2.10），（2.11）和（2.12），以及向量空间张量积模上的 $e^{xL(-1)} = e^{xL_U}{}_{(-1)} \otimes e^{xL_V}{}_{(-1)}$，可以直接看出，$\mathcal{D}$ 中的态射的融合积、单位同构和编织同构如下所示：

- 对于 $\{f_{i_1}\}_{i_1 \in I_1}$、$\{f_{i_2}\}_{i_2 \in I_2}$中的态射以及 $\{g_{i_1}\}_{i_1 \in I_2}$、$\{g_{i_2}\}_{i_2 \in I_2}$中的态射，

$$\left(\bigoplus_{i_1 \in I_1} f_{i_1} \otimes g_{i_1}\right) \boxtimes \left(\bigoplus_{i_2 \in I_2} f_{i_2} \otimes g_{i_2}\right) = \bigoplus_{(i_1,i_2) \in I_1 \times I_2} (f_{i_1} \boxtimes_U f_{i_2}) \otimes (g_{i_1} \boxtimes_V g_{i_2}). \tag{4.4}$$

- 对于 $\mathcal{D}$中的任意对象 $X = \bigoplus_{i\in I} M_i \otimes W_{\tilde{r}}$，

$$l_X = \bigoplus_{i\in I} l^U_{M_i} \otimes l^V_{W_i}, \qquad r_X = \bigoplus_{i\in I} r^U_{M_i} \otimes r^V_{W_i}, \tag{4.5}$$

其中，$l^U_{M_i}$、$r^U_{M_i}$ 和 $l^V_{W_i}$、$r^V_{W_i}$ 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$中的单位同构。

- 对于 $\mathcal{D}$中的任意对象 $X_1 = \bigoplus_{i_1\in I_1} M_{i_1} \otimes W_{i_1}$ 和 $X_2 = \bigoplus_{i_2\in I_2} M_{i_2} \otimes W_{i_2}$，

$$\mathcal{R}_{X_1,X_2} = \bigoplus_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2} \mathcal{R}^U_{M_{i_1},M_{i_2}} \otimes \mathcal{R}^V_{W_{i_1},W_{i_2}}, \tag{4.6}$$

其中 $\mathcal{R}^U_{M_{i_1},\ M_{i_2}}$ 和 $\mathcal{R}^V_{W_{i_1},\ W_{i_2}}$ 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$中的编织同构。我们可以类似地定义 $\mathcal{D}$ 中的结合子同构。如果 $X_1 = \bigoplus_{i_1\in I_1} M_{i_1} \otimes W_{i_1}$、$X_2 = \bigoplus_{i_2\in I_2} M_{i_2} \otimes W_{i_2}$和 $X_3 = \bigoplus_{i_3\in I_3} M_{i_3} \otimes W_{i_3}$ 是 $\mathcal{D}$中的对象，那么

$$X_1 \boxtimes (X_2 \boxtimes X_3) = \bigoplus_{(i_1,i_2,i_3)\in I_1\times I_2\times I_3} (M_{i_1} \boxtimes_U (M_{i_2} \boxtimes_U M_{i_3})) \otimes (W_{i_1} \boxtimes_V (W_{i_2} \boxtimes_V W_{i_3})),$$

$$(X_1 \boxtimes X_2) \boxtimes X_3 = \bigoplus_{(i_1,i_2,i_3)\in I_1\times I_2\times I_3} ((M_{i_1} \boxtimes_U M_{i_2}) \boxtimes_U M_{i_3}) \otimes ((W_{i_1} \boxtimes_V W_{i_2}) \boxtimes_V W_{i_3}),$$

因此我们可以定义

$$\mathcal{A}_{X_1,X_2,X_3} = \bigoplus_{(i_1,i_2,i_3)\in I_1\times I_2\times I_3} \mathcal{A}^U_{M_{i_1},M_{i_2},M_{i_3}} \otimes \mathcal{A}^V_{W_{i_1},W_{i_2},W_{i_3}}, \tag{4.7}$$

其中 $\mathcal{A}^U_{M_{i_1},\ M_{i_2},\ M_{i_3}}$ 和 $\mathcal{A}^V_{W_{i_1},\ W_{i_2},\ W_{i_3}}$ 分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$中的结合子同构。

定理 4.7. 在假设 4.1 下，再假设 $\mathcal{D}$ 在有限直和下封闭，且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 具有 [HLZ8] 的编织幺半范畴结构。则 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ 这一 $\mathbb{C}$-线性加性全子范畴具有 [HLZ8]，的编织幺半范畴结构；其中，其对象是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中模的向量空间张量积的有限直和，融合积如 (4.3) 和 (4.4) 所示，单位同构为 (4.5)，编织同构为 (4.6)，结合子同构为 (4.7)。

证明。我们首先验证 $\mathcal{D}$ 中的结合子同构正是 [HLZ6、HLZ8]，中所规定的结合子同构，即它们满足（2.13）。为证明结合子同构（4.7）满足（2.13），任取（i_1、i_2、i_3）$\in I_1 \times I_2 \times I_3$ 以及任意的 $m_{i_1} \otimes w_{i_1} \in M_{i_1} \otimes W_{i_1} \subseteq X_1$、$m_{i_2} \otimes w_{i_2} \in M_{i_2} \otimes W_{i_2} \subseteq X_2$和 $m_{i_3} \otimes w_{i_3} \in M_{i_3} \otimes W_{i_3} \subseteq X_3$。则

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{A}_{X_1,X_2,X_3}}\left(\mathcal{Y}_{X_1,X_2\boxtimes X_3}(m_{i_1}\otimes w_{i_1}, r_1)\mathcal{Y}_{X_2,X_3}(m_{i_2}\otimes w_{i_2}, r_2)(m_{i_3}\otimes w_{i_3})\right)\\
&= \overline{\mathcal{A}_{X_1,X_2,X_3} \circ q^{(i_1,i_2,i_3)}_{X_1\boxtimes(X_2\boxtimes X_3)}}\Big(\mathcal{Y}_{M_{i_1},M_{i_2}\boxtimes_U M_{i_3}}(m_{i_1}, r_1)\mathcal{Y}_{M_{i_2},M_{i_3}}(m_{i_2}, r_2)m_{i_3}\otimes\\
&\qquad\qquad \otimes\mathcal{Y}_{W_{i_1},W_{i_2}\boxtimes_V W_{i_3}}(w_{i_1}, r_1)\mathcal{Y}_{W_{i_2},W_{i_3}}(w_{i_2}, r_2)w_{i_3}\Big)\\
&= \overline{q^{(i_1,i_2,i_3)}_{(X_1\boxtimes X_2)\boxtimes X_3}}\Big(\mathcal{Y}_{M_{i_1}\boxtimes_U M_{i_2},M_{i_3}}(\mathcal{Y}_{M_{i_1},M_{i_2}}(m_{i_1}, r_1 - r_2)m_{i_2}, r_2)m_{i_3}\otimes\\
&\qquad\qquad \otimes\mathcal{Y}_{W_{i_1}\boxtimes_V W_{i_2},W_{i_3}}(\mathcal{Y}_{W_{i_2},W_{i_3}}(w_{i_1}, r_1 - r_2)w_{i_2}, r_2)w_{i_3}\Big)\\
&= \mathcal{Y}_{X_1\boxtimes X_2,X_3}(\mathcal{Y}_{X_1,X_2}(m_{i_1}\otimes w_{i_1}, r_1 - r_2)(m_{i_2}\otimes w_{i_2}), r_2)(m_{i_3}\otimes w_{i_3})
\end{aligned}$$

对于满足 r_1、$r_2 \in \mathbb{R}_+$ 使得 $r_1 > r_2 > r_1 - r_2$ 的情形。特别地，上述所有交织算子的复合都绝对收敛，因为它们是收敛的张量积

~在 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的交织算子复合。因此 $\mathcal{D}$ 具有 [HLZ6、HLZ8], 中的顶点代数结合性同构，并且由（2.13）可直接证明这些结合子同构是自然的。

~我们还需要验证， $\mathcal{D}$ 配备融合积（4.3）和（4.4）、单位同构（4.5）、编织同构（4.6）以及结合子同构（4.7）后构成一个编织幺半范畴（事实上，它还具有 [HLZ8] 中的编织幺半范畴结构）。还需验证三角形、五边形和六边形恒等式。不过，由 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的相应恒等式，结合~中对结构同构的刻画 $\mathcal{D}$，这些恒等式可以直接得到。例如，对于三角形~恒等式，给定 $X_1=\bigoplus_{i_1\in I_1}M_{i_1}\otimes W_{i_1}$ 和 $X_2=\bigoplus_{i_2\in I_2}M_{i_2}\otimes W_{i_2}$ 中的 $\mathcal{D}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&(r_{X_1}\boxtimes \mathrm{Id}_{X_2})\circ \mathcal{A}_{X_1,U\otimes V,X_2}\\
&\quad=\Big(\bigoplus_{i_1\in I_1}(r^U_{M_{i_1}}\otimes r^V_{W_{i_1}})\boxtimes\bigoplus_{i_2\in I_2}(\mathrm{Id}_{M_{i_2}}\otimes \mathrm{Id}_{W_{i_2}})\Big)\circ\bigoplus_{(i_1',i_2')\in I_1\times I_2}\mathcal{A}^U_{M_{i_1'},U,M_{i_2'}}\otimes\mathcal{A}^V_{W_{i_1'},V,W_{i_2'}}\\
&\quad=\bigoplus_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2}(r^U_{M_{i_1}}\boxtimes_U \mathrm{Id}_{M_{i_2}})\circ\mathcal{A}^U_{M_{i_1},U,M_{i_2}}\otimes(r^V_{W_{i_1}}\boxtimes_V \mathrm{Id}_{W_{i_2}})\circ\mathcal{A}^V_{W_{i_1},V,W_{i_2}}\\
&\quad=\bigoplus_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2}(\mathrm{Id}_{M_{i_1}}\boxtimes_U l^U_{M_{i_2}})\otimes(\mathrm{Id}_{W_{i_1}}\boxtimes_V l^V_{W_{i_2}})\\
&\quad=\bigoplus_{i_1\in I_1}(\mathrm{Id}_{M_{i_1}}\otimes \mathrm{Id}_{W_{i_1}})\boxtimes\bigoplus_{i_2\in I_2}(l^U_{M_{i_2}}\otimes l^V_{W_{i_2}})=\mathrm{Id}_{X_1}\boxtimes l_{X_2}
\end{aligned}
$$

先使用（4.5）和（4.7），再使用（4.4），然后使用 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$中的三角形恒等式，接着再次使用（4.4），最后再次使用（4.5）。五边形和六边形恒等式可以类似地证明。□

为了扩展 ~从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}$的编织幺半范畴结构，我们重新施加假设4.4:

定理 4.8。 在假设 *4.1* 和 *4.4*下，若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 具有[HLZ8], 的编织幺半范畴结构，则 $\mathcal{D}$也具有该结构。

证明。 由定理 4.5， $\mathcal{D}$ 对融合积封闭，因此具有态射的融合积（如式（2.10）所示）、自然单位同构（如式（2.11）所示）以及自然编织同构（如式（2.12）所示）。我们仍需在 $\mathcal{D}$ 中构造满足三角形、五边形和六边形恒等式的自然结合性同构。

对于 X_1,X_2， $X_3\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，存在如下右正合序列（如定理 4.5的证明中所示）

$$Q_i\xrightarrow{q_i}P_i\xrightarrow{p_i}X_i\longrightarrow 0 \tag{4.8}$$

~对于 $i=1$、2、3，其中所有 P_i、$Q_i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。于是，三重张量积模构成如下图表:

$$
\begin{array}{ccccccc}
Q_{1(23)} & \xrightarrow{F} & P_1\boxtimes(P_2\boxtimes P_3) & \xrightarrow{p_1\boxtimes(p_2\boxtimes p_3)} & X_1\boxtimes(X_2\boxtimes X_3) & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}\oplus\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A}_{P_1,P_2,P_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \exists!\,\mathcal{A}_{X_1,X_2,X_3}} & & \\
Q_{(12)3} & \xrightarrow{G} & (P_1\boxtimes P_2)\boxtimes P_3 & \xrightarrow{(p_1\boxtimes p_2)\boxtimes p_3} & (X_1\boxtimes X_2)\boxtimes X_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Q_{1(23)}&=(Q_1\boxtimes(P_2\boxtimes P_3))\oplus(P_1\boxtimes(Q_2\boxtimes P_3))\oplus(P_1\boxtimes(P_2\boxtimes Q_3))\\
Q_{(12)3}&=((Q_1\boxtimes P_2)\boxtimes P_3)\oplus((P_1\boxtimes Q_2)\boxtimes P_3)\oplus((P_1\boxtimes P_2)\boxtimes Q_3)
\end{aligned}
$$

and

$$F = (q_1 \boxtimes (\mathrm{Id}_{P_2} \boxtimes \mathrm{Id}_{P_3})) \circ \pi_1 + (\mathrm{Id}_{P_1} \boxtimes (q_2 \boxtimes \mathrm{Id}_{P_3})) \circ \pi_2 + (\mathrm{Id}_{P_1} \boxtimes (\mathrm{Id}_{P_2} \boxtimes q_3)) \circ \pi_3,$$
$$G = ((q_1 \boxtimes \mathrm{Id}_{P_2}) \boxtimes \mathrm{Id}_{P_3}) \circ \pi_1 + ((\mathrm{Id}_{P_1} \boxtimes q_2) \boxtimes \mathrm{Id}_{P_3}) \circ \pi_2 + ((\mathrm{Id}_{P_1} \boxtimes \mathrm{Id}_{P_2}) \boxtimes q_3) \circ \pi_3$$

