arXiv:2304.14055v1 [math.OA] 27 Apr 2023

紧量子群和离散量子群的作用

JoeriDe Ro Lucas Hataishi

摘要

我们引入离散量子群或紧量子群作用于算子系统的概念，并研究等变算子系统内射性。随后，我们证明了一个对偶性结果，将等变内射性与相关交叉积上的对偶内射性联系起来。作为应用，我们描述了由离散量子群对算子系统的作用所构造的约化交叉积的等变内射包。

1 引言

与离散群 Γ 相关联的 Furstenberg 边界 $\partial_F\Gamma$ Γ 自然地属于 Hamana理论中的 Γ-内射包 [Ham85] ，因为注意到 $C(\partial_F\Gamma) = I_\Gamma(\mathbb{C})$。这一关键洞见推动了对 C^*-单离散群 [KK17], 的理解取得重要进展，并且非常适合推广到量子情形。这一方向最早在 [KKV22] 中进行了探索，随后又在 [HHN22]中得到研究。这些论文的重要部分致力于理解某个量子群作用于其上的（含单位元） C^*-代数的等变内射性概念。

本文继续研究紧量子群和离散量子群作用下的等变内射性。由于（等变）单射性的概念自然是在算子系统的语境下研究的，我们首先引入紧量子群和离散量子群在算子系统上的作用这一概念，进而提出等变算子系统的概念。这为研究等变内射性，以及由此延伸出的紧量子群和离散量子群的其他动力学性质，提供了统一而自然的框架。我们选择研究紧量子群和离散量子群，而非一般的局部紧量子群，是经过慎重考虑的：本文主要结果的证明依赖于紧量子群及其对偶的特定结构。尽管如此，本文中的某些定义可以直接推广到局部紧量子群的层面，但为使论述更具体、技术性更低，我们没有这样做。

现在，我们概述本文的内容。

在第 *2* 节中，我们解释本文所采用的记号和约定，并回顾一些与本文目的相关的理论。首先，我们讨论算子系统及算子系统的张量积。我们将特别关注算子系统的 Fubini张量积，它将在本文中发挥关键作用。接下来，我们简要回顾紧量子群与离散量子群的理论。本文采用的量子群框架如下：我们从一个紧量子群 G 出发，并将离散量子群视为紧量子$\widehat{\ }$群的对偶。G 的对偶离散量子群记为 G。

在第 *3* 节中，我们将发展紧量子群和离散量子群作用于算子系统的基础理论。若 G 是紧量子群，我们将考虑带有 G作用 X G 的算子系统 X 的两种概念：

1. G-C^*-算子系统（定义 3.1），可将其视为算子系统框架下紧量子群作用于 C^*-代数这一概念的一种推广。

2. G-W^*-算子系统（定义 3.8），可将其视为算子系统框架下紧量子群作用于冯·诺伊曼代数这一概念的一种变体。

本文引入了 G-C^*-算子系统的 G-C^*-单射性概念，以及 G-W^*-算子系统的 G-W^*-单射性概念（定义 3.11）。

接下来，我们引入 G-算子系统的概念，它由一个算子系统 X及其作用 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \widehat{\mathbb{G}}$（定义 3.20）构成。我们还定义并研究 G-$\widehat{\ }$算子系统的 $\widehat{\ }$G-单射性概念。对于 G-$\widehat{\ }$算子系统 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \widehat{\mathbb{G}}$，我们定义约化交叉积 $X \rtimes_{\alpha,\, r} \widehat{\mathbb{G}}$（定义 3.30）和 Fubini 交叉积 $X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$（定义 3.31）。我们证明 $X \rtimes_{\alpha,\, r} \widehat{\mathbb{G}}$ 具有典范的 G-C^*-算子系统结构，且 $X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$ 具有典范的 G-W^*-算子系统结构，并研究这些等变算子系统（定理 3.37）。

在第 *4* 节中，我们证明本文的主要结果：

定理 4.3. 若 X 是一个带有作用 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \widehat{\mathbb{G}}$的算子系统，则以下命题等价：

1. X 是$\mathbb{G}$-内射的。
2. $X \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{G}$ 是$\mathbb{G}$-C^*-内射的。
3. $X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \mathbb{G}$ 是$\mathbb{G}$-W^*-内射的。

此外，若$\mathbb{G}$ 是 *Kac* 型，则 X 是$\mathbb{G}$-内射的，当且仅当 $X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \mathbb{G}$ 作为算子系统是内射的。

请注意，这一结果在经典情形下恢复了原始结果 [Ham82, II, 引理 3.1]，同时也将其推广到了交叉积的等变情形。

将主要结果应用于 C G 的情形，可得到以下关于 G 的可和性的刻画，该刻画以相关算子代数及其典范 G-作用的等变内射性为依据：

推论 4.4。以下陈述等价：

1. $\mathbb{G}$是可 *amenable*。
2. $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$ 是 $\mathbb{G}$-W^*-内射。
3. $C_r(\mathbb{G})$是 $\mathbb{G}$-C^*-内射。

请注意，在 [Cra17], 中，$\widehat{\mathbb{G}}$ 的可和性是利用 $\mathscr{L}^\infty$(G) 作为算子 L^1(G)-模的 1-内射性这一概念刻画的，这与该结果中的一个等价条件有些相似。

在 第 *5* 节中，我们证明，如果 X 是一个 G-C^*-算子系统，那么 X 具有一个 G-C^*-内射包 $I^{C^*}{}_{\mathbb{G}}(X)$；并且如果 X 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统，那么 X 具有一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-内射包$I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X)$。随后，我们通过以下对偶性结果联系这两个内射包：

定理 5.5。设 X 是一个$\mathbb{G}$-算子系统。那么

$$I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X) \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}} = I_{\mathbb{G}}^{C^*}(X \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}).$$

2 预备知识

2.1 算子系统的张量积

算子系统。 [Pau02] 算子系统 X 是一个范数闭、自伴的线性子空间 $X \subseteq B(\mathrm{H})$，其中 H 是希尔伯特空间，且 X 包含 $B(\mathrm{H})$ 的单位元。我们记作$X_* := \{\omega|_X : \omega \in B(\mathrm{H})_*\}$。我们将（幺正）完全正映射简称为（幺正）cp 映射，将（幺正）完全等距映射简称为（幺正）ci 映射。若 $Y \subseteq X$ 是算子系统，则若映射 $\varphi : X \to Y$ 是完全正且幺正的条件期望，当且仅当 φ 是一个 ucp 映射，并且对所有 $y \in Y$，都有 $\varphi(y) = y$。若算子系统 I 满足：对于每个 ucp 映射 $\varphi : X \to I$ 和每个 uci 映射 $\iota : X \to Y$，都存在一个 ucp 映射 $\Phi : Y \to I$ 使得 $\Phi\iota = \phi$，则称其为内射算子系统。Arveson 延拓定理指出，对于每个希尔伯特空间 H， $B(\mathrm{H})$ 都是一个内射算子系统。

给定两个算子系统，我们将会用到几种不同类型的张量积。向量空间的通常代数张量积记为 $\odot$。字母 H 和 K 始终表示希尔伯特空间，它们的希尔伯特空间张量积记为 $\mathrm{H} \otimes \mathrm{K}$。我们假设内积对第二个因子是线性的。

空间张量积。 [Pau02，第 12] 章令 $X \subseteq B(\mathrm{H})$ $Y \subseteq B(\mathrm{K})$ 为算子系统。我们将 X 与 Y 的空间张量积定义为 $X \odot Y$ 在 $B(\mathrm{H} \otimes \mathrm{K})$ 中的闭线性包。如果 X、Y 是 C^*-代数，这与 C^*-代数的最小张量积一致。如果 $\phi_1 : X_1 \to Y_1$ 和 $\phi_2 : X_2 \to Y_2$ 是完全正幺映射，则存在唯一的完全正幺映射 $\phi_1 \otimes \phi_2 : X_1 \otimes Y_1 \to X_2 \otimes Y_2$，其扩张 $\phi_1 \odot \phi_2 : X_1 \odot Y_1 \to X_2 \odot Y_2$。

Fubini张量积</style》。Ham82；Ham令(H)(K)为算子系统。我们定义Fubini张量积

$$X \mathbin{\overline{\otimes}} Y = \{z \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) : (\omega \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id})(z) \in Y \text{ and } (\mathrm{id} \mathbin{\overline{\otimes}} \chi)(z) \in X \text{ for all } \omega \in B(\mathcal{H})_*, \chi \in B(\mathcal{K})_*\}$$

它仍然是一个算子系统。Fubini张量积具有显然的交换性、结合性和分配性（相对于算子系统的 ℓ^∞-直和）等性质。如果 X 或 Y 是有限维的，那么$X \mathbin{\overline{\otimes}} Y$与代数张量积$X \odot Y$重合。如果 X、Y都是冯·诺伊曼代数，那么Fubini张量积就是冯·诺伊曼张量积。

如果 $X_i \subseteq B(\mathrm{H}_i)$ $i = 1$、2是算子系统，且 $\phi : X_1 \to X_2$是一个ucp 映射，则存在唯一的ucp 映射 $\phi \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id} : X_1 \mathbin{\overline{\otimes}} B(\mathrm{K}) \to X_2 \mathbin{\overline{\otimes}} B(\mathrm{K})$，它扩张了 $\phi \odot \mathrm{id} : X_1 \odot B(\mathrm{K}) \to X_2 \odot B(\mathrm{K})$。类似地，如果 $Y_i \subseteq B(\mathrm{K}_i)$ $i = 1$、2是算子系统，且 $\psi : Y_1 \to Y_2$是ucp 映射，我们可以定义ucp 映射$\mathrm{id} \mathbin{\overline{\otimes}} \psi : B(\mathrm{H}) \mathbin{\overline{\otimes}} Y_1 \to B(\mathrm{H}) \mathbin{\overline{\otimes}} Y_2$。

为了确保一切顺利，我们需要施加连续性假设。以下结果说明了这一点；后文将经常用到这些结果，不再另行说明。

引理 2.1. *[Ham82, I,* 引理 *3.8]* 采用上述记号，设 $Y \subseteq B(\mathcal{K})$ 为一个算子系统，则有 $(\phi \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id})(X_1 \mathbin{\overline{\otimes}} Y) \subseteq X_2 \mathbin{\overline{\otimes}} Y$，只要 Y 是 σ- 弱闭的，或者 X_1 和 X_2 是 σ- 弱闭的且 $\phi : X_1 \to X_2$ 是 σ- 弱连续的。对于 $\mathrm{id} \mathbin{\overline{\otimes}} \psi$也有类似结果。

命题 2.2. *[Ham82, I,* 引理 *3.9]* 采用上述记号，若 Y_1 和 Y_2 是 σ-弱闭的，且 $\psi : Y_1 \to Y_2$ 是 σ- 弱连续的，则复合映射

$$(\mathrm{id}_{B(\mathcal{H}_2)} \mathbin{\overline{\otimes}} \psi) \circ (\phi \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}_{B(\mathcal{K}_1)}), \quad (\phi \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}_{B(\mathcal{K}_1)}) \circ (\mathrm{id}_{B(\mathcal{H}_1)} \mathbin{\overline{\otimes}} \psi)$$

在 $X_1 \mathbin{\overline{\otimes}} Y_1$ 上一致，并将 $X_1 \mathbin{\overline{\otimes}} Y_1$ 映射到 $X_2 \mathbin{\overline{\otimes}} Y_2$中。这样，我们得到一个典范映射 $\phi \mathbin{\overline{\otimes}} \psi : X_1 \mathbin{\overline{\otimes}} Y_1 \to X_2 \mathbin{\overline{\otimes}} Y_2$。如果 ϕ，ψ 是完全序同构，那么 $\phi \mathbin{\overline{\otimes}} \psi$也是如此。因此，作为抽象算子系统，*Fubini*张量积只取决于各因子的同构类。

命题 2.3。 设 $X \subseteq B(\mathcal{H})$ $Y \subseteq B(\mathcal{K})$ 是算子系统，在$B(\mathcal{K})$中 Y σ-弱闭。假设 $f \in X^*$ 和 $g \in Y_*$。存在典范切片映射 $f \overline{\otimes}\mathrm{id}_Y : X \overline{\otimes} Y \to Y$和 $\mathrm{id}_X \overline{\otimes} g : X \overline{\otimes} Y \to X$，它们扩展了 $f \odot \mathrm{id} : X \odot Y \to Y$和 $\odot g : X \odot Y \to X$id，是范数有界的，并满足

$$g \circ (f \overline{\otimes} \mathrm{id}_Y) = f \circ (\mathrm{id}_X \overline{\otimes} g).$$