（ π指的是显然的投影）。通过反复应用引理 2.5，图表的各行均为右正合；由于 $\mathcal{D}$ 中的结合律~同构（来自定理 4.7）是自然的，图表的左方形交换。因此，根据余核的泛性质（$X_1 \boxtimes (X_2 \boxtimes X_3)$ $p_1 \boxtimes (p_2 \boxtimes p_3)$），$\mathcal{A}_{X_1}$、$X_2$、$X_3$的存在性和唯一性随之得到。此外，由于映射 p_1、p_2和 p_3 是满射，$\mathcal{A}_{X_1}$、X_2、X_3 满足（2.13）；并且对于所有 $p_1(b_1) \in X_1$、$p_2(b_2) \in X_2$以及 $p_3(b_3) \in X_3$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{A}_{X_1,X_2,X_3}}\,(\mathcal{Y}_{X_1,X_2\boxtimes X_3}(p_1(b_1),r_1)\mathcal{Y}_{X_2,X_3}(p_2(b_2),r_2)p_3(b_3)) \\
&\qquad = \overline{\mathcal{A}_{X_1,X_2,X_3} \circ (p_1 \boxtimes (p_2 \boxtimes p_3))}\,(\mathcal{Y}_{P_1,P_2\boxtimes P_3}(b_1,r_1)\mathcal{Y}_{P_2,P_3}(b_2,r_2)b_3) \\
&\qquad = \overline{((p_1 \boxtimes p_2) \boxtimes p_3) \circ \mathcal{A}_{P_1,P_2,P_3}}\,(\mathcal{Y}_{P_1,P_2\boxtimes P_3}(b_1,r_1)\mathcal{Y}_{P_2,P_3}(b_2,r_2)b_3) \\
&\qquad = \overline{((p_1 \boxtimes p_2) \boxtimes p_3)}\,(\mathcal{Y}_{P_1\boxtimes P_2,P_3}(\mathcal{Y}_{P_1,P_2}(b_1,r_1-r_2)b_2,r_2)b_3) \\
&\qquad = \mathcal{Y}_{X_1\boxtimes X_2,X_3}(\mathcal{Y}_{X_1,X_2}(p_1(b_1),r_1-r_2)p_2(b_2),r_2)p_3(b_3)
\end{aligned}$$

对于 r_1， $r_2 \in \mathbb{R}_+$ 使得 $r_1 > r_2 > r_1 - r_2$。由（2.13）可直接得到，这些结合子同构在 $\mathcal{D}$ 中是自然的。

最后， $\mathcal{D}$ 中的单位同构、结合子同构和编织同构应满足三角恒等式、五边形恒等式和六边形恒等式。但这由4.7 定理~可直接得到，因为三角恒等式、五边形恒等式和六边形恒等式在 $\mathcal{D}$中成立。例如，为证明 X_1的三角恒等式， $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，固定如（4.8）中的右正合序列，并考虑：

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 \boxtimes P_2 & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{P_1}\boxtimes l_{P_2}^{-1}} & P_1 \boxtimes ((U\otimes V)\boxtimes P_2) & \xrightarrow{\mathcal{A}_{P_1,U\otimes V,P_2}} & (P_1 \boxtimes (U\otimes V)) \boxtimes P_2 & \xrightarrow{r_{P_1}\boxtimes \mathrm{Id}_{P_2}} & P_1 \boxtimes P_2 \\
\downarrow{\scriptstyle p_1\boxtimes p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_1\boxtimes(\mathrm{Id}_{U\otimes V}\boxtimes p_2)} & & \downarrow{\scriptstyle (p_1\boxtimes \mathrm{Id}_{U\otimes V})\boxtimes p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_1\boxtimes p_2} \\
X_1 \boxtimes X_2 & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{X_1}\boxtimes l_{X_2}^{-1}} & X_1 \boxtimes ((U\otimes V)\boxtimes X_2) & \xrightarrow{\mathcal{A}_{X_1,U\otimes V,X_2}} & (X_1 \boxtimes (U\otimes V)) \boxtimes X_2 & \xrightarrow{r_{X_1}\boxtimes \mathrm{Id}_{X_2}} & X_1 \boxtimes X_2
\end{array}$$

该图表由 $\mathcal{D}$中单位同构与结合子同构的自然性而交换，因此~ X_1的三角恒等式 X_2 由 $\mathcal{D}$ 中 P_1 P_2 的三角恒等式以及 $p_1\boxtimes p_2$的满射性得出。 $\mathcal{D}$ 中的五边形恒等式和六边形恒等式可以类似地证明。□

注 4.9. 在定理 4.8 的假设下，如果 $\mathcal{D}$ 是阿贝尔范畴，则它是编织张量范畴。此外， $\mathcal{D}$ 具有由 $e^{2\pi i L(0)}$ 给出的缎带扭结 θ。对于 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$，我们有 $\theta_{M\otimes W} = e^{2\pi i L_U(0)} \otimes e^{2\pi i L_V(0)} = \theta_M \otimes \theta_W$。

4.3. 作为编织张量范畴的 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$。设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是由 U-模和 V-模构成的局部有限编织张量范畴。根据定理 3.15， $U\otimes V$-模范畴 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 的 Deligne 张量积，因此如第 2.2 节所述，它从 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 继承编织张量范畴结构。现在我们将使用定理 4.8 证明，在温和的附加条件下， $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 上的这一编织张量结构与由交织算子指定的 [HLZ1]-[HLZ 8] 的编织张量结构一致。与 [CKM2 相比，定理 5.5]，在此不要求 $\mathcal{U}$ 或 $\mathcal{V}$ 具有半单性。

我们将需要以下一般定理：该定理表明，如果一个函子在某个适当的幺半子范畴上是张量函子，那么它就具有张量函子的结构。尽管这一结果可能已为人所知，为了完整起见，我们在附录B中给出证明。

定理 4.10. 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 是具有右$\widetilde{}$正合融合积的（不一定是刚性的）张量范畴，$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的幺半子范畴，且 $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是一个右正合函子，并且 $\mathcal{G}=\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$ 是一个张量函子。还假设，对于任意 $X_1,X_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，存在一个阿贝尔全子范畴 $\mathcal{D}_{X_1,X_2}\subseteq\mathcal{D}$，它包含 X_1，X_2，并且有足够的$\widetilde{}$射影对象，使得 $\mathcal{D}_{X_1,X_2}$ 中的每个投射对象都是 $\mathcal{D}$ 的对象，并且对于 $i=1$，2，有 $\mathcal{D}_{X_i,X_i}\subseteq\mathcal{D}_{X_1,X_2}$。那么 $\mathcal{F}$ 也是一个张量函子。如果 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 还是编织的，且 $\mathcal{G}$ 是一个编织张量函子，那么 $\mathcal{F}$ 是编织的；如果 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 具有缎带扭结 $\widetilde{\theta}$，满足对于所有 $P\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，$\mathcal{G}(\theta_P)=\theta_{\mathcal{G}(P)}$，那么对于所有 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，$\mathcal{F}(\theta_X)=\theta_{\mathcal{F}(X)}$。

现在我们可以证明本文的一个主要结果：

定理 4.11。设 U 和 V 为顶点算子代数，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别为分次受限广义 U-模和 V-模的范畴。

（1）假设以下条件成立：

- 范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对子商及有限直和封闭，并且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的所有模都有有限长度。
- 范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 具有 [HLZ1]-[HLZ8]的顶点代数型辫张量范畴结构；特别地，$U\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $V\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。
- 若 $\mathcal{Y}$是一个 U-模交织算子，其类型为 $\binom{X}{M_1\ M_2}$，其中 $M_1,M_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$且 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$，则 Im $\mathcal{Y}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$。类似地，若 $\mathcal{Y}$是一个V-模交织算子，其类型为 $\binom{X}{W_1\ W_2}$，其中 $W_1,W_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$且$X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V}))$，则 Im $\mathcal{Y}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。于是，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$具有[HLZ1]-[HLZ8], 的编织张量范畴结构及缎带扭结，并且 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$与德利涅张量积 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 编织张量等价；后者配备从 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$继承而来的编织张量范畴结构及缎带扭结。

(2) 假设以下附加条件成立：

- 顶点算子代数 U 和 V 是自逆共轭的。
- 范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对偶模是闭的。
- 范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的所有简单模都是刚性的。则 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是一个具有对偶的编织带范畴，其对偶由对偶模给出。

证明。对于 (1)，假设 4.1 的前三个条件完全如推论 4.6 的证明中那样成立，假设 4.4 的两个条件也同样成立。我们假设了假设 4.1 中的第四个条件，因此根据定理 4.8，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 具有 [HLZ8] 的编织张量范畴结构。此外，根据定理 3.15，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})\cong\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$作为范畴等价，其德利涅张量积函子 $\otimes:\mathcal{U}\times\mathcal{V}\to\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 被认定为向量空间的张量积。因此，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 具有两种编织张量范畴结构：由交织算子刻画的 [HLZ8] 的顶点代数结构（我们将其融合积记为 $\boxtimes_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$），以及从 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 上的编织张量结构继承而来的德利涅张量积上的编织张量结构（我们将其融合积记为$\boxtimes_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}$）。我们需要证明这两种编织张量范畴结构是等价的。

首先，将（2.2）、（2.3）和（2.8）与（4.3）和（4.4）进行比较（并同时使用（2.4）以及命题 2.10，再结合 $\mathbb{C}$-双线性性，$\boxtimes_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$ 和 $\boxtimes_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}$），可知存在一个自然同构

$$X_1\boxtimes_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}X_2\xrightarrow{\cong}X_1\boxtimes_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}X_2$$

~ ~当 $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 时，其中 $\mathcal{D}$ 是证明定理 3.15 时定义的子范畴。此外，将 (2.5)、(2.6) 和 (2.7) 与 (4.5)、(4.7) 和 (4.6) 进行比较，并利用 $\boxtimes_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$ 和 $\boxtimes_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}$ 的 $\mathbb{C}$-双线性性以及自然性，这个自然同构将 $\boxtimes_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$ 的单位、结合律和编织同构与 $\boxtimes_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}$的对应结构相对应。因此，~$\mathrm{Id}_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$ 限制在幺半子范畴 $\mathcal{D}$ 上后，构成了 $\mathcal{D}$上两种编织幺半结构之间的编织张量~等价。为验证此情形下定理 4.10 的剩余假设，对 $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$ 定义 $\mathcal{D}_{X_1,X_2}$，其中取自 (3.5) 的 $X_2 = X_3$ 。该范畴有充分多的射影对象，并且其所有射影~对象都包含在 $\mathcal{D}$中，这由定理 3.11 得出。定理 4.10 现表明，$\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})}$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 与 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$之间的编织张量等价；此外，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 和 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 上的缎带扭结相同，因为

$$\theta_{M\otimes W} = e^{2\pi i L(0)} = e^{2\pi i L_U(0)} \otimes e^{2\pi i L_V(0)} = \theta_M \otimes \theta_W$$

对于 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$。这证明了定理的第 (1) 部分。

对于第 (2) 部分，命题 3.6 表明 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 在对偶模下封闭。根据 [CMY2, 定理 4.4，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 将是刚性的（因而也是缎带的），1] 只要我们证明 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的每个简单模都是刚性的。事实上，$\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的每个简单模都具有 $M\otimes W$ 的形式，其中 $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ 和 $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ 是单对象。根据假设，M 和 W 是刚性的，且它们的对偶必然分别是对偶模 M' 和 W' （例如参见 [CMY2, 第 4.3] 节中的讨论）。由于 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 在对偶模下封闭，$M'\otimes W'$ 是 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中的一个对象；由 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中对融合积、单位同构和结合子同构的刻画可知，$M'\otimes W'$ 是 $M\otimes W$ 的对偶，其求值和余求值由以下给出

$$e_{M\otimes W} = e_M \otimes e_W : (M'\otimes W') \boxtimes (M\otimes W) = (M' \boxtimes_U M) \otimes (W' \boxtimes_V W) \longrightarrow U\otimes V,$$
$$i_{M\otimes W} = i_M \otimes i_W : U\otimes V \longrightarrow (M\otimes W) \boxtimes (M'\otimes W') = (M \boxtimes_U M') \otimes (W \boxtimes_V W').$$

因此，$M\otimes W$在 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 中是刚性的，从而完成了定理的证明。 □

满足定理 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 4.11所述条件的例子包括 $\mathcal{U}$ 和$\mathcal{V}$，我们将它们取为 C_1-余有限范畴 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$的子范畴，如推论 4.6所述。回顾第 2.3 节，$\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 具有 [HLZ8] 编织张量范畴结构，当且仅当它们在对偶模下封闭；因此在此情形下，在融合积下封闭的子范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 也具有这一结构。

推论 4.12. 设 U 和 V 为顶点算子代数，使得 C_1-余有限范畴 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 在对偶模下封闭。

(1) 设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}_V^1$ 为分次受限广义 U-模和 V-模的局部有限阿贝尔范畴，分别包含 U 和 V，并且在子商和融合积下封闭。则 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 具有带缎带扭结的编织张量范畴结构 [HLZ1]-[HLZ8] ，并且与 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 编织张量等价。(2) 如果进一步假设 U 和 V 是自逆共轭的，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 在对偶模下封闭，并且 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的所有简单对象都是刚性的，那么 $\mathcal{D}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是一个带状范畴，其对偶由对偶模给出。

证明。 定理 4.11 第 (1) 部分中的前两个条件根据推论之前的讨论以及 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是局部有限阿贝尔范畴而成立。第三个条件

根据推论 4.6的证明也成立，因此第一个结论由定理 4.11第 (1) 部分得出。第二个结论由定理 4.11第 (2) 部分得出。□

我们使用定理 3.7 (另回顾推论 3.8) 来特化 $\mathcal{U} = \mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{V} = \mathcal{C}_V^1$:

定理 4.13. 若 U 和 V 是 $\mathbb{N}$-分次的，且 $\mathcal{C}_U^1$ 和 $\mathcal{C}_V^1$ 对偶模封闭，则 $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$赋予 [HLZ1]-[HLZ8], 的编织张量范畴结构后，与 $\mathcal{C}_U^1 \otimes \mathcal{C}_V^1$编织张量等价。若进一步假设 U和 V是自逆共轭的，且所有单C_1-余有限 U- 和 V-模都是刚性的，则 $\mathcal{C}_{U\otimes V}^1$是一个编织带范畴。

5. C_2-cofinite examples

若 V 是一个 $\mathbb{N}$-分次的 C_2-余有限顶点算子代数，则分次受限广义 V-模的范畴 Rep(V) 是有限阿贝尔范畴和编织张量范畴 [Hu3], ，并且从 [Mi1 的张成集和引理 2.4] 容易看出，Rep(V) $= \mathcal{C}_V^1$。若 V还是单的且自逆共轭的，并且 Rep(V) 是刚性张量范畴，则 Rep(V) 是一个（通常非半单的）模张量范畴 [McR3，主定理 1]。因此，定理 4.13 特化到 C_2-余有限顶点算子代数的情形如下；其中我们对 n 使用归纳法，将两个顶点算子代数的张量积推广到有限多个顶点算子代数的张量积:

定理 5.1. 若 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 是 $\mathbb{N}$-分次的 C_2-余有限顶点算子代数，则

$$\mathrm{Rep}(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n) \cong \mathrm{Rep}(V_1) \otimes \mathrm{Rep}(V_2) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Rep}(V_n)$$

它们作为带有缎带扭结的编织张量范畴是同构的。若对于 $i = 1,2,\dots,n$， V_i 也是单的且自逆共轭，并且 Rep(V_i) 的所有单对象都是刚性的，则 Rep($V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$) 是一个不一定半单的模张量范畴。

目前对具有非半单模的 $\mathbb{N}$-分次 C_2-余有限顶点算子代数，理解得最透彻的或许是当 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ [为 Ka1 时的三元组 W-代数 $\mathcal{W}_p$]。现在我们可以使用定理 5.1 来研究 $\mathcal{W}_p$ 的单流扩张的表示论；这些扩张来自张量积，相关讨论见 [CKM1，第 4.1 节。2]。为此，我们回顾 [TW] 中的一些记号： X_1^+ 表示作为自身模的 $\mathcal{W}_p$ ，而 X_1^- 是非平凡的自对偶单流 $\mathcal{W}_p$-模，并且 $X_1^- \boxtimes X_1^- \cong X_1^+$（见 [TW，定理 35]）。因此，取 $p_1, p_2, \dots p_d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，定理 4.3 蕴含：无论如何选择 $\varepsilon_i \in \{\pm\}$， $X_1^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes X_1^{\varepsilon_d}$ 都是一个自对偶单流 $\mathcal{W}_{p_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{W}_{p_d}$-模。记

$$X_1^S = X_1^{\varepsilon_1} \otimes X_1^{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes X_1^{\varepsilon_d}$$

其中 $S = \{i \mid \varepsilon_i = -\}$。

$\{1, 2, \dots, d\}$ 的幂集 $P(d)$ 是一个 $\mathbb{F}_2$-向量空间，其加法由对称差给出； $\mathbb{F}_2$-子空间 $C \subseteq P(d)$ 称为二元线性码。给定一个二元线性码 C，我们定义

$$\mathcal{W}_{p_1,\dots,p_d}^C = \bigoplus_{S \in C} X_1^S.$$

由 [CKM1第 4.1 节可知，2], $\mathcal{W}_{p_1,\ \dots\dots,\ p_d}^C$ 是某个格阿贝尔交织代数的简单子代数（参见 [DL第 12] 章）。当且仅当对所有 $S \in C$都有 $\sum_{i\in S} p_i \in 4\mathbb{Z}$ 时，该格是偶格，因此该阿贝尔交织代数实际上是顶点算子代数。此外，当且仅当最低共形权

对所有 $S \in C$而言， X_1^S是非负整数。由于 $X_1^{\varepsilon_i}$ 的最低共形权为$\frac{3p_i-2}{4}$， X_1^S的最低权为

$$\sum_{i\in S} \frac{3p_i-2}{4} = \frac{3}{4}\sum_{i\in S} p_i - \frac{|S|}{2}.$$

因此，假设 $\sum_{i\in S} p_i \in 4\mathbb{Z}$, X_1^S是 $\mathbb{N}$-分次的当且仅当 $|S| \in 2\mathbb{Z}$。我们由此得出，$\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$是单的 $\mathbb{N}$-分次自逆共轭 C_2-余有限顶点算子代数，当且仅当 C 是一个偶二元线性码，并且对所有 $S \in C$都有 $\sum_{i\in S} p_i \in 4\mathbb{Z}$ 。

定理5.2. 设 $C \subseteq P(d)$是一个偶二元线性码，并假设 p_1、...、 $p_d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$对所有 $S \in C$都满足 $\sum_{i\in S} p_i \in 4\mathbb{Z}$ 。那么，Rep($\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$)是一个非半单模张量范畴。

证明。 Rep($\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$)是非半单的，因为每个Rep($W_{p_i}$)都是非半单的；例如，上文提到的格顶点算子代数作为$\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$-模并非半单。现在根据[McR3，主定理 1]，，还需证明编织张量范畴Rep($\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$)具有刚性。

首先，根据 [TW，定理 40]（另见 [MY1，定理 7.6]）以及定理 5.1，Rep($\mathcal{W}_{p_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{W}_{p_d}$) 是刚性的。然后，由于 $\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$ 是一个简单流扩张， $\mathcal{W}_{p_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{W}_{p_d} \subseteq \mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$ 是一个自同构群同构于 Hom($C,\mathbb{C}^\times$) 的不动点子代数。根据 [McR1，命题 4.15]，，这意味着 $\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$ 在带状范畴 Rep($\mathcal{W}_{p_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{W}_{p_d}$) 中具有范畴维数 $|C| \neq 0$；进而根据 [HKL，定理 3.2] 以及 [KO，引理 1.20]， $\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$ 按照 [KO，定义 1.11] 的意义，是一个“刚性 Rep($\mathcal{W}_{p_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{W}_{p_d}$)-代数”。于是由 [KO，定理 1.15]，[、HKL，定理 3.4]，以及 [CKM1，定理 3.65] 可得 Rep($\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$) 是刚性的，所需结论得证。□

现在，我们可以利用 [TW] 中每个 Rep($\mathcal{W}_{p_i}$) 的详细张量结构（另见 [MY1，第 7] 节）、定理 5.1，以及顶点算子代数的扩张理论 [CKM1]，来分类 Rep($\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$) 中的单对象和射影对象，并计算它们的融合积。为简便起见，我们仅对 $\mathcal{W}^C_{p_1,\dots,p_d}$ 的一个例子族，即偶辛费米子顶点算子代数 SF_d^+ ，详细开展这些工作。

对于 $d \in \mathbb{Z}_+$，辛费米子超代数 SF_d 最早在物理学文献 [Ka2, Ka3, GK] 中被引入；它是与一个配备辛形式的 $2d$ 维纯奇李超代数 $\mathfrak{h}$ 相联系的仿射顶点算子超代数。偶顶点算子子代数 $SF_d^+ \subseteq SF_d$ 是 C_2-余有限的 [Ab]，和 $SF_1^+ \cong \mathcal{W}_2$ [Ka3, GK]。一般而言，$SF_d \cong SF_1^{\otimes d}$ 作为顶点算子超代数。在 [Ru]，中，Runkel 构造了一个编织张量范畴 $\mathcal{SF}_d$ ，并猜想它与 Rep(SF_d^+) 编织张量等价。范畴 $\mathcal{SF}_d$ 与一个可因子化带状拟霍普夫代数 [GR1, FGR]，的有限维表示范畴编织张量等价，因此是一个非半单模张量范畴。

定理 5.2 现在意味着 Rep(SF_d^+) 也是一个非半单模张量范畴，这与 Runkel 猜想一致。事实上，$SF_1 \cong X_1^+ \oplus X_1^-$作为一个 $SF_1^+ \cong \mathcal{W}_2$-模。因此作为一个 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模，

$$SF_d \cong SF_1^{\otimes d} \cong \bigoplus_{S\in P(d)} X_1^S,$$

其中 $X_1^S \subseteq SF_d^+$ 当且仅当 $|S| \in 2\mathbb{Z}$。也就是说，$SF_d^+ \cong \mathcal{W}_2^{E(d)}$，，2其中 $E(d)$ 是由 $\{1,2,\dots,d\}$ 的所有偶数基数子集组成的二元线性码。因此我们得到：

推论 5.3。对于所有 $d \in \mathbb{Z}_+$，表示范畴(SF_d^+) 赋予 [HLZ8] 的编织张量范畴结构后，都是非半单模张量范畴。

现在我们使用 Rep($\mathcal{W}_2$) 的张量结构，该结构来自 [TW]（另见 [MY1，第 7]节），以及 [CKM1] 的扩张理论，来对 Rep(SF_d^+) 中的单对象和投射对象进行分类，并计算它们的融合积。这些结果并非全新，因为单 SF_d^+ -模已在 [Ab] 中分类。此外，所有三元组的单 SF_d^+ -模的融合规则，即交织算子空间的维数，已在 [AA], 中确定，尽管这些规则并不能完全确定单 SF_d^+ -模的融合积。无论如何，我们都可以利用顶点算子代数扩张相当容易地推导出所有这些结果。

首先，我们回顾关于 Rep($\mathcal{W}_2$) 的一些结果。Rep($\mathcal{W}_2$) 中有四个简单模，记作 X_i^ε对于 $i = 1$、2 和 $\varepsilon = \pm$。其中两个简单模 $X_2^\pm$是射影的，而 $X_1^\pm$具有长度为四的射影覆盖 $P_1^\pm$，二者均有两个同构于 X_1^+的合成因子和两个同构于 X_1^-的合成因子。简单模与射影$\mathcal{W}_2$-模的融合积为

$$X_1^{\varepsilon_1} \boxtimes X_i^{\varepsilon_2} \cong X_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad X_2^{\varepsilon_1} \boxtimes X_2^{\varepsilon_2} \cong P_1^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

对于 $i = 1$、2、ε_1和 $\varepsilon_2 = \pm$，以及

$$X_1^{\varepsilon_1} \boxtimes P_1^{\varepsilon_2} \cong P_1^{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad X_2^{\varepsilon_1} \boxtimes P_1^{\varepsilon_2} \cong 2 \cdot X_2^+ \oplus 2 \cdot X_2^-$$

对于 ε_1、$\varepsilon_2 = \pm$。随后，我们可以利用结合律计算

$$\begin{aligned} P_1^{\varepsilon_1} \boxtimes P_1^{\varepsilon_2} &\cong (X_2^+ \boxtimes X_2^{\varepsilon_1}) \boxtimes P_1^{\varepsilon_2} \cong X_2^+ \boxtimes (X_2^{\varepsilon_1} \boxtimes P_1^{\varepsilon_2}) \\ &\cong X_2^+ \boxtimes (2 \cdot X_2^+ \oplus 2 \cdot X_2^-) \cong 2 \cdot P_1^+ \oplus 2 \cdot P_1^- \end{aligned}$$

对于 ε_1、$\varepsilon_2 = \pm$。

接下来, 我们从 [KO、CKM1] 回顾到，存在一个归纳的编织张量函子

$$\mathcal{F} : \mathrm{Rep}(\mathcal{W}_2^{\otimes d})^0 \longrightarrow \mathrm{Rep}(SF_d^+),$$

由 $\mathcal{F}(W) = SF_d^+ \boxtimes W$在对象上给出，其中 Rep($\mathcal{W}_2^{\otimes d}$)^0 $\subseteq$Rep($\mathcal{W}_2^{\otimes d}$) 是由满足以下条件的对象构成的全子范畴：$\mathcal{F}(W)$ 实际上是一个 SF_d^+-模（而不是“非局部”或“扭曲”的 SF_d^+ -模）。更具体地说（例如参见 [CKM1，命题 2.65]），Rep($\mathcal{W}_2^{\otimes d}$)^0 是 SF_d^+ 的 M¨uger 中心化子：它由所有满足以下条件的 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模 W 构成：对于所有 $S \in E(d)$，双编织 $\mathcal{R}^2_{X_1^S,\, W}$ 在 $X_1^S \boxtimes W$ 上都是恒等映射。由于 SF_d^+ 是一个刚性 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模，归纳函子是正合的。归纳的另一个重要性质是弗罗贝尼乌斯互反律：存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_2^{\otimes d}}(W, X) \cong \mathrm{Hom}_{SF_d^+}(\mathcal{F}(W), X)$$