这使我们能够定义乘积泛函 $f \overline{\otimes} g : X \overline{\otimes} Y \to \mathbb{C}$。

随后一切都如预期般进行。例如：

命题 2.4. *[Ham11，命题 1.2]* 假设 $X_i \subseteq B(\mathcal{H}_i)$ 和 $Y_i \subseteq B(\mathcal{K}_i)$ 是算子系统。设 $\varphi : X_1 \to X_2$ 和 $\psi : Y_1 \to Y_2$ 是 *ucp* 映射，且在 $B(\mathcal{K}_i)$中 ψ σ-弱连续且Y_i σ-弱闭。若 $f \in X_2^*$和 $g \in (Y_2)_*$，则

$$(f \overline{\otimes} \mathrm{id}_{Y_2}) \circ (\varphi \overline{\otimes} \psi) = \psi \circ ((f \circ \varphi) \overline{\otimes} \mathrm{id}_{Y_1}), \quad (\mathrm{id}_{X_2} \overline{\otimes} g) \circ (\varphi \overline{\otimes} \psi) = \varphi \circ (\mathrm{id}_{X_1} \overline{\otimes} (g \circ \psi)).$$

我们还提及以下结果：

命题 2.5. *[Ham82，I.* 命题 *3.10]* 若 $X \subseteq B(\mathcal{H})$ 是一个算子系统，且 $Y \subseteq B(\mathcal{K})$ 是一个 σ-弱闭算子系统，则 $X \overline{\otimes} Y$作为算子系统是内射的，当且仅当 X 和 Y 作为算子系统均为内射。

如果本文中出现 Fubini张量积（可能包含两个以上的因子），则除第一个因子外，所有因子都必定是冯·诺伊曼代数；如果考虑冯·诺伊曼代数之间的张量积映射，那么作用于这些因子的映射也必定是 σ-弱连续的。因此，在本文中我们无需过多担心 Fubini张量积所带来的技术性问题。

2.2 紧量子群与离散量子群

紧量子群。 [Wor98；NT13；Tim08] 一个紧量子群（= CQG）G 由一对（C(G) Δ）构成，其中 C(G) 是一个含单位元的 C^*-代数，并且 $\Delta : C(\mathrm{G}) \to C(\mathrm{G}) \otimes C(\mathrm{G})$ 是一个满足余结合性（id ⊗Δ）Δ =（Δ ⊗ id）Δ 的含单位元 $*$-同态，同时还满足量子消去律 [Δ（C(G)）（$1 \otimes C(\mathrm{G})$)] = C(G) ⊗ C(G) = [Δ（C(G)）（C(G) ⊗ 1）]。

每个紧量子群都存在唯一的状态 $\varphi_{\mathbb{G}} : C(\mathrm{G}) \to \mathbb{C}$，称为 Haar态，并满足以下不变性条件

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})\Delta(a) = \varphi_{\mathbb{G}}(a)1 = (\varphi_{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id})\Delta(a), \quad a \in C(\mathbb{G}).$$

如果 Haar态 $\varphi_{\mathbb{G}}$ 是迹，则称 G 为 Kac 型紧量子群。如果 Haar态 $\varphi_{\mathbb{G}}$ 是忠实的，则称 G 为约化的。

对于状态 $\varphi_{\mathbb{G}}$，我们可以考虑 GNS三元组 (L^2(G) $\lambda, \xi_{\mathbb{G}}$)，其中 $\lambda : C(\mathrm{G}) \to B(L^2(\mathrm{G}))$ 是一个 $*$-表示， $\xi_{\mathbb{G}} \in L^2$(G) 是循环向量，且满足 $\varphi_{\mathbb{G}} = \xi_{\mathbb{G}}, \lambda(-)\xi_{\mathbb{G}}$。我们还将考虑 GNS 映射 $\Lambda : C(\mathrm{G}) \to L^2(\mathrm{G}) : a \mapsto \lambda(a)\xi_{\mathbb{G}}$，并定义 C_r(G) =λ(C(G))。

G 的酉有限维（= ufd）表示 π 由一对 (H_π, U_π) 构成，其中 H_π是一个有限维希尔伯特空间，而 $U_\pi \in B(\mathrm{H}_\pi) \otimes C(\mathrm{G})$ 是一个酉 ⊗Δ，满足 (id U_π)(=) $U_{\pi 12} U_\pi$, B,13 属于 $H(\otimes C) \otimes C$(G) ξ(G)。给定 $\eta \in, \pi\mathrm{H}$ U_π，我们定义矩阵系数 $\xi(\eta, :=) \omega_\xi(\eta \otimes, U_\pi\mathrm{id})(\omega_\xi)$，其中 $\eta, x \mapsto$是向量泛函 $\xi x \eta$, $n_\pi := $。我们将记 $\pi\dim(\mathrm{H}e_i^\pi)$。如果 $\{_{i=1}^{n_\pi}\}_\pi$是 H的一个正交归一基，那么

$$\Delta(U_\pi(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^{n_\pi} U_\pi(\xi, e_i^\pi) \otimes U_\pi(e_i^\pi, \eta).$$

如果 π,χ 是酉有限维表示，那么线性映射 $T:\mathrm{H}_\pi\to\mathrm{H}_\chi$ 称为交织算子，如果 $(T\otimes 1)U_\pi = U_\chi(T\otimes 1)$，并且我们用 $\mathrm{Mor}(\pi,\chi)$ 表示所有此类交织算子的集合。G 的一个酉有限维表示 π 称为不可约表示，如果 $\mathrm{Mor}(\pi,\pi)$ 是一维的。如果 π,χ 是酉有限维表示，那么 $U_{\pi\boxtimes\chi} := U_{\pi,13}U_{\chi,23}\in B(\mathrm{H}_\pi\otimes\mathrm{H}_\chi)\otimes C(\mathrm{G})$ 定义了张量积表示 $\pi\boxtimes\chi$。在本文余下部分，我们固定一个两两不等价的不可约表示的极大族 $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$。由所有矩阵系数线性张成的空间记为 $\mathrm{O}(\mathrm{G})$。它在 $C(\mathrm{G})$ 中范数稠密，$\varphi_{\mathbb{G}}$ 在 $\mathrm{O}(\mathrm{G})$ 上是忠实的，并且 $(\mathrm{O}(\mathrm{G}),\Delta)$ 构成一个 Hopf *-代数。$\mathrm{O}(\mathrm{G})$ 的 Hamel 基构造如下：对每个 $\pi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$，取 H_π 的一组正交归一基 $\{e_i^\pi\}_{i=1}^{n_\pi}$。那么 $\{U_\pi(e_i^\pi,e_j^\pi) : \pi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G}),\ 1\le i,j\le n_\pi\}$ 是 $\mathrm{O}(\mathrm{G})$ 的一个 Hamel 基。余单位和反元作用于矩阵系数上为

$$\epsilon(U_\pi(\xi,\eta)) = \langle\xi,\eta\rangle,\quad S(U_\pi(\xi,\eta)) = U_\pi(\eta,\xi)^*.$$

若 $\pi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$，则存在一个作用于 H_π 的典范正可逆算子 $Q_\pi\in B$，使得 $\mathrm{Tr}(Q_\pi^{1/2}) = \mathrm{Tr}(Q_\pi^{-1/2})$。我们将后一个值记为 $\dim_q(\pi)$，并且以下正交关系成立：

$$\varphi_{\mathbb{G}}(U_\pi(\xi,\eta)U_\chi(\xi',\eta')^*) = \delta_{\pi,\chi}\frac{\langle\xi,\xi'\rangle\langle\eta',Q_\pi^{-1/2}\eta\rangle}{\dim_q(\pi)},$$
$$\varphi_{\mathbb{G}}(U_\pi(\xi,\eta)^*U_\chi(\xi',\eta')) = \delta_{\pi,\chi}\frac{\langle\xi',Q_\pi^{1/2}\xi\rangle\langle\eta,\eta'\rangle}{\dim_q(\pi)}.$$

给定 $\pi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$，固定一个 H_π 的正交归一基 $\{e_i^\pi\}_{i=1}^n$，使算子 Q_π 成为对角算子，例如 $Q_\pi e_i^\pi = q_{\pi,i}e_i^\pi$。于是记为 $u_{ij}^\pi := U_\pi(e_i^\pi,e_j^\pi)$，正交关系可写为

$$\varphi_{\mathbb{G}}(u_{ij}^\pi(u_{kl}^\chi)^*) = \frac{\delta_{\pi,\chi}\delta_{i,k}\delta_{j,l}q_{\pi,j}^{-1/2}}{\dim_q(\pi)},\quad \varphi_{\mathbb{G}}((u_{ij}^\pi)^*u_{kl}^\chi) = \frac{\delta_{\pi,\chi}\delta_{i,k}\delta_{j,l}q_{\pi,i}^{1/2}}{\dim_q(\pi)}.$$

我们还定义 Woronowicz 特征族 $\{\delta^z:\mathrm{O}(\mathrm{G})\to\mathbb{C}\}_{z\in\mathbb{C}}$，它由以下条件唯一确定：

$$(\mathrm{id}\odot\delta^z)(U_\pi) = Q_\pi^{-z/2},\quad \pi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G}).$$

对于紧量子群 G，可以关联两个乘法酉元 $V_{\mathbb{G}},W_{\mathbb{G}}\in B(L^2(\mathrm{G})\otimes L^2(\mathrm{G}))$，其定义如下：

$$V_{\mathbb{G}}(\Lambda(a)\otimes\Lambda(b)) = (\Lambda\odot\Lambda)(\Delta(a)(1\otimes b)),\quad W_{\mathbb{G}}^*(\Lambda(a)\otimes\Lambda(b)) = (\Lambda\odot\Lambda)(\Delta(b)(a\otimes 1))$$

其中 $a,b\in\mathrm{O}(\mathrm{G})$。有如下关系

$$V_{\mathbb{G}}(\lambda(a)\otimes 1)V_{\mathbb{G}}^* = (\lambda\odot\lambda)(\Delta(a)) = W_{\mathbb{G}}^*(1\otimes\lambda(a))W_{\mathbb{G}},\quad a\in\mathcal{O}(\mathbb{G})$$

且余乘法

$$\Delta: B(L^2(\mathbb{G}))\to B(L^2(\mathbb{G}))\mathbin{\overline{\otimes}}B(L^2(\mathbb{G})) : x\mapsto V_{\mathbb{G}}(x\otimes 1)V_{\mathbb{G}}^*$$

限制为一个余乘法

$$\Delta: C_r(\mathbb{G})\to C_r(\mathbb{G})\otimes C_r(\mathbb{G}) : x\mapsto V_{\mathbb{G}}(x\otimes 1)V_{\mathbb{G}}^* = W_{\mathbb{G}}^*(1\otimes x)W_{\mathbb{G}}.$$

这一对 $(C_r(\mathrm{G}),\Delta)$ 随后定义了一个约化 CQG G_r，应将其视为“G 的约化版本”。在大多数情况下，使用约化 CQG 就足够了。我们有 $\mathrm{O}(\mathrm{G}_r) = \lambda(\mathrm{O}(\mathrm{G}))$。$\mathrm{O}(\mathrm{G}_r)$ 的余单位 ϵ_r 满足 $\epsilon_r\bigcirc\lambda = \epsilon$，反元 S_r 和 Haar态 $\varphi_{\mathbb{G}_r}$ 也类似。冯·诺伊曼代数 $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{G}) := \lambda(\mathrm{O}(\mathrm{G}))''$ 携带余积

$$\Delta:\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})\to\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})\mathbin{\overline{\otimes}}\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) : x\mapsto V_{\mathbb{G}}(x\otimes 1)V_{\mathbb{G}}^* = W_{\mathbb{G}}^*(1\otimes x)W_{\mathbb{G}}$$

该余积扩展了 C_r(G) 上的余积。向量态 $\omega_{\xi_{\mathbb{G}}} : \mathscr{L}^\infty$(G) $\to$ C $: x \mapsto \xi_{\mathbb{G}}, x\xi_{\mathbb{G}}$ 是忠实的，并满足不变性

$$(\omega_{\xi_{\mathbb{G}}} \overline{\otimes} \mathrm{id})\Delta = \omega_{\xi_{\mathbb{G}}}(-)1 = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\xi_{\mathbb{G}}})\Delta$$