对于任意 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模 W 和 SF_d^+ -模 X。

定理 5.4. 对于 $d \in \mathbb{Z}_+$，令 Rep(SF_d^+) 表示由分次限制的广义 SF_d^+ -模构成的非半单模张量范畴。

(1) Rep(SF_d^+) 中同构意义下有四个简单对象，分别为

$$\mathcal{X}_i^\varepsilon = \mathcal{F}(X_i^\varepsilon \otimes X_i^+ \otimes \cdots \otimes X_i^+)$$

对于 $i = 1$、2 和 $\varepsilon = \pm$。

(2) 对于 $\varepsilon = \pm$，简单模 $\mathcal{X}_2^\varepsilon$ 在 Rep(SF_d^+) 中是射影的，而 $\mathcal{X}_1^\varepsilon$ 有一个射影覆盖

$$\mathcal{P}_1^\varepsilon = \mathcal{F}(P_1^\varepsilon \otimes P_1^+ \otimes \cdots \otimes P_1^+)$$

长度为 2^{2d}，其中对每种符号选择，2^{2d-1} 个合成因子同构于 $\mathcal{X}_1^\pm$。

(3) 表示范畴 Rep$(SF$ 中单模与射影模的融合积 $d^\dagger$) 如下：

$$\mathcal{X}_1^{\varepsilon_1} \boxtimes \mathcal{X}_i^{\varepsilon_2} \cong \mathcal{X}_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad \mathcal{X}_1^{\varepsilon_1} \boxtimes \mathcal{P}_1^{\varepsilon_2} \cong \mathcal{P}_1^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

当 $i = 1$、2 且 ε_1、$\varepsilon_2 = \pm$ 时，

$$\mathcal{X}_2^{\varepsilon_1} \boxtimes \mathcal{X}_2^{\varepsilon_2} \cong \mathcal{P}_1^{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad \mathcal{X}_2^{\varepsilon_1} \boxtimes \mathcal{P}_1^{\varepsilon_2} \cong 2^{2d-1} \cdot \mathcal{X}_2^+ \oplus 2^{2d-1} \cdot \mathcal{X}_2^-$$

当 ε_1、$\varepsilon_2 = \pm$，且

$$\mathcal{P}_1^{\varepsilon_1} \boxtimes \mathcal{P}_1^{\varepsilon_2} \cong 2^{2d-1} \cdot \mathcal{P}_1^+ \oplus 2^{2d-1} \cdot \mathcal{P}_1^-$$

对于 ε_1、$\varepsilon_2 = \pm$。

证明。对于第 (1) 部分，[CKM1，命题 4。5] 表明，一个 SF_d^+ -模是单的，当且仅当它是 Rep$(\mathcal{W}_2^{\otimes d})$ 中一个简单$\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模的归纳[0]。因此，我们首先需要确定 Rep$(W)$ 中哪些简单对象$\mathcal{W}_2^{\otimes d}$与 X_1^S对所有 $S \in E(d)$ 进行平凡双编织。令 $X_1^S = X_1^{\delta_1} \otimes \cdots \otimes X_1^{\delta_d}$(因此 $\delta_i = -$ 恰好对于 $i \in S$) 且 $W = X_{i_1}^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_d}^{\varepsilon_d}$，我们利用平衡方程 (2.1) 和定理 5.1来计算双编织：

$$\mathcal{R}^2_{X_1^S,W} = \theta_{X_1^S \boxtimes W} \circ (\theta^{-1}_{X_1^S} \boxtimes \theta^{-1}_W) = \bigotimes_{k=1}^d \theta_{X_1^{\delta_k} \boxtimes X_{i_k}^{\varepsilon_k}} \circ (\theta^{-1}_{X_1^{\delta_k}} \boxtimes \theta^{-1}_{X_{i_k}^{\varepsilon_k}}) = \prod_{k=1}^d e^{2\pi i (h_{i_k}^{\delta_k\varepsilon_k} - h_1^{\delta_k} - h_{i_k}^{\varepsilon_k})},$$

其中 $h_i^\pm = \frac{1}{8}(i-3)(i-3\pm 2)$ 是 $X_i^\pm$ 的最低共形权。由于 $\delta_k\varepsilon_k = \varepsilon_k$ 当 $k \notin S$ 且 $h_1^\pm \in \mathbb{Z}$ 时，故可得

$$\mathcal{R}^2_{X_1^S,W} = \prod_{k\in S} e^{2\pi i (h_{i_k}^{-\varepsilon_k} - h_{i_k}^{\varepsilon_k})} = \prod_{k\in S} e^{\pi i(-\varepsilon_k(i_k-3))} = \exp\left(-\pi i \sum_{k\in S} \varepsilon_k i_k\right),$$

其中最后一个等式使用了 $|S| \in 2\mathbb{Z}$。因此，当且仅当$\sum_{k\in S} \varepsilon_k i_k \in 2\mathbb{Z}$ 对所有 $S \in E(d)$成立时，$\mathcal{F}(W)$才是 Rep(SF_d^+)中的一个模。这当且仅当 $i_j = i_k$ 对所有 $1 \le j$、$k \le d$成立，因为 $\{j,k\} \in E(d)$。因此，任意单 SF_d^+ 都同构于某个 $\mathcal{F}(X_i^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes X_i^{\varepsilon_d})$，其中 $i = 1$、2和 $\varepsilon_k = \pm$。

此外，根据弗罗贝尼乌斯互反律，当且仅当$X_i^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes X_i^{\varepsilon_d}$作为一个 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-子模出现时，$\mathcal{F}(X_i^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes X_i^{\varepsilon_d}) \cong \mathcal{F}(X_j^{\delta_1} \otimes \cdots \otimes X_j^{\delta_d})$

$$\mathcal{F}(X_j^{\delta_1} \otimes \cdots \otimes X_j^{\delta_d}) \cong SF_d^+ \boxtimes (X_j^{\delta_1} \otimes \cdots \otimes X_j^{\delta_d}) \cong \bigoplus_{S\in E(d)} X_1^S \boxtimes (X_j^{\delta_1} \otimes \cdots \otimes X_j^{\delta_d}).$$

因为对于每个 $S \in E$（d），$X_i^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes X_i^{\varepsilon_d}$ 是 $\mathcal{F}$（$X_j^{\delta_1} \otimes \cdots \otimes X_j^{\delta_d}$）的子模，当且仅当 $i = j$，且等于 $+$ 或 $-$ 的 ε_k 的个数与等于 $+$ 或 $-$的 δ_k 的个数模 2 同余。因此，每个简单 SF_d^+ -模都同构于第（1）部分所列四个简单模中的且仅其中一个。

对于第（2）部分，弗罗贝尼乌斯互反律表明，$\mathcal{F}$ 将射影 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模映到射影 SF_d^+-模（例如参见 [ACKR，引理 17]）。因此，由于 $P_1^\varepsilon \otimes P_1^+ \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_1^+$和 $X_2^\varepsilon \otimes X_2^+ \otimes \cdots \otimes X_2^+$是射影 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模（由定理 3.11可知），并且由于 $P_1^\varepsilon \otimes P_1^+ \otimes$
$\cdots \otimes P_1^+$是 Rep$(\mathcal{W}_2^{\otimes d})$ 中的一个对象；根据与 $X_1^\varepsilon \otimes X_1^+ \otimes \cdots \otimes X_1^+$ 相同的计算，$\mathcal{P}_1^\varepsilon$ 和 $\mathcal{X}_2^\varepsilon$ 在 Rep(SF_d^+) 中是射影的。此外，$\mathcal{P}_1^\varepsilon$ 的长度为 2^{2d}，因为每个 $P_1^\pm$ 都有

长度 4，并且因为 $\mathcal{F}$ 是正合的，会将单 $\mathcal{W}_2^{\otimes d}$-模映射为单 SF_d^+-模。此外，由于 $P_1^{\pm}$ 对两种符号选择都具有两个与 $X_1^{\pm}$ 同构的合成因子，$P_1^{\varepsilon}\otimes P_1^+\otimes\cdots\otimes P_1^+$ 的一半合成因子诱导为 $\mathcal{X}_1^+$，另一半诱导为 $\mathcal{X}_1^-$。

根据命题 2.2，$\mathcal{P}_1^{\varepsilon}$ 将是 $\mathcal{X}_1^{\varepsilon}$ 的一个射影覆盖，当且仅当它不可分解且满射到 $\mathcal{X}_1^{\varepsilon}$。为证明这一点，我们将说明：若 $\mathcal{X}$是一个单 SF_d^+-模，则态射空间 $\mathcal{P}_1^{\varepsilon}\to\mathcal{X}$非零（且为一维）当且仅当 $\mathcal{X}\cong\mathcal{X}_1^{\varepsilon}$。事实上，取 $\mathcal{X}=\mathcal{X}_i^{\delta}$，由弗罗贝尼乌斯互反律和命题 2.10 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{SF_d^+}(\mathcal{P}_1^{\varepsilon},\mathcal{X}) &\cong \mathrm{Hom}_{SF_d^+}(\mathcal{F}(P_1^{\varepsilon}\otimes P_1^+\otimes\cdots\otimes P_1^+),\mathcal{F}(X_i^{\delta}\otimes X_i^+\otimes\cdots\otimes X_i^+))\\ &\cong \bigoplus_{S\in E(d)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_2^{\otimes d}}(P_1^{\varepsilon}\otimes P_1^+\otimes\cdots\otimes P_1^+, X_1^S\boxtimes(X_i^{\delta}\otimes X_i^+\otimes\cdots\otimes X_i^+))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_2}(P_1^{\varepsilon},X_i^{\delta})\otimes\bigotimes_{k=2}^{d}\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_2}(P_1^+,X_i^+).\end{aligned}$$

当且仅当 $i=1$和 $\delta=\varepsilon$时，这个空间确实非零（且由 $p_{X_1^{\varepsilon}}\otimes p_{X_1^+}\otimes\cdots\otimes p_{X_1^+}$ 张成）。因此，$\mathcal{P}_1^{\varepsilon}$是 $\mathcal{X}_1^{\varepsilon}$的一个射影覆盖。

对于（3），我们结合定理 4.3 以及归纳保持融合积这一事实。由于计算很直接，我们只在最有意思的情形下加以说明：对于任意 ε_1，ε_2，

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_2^{\varepsilon_1}\boxtimes\mathcal{P}_1^{\varepsilon_2} &= \mathcal{F}(X_2^{\varepsilon_1}\otimes X_2^+\otimes\cdots\otimes X_2^+)\boxtimes\mathcal{F}(P_1^{\varepsilon_2}\otimes P_1^+\otimes\cdots\otimes P_1^+)\\ &\cong \mathcal{F}((X_2^{\varepsilon_1}\boxtimes P_1^{\varepsilon_2})\otimes(X_2^+\boxtimes P_1^+)\otimes\cdots\otimes(X_2^+\boxtimes P_1^+))\\ &\cong \mathcal{F}((2\cdot X_2^+\oplus 2\cdot X_2^-)^{\otimes d}).\end{aligned}$$

引入记号 X_2^S，表示 $S\in P(d)$，与 X_1^S类似，我们因此得到

$$\mathcal{X}_2^{\varepsilon_1}\boxtimes\mathcal{P}_1^{\varepsilon_2}\cong 2^d\cdot\bigoplus_{S\in P(d)}\mathcal{F}(X_2^S).$$

由于当 $|S|\in 2\mathbb{Z}$ 时 $\mathcal{F}(X_2^S)\cong\mathcal{X}_2^+$，且当 $|S|\in 2\mathbb{Z}+1$ 时 $\mathcal{F}(X_2^S)\cong\mathcal{X}_2^-$，因此 $\mathcal{X}_2^{\varepsilon_1}\boxtimes\mathcal{P}_1^{\varepsilon_2}$ 各包含 2^{2d-1} 个 $\mathcal{X}_2^+$ 和 $\mathcal{X}_2^-$ 的副本。□

注 5.5。回顾猜想的等价 $\mathrm{Rep}(SF_d^+)\cong\mathcal{SF}_d$ 作为编织张量范畴，定理 5.4(3) 与 $\mathcal{SF}_d$ 中给出的融合积 [Ru，定理 3。13]。$\mathrm{Rep}(SF_d^+)$ 与 $\mathcal{SF}_d$ 之间的对应关系如下。作为一个范畴，

$$\mathcal{SF}_d=\mathrm{Rep}(\mathfrak{h})\oplus s\mathcal{V}ec$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是一个 $2d$ 维纯奇李超代数，且 $\mathcal{SF}_d$ 中的所有态射都保持 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次。于是，$\mathcal{X}_1^+$ 和 $\mathcal{P}_1^+$ 分别对应于平凡偶 $\mathfrak{h}$-模 $\mathbb{C}^{1|0}$ 和$\mathfrak{h}$-模 $U(\mathfrak{h})$，而 $\mathcal{X}_2^+$ 对应于向量超空间 $\mathbb{C}^{1|0}$。模 $\mathcal{X}_1^-$、$\mathcal{P}_1^-$ 和 $\mathcal{X}_2^-$ 分别对应于 $\mathcal{SF}_d$ 中这些对象的奇偶反转。

注 5.6。猜想中的编织张量等价 表示范畴$(SF_d^+)\cong\mathcal{SF}_d$ 最近已在 $d=1$ [CLR，GN], 的情形下得到证明$SF_1^+\cong\mathcal{W}_2$，此时 $\mathcal{SF}_1$ 等价于小量子群的某个拟霍普夫修正的表示范畴$u_i(\mathfrak{sl}_2)$ 在四次单位根 [GR1]处。定理 5.1 现提示了一种证明一般情形下所猜想等价的方法 d。也就是说，定理 5.1，连同 [HKL、CLR，

GN], 表明 SF_d^+ 是编织张量范畴中的交换代数

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{W}_2)^{\otimes d} \cong \mathrm{Rep}(u_i(\mathfrak{sl}_2))^{\otimes d}.$$

这意味着 表示范畴(SF_d^+) 等价于某个交换代数 $^{\mathrm{loc}}(A)$ 的局部模所构成的编织张量范畴 A ，该交换代数位于表示范畴($u_i(\mathfrak{sl}_2)$) 中$^{\otimes d}$。另一方面， $\mathcal{SF}_d$ 与某个可因子化带状拟霍普夫代数的表示范畴编织张量等价 $Q(d)$ [FGR]。因此，若能证明表示范畴($Q(d)$) ≅与表示范畴 $^{\mathrm{loc}}(A)$ 作为编织张量范畴等价，那么表示范畴(SF_d^+) $\cong \mathcal{SF}_d$ 的等价性便得以证明。

Appendix A. Proof of Theorem 3.13

在一般情形下证明定理 3.13 之前，我们先证明如下特殊情形： $\mathcal{D}$ 有~充分多的射影对象，每个射影对象都属于 $\mathcal{D}$，且 $\mathcal{D}_{X_1,\ X_2,\ X_3} = \mathcal{D}$ 对所有X_1、 X_2、 $X_3 \in \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$均成立：

定理 A.1. 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴，且 $\mathcal{D}$ 有充分多的射影对象；设 $\widetilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}$ 是一个包含 $\mathcal{D}$ 中所有射影对象的加性全子范畴，并且
设 $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性函子，使得对任意 $X \in \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，存在一个右正合序列

$$Q_X \xrightarrow{q_X} P_X \xrightarrow{p_X} X \longrightarrow 0,$$

其中， Q_X和 P_X是 $\mathcal{D}$中的射影对象，并且（$\mathcal{G}(X)$ $\mathcal{G}(p_X)$）是 $\mathcal{C}$中 $\mathcal{G}(q_X)$的余核。则存在唯一的（差一个自然同构）右正合 $\mathbb{C}$-线性函子 $\mathcal{F}$： $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$，使得 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \cong \mathcal{G}$。

证明。令 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$ 为射影对象的加性全子范畴。由于 $\mathcal{D}$ 有充分多的射影对象，对于任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们可以固定一个右正合序列

$$Q_X \xrightarrow{q_X} P_X \xrightarrow{p_X} X \longrightarrow 0$$

使得 $Q_X, P_X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$。由于 P_X是射影的，对于 $\mathcal{D}$ 中的任意态射~f： $X \to X$，我们还可以选择一个态射g_f： $P_X \to P_{\widetilde{X}}$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} P_X & \xrightarrow{g_f} & P_{\widetilde{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle p_X} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\widetilde{X}}} \\ X & \xrightarrow{f} & \widetilde{X} \end{array}$$

交换。对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P})$，我们选择 $P_X = X$, $p_X =$ 恒等映射$_X$ 和 $Q_X = 0$, $q_X = 0$。当 f 是 $\mathcal{P}$中的一个态射时，这些~选择确定了 $g_f = f$。更一般地，对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们选择$P_X$, Q_X, p_X以及 q_X，使得（$\mathcal{G}(X)$ $\mathcal{G}(p_X)$）是 $\mathcal{G}(q_X)$的余核。

现在由于 $\mathcal{F}$ 应当是一个延拓 $\mathcal{G}$ 的右正合函子，我们在对象 b y

$$\mathcal{F}(X) = \mathrm{Coker}\ \mathcal{G}(q_X),$$

~带有余核满射 c_X： $\mathcal{G}(P_X) \to \mathcal{F}(X)$。对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们取 $\mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(X)$~以及 $c_X = \mathcal{G}(p_X)$。对于 $\mathcal{D}$ 中的任意态射 f： $X \to X$，我们希望 $\mathcal{F}(f)$ 是唯一的

m态射，它由余核的泛性质诱导，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(P_X) & \xrightarrow{\mathcal{G}(g_f)} & \mathcal{G}(P_{\widetilde{X}}) \\ \downarrow{\scriptstyle c_X} & & \downarrow{\scriptstyle c_{\widetilde{X}}} \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(\widetilde{X}) \end{array}$$

可交换。为使 $\mathcal{F}(f)$ 存在，我们需要 $c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f \circ q_X) = 0$。为验证这一点，我们先有

$$p_{\widetilde{X}} \circ g_f \circ q_X = f \circ p_X \circ q_X = 0,$$

这意味着

$$\mathrm{Im}(g_f \circ q_X) \subseteq \mathrm{Ker}\, p_{\widetilde{X}} = \mathrm{Im}\, q_{\widetilde{X}}.$$

因此，由于 Q_X 的射影性，存在一个态射 $h_f\colon Q_X \to Q_{\widetilde{X}}$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} Q_X & \xrightarrow{h_f} & Q_{\widetilde{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle q_X} & & \downarrow{\scriptstyle q_{\widetilde{X}}} \\ P_X & \xrightarrow{g_f} & P_{\widetilde{X}} \end{array}$$

可交换。因此

$$c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f \circ q_X) = c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(q_{\widetilde{X}} \circ h_f) = 0,$$

~，如所需。当 $X, X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 时，

$$\mathcal{F}(f) \circ c_X = c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f) = \mathcal{G}(p_{\widetilde{X}} \circ g_f) = \mathcal{G}(f \circ p_X) = \mathcal{G}(f) \circ c_X,$$

这意味着 $\mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f)$。因此 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} = \mathcal{G}$在对象和态射上均如此。

~我们断言，$\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ 在 $\mathcal{C}$中与态射g_f的选择无关：$P_X \to P_{\widetilde{X}}$在 $\mathcal{P}$ 中。也就是说，我们需要证明，如果 $g_f, \widetilde{g}_f\colon P_X \to P_{\widetilde{X}}$满足

$$p_{\widetilde{X}} \circ g_f = f \circ p_X = p_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{g}_f,$$

then

$$c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f) = c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(\widetilde{g}_f),$$

等价地，$c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f - \widetilde{g}_f) = 0$，因为 $\mathcal{G}$是 $\mathbb{C}$-线性的。事实上，$p_{\widetilde{X}} \circ (g_f - \widetilde{g}_f) = 0$给出

$$\mathrm{Im}(g_f - \widetilde{g}_f) \subseteq \mathrm{Ker}\, p_{\widetilde{X}} = \mathrm{Im}\, q_{\widetilde{X}}.$$

T这是因为 P_X 在 $\mathcal{D}$中是射影的，因此存在一个态射 $g\colon P_X \to Q_{\widetilde{X}}$，使得 t

$$g_f - \widetilde{g}_f = q_{\widetilde{X}} \circ g.$$

Thus

$$c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f - \widetilde{g}_f) = c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(q_{\widetilde{X}} \circ g) = 0$$

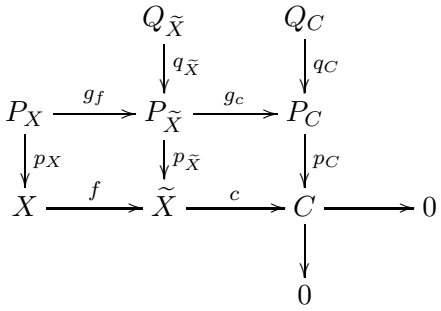
因为根据定义 $c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(q_{\widetilde{X}}) = 0$。这就证明了该断言。

现在很容易验证，$\mathcal{F}$：如上定义的 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性函子，并且满足$\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} = \mathcal{G}$。事实上，由于 $\mathcal{F}$是一个函子，且上述断言表明我们可以假设 $g_{\mathrm{Id}_X} = \mathrm{Id}_{P_X}$和$g_{f_1 \circ f_2} = g_{f_1} \circ g_{f_2}$，所以 $\mathcal{F}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}$，并且 $\mathcal{F}(f_1 \circ f_2) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$。类似地，为了证明 $\mathcal{F}$是 $\mathbb{C}$-线性的，由于$\mathcal{G}$是 $\mathbb{C}$-线性的，且我们可以假设 $g_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 g_{f_1} + c_2 g_{f_2}$，对于 c_1、$c_2 \in \mathbb{C}$，有 $\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{F}(f_1) + c_2 \mathcal{F}(f_2)$。为了证明 $\mathcal{F}$是所需的~函子，我们还需要证明 $\mathcal{F}$ 是右正合的，并且如果 $\mathcal{F}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是任意满足 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \cong \mathcal{G}$的~ ~右正合函子，那么$\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$。

现在我们证明 $\mathcal{F}$ 是右正合的。因此，考虑一个右正合序列

$$X \xrightarrow{f} \widetilde{X} \xrightarrow{c} C \to 0$$

~在 $\mathcal{D}$ 中，即，(C, c) 是 $f\colon X \to X$ 的余核。我们需要证明，$(\mathcal{F}(C)\ \mathcal{F}(c))$ 是 $\mathcal{F}(f)$ 在 $\mathcal{C}$ 中的余核。回顾一下，$\mathcal{F}(f)$ 和 $\mathcal{F}(c)$ 是利用 $\mathcal{D}$ 中投射模之间的态射 g_f和 g_c 定义的，使得该图表



可交换，特别是底行和右列是右正合的。由于 $c \circ p_{\widetilde{X}}$是满射且 P_C 是投射模，存在一个态射 $\widetilde{g}_c\colon P_C \to P_{\widetilde{X}}$，使得

$$p_C = c \circ p_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{g}_c.$$

由于将此方程两边与 q_C 作前合成后得到 0，并且由于 p_X是满射，

$$\operatorname{Im}(p_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{g}_c \circ q_C) \subseteq \operatorname{Ker} c = \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ p_X).$$

因此，由于 Q_C 是投射模，存在一个态射 $h\colon Q_C \to P_X$，使得

$$p_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{g}_c \circ q_C = f \circ p_X \circ h = p_{\widetilde{X}} \circ g_f \circ h.$$

Then

$$\operatorname{Im}(\widetilde{g}_c \circ q_C - g_f \circ h) \subseteq \operatorname{Ker} p_{\widetilde{X}} = \operatorname{Im} q_{\widetilde{X}}.$$

~再次由于 Q_C 是投射模，存在一个态射 $h\colon Q_C \to Q_{\widetilde{X}}$，使得

$$\widetilde{g}_c \circ q_C - g_f \circ h = q_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{h}.$$

~特别地，回顾一下，$(\mathcal{F}(X)\, c_{\widetilde{X}})$ 是 $\mathcal{G}(q_{\widetilde{X}})$ 的余核，我们得到

$$c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(\widetilde{g}_c \circ q_C - g_f \circ h) = c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(q_{\widetilde{X}}) \circ \mathcal{G}(\widetilde{h}) = 0. \tag{A.1}$$

现在我们可以证明 $(\mathcal{F}(C)\ \mathcal{F}(c))$ 是 $\mathcal{F}(f)$ 的余核。因此，设 $F\colon\sim\mathcal{F}(X) \to Y$是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，满足 $F \circ \mathcal{F}(f) = 0$。我们需要证明存在唯一的态射 $G\colon \mathcal{F}(C) \to Y$，使得

$$F = G \circ \mathcal{F}(c).$$

关于存在性，(A.1) 以及 $\mathcal{F}(f)$ 的定义蕴含，

$$F \circ c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(\widetilde{g}_c) \circ \mathcal{G}(q_C) = F \circ c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(g_f) \circ \mathcal{G}(h) = F \circ \mathcal{F}(f) \circ c_X \circ \mathcal{G}(h) = 0.$$

回顾一下，根据定义，$(\mathcal{F}(C)\ c_C)$ 是 $\mathcal{G}(q_C)$ 的余核，这意味着存在唯一的态射 $G\colon \mathcal{F}(C) \to Y$，使得

$$F \circ c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(\widetilde{g}_c) = G \circ c_C.$$

该态射 G 还满足

$$G \circ \mathcal{F}(c) \circ c_{\widetilde{X}} = G \circ c_C \circ \mathcal{G}(g_c) = F \circ c_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{G}(\widetilde{g}_c \circ g_c).$$

因此，由于 $c_{\widetilde{X}}$ 的满射性，我们将得到 $G\circ\mathcal{F}(c)=F$，前提是 $F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_c\circ g_c)=F\circ c_{\widetilde{X}}$。为证明这一点，回顾定义可知，

$$c\circ p_{\widetilde{X}}\circ\widetilde{g}_c\circ g_c=p_C\circ g_c=c\circ p_{\widetilde{X}}.$$

因此利用 p_X 的满射性，

$$\operatorname{Im}p_{\widetilde{X}}\circ(\widetilde{g}_c\circ g_c-\operatorname{Id}_{P_{\widetilde{X}}})\subseteq\operatorname{Ker}c=\operatorname{Im}f=\operatorname{Im}(f\circ p_X)=\operatorname{Im}(p_{\widetilde{X}}\circ g_f).$$

然后由 $P_{\widetilde{X}}$ 的射影性，存在一个映射 $\widetilde{g}_f\colon\ P_{\widetilde{X}}\to P_X$ 使得

$$p_{\widetilde{X}}\circ(\widetilde{g}_c\circ g_c-\operatorname{Id}_{P_{\widetilde{X}}})=p_{\widetilde{X}}\circ g_f\circ\widetilde{g}_f,$$