在 $\mathscr{L}^\infty$(G) 上。

离散量子群。 我们将在冯·诺伊曼代数框架下，利用乘子 Hopf $*$-代数 [KD97] 的对偶理论来引入离散量子群。对偶 (Δ) 是一个乘子 Hopf $*$-代数，其对偶理论可应用 [Van98] 。因此，我们得到一个新的对偶乘子 Hopf $*$-代数 ($c_c(\widehat{\mathrm{G}})$ $\widetilde{\Delta}$)，其中

$$c_c(\widehat{\mathbb{G}}) = \{\varphi_{\mathbb{G}}(-a) : a \in \mathcal{O}(\mathbb{G})\} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{G})' = M(c_c(\widehat{\mathbb{G}}))$$

并将 $\widehat{\mathrm{G}}$ 称为离散量子群（= 离散量子群）。我们定义对偶 GNS 映射 $\hat{\Gamma}, \hat{\Lambda} : c_c(\widehat{\mathrm{G}}) \to L^2$(G)，如下:

$$\hat{\Gamma}(\varphi_{\mathbb{G}}(-a)) = \Lambda(a), \quad \hat{\Lambda}(\omega) = \hat{\Gamma}(\omega\delta^{-1/2}), \quad a \in \mathcal{O}(\mathbb{G}), \omega \in c_c(\widehat{\mathbb{G}}).$$

然后，我们利用这些映射定义乘法酉元 $V_{\mathbb{G}}, W_{\mathbb{G}} \in B(L^2$(G) $\otimes L^2$(G)) b y

$$V_{\widehat{\mathbb{G}}}(\hat{\Gamma}(\omega) \otimes \hat{\Gamma}(\chi)) = (\hat{\Gamma} \odot \hat{\Gamma})(\widetilde{\Delta}(\omega)(1 \otimes \chi)), \quad W^*_{\widehat{\mathbb{G}}}(\hat{\Lambda}(\omega) \otimes \hat{\Lambda}(\chi)) = (\hat{\Lambda} \odot \hat{\Lambda})(\widetilde{\Delta}(\chi)(\omega \otimes 1))$$

对于 $\omega, \chi \in c_c(\widehat{\mathrm{G}})$。我们考虑左正则 $*$-表示 $\hat{\lambda} : c_c(\widehat{\mathrm{G}}) \to B(L^2$(G)), 其定义如下:

$$\hat{\lambda}(\omega)\hat{\Gamma}(\chi) = \hat{\Gamma}(\omega\chi)$$

对于 $\omega, \chi \in c_c(\widehat{\mathrm{G}})$。然后我们定义冯·诺伊曼代数

$$\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) := \hat{\lambda}(c_c(\widehat{\mathbb{G}}))'' \subseteq B(L^2(\mathbb{G})).$$

接下来，我们定义余乘法

$$\hat{\Delta}_l : B(L^2(\mathbb{G})) \to B(L^2(\mathbb{G})) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) : x \mapsto W^*_{\widehat{\mathbb{G}}}(1 \otimes x)W_{\widehat{\mathbb{G}}}$$
$$\hat{\Delta}_r : B(L^2(\mathbb{G})) \to B(L^2(\mathbb{G})) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) : x \mapsto V_{\widehat{\mathbb{G}}}(x \otimes 1)V^*_{\widehat{\mathbb{G}}}$$

并且我们在 $\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})$ 上有 $\hat{\Delta} := \hat{\Delta}_l = \hat{\Delta}_r$。存在唯一的 $*$-同构

$$\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \cong \prod_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})}^{\ell^\infty} B(\mathcal{H}_\pi)$$

它将 $\hat{\lambda}(\omega)$ 映射到 $((\mathrm{id} \odot \omega)(U_\pi))_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$，对每个 $\omega \in c_c(\widehat{\mathrm{G}})$ 都成立。它具有如下性质:

$$(p_\pi \overline{\otimes} p_\chi)(\hat{\Delta}(x))T = Tp_\kappa(x)$$

对于所有 $\pi, \chi, \kappa \in$ Irr(G) $x \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})$ 和 $T \in$ Mor($\kappa, \pi \boxtimes \chi$) $\subseteq B(\mathrm{H}_\kappa, \mathrm{H}_\pi \otimes \mathrm{H}_\chi)$，其中 $p_\pi : \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}}) \to B(\mathrm{H}_\pi)$ 是投影。我们还需要以下事实:

$$V_{\mathbb{G}} \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})' \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}), \quad W_{\mathbb{G}} = V_{\widehat{\mathbb{G}}} \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}), \quad W_{\widehat{\mathbb{G}}} \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})'.$$

空间 $\hat{\lambda}(c_c(\widehat{\mathrm{G}}))\lambda$(O(G)) 在 $B(L^2$(G)) 中 σ-弱稠密。若 $g \in$O(G)，则存在唯一的正规泛函 $\mathrm{ev}_g : \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}}) \to$ C，使得对于每个 $\omega \in c_c(\widehat{\mathrm{G}})$，都有 $\mathrm{ev}_g(\hat{\lambda}(\omega)) = \omega(g)$。具体而言，对于所有 $\xi, \eta \in$ H，$\hat{\omega}_{\xi,\eta} \bigcirc p_\pi = \mathrm{ev}_{U_\pi(\xi,\eta)}$。对于 $g, h \in$ O(G)，我们有 $(\mathrm{ev}_g \overline{\otimes} \mathrm{ev}_h) \bigcirc \Delta = \mathrm{ev}_{gh}$，且 $\hat{\epsilon} := \mathrm{ev}_1 = \omega_{\xi_{\mathbb{G}}}$ 是 $\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})$ 上的一个特征，满足

$$(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})\hat{\Delta} = \mathrm{id}_{\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})} = (\hat{\epsilon} \overline{\otimes} \mathrm{id})\hat{\Delta}.$$

如果 G 是 Kac 型，那么在 $B(L^2$(G)) 上我们有恒等式

$$(\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\xi_{\mathbb{G}}})\hat{\Delta}_l = (\omega_{\xi_{\mathbb{G}}} \overline{\otimes} \mathrm{id})\hat{\Delta}_r. \tag{1}$$

例 2.6. 设 Γ 是一个带有单位元 e 的离散群，并考虑群 $*$-代数 $\mathbb{C}[\Gamma]$ 的泛 C^*-包络$C^*(\Gamma)$。存在唯一的 $*$-态射 $\Delta : C^*(\Gamma) \to C^*(\Gamma) \otimes C^*(\Gamma)$，使得 $\Delta(g) = g \otimes g$ 对 $g \in \Gamma$成立。于是，数对 $\mathbb{G} = (C^*(\Gamma)\ \Delta)$ 定义了一个紧量子群。其 Haar 态由 $\varphi(g) = \delta_{g,e}$ 对 $g \in \Gamma$ 成立且 $\mathrm{O}(\mathbb{G}) = \mathbb{C}[\Gamma]$ 给出。我们考虑带有典范正交归一基 $\{\delta_g\}_{g\in\Gamma}$ 的希尔伯特空间 $\ell^2(\Gamma)$。左正则表示 $\lambda : C^*(\Gamma) \to B(\ell^2(\Gamma))$ 与向量 δ_e 构成关于 Haar态 φ的 GNS 构造，因此我们得到 $C_r(\mathbb{G}) = C^*_\lambda(\Gamma)$ 且 $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) = \mathscr{L}(\Gamma)$。

显然，$c_c(\widehat{\mathbb{G}}) = c_c(\Gamma)$ 是定义在 Γ 上的有限支撑函数，且对于 $g \in \Gamma$，有 $\hat{\Gamma}(\varphi(-g)) = \delta_g = \hat{\Lambda}(\varphi(-g))$。因此，对于 $g \in \Gamma$，$\hat{\lambda}(f)\delta_g = f(g^{-1})\delta_g$。将 $\ell^\infty(\Gamma)$ 视为希尔伯特空间 $\ell^2(\Gamma)$ 上的乘法算子，我们有 $\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) = \ell^\infty(\Gamma)$，而余积 $\hat{\Delta} : \ell^\infty(\Gamma) \to \ell^\infty(\Gamma)\overline{\otimes}\ell^\infty(\Gamma) \cong \ell^\infty(\Gamma\times\Gamma)$ 由 $\hat{\Delta}(f)(g,h) = f(hg)$ 给出，其中 $f \in \ell^\infty(\Gamma)$，且 $g, h \in \Gamma$。

最后，考虑将 $e_g \in B(\ell^2(\Gamma))$ 正交投影到 $\mathbb{C}\delta_g$ for $g \in \Gamma$ 上。于是，基本乘法酉元可以作如下描述

$$V_{\mathbb{G}} = \sum_{g\in\Gamma} e_g \otimes \lambda_g, \quad W_{\mathbb{G}} = \sum_{g\in\Gamma} \lambda_g^* \otimes e_g, \quad W_{\widehat{\mathbb{G}}} = \sum_{g\in\Gamma} e_g \otimes \rho_g^*$$

其中各个和在强算子拓扑下收敛。需要注意的是：如果 $g \in \Gamma$，那么如上所定义的针对一般离散量子群的 ev_g 与通常对 $\mathrm{ev}_g \in \ell^\infty(\Gamma)^*$ 的定义并不一致。相反，对于 $g \in \Gamma$ 和 $f \in \ell^\infty(\Gamma)$，我们有 $\mathrm{ev}_g(f) = f(g^{-1})$，这也解释了余乘法中的翻转。

$\widehat{\mathbb{G}}$此处讨论的紧量子群 $\mathbb{G}$ 通常记作 Γ。 ◇

$\widehat{\mathbb{G}}$在整篇论文中，我们固定一个紧量子群 $\mathbb{G}$，其离散对偶为 $\mathbb{G}$。如果 X、Y 是某个赋范代数的子集，则记 $XY = \mathrm{span}\{xy : x \in X、\ y \in Y\}$，而 $[XY]$ 是 XY 的范数闭包。

3 量子群的作用

本节定义紧量子群和离散量子群在算子系统上的作用，建立其基本性质，并说明这些定义推广了文献中已知的作用定义。随后，我们定义相对于一个离散量子群作用于其上的算子系统的约化交叉积和 Fubini 交叉积，并证明这些交叉积允许对偶紧量子群的作用。然后我们将研究这些作用。

3.1 紧量子群的作用

我们将介绍紧量子群在算子系统上的两种不同作用概念。

定义 3.1。右 $\mathbb{G}$-C^*-算子系统是一个二元组 $(X,\ \alpha)$，其中 X 是一个算子系统，且 $\alpha : X \to X \otimes C_r(\mathbb{G})$ 是一个完全等距幺映射，并满足：

- 满足余作用性质，即图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ \alpha\ } & X \otimes C_r(\mathbb{G}) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha\otimes\mathrm{id}} \\ X \otimes C_r(\mathbb{G}) & \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes\Delta]{} & X \otimes C_r(\mathbb{G}) \otimes C_r(\mathbb{G}) \end{array}$$

  交换。
- *Podleś*稠密性条件成立，即 $[\alpha(X)(1 \otimes C_r(\mathbb{G}))] = X \otimes C_r(\mathbb{G})$。

我们记作 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \mathbb{G}$，并称 α 在算子系统 X 上定义了一个右侧 $\mathbb{G}$-C^*-作用。

我们可以以类似的方式定义左作用。在本文中，我们将主要考虑右作用，并且除非另有说明，所有作用（包括我们将在后文定义的 G-W^*-作用和 $\widehat{\ }$G-作用）均假定为右作用。

定义 3.2。设 (X, α) 和 (Y, β) 是两个 $\mathbb{G}$-C^*-算子系统。若 *ucp* 映射 $\phi : X \to Y$ 满足以下图表，则称其为$\mathbb{G}$-C^*-等变映射。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ X \otimes C_r(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\phi\otimes\mathrm{id}} & Y \otimes C_r(\mathbb{G}) \end{array}$$

交换。当我们想强调这些作用时，将用 $\phi : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$表示映射。