然后

$$\operatorname{Im}(\widetilde{g}_c\circ g_c-\operatorname{Id}_{P_{\widetilde{X}}}-g_f\circ\widetilde{g}_f)\subseteq\operatorname{Ker}p_{\widetilde{X}}=\operatorname{Im}q_{\widetilde{X}}.$$

再次由 $P_{\widetilde{X}}$ 的射影性，存在一个映射 $k\colon\ P_{\widetilde{X}}\to Q_{\widetilde{X}}$ 使得

$$\widetilde{g}_c\circ g_c-\operatorname{Id}_{P_{\widetilde{X}}}-g_f\circ\widetilde{g}_f=q_{\widetilde{X}}\circ k.$$

因此现在

$$\begin{aligned}F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_c\circ g_c)&=F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(\operatorname{Id}_{P_{\widetilde{X}}}+g_f\circ\widetilde{g}_f+q_{\widetilde{X}}\circ k)\\&=F\circ c_{\widetilde{X}}+F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(g_f)\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_f)+F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(q_{\widetilde{X}})\circ\mathcal{G}(k)\\&=F\circ c_{\widetilde{X}}+F\circ\mathcal{F}(f)\circ c_X\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_f)\\&=F\circ c_{\widetilde{X}},\end{aligned}$$

因为 $c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(q_{\widetilde{X}})=0$和 $F\circ\mathcal{F}(f)=0$。这就完成了 $F=G\circ\mathcal{F}(c)$ 的证明。

要证明 G 是唯一的，只需证明任何满足 $F=G\circ\mathcal{F}(c)$ 的 G 也满足 $F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_c)=G\circ c_C$（因为在满足后一个条件的情况下， G 是唯一的）。事实上，条件 $F=G\circ\mathcal{F}(c)$ 蕴含

$$F\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_c)=G\circ\mathcal{F}(c)\circ c_{\widetilde{X}}\circ\mathcal{G}(\widetilde{g}_c)=G\circ c_C\circ\mathcal{G}(g_c\circ\widetilde{g}_c),$$

因此只需证明 $c_C\circ\mathcal{G}(g_c\circ\widetilde{g}_c)=c_C$。为证明这一点，注意到

$$p_C\circ g_c\circ\widetilde{g}_c=c\circ p_{\widetilde{X}}\circ\widetilde{g}_c=p_C$$

根据定义，因此

$$\operatorname{Im}(g_c\circ\widetilde{g}_c-\operatorname{Id}_{P_C})\subseteq\operatorname{Ker}p_C=\operatorname{Im}q_C.$$

由于 P_C 是射影的，因此存在一个映射 $k\colon\ P_C\to Q_C$，使得

$$g_c\circ\widetilde{g}_c-\operatorname{Id}_{P_C}=q_C\circ\widetilde{k},$$

然后

$$c_C\circ\mathcal{G}(g_c\circ\widetilde{g}_c)=c_C\circ\mathcal{G}(\operatorname{Id}_{P_C}+q_C\circ\widetilde{k})=c_C+c_C\circ\mathcal{G}(q_C)\circ\mathcal{G}(\widetilde{k})=c_C,$$

如所要求。这就完成了对 $(\mathcal{F}(C)\ \mathcal{F}(c))$ 是 $\mathcal{C}$ 中 $\mathcal{F}(f)$ 的余核的证明，也就是说，函子 $\mathcal{F}$ 是右正合的。

最后，我们需要证明，若 $\mathcal{F}\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是任意一个右正合函子，且 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\cong\mathcal{G}$，那么 $\mathcal{F}\cong\mathcal{F}$。因此，固定一个自然同构 $\beta\colon\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\to\mathcal{G}\to\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$。我们将把 β扩张为一个自然同构 $\alpha\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}$。与之前一样，对于 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们有一个右正合序列

$$Q_X\xrightarrow{q_X}P_X\xrightarrow{p_X}X\longrightarrow 0,$$

~ ~其中 $Q_X, P_X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，并且 $\mathcal{F}(X) = \mathrm{Coker}\ \mathcal{G}(q_X)$ 属于 $\mathcal{C}$。由于 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}$是右正合的，交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{\mathcal{F}}(Q_X) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{F}}(q_X)} & \widetilde{\mathcal{F}}(P_X) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{F}}(p_X)} & \widetilde{\mathcal{F}}(X) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \beta_{Q_X}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{P_X}} & & \downarrow{\scriptstyle \exists!\,\alpha_X} & & \\
\mathcal{F}(Q_X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(q_X)} & \mathcal{F}(P_X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(p_X)} & \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

具有右正合的行，其中 α_X 的存在性由 β 的自然性和~ ~余核的泛性质（$\mathcal{F}(X)$ $\mathcal{F}(p_X)$）得到。由于 β 是自然同构，并且（$\mathcal{F}(X)$ $\mathcal{F}(p_X)$ 是 $\mathcal{F}(q_X)$ 的余核，因此容易看出 α_X 是可逆的。

~为证明同构 α_X 定义了自然同构 α，设 $f: X \to X$是 $\mathcal{D}$中的一个态射。回顾一下，存在一个态射 g_f： $P_X \to P_{\widetilde{X}}$ 使得

$$f \circ p_X = p_{\widetilde{X}} \circ g_f.$$

Thus

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f) \circ \alpha_X \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_X) &= \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(p_X) \circ \beta_{P_X} = \mathcal{F}(p_{\widetilde{X}}) \circ \mathcal{F}(g_f) \circ \beta_{P_X} \\
&= \mathcal{F}(p_{\widetilde{X}}) \circ \beta_{P_{\widetilde{X}}} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(g_f) = \alpha_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_{\widetilde{X}} \circ g_f) \\
&= \alpha_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(f \circ p_X) = \alpha_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(f) \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_X).
\end{aligned}$$

~ ~由于余核态射 $\mathcal{F}(p_X)$ 是满射，因此可得 $\mathcal{F}(f) \circ \alpha_X = \alpha_{\widetilde{X}} \circ \mathcal{F}(f)$, ~即 α： $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 是一个自然同构。这就完成了定理 A.1 的证明。□

注记 A.2. 定理 A.1 的证明结论表明，任意自然同

~ ~构 β： $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \to \mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$都唯一延拓为一个自然同构 α： $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$。事实上，$_\sim\alpha|_{\widetilde{\mathcal{D}}} = \beta$ 因为对于 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，图表

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{F}}(P_X) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{F}}(p_X)} & \widetilde{\mathcal{F}}(X) \\
\downarrow{\scriptstyle \beta_{P_X}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} \\
\mathcal{F}(P_X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(p_X)} & \mathcal{F}(X)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{F}}(P_X) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{F}}(p_X)} & \widetilde{\mathcal{F}}(X) \\
\downarrow{\scriptstyle \beta_{P_X}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_X} \\
\mathcal{F}(P_X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(p_X)} & \mathcal{F}(X)
\end{array}$$

分别根据 α_X 的构造和 β 的自然性可交换，因此根据 $\mathcal{F}(p_X)$ 的满射性， $\alpha_X = \beta_X$ ~ ~。扩张 α 是唯一的，因为若 $\widetilde{\alpha}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 是满足 $\widetilde{\alpha}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} = \beta$ 的任意自然同构，则

$$\widetilde{\alpha}_X \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_X) = \mathcal{F}(p_X) \circ \widetilde{\alpha}_{P_X} = \mathcal{F}(p_X) \circ \beta_{P_X} = \alpha_X \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_X)$$

对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, ~。因此，由于 $\mathcal{F}(p_X)$ 是满射， $\widetilde{\alpha}_X = \alpha_X$。

我们现在回到定理 3.13 的一般设定： $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔 ~ ~范畴， $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ 是一个加性全子范畴，并且 $\mathcal{G}$： $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性函子。对于任意无序三元组 X_1、 X_2、 $X_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们有一个阿贝尔全子范畴 $\mathcal{D}_{X_1,\ X_2,\ X_3}$，它包含 X_1、 X_2、 X_3 且具有充分多的射影对象；此外，$_\sim\mathcal{D}_{X_1,\ X_2,\ X_3}$ 中的所有射影对象都是 $\mathcal{D}$ 的对象，并且

$$\mathcal{D}_{X_i,X_i,X_i} \subseteq \mathcal{D}_{X_i,X_i,X_j} = \mathcal{D}_{X_i,X_j,X_j} \subseteq \mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}$$

对于所有 i、$j=1$，2，3。为简化记号，对于任意 $X\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们记作 $\mathcal{D}_X=\mathcal{D}_{X,\ X,\ X}$；对于任意 X_1、$X_2\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，我们记作 $\mathcal{D}_{X_1,\ X_2}=\mathcal{D}_{X_1,\ X_1,\ X_2}=\mathcal{D}_{X_1,\ X_2,\ X_2}$。

现在由定理 A.1，对于任意 $X_1,X_2,X_3\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，存在唯一的右正合函子$\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}:\mathcal{D}_{X_1,X_2,\ X_3}\to\mathcal{C}$，使得

$$\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}}\cong\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}}.$$

由注记 3.14 或定理 A.1 的证明可知，为方便起见，我们可以假设~这个定义在函子$\mathcal{D}\cap\mathcal{D}_{X_1,X_2,\ X_3}$ 上的自然同构是严格相等。为简化记号，令 $\mathcal{F}_X=\mathcal{F}_{X,X,X}$ 表示 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 中的对象，并令$\mathcal{F}_{X_1,X_2}=\mathcal{F}_{X_1,X_1,X_2}=\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_2}$ 表示$X_1,X_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$。那么对于 $i,j=1,2,3$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}|_{\mathcal{D}_{X_i,X_j}})|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i,X_j}}&=(\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}})|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i,X_j}}\\&=(\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_1,X_2,X_3}})|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i,X_j}}=\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i,X_j}}.\end{aligned}$$

因此，正如注记 A.2 中所述，恒等自然同构

$$\mathrm{Id}:(\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}|_{\mathcal{D}_{X_i,X_j}})|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i,X_j}}\longrightarrow\mathcal{F}_{X_i,X_j}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i,X_j}}$$

唯一延拓为一个自然同构

$$\alpha^{(i,j)}:\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}|_{\mathcal{D}_{X_i,X_j}}\longrightarrow\mathcal{F}_{X_i,X_j}.$$

类似地，存在一个自然同构

$$\alpha^{(i)}:\mathcal{F}_{X_i,X_j}|_{\mathcal{D}_{X_i}}\longrightarrow\mathcal{F}_{X_i}$$

唯一延拓恒等自然同构

$$\mathcal{F}_{X_i,X_j}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i}}=\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i}}=\mathcal{F}_{X_i}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i}}.$$

对于i、j、k) 对 (1、2、3) 的任意置换，注A.2 表明存在自然同构之间的等式

$$\alpha^{(i)}\circ\alpha^{(i,j)}=\alpha^{(i)}\circ\alpha^{(i,k)}:\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}|_{\mathcal{D}_{X_i}}\longrightarrow\mathcal{F}_{X_i},\tag{A.2}$$

~因为两个复合在 $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}_{X_i}$ 上的限制都是恒等映射。

现在，我们通过以下方式定义所需的函子 $\mathcal{F}$：$\mathcal{D}\to\mathcal{C}$：对任意 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，令 $\mathcal{F}(X)=\mathcal{F}_X(X)$；对于 $\mathcal{D}$ 中的态射 f：$X_1\to X_2$，利用图表的交换性定义 $\mathcal{F}(f)$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}_{X_1,X_2}(X_1)&\xrightarrow{\mathcal{F}_{X_1,X_2}(f)}&\mathcal{F}_{X_1,X_2}(X_2)\\\downarrow{\scriptstyle\alpha^{(1)}_{X_1}}&&\downarrow{\scriptstyle\alpha^{(2)}_{X_2}}\\\mathcal{F}_{X_1}(X_1)&\xrightarrow{\mathcal{F}(f)}&\mathcal{F}_{X_2}(X_2)\end{array}$$

于是，对于任意 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，$\mathcal{F}(\mathrm{Id}_X)=\mathrm{Id}^{\mathcal{F}(X)}$；并且由于对所有 $X_1,X_2\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，$\mathcal{F}_{X_1,X_2}$ 也如此，$\mathcal{F}$在态射上定义了一个 $\mathbb{C}$-线性映射。为证明 $\mathcal{F}$ 保持复合，设 $f_1:X_1\to X_2$ 和 $f_2:X_2\to X_3$ 是 $\mathcal{D}$ 中的态射。那么根据定义，

方程 (A.2) 以及 $\alpha^{(1,2)}$ 和 $\alpha^{(2,3)}$ 的自然性可推出

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(X_1) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(f_1)} & \mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(X_2) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(f_2)} & \mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(X_3) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha^{(1)}_{X_1}\circ\alpha^{(1,3)}_{X_1}=\alpha^{(1)}_{X_1}\circ\alpha^{(1,2)}_{X_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(2)}_{X_2}\circ\alpha^{(1,2)}_{X_2}=\alpha^{(2)}_{X_2}\circ\alpha^{(2,3)}_{X_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(3)}_{X_3}\circ\alpha^{(2,3)}_{X_3}=\alpha^{(3)}_{X_3}\circ\alpha^{(1,3)}_{X_3}} \\
\mathcal{F}_{X_1}(X_1) & \xrightarrow[\mathcal{F}(f_1)]{} & \mathcal{F}_{X_2}(X_2) & \xrightarrow[\mathcal{F}(f_2)]{} & \mathcal{F}_{X_3}(X_3)
\end{array}$$

可交换。该图表结合

$$\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(f_2)\circ\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(f_1)=\mathcal{F}_{X_1,X_2,X_3}(f_2\circ f_1)$$

以及 $\alpha^{(1,3)}$的自然性，可推出 $\mathcal{F}(f_2)\circ\mathcal{F}(f_1)=\mathcal{F}(f_2\circ f_1)$。因此，$\mathcal{F}$是一个函子，并且同一个交换图结合 $\mathcal{F}_{X_1}$的右正合性，X_2，X_3 可推出 $\mathcal{F}$ 是右正合的。

~现在我们证明 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}=\mathcal{G}$。对于 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，有

$$\mathcal{F}(X)=\mathcal{F}_X(X)=\mathcal{G}(X)$$

~因为 $\mathcal{F}_X|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_X}=\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_X}$。对于范畴 $\mathcal{D}$中的态射 $f\colon X_1\to X_2$，有

$$\mathcal{F}(f)=\alpha^{(2)}_{X_2}\circ\mathcal{F}_{X_1,X_2}(f)\circ(\alpha^{(1)}_{X_1})^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathcal{G}(X_2)}\circ\mathcal{G}(f)\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{G}(X_1)}=\mathcal{G}(f)$$

因为 $\mathcal{F}_{X_1,\ X_2}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_1},\ X_2}=\mathcal{G}$ 并且对于 $i=1,\ 2,\ \alpha^{(i)}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i}}$ 是 $\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i}}$的恒等映射自然同构。因此，$\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}=\mathcal{G}$ 在对象和态射上均成立。

~最后，我们需要证明，如果 $\mathcal{F}\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是任意一个 $\mathbb{C}$-线性右正合函子，并且满足 ~$\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\cong\mathcal{G}$，那么 $\mathcal{F}\cong\mathcal{F}$。因此，固定一个自然同构 $\beta\colon\ \widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}\to\mathcal{G}$。对于任意 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，$\beta$ 限制为一个自然同构

$$\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_X}\longrightarrow\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_X}=\mathcal{F}_X|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_X},$$

因此，根据定理 A.1 中的唯一性断言以及备注 A.2，$\beta|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_X}$ 唯一延拓为一个自然同构

$$\eta^{(X)}:\widetilde{\mathcal{F}}|_{\mathcal{D}_X}\longrightarrow\mathcal{F}_X.$$

因此，对于所有 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们可以定义

$$\eta_X=\eta^{(X)}_X:\widetilde{\mathcal{F}}(X)\longrightarrow\mathcal{F}_X(X)=\mathcal{F}(X).$$

~为了证明 η_X 定义了一个自然同构 $\eta:\ \mathcal{F}\to\mathcal{F}$，令 $f:\ X_1\to X_2$ 为 $\mathcal{D}$中的一个态射。由于对于 $i=1,\ \mathcal{D}_{X_i}$，2 有充分多的射影对象，我们可以固定满射$p_i:\ P_i\to X_i$，使得 P_i 在 $\mathcal{D}_{X_i}$中是射影对象，因而也是 $\widetilde{\mathcal{D}}$的一个对象。由于对于 $i=1,\ \alpha^{(i)}$，2 将恒等同构延拓到 $\mathcal{G}|_{\widetilde{\mathcal{D}}\cap\mathcal{D}_{X_i}}$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{\mathcal{F}}(P_i) & \xrightarrow{\beta_{P_i}} & \mathcal{G}(P_i) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathcal{F}}(p_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_{X_i}(p_i)} & \searrow^{\mathcal{F}_{X_1,X_2}(p_i)} & \\
\widetilde{\mathcal{F}}(X_i) & \xrightarrow[\eta_{X_i}]{} & \mathcal{F}_{X_i}(X_i) & \xleftarrow[\alpha^{(i)}_{X_i}]{} & \mathcal{F}_{X_1,X_2}(X_i)
\end{array}$$

~现在固定一个满射 $p_{1,\ 2}: P_{1,\ 2} \to X_1$，使得 $P_{1,\ 2} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{X_1,\ X_2})$ 在$\mathcal{D}_{X_1,\ X_2}$中是射影对象。由射影性可知，存在态射 $\widetilde{p}_1: P_{1,\ 2} \to P_1$ 和 $g_f: P_{1,\ 2} \to P_2$，使得

$$p_{1,2} = p_1 \circ \widetilde{p}_1, \qquad f \circ p_{1,2} = p_2 \circ g_f.$$

接下来我们计算

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f) \circ \eta_{X_1} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_{1,2}) &= \alpha^{(2)}_{X_2} \circ \mathcal{F}_{X_1,X_2}(f) \circ (\alpha^{(1)}_{X_1})^{-1} \circ \eta_{X_1} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_1) \circ \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{p}_1) \\
&= \alpha^{(2)}_{X_2} \circ \mathcal{F}_{X_1,X_2}(f) \circ \mathcal{F}_{X_1,X_2}(p_1) \circ \beta_{P_1} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{p}_1) \\
&= \alpha^{(2)}_{X_2} \circ \mathcal{F}_{X_1,X_2}(f \circ p_1) \circ \mathcal{G}(\widetilde{p}_1) \circ \beta_{P_{1,2}} \\
&= \alpha^{(2)}_{X_2} \circ \mathcal{F}_{X_1,X_2}(p_2) \circ \mathcal{G}(g_f) \circ \beta_{P_{1,2}} \\
&= \mathcal{F}_{X_2}(p_2) \circ \beta_{P_2} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(g_f) \\
&= \eta_{X_2} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_2) \circ \widetilde{\mathcal{F}}(g_f) = \eta_{X_2} \circ \widetilde{\mathcal{F}}(f) \circ \widetilde{\mathcal{F}}(p_{1,2}).
\end{aligned}$$

~ ~由于$p_{1,\ 2}$是满射且 $\mathcal{F}$是右正合的，$\mathcal{F}(p_{1,\ 2})$ 也是满射，因此 $\mathcal{F}(f) \circ \eta_{X_1} =_{\sim} \eta_{X_2} \circ \mathcal{F}(f)$。也就是说，$\eta$是一个自然同构。这就完成了定理3.13的证明。

Appendix B. Proof of Theorem 4.10

~我们假设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 是具有右正合融合积的张量范畴，$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$的幺半子范畴，并且 $\mathcal{F}: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一个右正合函子，使得 $\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}$是一个张量函子。这意味着存在一个同构 $\varphi: \mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathcal{D}}) \to \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ 以及一个自然同构

$$G: \boxtimes_{\mathcal{C}} \circ (\mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}} \times \mathcal{F}|_{\widetilde{\mathcal{D}}}) \to (\mathcal{F} \circ \boxtimes_{\mathcal{D}})|_{\widetilde{\mathcal{D}} \times \widetilde{\mathcal{D}}}$$

它们与 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$的单位同构与结合子同构适当地相容。我们还假设，任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$都包含于一个阿贝尔全子范畴$\mathcal{D}_{X,\ X} \subseteq \mathcal{D}$~该子范畴具有充分多的射影对象，使得$\mathcal{D}_{X,\ X}$ 的每个投射对象都包含于 $\mathcal{D}$中。因此我们可以固定一个右正合序列

$$Q_X \xrightarrow{q_X} P_X \xrightarrow{p_X} X \longrightarrow 0$$

~使得 Q_X 和 P_X 在 $\mathcal{D}_X$中是射影对象，X，因此它们也是 $\mathcal{D}$中的对象。

此外，对于 $\mathcal{D}$中的任意态射 $f: X_1 \to X_2$，我们假设 X_1 和 X_2 包含于一个阿贝尔全子范畴 $\mathcal{D}_{X_1}$中，X_2 该子范畴包含 $\mathcal{D}_{X_1}$、X_1 和 $\mathcal{D}_{X_2,\ X_2}$ 并且具有足够多的射影对象，使得 $\mathcal{D}_{X_1}$中的每个射影对象X_2 都包含于 $\mathcal{D}$中。因此，我们可以固定一个满射 $p_f: P_f \twoheadrightarrow X_1$，使得 P_f 在 $\mathcal{D}_{X_1}$中是射影对象。X_2由射影性可知，对于 $i = 1$，存在态射 $q_f^{(i)}: P_f \to P_{X_i}$，2，使得图表

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_f & \xrightarrow{q_f^{(2)}} & P_{X_2} \\
 & \swarrow^{q_f^{(1)}} & \downarrow{\scriptstyle p_f} & & \downarrow{\scriptstyle p_{X_2}} \\
P_{X_1} & \xrightarrow{p_{X_1}} & X_1 & \xrightarrow{f} & X_2
\end{array} \tag{B.1}$$

交换。

现在，对于 W、$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$，我们希望通过图表的交换性定义一个同构 $F_{W,X}\colon \mathcal{F}(W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(W \boxtimes_{\mathcal{D}} X)$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{F}(Q_W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(P_X)) \oplus (\mathcal{F}(P_W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(Q_X)) & \xrightarrow{\Gamma} & \mathcal{F}((Q_W \boxtimes_{\mathcal{D}} P_X) \oplus (P_W \boxtimes_{\mathcal{D}} Q_X)) \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathcal{F}(q_W)\boxtimes \mathrm{Id})\circ\pi_1 + (\mathrm{Id}\boxtimes\mathcal{F}(q_X))\circ\pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}((q_W\boxtimes \mathrm{Id})\circ\pi_1 + (\mathrm{Id}\boxtimes q_X)\circ\pi_2)} \\
\mathcal{F}(P_W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(P_X) & \xrightarrow[G_{P_W,P_X}]{} & \mathcal{F}(P_W \boxtimes_{\mathcal{D}} P_X) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(p_W)\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{F}(p_X)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(p_W\boxtimes_{\mathcal{D}} p_X)} \\
\mathcal{F}(W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(X) & \overset{\exists!\, F_{W,X}}{\dashrightarrow} & \mathcal{F}(W \boxtimes_{\mathcal{D}} X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

这里的 π_1 和 π_2 是显然的投影，并且

$$\Gamma = \mathcal{F}(\varepsilon_1) \circ G_{Q_W,P_X} \circ \pi_1 + \mathcal{F}(\varepsilon_2) \circ G_{P_W,Q_X} \circ \pi_2$$

是一个同构，其中 ε_1 和 ε_2 是显然的包含。根据引理 2.5 以及 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$、$\boxtimes_{\mathcal{D}}$ 和 $\mathcal{F}$ 的右正合性，图表的各列都是右正合的。因此，根据余核的泛性质（$\mathcal{F}(W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(X)$ $\mathcal{F}(p_W) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(p_X)$），$F_{W,X}$ 的存在性和唯一性随之得到。由于 Γ 和 G_{P_W,P_X} 是可逆的，$F_{W,X}$ 也是可逆的。

为证明同构 $F_{W,X}$ 定义了一个自然同构，考虑态射 $f\colon W_1 \to W_2$ 和 $g\colon X_1 \to X_2$ 其中 $\mathcal{D}$。然后利用（B.1），

$$\begin{aligned}
&F_{W_2,X_2} \circ (\mathcal{F}(f) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(g)) \circ (\mathcal{F}(p_f) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(p_g)) \\
&\quad = F_{W_2,X_2} \circ (\mathcal{F}(p_{W_2}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(p_{X_2})) \circ (\mathcal{F}(q_f^{(2)}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(q_g^{(2)})) \\
&\quad = \mathcal{F}(p_{W_2} \boxtimes_{\mathcal{D}} p_{X_2}) \circ G_{P_{W_2},P_{X_2}} \circ (\mathcal{F}(q_f^{(2)}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(q_g^{(2)})) \\
&\quad = \mathcal{F}(p_{W_2} \boxtimes_{\mathcal{D}} p_{X_2}) \circ \mathcal{F}(q_f^{(2)} \boxtimes_{\mathcal{D}} q_g^{(2)}) \circ G_{P_f,P_g} \\
&\quad = \mathcal{F}(f \boxtimes_{\mathcal{D}} g) \circ \mathcal{F}(p_{W_1} \boxtimes_{\mathcal{D}} p_{X_1}) \circ \mathcal{F}(q_f^{(1)} \boxtimes_{\mathcal{D}} q_g^{(1)}) \circ G_{P_f,P_g} \\
&\quad = \mathcal{F}(f \boxtimes_{\mathcal{D}} g) \circ \mathcal{F}(p_{W_1} \boxtimes_{\mathcal{D}} p_{X_1}) \circ G_{P_{W_1},P_{X_1}} \circ (\mathcal{F}(q_f^{(1)}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(q_g^{(1)})) \\
&\quad = \mathcal{F}(f \boxtimes_{\mathcal{D}} g) \circ F_{W_1,X_1} \circ (\mathcal{F}(p_{W_1}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(p_{X_1})) \circ (\mathcal{F}(q_f^{(1)}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(q_g^{(1)})) \\
&\quad = \mathcal{F}(f \boxtimes_{\mathcal{D}} g) \circ F_{W_1,X_1} \circ (\mathcal{F}(p_f) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(p_g)).
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}(p_f) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(p_g)$ 是满射，这归因于 $\mathcal{F}$ 和 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ 的右正合性，因此可知 F 是自然的，正如所要求的。

为了证明自然同构 F 与 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$的左单位同构相容，我们需要证明图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathcal{D}}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{F_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}},X}} & \mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathcal{D}} \boxtimes_{\mathcal{D}} X) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(l_X)} \\
\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{l_{\mathcal{F}(X)}} & \mathcal{F}(X)
\end{array}$$