正如预期，G-C^*-算子系统具有良好的谱子空间分解。下文中，我们讨论一个比 G-C^*-算子系统更一般的情形。

给定 G 的酉有限维表示 π，我们将考虑 H_π 上由 $\delta_\pi : \mathrm{H}_\pi \to \mathrm{H}_\pi \odot \mathrm{O(G)} : \xi \mapsto U_\pi(\xi \otimes 1)$ 给出的相应右 O(G)-余模结构。具体地，对于每个 $1 \le i \le n_\pi$，$\delta_\pi(e_i^\pi) = \sum_{j=1}^{n_\pi} e_j^\pi \otimes U_\pi(e_j^\pi, e_i^\pi)$。

定义 3.3。设 X 是一个算子系统，且 $\alpha : X \to X \otimes C(\mathbb{G})$ 是一个满足余作用性质和 *Podleś* 稠密性条件的完全正收缩映射。如果 π 是 $\mathbb{G}$ 的酉有限维表示，则 π 与 α 之间的交织子空间记为 $\mathrm{Mor}(\pi, \alpha)$，它是所有满足图表交换的线性映射 $T : \mathcal{H}_\pi \to X$ 的集合

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\pi & \xrightarrow{\quad T\quad} & X \\ {\scriptstyle\delta_\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathcal{H}_\pi \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}) & \xrightarrow[T\odot\mathrm{id}]{} & X \otimes C(\mathbb{G}) \end{array}$$

交换。于是我们定义 π-谱子空间

$$X_\pi := \mathrm{span}\{T\xi : T \in \mathrm{Mor}(\pi, \alpha), \xi \in \mathcal{H}_\pi\}.$$

如果 $\tau \in \mathrm{Irr(G)}$ 是平凡表示，则 $X_\tau = \{x \in X : \alpha(x) = x \otimes 1\}$ = 不动点代数(X, α)。

以下结果在紧量子群作用于 C^*-代数的情形下是众所周知的。证明不包含新的内容，但为方便读者起见，我们仍将其列出。

命题 3.4。设 X 是一个算子系统，且 $\alpha : X \to X \otimes C(\mathbb{G})$ 是一个满足余作用性质和 *Podleś* 稠密性条件的完全正收缩映射。那么，对于每个 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$，$X_\pi$ 在 X 中是范数闭的。此外，$\mathcal{X} := \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} X_\pi$ 在 X 中范数稠密，并且

$$\mathcal{X} = \mathrm{span}\{(\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(x)(1 \otimes g)) : x \in X, g \in \mathcal{O}(\mathbb{G})\}.$$

映射 α 限制为 *Hopf* *-代数余作用 $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \odot \mathcal{O}(\mathbb{G})$。特别地，我们有恒等式 $\alpha(\mathcal{X})(1 \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})) = \mathcal{X} \odot \mathcal{O}(\mathbb{G})$。

此外，如果 α 是内射的，那么 $\mathcal{X} = \{x \in X : \alpha(x) \in X \odot \mathcal{O}(\mathbb{G})\}$。

证明。 如果 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$，定义 $\chi_\pi := \dim_q(\pi) \sum_{i=1}^{n_\pi} U_\pi(e_i^\pi, Q_\pi^{1/2} e_i^\pi) \in \mathrm{O}(\mathbb{G})$，并考虑映射

$$E_\pi : X \to X : x \mapsto (\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(x)(1 \otimes \chi_\pi^*)).$$

若 $x \in X$ 和 $\eta \in H_\pi$，则映射

$$T : \mathcal{H}_\pi \to X : \xi \mapsto (\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(x)(1 \otimes U_\pi(\xi, \eta)^*))$$

是 $\mathrm{Mor}(\pi, \alpha)$ 中的一个元素，这表明 $E_\pi(X) \subseteq X_\pi$。结合 $E_\pi(x) = x$ 对 $x \in X_\pi$ 成立这一事实，我们得出 $X_\pi = \{x \in X : E_\pi(x) = x\}$ 是范数闭的。显然

$$\mathrm{span}\{(\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(x)(1 \otimes g)) : x \in X, g \in \mathcal{O}(\mathbb{G})\} = \mathcal{X}.$$

由 Podleś稠密性条件可知，X 在 X 中范数稠密。根据定义，$\alpha(X_\pi) \subseteq X_\pi \otimes \mathrm{O}(\mathbb{G})_\pi$，因此 $X \subseteq \{x \in X : \alpha(x) \in X \otimes \mathrm{O}(\mathbb{G})\}$。容易看出，$\alpha$ 限制为一个 Hopf
*-代数余作用 $\alpha : X \to X \otimes \mathrm{O}(\mathbb{G})$。

最后，假设 α 是内射的，且 $x \in X$ 满足 $\alpha(x) \in X \otimes \mathrm{O}(\mathbb{G})$。记 $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes g_i$。取 $\omega \in c_0(\widehat{\mathbb{G}}) \subseteq \mathrm{O}(\mathbb{G})'$，使得对所有 $i = 1, \ldots, n$，$(\mathrm{id} \otimes \omega)\Delta(g_i) = g_i$。那么

$$\alpha((\mathrm{id} \otimes \omega)\alpha(x)) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega)(\alpha \otimes \mathrm{id})\alpha(x) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \omega)(\mathrm{id} \otimes \Delta)\alpha(x) = \alpha(x)$$

由此可得 $x = (\mathrm{id} \otimes \omega)\alpha(x) \in X$。 □

定义 3.5. 命题 *3.4* 中的空间 $\mathcal{X}$ 称为 α的代数核心。

自然会想到一个问题：如果我们在定义 3.1 中考虑一个 C^*-代数，能否找回紧量子群在 C^*-代数上的作用这一通常概念？事实证明确实如此，不过我们需要先证明一个引理：

引理 3.6. 设 $\mathcal{H}$ 是一个有限维希尔伯特空间，且 $V \in B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathbb{G})$ 是一个可逆压缩，满足 $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(V) = V_{12}V_{13}$。那么 V定义了一个酉有限维表示 $\mathbb{G}$。

证明。 选取一个可逆元 $T \in B(H)$，使得 $U := (T \otimes 1)V(T^{-1} \otimes 1)$ 是酉的。于是 $V = (T^{-1} \otimes 1)U(T \otimes 1)$ 是压缩的，特别地 $VV^* \leq 1$，即

$$(T^{-1} \otimes 1)U(T \otimes 1)(T^* \otimes 1)U^*((T^*)^{-1} \otimes 1) \leq 1$$

因此，与 T 共轭得到 $U(TT^* \otimes 1)U^* \leq TT^* \otimes 1$. 定义 $*$-态射 $\beta_U : B(H) \to B(H) \otimes C(G)$ $: x \mapsto U(x \otimes 1)U^*$，并通过 $E := (\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}}) \bigcirc \beta_U$ 定义忠实的条件期望 $E : B(H) \to B(H)$。令 τ 为 $B(H)$ 上的忠实态（例如归一化迹），并定义 $\omega := \tau \bigcirc E$。对于 $x \in B(H)$，我们计算得到：

$$\begin{aligned}(\omega \otimes \mathrm{id})\beta_U(x) &= (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id})(\beta_U \otimes \mathrm{id})\beta_U(x) \\ &= (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}} \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\beta_U(x) \\ &= (\tau \otimes \mathrm{id})((\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\beta_U(x)) \otimes 1) \\ &= \tau(E(x))1 = \omega(x)1.\end{aligned}$$

特别地，我们看到 $0 = (\omega \otimes \mathrm{id})(TT^* \otimes 1 - U(TT^* \otimes 1)U^*)$，因此由 $\omega \otimes \mathrm{id}$ 的忠实性可知，$TT^* \otimes 1 = U(TT^* \otimes 1)U^*$。于是，

$$VV^* = (T^{-1} \otimes 1)U(TT^* \otimes 1)U^*((T^{-1})^* \otimes 1) = (T^{-1} \otimes 1)(TT^* \otimes 1)((T^{-1})^* \otimes 1) = 1.$$

由于 V 是可逆的，因此 V 是酉的。 □

命题 3.7。 若 A 是一个 C^*-代数，$\mathbb{G}$ 是一个约化 *CQG*，且 $\alpha : A \to A \otimes C(\mathbb{G})$ 是满足余作用性质 $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\alpha = (\alpha \otimes \mathrm{id})\alpha$ 和 ***Podleś***稠密性条件的单射完全正收缩映射，则 α 是乘法保持的。

证明。 令 ω 为 A上的正不变泛函，即对所有 $a \in A$，$(\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha(a)) = \omega(a)\mathbf{1}$。考虑其对应的 GNS-Hilbert 空间 $L^2_\omega(A)$，其 GNS 向量为 ξ_ω，GNS 映射为 $\Lambda_\omega : A \to L^2_\omega(A)$。

考虑作用 α的代数核心 A。[1]设 a_1、……、 $a_n \in$属于 A，且 h_1、……、 $h_n \in$属于 O(G)。利用 $[(\pi_\omega \otimes \lambda)(\alpha(a_i)^* \alpha(a_j))]_{i,\,j} \leq [(\pi_\omega \otimes \lambda)(\alpha(a_i^* a_j))]_{i,\,j}$ [Lan95, 引理 5.4], ，可得

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_i (\Lambda_\omega \odot \Lambda)(\alpha(a_i)(1 \otimes h_i)) \right\|^2 \\
&= \sum_{i,j} \langle (\Lambda_\omega \odot \Lambda)(\alpha(a_i)(1 \otimes h_i)), (\Lambda_\omega \odot \Lambda)(\alpha(a_j)(1 \otimes h_j)) \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \Lambda_\omega(1) \odot \Lambda(h_i), (\pi_\omega \otimes \lambda)(\alpha(a_i)^* \alpha(a_j))(\Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_j)) \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_1) \\ \vdots \\ \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_n) \end{pmatrix}, [(\pi_\omega \otimes \lambda)(\alpha(a_i)^* \alpha(a_j))]_{i,j} \begin{pmatrix} \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_1) \\ \vdots \\ \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_n) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\leq \left\langle \begin{pmatrix} \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_1) \\ \vdots \\ \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_n) \end{pmatrix}, [(\pi_\omega \otimes \lambda)(\alpha(a_i^* a_j))]_{i,j} \begin{pmatrix} \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_1) \\ \vdots \\ \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_n) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_i), (\pi_\omega \otimes \lambda)(\alpha(a_i^* a_j))(\Lambda_\omega(1) \otimes \Lambda(h_j)) \rangle \\
&= \sum_{i,j} (\omega \otimes \varphi_{\mathbb{G}})((1 \otimes h_i^*)\alpha(a_i^* a_j)(1 \otimes h_j)) \\
&= \sum_{i,j} \varphi_{\mathbb{G}}(h_i^* (\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha(a_i^* a_j)) h_j) \\
&= \sum_{i,j} \varphi_{\mathbb{G}}(h_i^* \omega(a_i^* a_j) h_j) \\
&= \left\| \sum_i \Lambda_\omega(a_i) \otimes \Lambda(h_i) \right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Hence，存在唯一的压缩$V = V_\omega : L^2_\omega(A) \otimes L^2(\mathbb{G}) \to L^2_\omega(A) \otimes L^2(\mathbb{G})$，使得 t

$$V(\Lambda_\omega(a) \otimes \Lambda(h)) = (\Lambda_\omega \odot \Lambda)(\alpha(a)(1 \otimes h))$$

对于 $a \in$ A 和 $h \in$O(G)。设 C 是 A 的任意有限维线性子空间，使得 $\alpha(C) \subseteq C \odot$O(G)。由于 α 是余作用且 V定义良好，我们可以良好定义余表示

$$\delta_C : \Lambda_\omega(C) \to \Lambda_\omega(C) \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}) : \Lambda_\omega(a) \mapsto (\Lambda_\omega \odot \mathrm{id})(\alpha(a)).$$

然后考虑线性映射

$$V_C : \Lambda_\omega(C) \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}) \to \Lambda_\omega(C) \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}) : \Lambda_\omega(a) \otimes h \mapsto (\Lambda_\omega \odot \mathrm{id})(\alpha(a)(1 \otimes h)) = \delta_C(\Lambda_\omega(a))(1 \otimes h)$$

于是 V_C 属于线性嵌入 $B(\Lambda_\omega(C)) \odot$O(G) $\hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda_\omega(C) \odot$O(G)) 的像，因此 V_C 可以看作 $B(\Lambda_\omega(C)) \otimes C$(G) $\subseteq B(\Lambda_\omega(C) \otimes L^2$(G)) 中的可逆元

[1]如果将算子系统替换为一个（非含单位的） C^*-代数，命题 3.4 的表述仍然成立。证明完全相同。

满足 (id ⊗Δ)(V_C) = $V_{C,12}V_{C,13}$。此外， V_C 随后在子空间 $\Lambda_\omega(C) \odot \Lambda(\mathrm{O}(\mathbb{G}))$ 上与压缩 V 一致，因此 V_C 是压缩的。由引理 3.6， V_C 是 C^*-代数 $B(\Lambda_\omega(C)) \otimes C(\mathbb{G})$ 的酉元。因此可得， V 在子空间 $\Lambda_\omega(C) \odot \Lambda(\mathrm{O}(\mathbb{G}))$ 上是等距的。由于 C 是 A 的任意有限维子余模，因此可得 V 是等距的。特别地，我们由此看到，如果 $a \in \mathcal{A}$，那么

$$(\omega \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(a)^*\alpha(a)) = \|(\Lambda_\omega \odot \Lambda)(\alpha(a))\|^2 = \|\Lambda_\omega(a) \otimes \Lambda(1)\|^2 = (\omega \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(a^*a)).$$

利用 $\varphi_{\mathbb{G}}$ 的忠实性，我们得到

$$(\omega \otimes \mathrm{id})\alpha(a^*a) = (\omega \otimes \mathrm{id})(\alpha(a)^*\alpha(a)), \quad a \in \mathcal{A}.$$

这对 A 上的所有正不变泛函 ω 都成立，特别地，对于泛函 $\sigma \bigcirc E$ 也成立，其中 A 上的 σ 是正泛函，且 $E : A \to A : a \mapsto (\mathrm{id} \otimes \varphi_{\mathbb{G}})(\alpha(a))$。因此，我们得到

$$(E \otimes \mathrm{id})(\alpha(a^*a)) = (E \otimes \mathrm{id})(\alpha(a)^*\alpha(a)).$$

由于 $E \otimes \mathrm{id}$ 在 $A \otimes C(\mathbb{G})$ 上是忠实的（由 α 的单射性可知），我们得出

$$\alpha(a^*a) = \alpha(a)^*\alpha(a)$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$ 都成立。由 α 的连续性可知，这对所有 $a \in A$ 也成立。于是， α 的乘法域是 A，如所要求。 □

现在我们介绍紧量子群作用于算子系统的第二种概念。以下定义中出现的张量积是 Fubini张量积，本文预备知识部分已对此进行讨论。

定义 3.8。 右 $\mathbb{G}$-W^*-算子系统是一个二元组 (X, α)，其中 X 是一个算子系统，且 $\alpha : X \to X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$ 是一个完全等距幺映射，并满足余作用性质，即图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha\overline{\otimes}\mathrm{id}} \\ X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) & \xrightarrow[\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\Delta]{} & X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) \end{array}$$

交换。

G-W^*-等变映射的概念以显而易见的方式定义：在定义 3.2 中，只需将 $C_r(\mathbb{G})$ 替换为 $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$，并将空间张量积替换为 Fubini张量积。

定义 3.9. 若 (X, α) 是一个 $\mathbb{G}$-W^*-算子系统，则定义代数正则元和正则元如下：

$$\mathcal{R}_{\mathrm{alg}}(X, \alpha) := \{x \in X : \alpha(x) \in X \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}_r)\}, \qquad \mathcal{R}(X, \alpha) := \overline{\mathcal{R}_{\mathrm{alg}}(X, \alpha)}^{\|\cdot\|}.$$

若 (X, α) 是一个 G-W^*-算子系统，则容易看出 $\alpha(\mathrm{R}(X, \alpha)) \subseteq \mathrm{R}(X, \alpha) \otimes C_r(\mathbb{G})$，且限制该作用后得到一个 G-$C^*$-算子系统。Podleś 条件由恒等式推出：

$$\mathcal{R}_{\mathrm{alg}}(X, \alpha) \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}_r) = \alpha(\mathcal{R}_{\mathrm{alg}}(X, \alpha))(1 \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}_r))$$

在代数层面上。反过来，若 (X, α) 是一个 G-C^*-算子系统，由于 $X \otimes C_r(\mathbb{G}) \subseteq X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$，我们可以将其视为一个 G-$W^*$-算子系统。

理解一种特定的 G-W^*-作用对本研究至关重要：

命题3.10。 设 $X \subseteq B(\mathcal{H})$ 为一个算子系统，并考虑映射 $\Delta : B(L^2(\mathbb{G})) \to B(L^2(\mathbb{G})) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$ $: x \mapsto V_{\mathbb{G}}(x \otimes 1)V^{*}{}_{\mathbb{G}}$。那么 $\mathrm{id}_X \overline{\otimes}\Delta$ 定义了一个右侧的 $\mathbb{G}$-W^*-作用于 $X \overline{\otimes}B(L^2(\mathbb{G}))$，使得

$$\mathcal{R}_{\mathrm{alg}}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}_X \overline{\otimes}\Delta) = (X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))(1 \otimes \lambda(\mathcal{O}(\mathbb{G}))),$$
$$\mathrm{Fix}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}_X \overline{\otimes}\Delta) = X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}).$$

证明。 显然，$\mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta$ 定义了一个 G-W^*-作用，关于不动点的断言也显然成立。因此，我们重点描述代数正则元。为方便起见，我们将 $\mathrm{O(G)} \subseteq B(L^2\mathrm{(G)})$ 视为同一对象。

我们首先假设 $X = B\mathrm{(H)}$。设 $z \in B\mathrm{(H)} \overline{\otimes} B(L^2\mathrm{(G)})$ 满足

$$(\mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta)(z) = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j=1}^{n_\pi} z_{ij}^{\pi} \otimes u_{ij}^{\pi}$$

其中 $z_{ij}^{\pi} \in B\mathrm{(H)} \overline{\otimes} B(L^2\mathrm{(G)})$。由于 $B\mathrm{(H)} \odot \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})\mathrm{O(G)} = (B\mathrm{(H)} \odot \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}}))(1 \otimes \mathrm{O(G)})$ 在 $B\mathrm{(H)} \overline{\otimes} B(L^2\mathrm{(G)})$ 中 σ-弱稠密，我们可以写作

$$z = \lim_{\lambda} \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j=1}^{n_\pi} z_{ij}^{\pi}(\lambda)(1 \otimes u_{ij}^{\pi})$$

其中 $z_{ij}^{\pi}(\lambda) \in B\mathrm{(H)} \odot \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})$，极限是在 σ-弱拓扑下取的。于是

$$(\mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta)(z) = \lim_{\lambda} \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j,k=1}^{n_\pi} z_{ij}^{\pi}(\lambda)(1 \otimes u_{ik}^{\pi}) \otimes u_{kj}^{\pi}.$$

对该表达式应用切片映射 $\mathrm{id} \overline{\otimes}\mathrm{id} \overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}(-(u_{i'j'}^{\pi'})^*)$，并利用正交关系，我们得到

$$z_{i'j'}^{\pi'} \frac{q_{\pi',j'}^{-1/2}}{\dim_q(\pi')} = \lim_{\lambda} \sum_i z_{ij'}^{\pi'}(\lambda)(1 \otimes u_{ii'}^{\pi'}) \frac{q_{\pi',j'}^{-1/2}}{\dim_q(\pi')}$$

或者等价地

$$z_{i'j'}^{\pi'} = \lim_{\lambda} \sum_i z_{ij'}^{\pi'}(\lambda)(1 \otimes u_{ii'}^{\pi'}).$$

在右侧乘以 $1 \otimes (u_{k'i'}^{\pi'})^*$，得到

$$z_{i'j'}^{\pi'}(1 \otimes (u_{k'i'}^{\pi'})^*) = \lim_{\lambda} \sum_i z_{ij'}^{\pi'}(\lambda)(1 \otimes u_{ii'}^{\pi'}(u_{k'i'}^{\pi'})^*).$$

对 i' 求和，得到

$$\sum_{i'} z_{i'j'}^{\pi'}(1 \otimes (u_{k'i'}^{\pi'})^*) = \lim_{\lambda} z_{k'j'}^{\pi'}(\lambda).$$

特别地，对于所有 $\pi' \in \mathrm{Irr(G)}$ 以及 $1 \le i'$、$j' \le n_{\pi'}$，σ-弱极限 $\lim_\lambda z_{i'j'}^{\pi'}(\lambda) \in B\mathrm{(H)} \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})$ 均存在，因此

$$z_{i'j'}^{\pi'} = \sum_i (\lim_{\lambda} z_{ij'}^{\pi'}(\lambda))(1 \otimes u_{ii'}^{\pi'}) \in (B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))(1 \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})).$$

因此，

$$z = (\mathrm{id}_{B(\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{G}))} \odot \epsilon_r)(\mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta)(z) = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i=1}^{n_\pi} z_{ii}^{\pi} \in (B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))(1 \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}))$$

如所愿。

现在证明一般情形，因此令 $X \subseteq B(\mathrm{H})$ 为任意算子系统。若 $z \in \mathrm{R}^{\mathrm{alg}}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G})))$，则同样有 $z \in \mathrm{R}^{\mathrm{alg}}(B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G})))$。根据前一步，我们可以写成

$$z = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j=1}^{n_\pi} z_{ij}^{\pi} (1 \otimes u_{ij}^{\pi})$$

其中 $z_{ij}^{\pi} \in B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}})$。由此可得

$$(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j,k=1}^{n_\pi} z_{ij}^{\pi} (1 \otimes u_{ik}^{\pi}) \otimes u_{kj}^{\pi}$$

因此，再次应用正交关系，得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \odot \omega_{\xi_{\mathbb{G}}}(-(u_{k'j'}^{\pi'})^*))(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) &= \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j,k=1}^{n_\pi} z_{ij}^{\pi} (1 \otimes u_{ik}^{\pi}) \varphi_{\mathbb{G}}(u_{kj}^{\pi} (u_{k'j'}^{\pi'})^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\pi'}} \frac{q_{\pi',j'}^{-1/2}}{\dim_q(\pi')} z_{ij'}^{\pi'} (1 \otimes u_{ik'}^{\pi'}).\end{aligned}$$

此表达式属于 $X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))$，因此 $\sum_{i=1}^{n_{\pi'}} z_{ij'}^{\pi'} (1 \otimes u_{ik'}^{\pi'}) \in X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))$。于是，

$$X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \ni \sum_{k'=1}^{n_{\pi'}} \left(\sum_{i=1}^{n_{\pi'}} z_{ij'}^{\pi'} (1 \otimes u_{ik'}^{\pi'}) \right) (1 \otimes (u_{i'k'}^{\pi'})^*) = z_{i'j'}^{\pi'}$$

因此我们得出 $z \in (X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathrm{G}}))(1 \otimes \mathrm{O}(\mathrm{G}))$。 □

最后，我们讨论 G-等变算子系统的单射性。

定义 3.11. *A* $\mathbb{G}$-C^*-算子系统 I 称为 $\mathbb{G}$-C^*-内射的，如果对于所有 $\mathbb{G}$-C^*-算子系统 X, Y、每个 $\mathbb{G}$-C^*-*ucp* 映射 $\varphi : X \to I$ 以及每个 $\mathbb{G}$-C^*-完全等距幺映射 $\iota : X \to Y$，都存在一个 $\mathbb{G}$-C^*-*ucp* 映射 $\Phi : Y \to I$ 使得 $\Phi\iota = \phi$。类似地，定义$\mathbb{G}$-W^*-单射性。

以下引理已在 [HHN22, 引理 2.10]中于略有不同的背景下证明。证明过程不变，但为方便读者，我们将细节列出。

引理 3.12. 设 X 是一个内射算子系统。那么 $(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)$ 是 $\mathbb{G}$-W^*-内射的。

证明。 设 Y, Z 是 G-W^*-算子系统， $i : Y \to Z$ 是一个 G-W^*-完全等距幺映射，且 $\phi : Y \to X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))$ 是一个 G-W^*-ucp 映射。由于 $X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))$ 是一个内射算子系统，存在一个 ucp 映射 $\Theta : Z \to X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))$ 使得 $\Theta i = \phi$。