对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$都交换。事实上，由于 G 是自然的，且与 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$中的左$\tilde{}$单位同构相容，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(l_X)\circ F_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}},X}\circ(\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{F}(p_X)) &= \mathcal{F}(l_X)\circ\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}\boxtimes_{\mathcal{D}}p_X)\circ G_{P_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}},P_X}\\ &= \mathcal{F}(l_X)\circ\mathcal{F}(\mathrm{Id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}\boxtimes_{\mathcal{D}}p_X)\circ\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}\boxtimes_{\mathcal{D}}\mathrm{Id}_{P_X})\circ G_{P_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}},P_X}\\ &= \mathcal{F}(p_X)\circ\mathcal{F}(l_{P_X})\circ G_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}},P_X}\circ(\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(P_X)})\\ &= \mathcal{F}(p_X)\circ l_{\mathcal{F}(P_X)}\circ((\varphi\circ\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}}))\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(P_X)})\\ &= l_{\mathcal{F}(X)}\circ(\varphi\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)})\circ(\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{F}(p_X)).\end{aligned}$$

Thus 因为 $\mathcal{F}(p_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}})\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{F}(p_X)$ 是满射（由 $\mathcal{F}$和 $\boxtimes_{\mathcal{C}}$的右正合性可知），

$$\mathcal{F}(l_X)\circ F_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}},X} = l_{\mathcal{F}(X)}\circ(\varphi\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}).$$

同样， F 与 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$的右单位、结合律及编织同构（若有）相容，因此 F 和 φ 赋予 $\mathcal{F}$ 一个（编织）张量函子的结构。

最后，对任意的自然伸缩$\tilde{}$结，且 $\mathcal{F}(\theta_P)=\theta_{\mathcal{F}(P)}$对所有 $P\in\mathrm{Ob}($

$$\mathcal{F}(\theta_X)\circ\mathcal{F}(p_X)=\mathcal{F}(p_X)\circ\mathcal{F}(\theta_{P_X})=\mathcal{F}(p_X)\circ\theta_{\mathcal{F}(P_X)}=\theta_{\mathcal{F}(X)}\circ\mathcal{F}(p_X)$$

对所有 $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. 这意味着 $\mathcal{F}(\theta_X)=\theta_{\mathcal{F}(X)}$，因为 $\mathcal{F}(p_X)$ 由 $\mathcal{F}$的右正合性可知是满射。定理 4.10的证明到此完成。

References

[Ab] T. Abe, 辛费米子顶点算子超代数的一个 $\mathbb{Z}_2$ *Math. Z.* -orbifold 模型, **255** 2007 4, 755 792 ( ), no. – . [AA] T. Abe and Y. Arike, 辛费米子所产生的顶点算子代数的交织算子与融合规则， *J. Algebra* **373** (2013), 39–64. [ADL] T. Abe, C. Dong and H. Li, 顶点算子代数 $M\ 1^{+}$ V_L^{+} *Comm.* ( ) 和 的融合规 *Math. Phys.* **253** 2005 1, 171 219 则, ( ), no. – . [AM] D. Adamovi ´ $\mathcal{W}\ p$ 2008 6, c and A. 2664 2699 Milas, 关于三重态顶点代数 ( )， *Adv. Math.* **217** ( ), no. – .[Ar] T. Arakawa, $\mathcal{S}$类手征代数与 Moore-Tachikawa辛簇, arXiv:1811.01577. [ACKR] J. Auger, T. Creutzig, S. Kanade and M. Rupert, 与 $\mathcal{B}_p$ 顶点代数相关的编织张量范畴， *Comm. Math. Phys.* **378** (2020), no. 1, 219–260. [CM] S. Carnahan and M. Miyamoto, 不动点顶点算子代数的正则性, arXiv:1603.05645.[CDGG]T. Creutzig, T. Dimofte, N. Garner and N. Geer, 一个非半单拓扑量子场论的量子场论, arXiv:2112.01559.[CG] T. Creutzig and T. Gannon, 对数共形场论、对数模张量范畴与模形式， *J. Phys. A* **50** (2017), no. 40, 404004, 37 pp. [CJORY] T. Creutzig, C. Jiang, F. Orosz Hunziker, D. Ridout and J. Yang, 由 Virasoro代数产生的张量范畴， *Adv. Math.* **380** (2021), 107601, 35 pp. [CKLR] T. Creutzig, S. Kanade, A. Linshaw and D. Ridout, Heisenberg余集的Schur-Weyl对偶性, *Transform. Groups* **24** (2019), no. 2, 301–354. [CKM1] T. Creutzig, S. Kanade and R. McRae, 顶点算子超代数扩张的张量范畴, 即将在 *Mem. Amer. Math. Soc.*出版, arXiv:1705.05017. [CKM2] T. Creutzig, S. Kanade and R. McRae, 粘合顶点代数, T. Creutzig, S. Kanade and R. McRae, 粘合顶点代数， *Adv. Math.* **396** (2022), Paper No. 108174, 72 pp. [CLR] T. Creutzig, S. Lentner and M. Rupert, 对数顶点算子代数所关联编织张量范畴的刻画, arXiv:2104.13262. [CMY1] T. Creutzig, R. McRae and J. Yang, 顶点张量范畴的直接极限完备化， *Commun.* ( ), no. Paper *Contemp. Math.* **24** 2022 2, 2150033, 60 No. pp.

[CMY2] T. Creutzig, R. McRae and J. Yang, 关于单态顶点代数的带状范畴,
Comm. Math. ( ), no. – .
Phys. **387** 2021 2, 865 925
[CMY3] T. Creutzig, R. McRae and J. Yang, 单态顶点代数完整表示范畴上的带状张量结构 , *Adv. Math.* **413** (2023), Paper No. 108828, 79 pp. [CR] T. Creutzig and D. Ridout, 对数共形场论：超越入门,
J. Phys. ( ), no.
A **46** 2013 49, 494006, 72
pp. [CY] T. Creutzig and J. Yang, 超越可容许层级的仿射李代数张量范畴,
Math. ( ), no. - –
Ann. **380** 2021 3 4, 1991 2040
. [De] P. Deligne, 坦纳范畴（法语） , ´, *The Grothendieck Festschrift*, 111–195, Progr. Math., 87, Birkh
*Vol. II*äuser 波士顿, 波士顿, MA, 1990. ¨DL[C. Dong and J. Lepowsky,] , 数学进展丛书, 112, Birkh
*Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*äuser Boston, Inc., 波士顿, MA, 1993, x¨pp.
+202 EGNO[P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych and V. Ostrik,] , 数学调查与专著, 205, 美国数学学会, 普罗维登斯, RI, 2015, xvi *Tensor Categories*pp. +343 FGR[V. Farsad, A. Gainutdinov and I. Runkel, 辛费米子带状拟霍普夫代数及其中心上的] (2, SL)-作用, $\mathbb{Z}$(2022), Paper No. 108247, 87 pp. *Adv. Math.* **400** FG[B. Feigin and S. Gukov, VOA] ,[M_4](2020), no. 1, 012302, 27 pp. *J. Math. Phys.* **61** FHL[I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, 关于顶点算子代数及其模的公理化方法,] (1993), no. 494, viii
Mem. Amer. Math. Soc. **104** pp. +64 FLM[I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman,] , 纯粹与应用数学, 134, Academic Press, Inc., 波士顿, MA, 1988, liv *Vertex Operator Algebras and the Monster*pp. +508 GK[M. Gaberdiel and H. Kausch, 一种局部对数共形场论,] (1999), no. 3, 631–658. *Nuclear Phys. B* **538** GR[A. Gainutdinov and I. Runkel, 辛费米子与 1] (2) 上的拟霍普夫代数结构, $\overline{U}_i s\ell$(2017), 415–458.
J. Algebra **476** GR[A. Gainutdinov and I. Runkel, 非半单 Verlinde 公式与伪迹函数, 2] (2019), no. 2, 660–690. *J. Pure Appl. Algebra* **223** GN[T. Gannon and C. Negron, 量子] (2) 与 (SL, 1)-中心荷处的对数顶点算子代数, 即将在 p出版, arXiv:2104.12821. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*Hu[Y.-Z. Huang, 微分方程与交织算子, 1] (2005), no. 3, 375–400. *Commun. Contemp. Math.* **7** Hu[Y.-Z. Huang, 顶点张量范畴的刚性与模性, 2] (2008), suppl. 1, 871–911. *Commun. Contemp. Math.* **10** Hu[Y.-Z. Huang, 余有限条件、射影覆盖与对数张量积理论, 3] (2009), no. 4, 458–475. *J. Pure Appl. Algebra* **213** Hu[Y.-Z. Huang, 顶点算子代数的表示与编织有限张量范畴, 4] , 97–111, 当代数学, 497, 美国数学学会, 普罗维登斯, RI, 2009.
*Vertex Operator Algebras and Related Areas*HKL[Y.-Z. Huang, A. Kirillov, Jr. and J. Lepowsky, 编织张量范畴与顶点算子代数的扩张,] (2015), no. 3, 1143–1159. *Comm. Math. Phys.* **337** HL[Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, 张量范畴与有理及对数共形场论的数学,] (2013), no. 49, 494009, 21 pp. *J. Phys. A* **46** HLZ[Y.-Z. Huang, J, Lepowsky and L. Zhang, 共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，I：引言、强分次代数及其广义模, 1] , 169–248, Math. Lect. Peking Univ., 施普林格, 海德堡, 2014.
*Conformal field theories and tensor categories*HLZ[Y.-Z. Huang, J, Lepowsky and L. Zhang, 共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，II：对数形式演算与对数交织算子的性质, arXiv:1012.4196. 2] HLZ[Y.-Z. Huang, J, Lepowsky and L. Zhang, 共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，III：交织映射与张量积双函子, arXiv:1012.4197.3] HLZ[Y.-Z. Huang, J, Lepowsky and L. Zhang, 共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论, IV：张量积双函子的构造与相容性条件, arXiv:1012.4198.

[HLZ5] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，V：交织映射的收敛条件及相应的相容条件》，arXiv:1012.4199。[HLZ6] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，VI：展开条件、对数交织算子的结合律及结合子同构》，arXiv:1012.4202。[HLZ7] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，VII：收敛性与延拓性质及其在交织映射展开中的应用》，arXiv:1110.1929。[HLZ8] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，VIII：共形顶点代数广义模范畴上的编织张量范畴结构》，arXiv:1110.1931。[Ka1] H. Kausch，《由一组初级场生成的扩张共形代数》，*Phys. Lett. B* ( )，第 – **259** 1991 4, 448 455 期。[Ka2] H. Kausch，《在 $c = -2$中的奇闻》，arXiv:hep-th/9510149。[Ka3] H. Kausch，《辛费米子》，*Nuclear Phys. B* **583** (2000)，第 3 期，513–541。[KO] A. Kirillov, Jr. 和 V. Ostrik，论 q的麦凯对应类比及 ADE 共形场论的 $\mathfrak{sl}_2$ 分类，*Adv. Math.* **171** (2002)，第 2 期，183–227。[LL] J. Lepowsky 和 H. Li，《*Introduction to vertex operator algebras and their representations*》，数学进展丛书，第 227 卷，Birkh¨auser，波士顿，2004，xiv+318 页。[Lin] X. Lin，《有理顶点算子代数的镜像扩张》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017)，第 6 期，3821–3840。[LF] I. L´opez Franco，《有限余完备阿贝尔范畴的张量积》，*J. Algebra* **396** (2013)，207–219。[McR1] R. McRae，《紧致轨形顶点算子代数模的张量结构》，*Math.* ( )，*Z.* **296** 2020 1 2, 409 452 第 – 期。[McR2] R. McRae，《余集顶点算子代数的一般镜像等价定理》，arXiv:2107.06577。[McR3] R. McRae，《关于 C_2-余有限顶点算子代数的有理性》，arXiv:2108.01898。[MY1] R. McRae 和 J. Yang，《整数 $p > 1$对应中心荷 $13 - 6p - 6p^{-1}$ 时 Virasoro 张量范畴的结构》，arXiv:2011.02170。[MY2] R. McRae 和 J. Yang，《Virasoro 代数中心荷为 25 时的一类 $\mathfrak{sl}_2$ 型张量范畴及其应用》，*Math. Z.* **303** (2023)，第 2 期，论文编号 32，共 40 页。[Mi1] M. Miyamoto，《满足 C_2 *Duke* -余有限 *Math. J.* **122** 2004 1, 51 91 性的顶点算子代数的模不变性》，( )，第 – 期。[Mi2] M. Miyamoto，《顶点算子代数的 C_1 *Conformal Field* -余有限 *Theories and Tensor Categories* 271 279, 2014 性与融合积》，，– 北京大学数学讲义，施普林格，海德堡，。[Na] W. Nahm，《准有理融合积》，*Internat. J. Modern Phys. B* **8** (1994)，第 25–26 期，3693–3702。[Ru] I. Runkel，《自由超玻色子的编织幺半范畴》，*J. Math. Phys.* **55** (2014 4, 041702, 59)，第 pp. 期。[Ta] M. Takeuchi，《余模范畴的莫里田定理》，*J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **24** 1977 3, 629 644 ( )，第 – 期。[TW] A. Tsuchiya 和 S. Wood，《三重代数表示范畴上的张量结构》。$\mathcal{W}_p$ *J. Phys. A* **46** (2013)，第 44 期，445203，共 40 页。[Zh] Y. Zhu，《顶点算子代数特征标的模不变性》，*J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996)，第 1 期，237–302。

Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, China
Email address: rhmcrae@tsinghua.edu.cn