考虑余作用 $\alpha_Z : Z \to Z \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathrm{G})$ 和 Haar态 $\varphi_{\mathbb{G}} = \omega_{\xi_{\mathbb{G}}} : \mathscr{L}^\infty(\mathrm{G}) \to \mathbb{C}$，并定义

$$\Phi : Z \to X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) : z \mapsto (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}})(V_{\mathbb{G},23}^* (\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Z(z)) V_{\mathbb{G},23}).$$

那么对于 $y \in Y$，

$$\begin{aligned}\Phi i(y) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}})(V_{\mathbb{G},23}^* (\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Z(i(y)) V_{\mathbb{G},23})) \\ &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}})(V_{\mathbb{G},23}^* (\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id})(i \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Y(y)) V_{\mathbb{G},23}) \\ &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}})(V_{\mathbb{G},23}^* (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Y(y)) V_{\mathbb{G},23})\end{aligned}$$

$$= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}})(V^*_{\mathbb{G},23}(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(\phi(y))V_{\mathbb{G},23})$$
$$= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}})(\phi(y) \otimes 1) = \phi(y)$$

因此 $\Phi\bigcirc\, i = \phi$。此外，Φ 是 G-W^*-等变的。为此，回忆一下 $(\mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)(V_{\mathbb{G}}) = V_{\mathbb{G},\ 12}V_{\mathbb{G},\ 13}$，从而 $V_{\mathbb{G}} \otimes 1 = (\mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)(V_{\mathbb{G}})V^*{}_{\mathbb{G},\ 13}$。因此，如果 $z \in Z$，

$$\begin{aligned}
&(\Phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Z(z))\\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}} \overline{\otimes} \mathrm{id})((1 \otimes V^*_{\mathbb{G}} \otimes 1)(\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})((\alpha_Z \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha_Z(z))(1 \otimes V_{\mathbb{G}} \otimes 1))\\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}} \overline{\otimes} \mathrm{id})((1 \otimes V^*_{\mathbb{G}} \otimes 1)(\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})((\mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)\alpha_Z(z))(1 \otimes V_{\mathbb{G}} \otimes 1))\\
&= (1 \otimes V_{\mathbb{G}})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)((1 \otimes V^*_{\mathbb{G}})(\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Z(z))(1 \otimes V_{\mathbb{G}})))(1 \otimes V^*_{\mathbb{G}})\\
&= (1 \otimes V_{\mathbb{G}})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \varphi_{\mathbb{G}}(-)1)((1 \otimes V^*_{\mathbb{G}})(\Theta \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha_Z(z))(1 \otimes V_{\mathbb{G}}))(1 \otimes V^*_{\mathbb{G}})\\
&= (1 \otimes V_{\mathbb{G}})(\Phi(z) \otimes 1)(1 \otimes V^*_{\mathbb{G}})\\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)(\Phi(z)).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注记 3.13. </style}若 X 是内射算子系统，则一般而言，G-W^*-算子系统 $(X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}), \mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)$ 并非 G-W^*- 内射。事实上，即使对于 $X = \mathbb{C}$，结论也不成立：我们稍后将看到，$\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$ 是 G-W^*- 内射的，当且仅当 $\mathbb{G}$ 是余可和的（见推论 4.4）。然而，在对偶侧，这一结论成立（见引理 3.27）。◇

命题 3.14. </style}设 (X, α) </style}是一个G-W^*-算子系统。以下陈述等价：

1. (X, α) 是$\mathbb{G}$-W^*-内射的。*2.* X是内射的，并且存在一个$\mathbb{G}$-W^* 完全正且幺正的条件期望 $\varphi : (X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta) \to (\alpha(X), \mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)$。

证明。 (2) Ô⇒ (1) 根据引理 3.12，$(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta)$ 是 G-W^*-内射的。因此 (1) 立即成立。

(1) Ô⇒ (2) 假设 $X \subseteq B(\mathrm{H})$。由于 X 是 G-W^*-内射的，存在一个等变 ucp 映射$\theta : (B(\mathrm{H} \otimes L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}_{B(\mathcal{H})} \overline{\otimes}\Delta) \to (X, \alpha)$，使得图表

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\ \alpha\ } & X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \subseteq} \\
X & \xleftarrow[\ \theta\ ]{} & B(\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{G}))
\end{array}$$

交换。由于 $B(\mathrm{H} \otimes L^2(\mathbb{G}))$ 是内射的且 $\theta\alpha = \mathrm{id}_X$，因此 X 是内射的。 □

注 3.15。 在前一个命题中，我们已经看到，G-W^*-内射性蕴含算子系统的内射性。对于 G-C^*-内射性，情况不再如此。参见注 4.5。◇

我们以一些琐碎但有用的观察结束本小节。

引理 3.16。 如果 $(X,\ \alpha)$ 是一个 $\mathbb{G}$-W^*-内射算子系统，那么 $(\mathcal{R}(X)\ \alpha)$ 是一个 $\mathbb{G}$-C^*-内射算子系统。

证明。 设 Y 是 G-C^*-算子系统，$i : Y \to Z$ 是 G-C^*-完全等距幺映射，$\phi : Y \to \mathrm{R}(X)$ 是 G-C^*- ucp 映射。将 Y、Z 视为 G-W^*-算子系统，我们可以对 $(X$、$\alpha)$ 应用 G-W^*-内射性，从而找到一个 G-W^*-ucp 映射 $\Phi : Z \to X$，使得 $\Phi\bigcirc\, i = \phi$。但显然，Φ 将 $Z = \mathrm{R}(Z)$ 映射到 $\mathrm{R}(X)$ 中；将 Φ 视为映射 $Z \to \mathrm{R}(X)$，它是 G-C^*-等变的。 □

推论 3.17。 如果 X 是一个内射算子系统，那么 $\mathcal{R}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}_X \overline{\otimes}\Delta)$ 是 $\mathbb{G}$-C^*-内射的。

在文献中，等变内射性的概念是在如下范畴中研究的：对象为等变含幺 C^*-代数，态射为这些 C^*-代数之间的等变 ucp 映射（单态射则为等变完全等距幺映射）；例如参见 [KKV22]。我们指出，这一等变内射性概念与我们所定义的概念等价，这一点多少有些显然。

命题 3.18。设(A,α)是一个含幺$\mathbb{G}$-C^*-代数。当且仅当(A,α)在带有 *ucp* 映射的含幺$\mathbb{G}$-C^*-代数范畴中是内射的，它才在$\mathbb{G}$-C^*-算子系统范畴中是内射的。

证明。假设 (A,α) 在含幺 G-C^*-代数范畴中是内射的。不妨设 $A \subseteq B(\mathrm{H})$，其中 H 是某个希尔伯特空间。存在一个 G-$C^*$-ucp 映射 $\varphi : \mathrm{R}(B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))) \to A$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \mathcal{R}(B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes}\Delta) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & \swarrow_{\varphi} & \\ A & & \end{array}$$

交换。由于 $\mathrm{R}(B(\mathrm{H})\overline{\otimes}B(L^2(\mathrm{G})),\mathrm{id}\ \overline{\otimes}\Delta)$ 在 G-C^*-算子系统范畴中是 G-C^*-内射的，因此 A 作为算子系统也是 G-C^*-内射的。反之显然成立。 □

$\widehat{\ }$对于幺 G-C^*-代数，类似的结果显然也成立。

引理 3.19。 （$\mathbb{C}$ τ），其中 τ 是平凡作用，同时是 $\mathbb{G}$-C^* 和 $\mathbb{G}$-W^*-内射的。

证明。 这是直接的，因为映射 $\omega_{\xi_{\mathbb{G}}} : B(L^2(\mathrm{G})) \to \mathrm{C}$ 是 (Δ,τ)-等变的。 □

3.2 离散量子群的作用

We 现在介绍离散量子群作用于其上的算子系统的概念 .

定义 3.20。 一个（右）$\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统是一个对（X，α），其中 X 是一个算子系统，而 $\alpha : X \to X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 是一个完全等距幺映射，使得图表交换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\qquad\alpha\qquad} & X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\overline{\otimes}\mathrm{id}} \\ X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) & \xrightarrow{\mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\Delta}} & X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \end{array}$$

。我们将记作 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \widehat{\mathbb{G}}$，并称 α 在算子系统X上定义了一个右*G*-作用。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$G-算子系统之间的 G-等变映射的概念与 G-$\widehat{W}^*$-算子系统的情形相同，G-内射算子系统的概念也是如此。

还要回顾一下，如果存在一个 $\widehat{\ }$G-等变态 $(\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}), \hat{\Delta}) \to (\mathrm{C}\ \tau)$，其中 τ是 C $\widehat{\ }$G 上的平凡作用，则称 $\widehat{\ }$G 可 amenable [Tom06],，或者等价地说，G 是余可和的。

引理 3.21. 若 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \widehat{\mathbb{G}}$ 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统，则 $(\mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\epsilon}) \circ \alpha = \mathrm{id}$.

证明. 若 $x \in X$，则

$$\alpha(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})\alpha(x) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})\alpha(x) = \alpha(x)$$

因此，由于 α 的单射性，我们可以得出 $(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})\alpha(x) = x$。 □

如果 A 是一个含单位元的 C^*-代数，则 Fubini张量积 $A \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \cong \prod_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} A \otimes B(\mathrm{H}_\pi)$ 具有自然的 C^*-代数结构。于是，提出这样的问题是有意义的：按照定义 3.20 的意义，含单位元的C^*-代数上的离散量子群作用是否自动是乘法保持的。事实证明确实如此，以下结果说明了这一点。关于这一事实的证明由 Stefaan Vaes 在 MathOverflow [Vae23] 上告知我们。

命题 3.22。 假设 A 是一个含单位元的 C^*-代数，且 $\alpha : A \to A \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 是一个满足余作用性质的内射 *ucp* 映射 $(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})\alpha$。则 α 是一个 π-同态。

证明。对于 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$，考虑 ucp 映射 $\alpha_\pi := (\mathrm{id}_A \overline{\otimes} p_\pi) \circ \alpha : A \to A \odot B(\mathrm{H}_\pi)$。只需证明这些映射是乘法保持的。

若 $\tau \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ 是平凡表示，则 $p_\tau = \hat{\epsilon}$，使得 $\alpha_\tau = \mathrm{id}_A$。选取 $\rho \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$，以及$s \in \mathrm{Mor}(\tau, \pi \boxtimes \rho)$ $t \in \mathrm{Mor}(\tau, \rho \boxtimes \pi)$，使得 $t^* t = 1$ 且 $(s^* \otimes 1)(1 \otimes t) = 1$。定义 ucp 映射

$$\theta_\pi : A \odot B(\mathcal{H}_\pi) \to A : x \mapsto (1 \otimes t^*)(\alpha_\rho \odot \mathrm{id})(x)(1 \otimes t).$$

我们声称，θ_π 是忠实的。事实上，令 $x \in A \odot B(\mathrm{H}_\pi)$ 且 $\theta_\pi(x^* x) = 0$。那么，根据 Schwarz 不等式，$(\alpha_\rho \odot \mathrm{id})(x)(1 \otimes t) = 0$。由此可得

$$\begin{aligned}
0 &= (1 \otimes s^* \otimes 1)(\alpha_\pi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})((\alpha_\rho \overline{\otimes} \mathrm{id})(x))(1 \otimes 1 \otimes t) \\
&= (1 \otimes s^* \otimes 1)(\mathrm{id} \overline{\otimes} p_\pi \overline{\otimes} p_\rho \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(x)(1 \otimes 1 \otimes t) \\
&= (1 \otimes s^* \otimes 1)(\mathrm{id} \overline{\otimes} p_\pi \overline{\otimes} p_\rho \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(x)(1 \otimes 1 \otimes t) \\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} p_\tau \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(x)(1 \otimes s^* \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes t) \\
&= x(1 \otimes s^* \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes t) = x
\end{aligned}$$

并证明了 θ_π 的忠实性。对于 $a \in A$，我们有 $\theta_\pi(\alpha_\pi(a)) = a$，因此若 $u \in A$ 是酉元，则 $\alpha_\pi(u)$属于 θ_π的乘法域。由 Schwarz 不等式，$\alpha_\pi(u)^* \alpha_\pi(u) \leq \alpha_\pi(u^* u) = 1$，并且

$$\theta_\pi(1 - \alpha_\pi(u)^* \alpha_\pi(u)) = 0$$

因此，θ_π 的忠实性保证了 $\alpha_\pi(u)^* \alpha_\pi(u) = 1$。由此可知，对于每个酉元 $u \in A$，u 都属于 α_π 的乘法域，因此 α_π 是乘法保持的。 □

现在我们用 O(G)-模来给出 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统的另一种描述：

定义 3.23。 左 *O(G)*-模算子系统由一个算子系统 X 和一个线性映射 $\triangleright : \mathcal{O}(\mathbb{G}) \odot X \to X$ 组成，并满足以下条件：

1. $1 \triangleright x = x$ 对所有 $x \in X$均成立。 *2.* $g \triangleright 1 = \epsilon(g)1$ 对所有 $g \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$均成立。 *3.* $g \triangleright (h \triangleright x) = (gh) \triangleright x$ 对所有 $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 以及所有 $x \in X$均成立。 *4.* 对每个 $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$，映射$(X) : x \mapsto [u_{ij}^\pi \triangleright x]_{i,j}$ 都是 *ucp*。

引理 3.24。 如果(X, α) 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统，那么 $g \triangleright x := (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_g)\alpha(x)$ 定义了一个左$\mathcal{O}(\mathbb{G})$-模算子系统。

证明。 定义 3.23 中的前三个条件显然成立。第四个条件很清楚，因为映射 $x \mapsto [u_{ij}^{\pi} \triangleright x]_{i,j}$ 恰好是以下复合映射

$$X \xrightarrow{\alpha} X \overline{\otimes} \mathscr{L}^{\infty}(\widehat{\mathbb{G}}) \xrightarrow{\mathrm{id} \overline{\otimes} p_{\pi}} X \overline{\otimes} B(\mathcal{H}_{\pi}) \xrightarrow{\cong} M_{n_{\pi}}(X)$$

完全正幺映射。 □

下面的结果并不令人意外:

命题 3.25。 若$(X, \triangleright)$ 是一个左$\mathcal{O}(\mathbb{G})$-模算子系统，则存在唯一的右作用 $X \overset{\alpha}{\curvearrowleft} \widehat{\mathbb{G}}$，使得对所有 $g \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 以及所有 $x \in X$，都有 $g \triangleright x = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_g)\alpha(x)$。

证明。 设 $\{E_{ij}^{\pi}\}_{i,\, j=1}^{n_{\pi}}$ 是关于正交归一基 $\{e_i^{\pi}\}_{i=1}^{n_{\pi}}$ 的矩阵单位。给定 $\pi \in \mathrm{Irr(G)}$，定义

$$\alpha_{\pi} : X \to X \odot B(\mathcal{H}_{\pi}) : x \mapsto \sum_{i,j=1}^{n_{\pi}} (u_{ij}^{\pi} \triangleright x) \otimes E_{ij}^{\pi}.$$

于是 α_{π} 是一个完全正映射，因此诱导的映射

$$\alpha = \prod_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \alpha_{\pi} : X \to \prod_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} (X \odot B(\mathcal{H}_{\pi})) \cong X \overline{\otimes} \mathscr{L}^{\infty}(\widehat{\mathbb{G}})$$

是完全正幺映射。特别地， α 是完全压缩的。显然，对于所有 $g \in \mathrm{O(G)}$ 以及所有 $x \in X$，有 $g \triangleright x = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_g)\alpha(x)$。特别地，注意到 $(\mathrm{id} \overline{\otimes} \epsilon)\alpha = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_1)\alpha = \mathrm{id}$，因此 α 的所有矩阵放大都是范数递增的。于是， α 是完全等距的。现在显然， $\alpha\widehat{}$定义了一个右作用 X G。 □

此外，以下结论在其他语境中也是众所周知的，参见例如 [HHN22，命题 2.5]。为方便起见，我们给出一个简单的证明。

引理 3.26 (泊松变换)。 给定一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统 (X, α) 和一个算子系统 Y，以下赋值

$$\phi \mapsto \mathcal{P}_{\phi} := (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id}) \circ \alpha, \qquad \mathcal{P} \mapsto \phi_{\mathcal{P}} := (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon}) \circ \mathcal{P}$$

在 *ucp* 映射 $X \to Y$与 $\widehat{\mathbb{G}}$-等变完全正幺映射 $(X, \alpha) \to (Y \overline{\otimes} \mathscr{L}^{\infty}(\widehat{\mathbb{G}}), \mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})$之间定义了一个双射对应。

$\widehat{}$证明。 若 $\phi : X \to Y$是 ucp 映射，则 Pϕ 是 \hat{G}-等变的，因为对于 $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})\mathcal{P}_{\phi}(x) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x) \\ &= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(\alpha(x)) \\ &= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha(x)) \\ &= (\mathcal{P}_{\phi} \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x).\end{aligned}$$

接下来，注意到对于 $x \in X$,

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{P}_{\phi}}(x) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x) = \phi(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon})\alpha(x) = \phi(x) \\ \mathcal{P}_{\phi_{\mathcal{P}}}(x) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathcal{P} \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\epsilon} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x)\end{aligned}$$

因此 P $\mapsto \phi_{\mathcal{P}}$ 和 $\phi \mapsto$Pϕ 互为逆映射。 □

引理 3.27。 若 X 是一个内射算子系统，则 $(X \overline{\otimes} \mathscr{L}^{\infty}(\widehat{\mathbb{G}}), \mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})$ 是 $\widehat{\mathbb{G}}$-内射的。

^ ^证明。设 Y、Z 是 G-算子系统，$\kappa : Y \to Z$ 是一个单位 G-等变完全等距映射，且$\varphi : Y \to X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty$（^G）是一个 ^G-等变 ucp 映射。由 X的内射性，存在一个 ucp 映射$\theta : Z \to X$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) & \xrightarrow{\mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\epsilon}} & X \\ {\scriptstyle\kappa}\big\downarrow & & & \nearrow_{\theta} & \\ Z & & & & \end{array}$$

交换。因此，泊松变换 $\Theta := \mathrm{P}_\theta = (\theta \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha_Z : Z \to X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty$(^G) 是一个完全正且幺正的 ^ \hat{G}-等变映射。此外，我们有

$$\Theta\kappa = (\theta \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha_Z\kappa = (\theta \overline{\otimes} \mathrm{id})(\kappa \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha_Y = (\mathrm{id} \overline{\otimes}\hat{\epsilon} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\varphi \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha_Y = (\mathrm{id} \overline{\otimes}\hat{\epsilon} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes}\hat{\Delta})\varphi = \varphi,$$

证明完毕。 □

命题 3.28。设 (X, α) 是一个 ^$\mathbb{G}$-算子系统。以下陈述等价：

1. (X, α) 是 ^G-内射的。2. X 是内射的，并且存在一个 ^|hat{G}-等变的完全正且幺正的条件期望 $(X\overline{\otimes}\mathscr{L}^\infty(\widehat{G}), id\overline{\otimes}\hat{\Delta}) \to (\alpha(X), id \overline{\otimes}\hat{\Delta})$。3. X 是内射的，并且存在一个 ^|hat{G}-等变的完全正且幺正的条件期望 $(X\overline{\otimes}B(L^2(G)), id \overline{\otimes}\hat{\Delta}_r)$

→

$(\alpha(X), \mathrm{id} \overline{\otimes}\hat{\Delta})$。

证明。(1) ⇐⇒ (2) 证明与命题 3.14 相同。

(3) Ô⇒ (2) 显然。

(1) Ô⇒ (3) 由蕴含关系 (1) Ô⇒ (2)，我们知道 X 是内射的，而存在一个 ^G-等变的完全正且幺正的条件期望 $X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G})) \to \alpha(X)$，由 ^G-内射性可立即得到。或者，我们也可以直接通过注意到映射来证明 (2) Ô⇒ (3)

$$(B(L^2(\mathbb{G})), \hat{\Delta}_r) \to (\mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}), \hat{\Delta}) : x \mapsto (\omega_{\xi_{\mathbb{G}}} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\hat{\Delta}_r(x))$$

^是一个 G-等变的条件期望，这直接由 Δ_r的余结合性得到。

□

^现在我们将介绍与 G-算子系统相关的约化交叉积和 Fubini 交叉积。为确保约化交叉积是一个算子系统，我们需要以下引理：

引理 3.29。如果(X, α) 是一个 ^$\mathbb{G}$-算子系统，$x \in X$ 且 $g \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$，那么

$$(\alpha(x)(1 \otimes \lambda(g))^* = \alpha((\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_{g^*_{(1)}})(\alpha(x^*)))(1 \otimes \lambda(g^*_{(2)})).$$

证明。W e 假设 $X \subseteq B(\mathrm{H})$。如果 $\omega \in c_c$(^G) 和 $h \in \mathrm{O(G)}$，不难看出 th e 交换关系

$$\hat{\lambda}(\omega(-h_{(1)}))\lambda(h_{(2)}) = \lambda(h)\hat{\lambda}(\omega)$$

成立。因此，我们看到

$$(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_{h_{(1)}})(\hat{\Delta}(z))\lambda(h_{(2)}) = \lambda(h)z$$

对于每个 $z \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\Gamma}\mathrm{G})$ 以及每个 $h \in \mathrm{O}(\mathrm{G})$。因此，如果 $\phi \in B(\mathrm{H})_*$，我们计算得

$$\begin{aligned}
&(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})[\alpha((\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_{g^*_{(1)}})\alpha(x^*))(1 \otimes \lambda(g^*_{(2)}))] \\
&= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})[(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_{g^*_{(1)}})((\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(\alpha(x^*)))(1 \otimes \lambda(g^*_{(2)}))] \\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_{g^*_{(1)}})[\hat{\Delta}((\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha(x^*)))]\lambda(g^*_{(2)})) \\
&= \lambda(g^*)(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha(x^*)) \\
&= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})((1 \otimes \lambda(g^*))\alpha(x^*)).
\end{aligned}$$

该引理得证。 □

定义 3.30。 设 (X, α) 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统。我们将约化交叉积定义为算子系统 $X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}} := \text{张成}^{\|\cdot\|} \{\alpha(x)(1 \otimes \lambda(a)) : x \in X, a \in \mathcal{O}(\mathbb{G})\} \subseteq \overline{X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))}$。

定义 3.31。 设 (X, α) 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统。我们将 *Fubini* 交叉积定义为算子系统

$$X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} := \{z \in X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) : (\mathrm{id}_X \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) = (\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(z)\}.$$

注 3.32。 若 X 是冯·诺伊曼代数且 $\alpha : X \to X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\Gamma}\mathrm{G})$ 是一个正规含单位的*-同态，则 $X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \mathrm{G}$ 与通常的冯·诺伊曼交叉积一致。然而，还有另一种有价值的观点。我们可以将 $X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\Gamma}\mathrm{G}$ 视为（在算子系统的框架下） X 与冯·诺伊曼代数 $B(L^2(\mathrm{G}))$ 关于左作用 Δ_l 和右作用 α的余张量积。另见 [DV10，第 7] 节，其中讨论了余张量积在紧量子群作用于 C^*-代数和冯·诺伊曼代数这一背景下的应用。我们利用这一观点在 Fubini 交叉积上构造对偶作用，参见定理 3.37、命题 3.40，以及 [DV10，引理 7.2]。◇

例 3.33. 设 Γ 是一个离散群，$\mathrm{G} = \Gamma$ 是如例 2.6 中所述的其对偶紧量子群。若$\alpha : X \to X \overline{\otimes} \ell^\infty(\Gamma)$是如定义 3.20 中所述的余作用，则我们得到一个群作用 $\beta : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$，其定义为

$$\beta_g := (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_g) \circ \alpha, \quad g \in \Gamma$$

其中，对于 $g \in \Gamma$ 和 $f \in \ell^\infty(\Gamma)$，$\mathrm{ev}_g(f) = f(g^{-1})$。若 $z \in X \overline{\otimes} B(\ell^2(\Gamma))$，我们可以将其视为一个无限矩阵 $[z_{g,h}]_{g,\, h \in \Gamma}$，其元素属于 X，其中 $z_{g,\, h} = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\delta_g,\, \delta_h})(z) \in X$。于是可得

$$\begin{aligned}
z \in X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} &\iff (\mathrm{id}_X \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) = (\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id}_{B(\ell^2(\Gamma))})(z) \\
&\iff \forall g \in \Gamma : (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{ev}_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) \\
&\iff \forall g \in \Gamma : (1 \otimes (\mathrm{ev}_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(W_{\widehat{\mathbb{G}}})^*)z(1 \otimes (\mathrm{ev}_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(W_{\widehat{\mathbb{G}}})) = (\beta_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) \\
&\iff \forall g \in \Gamma : (1 \otimes \rho_g^*)z(1 \otimes \rho_g) = (\beta_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) \\
&\iff \forall g, h, k \in \Gamma : (\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\delta_h, \delta_k})(\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ad}(\rho_g^*))(z) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\delta_h, \delta_k})(\beta_g \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) \\
&\iff \forall g, h, k \in \Gamma : (\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\delta_{hg^{-1}}, \delta_{kg^{-1}}})(z) = \beta_g((\mathrm{id} \overline{\otimes} \omega_{\delta_h, \delta_k})(z)) \\
&\iff \forall g, h, k \in \Gamma : z_{hg^{-1}, kg^{-1}} = \beta_g(z_{h,k}) \ .
\end{aligned}$$

因此，

$$X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} = \{z \in X \overline{\otimes} B(\ell^2(\Gamma)) : \forall g, h, k \in \Gamma : \beta_{g^{-1}}(z_{h,k}) = z_{hg,kg}\} \ ,$$

并且我们得到 Hamana 的 Fubini 交叉积 [Ham82, II, Section 3]。 ◇

例 3.34。令 $X \subseteq B(\mathrm{H})$ 为一个算子系统，$\tau : X \to X \overline{\otimes} L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 为平凡作用 $\tau(x) = x \otimes 1$。我们声称 $X \rtimes_\tau \widehat{\mathbb{G}} = X \overline{\otimes} L^\infty(\mathbb{G})$。事实上，很容易看出右侧包含于左侧。反过来，利用 $\{(\omega \overline{\otimes} \mathrm{id})(W_{\widehat{\mathbb{G}}}) : \omega \in B(L^2(\mathbb{G}))_*\}$ 生成冯·诺伊曼代数 $L^\infty(\mathbb{G})'$ 这一事实，立即可得

$$\{x \in B(L^2(\mathbb{G})) : W_{\widehat{\mathbb{G}}}^*(1 \otimes x) W_{\widehat{\mathbb{G}}} = 1 \otimes x\} = L^\infty(\mathbb{G}).$$

因此，如果 $z \in X \rtimes_\tau \widehat{\mathbb{G}}$，那么 $W_{\widehat{\mathbb{G}},\,23}^* z_{13} W_{\widehat{\mathbb{G}},\,23} = z_{13}$。如果 $\omega \in B(\mathrm{H})_*$，则对该等式应用切片映射 $\omega \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id}$，得到

$$W_{\widehat{\mathbb{G}}}^*(1 \otimes (\omega \overline{\otimes} \mathrm{id})(z)) W_{\widehat{\mathbb{G}}} = 1 \otimes (\omega \overline{\otimes} \mathrm{id})(z),$$

从而 $(\omega \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) \in L^\infty(\mathbb{G})$。根据 Fubini 张量积的定义，这恰好意味着 $z \in X \overline{\otimes} L^\infty(\mathbb{G})$。另请注意，显然 $X \rtimes_{\tau,\, r} \widehat{\mathbb{G}} = X \otimes C_r(\mathbb{G})$。$\diamondsuit$

命题 3.35。设 $z \in X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$。则对于所有 $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$，有 $(1 \otimes \lambda(a)) z (1 \otimes \lambda(b)) \in X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$。特别地，$X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$ 具有一个 $C_r(\mathbb{G})$-双模结构。此外，$X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}} \subseteq X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$。

证明。我们计算 a、$b \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 和 $z \in X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$，得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)((1 \otimes \lambda(a)) z (1 \otimes \lambda(b))) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(1 \otimes \lambda(a))(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(1 \otimes \lambda(b)) \\ &= (1 \otimes 1 \otimes \lambda(a))(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(z)(1 \otimes 1 \otimes \lambda(b)) \\ &= (\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})((1 \otimes \lambda(a)) z (1 \otimes \lambda(b))),\end{aligned}$$

因此 $(1 \otimes \lambda(a)) z (1 \otimes \lambda(b)) \in X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$。由余作用性质，包含关系 $\alpha(X) \subseteq X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$ 显然成立。 □

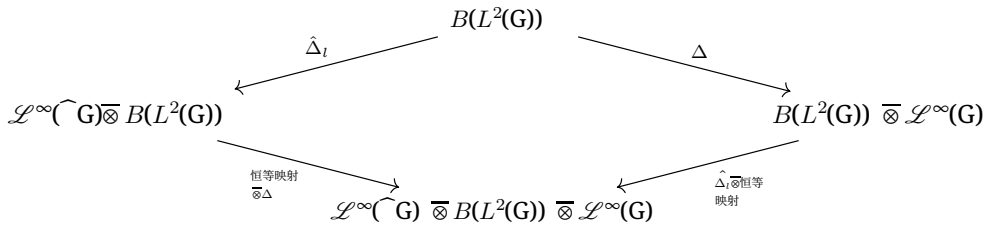
引理 3.36。$(X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \cap (X \overline{\otimes} L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})) = \alpha(X)$。

证明。假设 $z \in (X \rtimes_{\alpha,\, \mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \cap (X \overline{\otimes} L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$。那么 $(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) = (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(z)$。对该等式应用切片映射 $\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \epsilon$，可得 $z = \alpha((\mathrm{id} \overline{\otimes} \epsilon)(z))$。 □

定理 3.37. 若 (X, α) 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统，则 $\mathbb{G}$-W^*-作用 $\mathrm{id}_X \overline{\otimes} \Delta : X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \to X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \overline{\otimes} L^\infty(\mathbb{G})$ 限制为一个 $\mathbb{G}$-W^*-作用 $\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta : X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} \to (X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \overline{\otimes} L^\infty(\mathbb{G})$ 以及一个 $\mathbb{G}$-C^*-作用 $\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta : X \rtimes_{\alpha,\, r} \widehat{\mathbb{G}} \to (X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}}) \otimes C_r(\mathbb{G})$。此外，

$$\mathrm{R}^{\mathrm{alg}}(X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) = \mathrm{span}\{\alpha(x)(1 \otimes \lambda(a)) : x \in X, a \in \mathcal{O}(\mathbb{G})\}, \quad \mathrm{Fix}(X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) = \alpha(X).$$

证明。我们首先注意到图表



交换。为此，注意到该图表的交换性等价于

$$V_{\mathbb{G},23} W_{\widehat{\mathbb{G}},12}^* (1 \otimes x \otimes 1) W_{\widehat{\mathbb{G}},12} V_{\mathbb{G},23}^* = W_{\widehat{\mathbb{G}},12}^* V_{\mathbb{G},23} (1 \otimes x \otimes 1) V_{\mathbb{G},23}^* W_{\widehat{\mathbb{G}},12}, \quad x \in B(L^2(\mathbb{G})).$$

根据弱稠密性，只需证明对于 $x \in B_0(L^2(\mathbb{G}))$，该等式成立。我们有

$$[\hat{\lambda}(\omega)\lambda(a) : \omega \in c_c(\widehat{\mathbb{G}}), a \in \mathcal{O}(\mathbb{G})] = B_0(L^2(\mathbb{G})).$$

若 $a \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 且 $\omega \in c_c(\widehat{\mathbb{G}})$，因此只需证明算子 $x = \hat{\lambda}(\omega)\lambda(a)$ 的所需等式。由于 $V_{\mathbb{G}} \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})' \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$ 且 $W_{\widehat{\mathbb{G}}} \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})'$，计算表明

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{G},23} W^*_{\widehat{\mathbb{G}},12}(1 \otimes \hat{\lambda}(\omega)\lambda(a) \otimes 1) W_{\widehat{\mathbb{G}},12} V^*_{\mathbb{G},23} &= (\hat{\Delta}(\hat{\lambda}(\omega)) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(\lambda(a))) \\ &= W^*_{\widehat{\mathbb{G}},12} V_{\mathbb{G},23}(1 \otimes \hat{\lambda}(\omega)\lambda(a) \otimes 1) V^*_{\mathbb{G},23} W_{\widehat{\mathbb{G}},12}\ , \end{aligned}$$

因此我们得出上述图表是交换的。令 $\omega \in B(\mathbb{H})_*$，其中 $X \subseteq B(\mathbb{H})$ 且 $\curvearrowright z \in X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \mathbb{G}$。我们计算

$$\begin{aligned} (\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) \\ &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) \\ &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) \\ &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) \\ &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z)\ , \end{aligned}$$

因此可推出 $(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) \in X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$。根据 Fubini张量积的定义，这意味着

$$(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) \in [(X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))] \cap [X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})] = (X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\mathbb{G}$$

因此，$\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta$ 限制为 Fubini 交叉积上的 G-W^*-作用。

假设 $z \in \mathbb{R}^{\mathrm{alg}}(X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}})$。由命题3.10，还可得 $z \in \mathbb{R}^{\mathrm{alg}}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))) = (X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))(1 \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}))$。因此，我们可以写成

$$z = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j=1}^{n_\pi} z^\pi_{ij}(1 \otimes u^\pi_{ij})\ ,$$

其中 $z^\pi_{ij} \in X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$。根据假设，

$$(X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \odot \mathcal{O}(\mathbb{G}) \ni (\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j,k=1}^{n_\pi} z^\pi_{ij}(1 \otimes u^\pi_{ik}) \otimes u^\pi_{kj}.$$

由此可得 $\sum_{i=1}^{n_{\pi'}} z^{\pi'}_{ij'}(1 \otimes u^{\pi'}_{ik'}) \in X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$，其中 π'、j'、k' 为不动点。由于 $X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}$ 是一个 $C_r(\mathbb{G})$-双模，我们得到

$$X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} \ni \sum_{k'=1}^{n_{\pi'}} \left(\sum_{i=1}^{n_{\pi'}} z^{\pi'}_{ij'}(1 \otimes u^{\pi'}_{ik'}) \right) (1 \otimes (u^{\pi'}_{i'k'})^*) = z^{\pi'}_{i'j'}.$$

由此可得，对于所有 π、i、j，$z^\pi_{ij} \in (X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}) \cap (X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})) = \alpha(X)$。因此，对于唯一的 $x^\pi_{ij} \in X$，我们可以写成 $z^\pi_{ij} = \alpha(x^\pi_{ij})$，并且由此可得

$$z = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j=1}^{n_\pi} \alpha(x^\pi_{ij})(1 \otimes u^\pi_{ij}).$$

该定理得证。 □

接下来，我们得到 Fubini 交叉积与约化交叉积之间的以下良好关系：

推论 3.38. $\mathcal{R}(X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) = X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}}$.

$\widehat{\ }$如预期，G-等变完全正幺映射会在相应的交叉积上诱导出 G-等变映射。下面引理的证明是显然的。

引理 *3.39.* 设 (X, α) 和 (Y, β) 是 $\widehat{\ }$*G*-算子系统，且 $\phi : X \to Y$是一个 $\widehat{\ }$*G*-等变 *ucp* 映射。则映射 $\phi \overline{\otimes} id : X \overline{\otimes} B(L^2(G)) \to Y \overline{\otimes} B(L^2(G))$ 限制为一个 *G*-W^*-*ucp* 映射 $\widehat{\ } \widehat{\ } \widehat{\ } \

由于 $\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}$ 在 $\mathscr{L}^\infty$(G) 上是忠实的，因此 E 也是忠实的。注意，若 $a,b\in$ 属于 O(G) 且 $x\in B(L^2$(G))，则有

$$\omega_{\Lambda(a),\Lambda(b)}((\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}\overline{\otimes}\mathrm{id})\Delta(x)) = V^*_{\mathbb{G}}(\Lambda(1)\otimes\Lambda(b)),(x\otimes 1)V^*_{\mathbb{G}}(\Lambda(1)\otimes\Lambda(b))=\omega_{\Lambda(a),\Lambda(b)}(\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}(x)1),$$

因此可得 $(\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}\overline{\otimes}\mathrm{id})\Delta(x) = \omega_{\xi_{\mathbb{G}}}(x)1$。因此，

$$(E\overline{\otimes}\mathrm{id})\quad(\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\Delta)(z) = (\alpha\overline{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}\overline{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\Delta)(z) = (\alpha\overline{\otimes}\mathrm{id})((\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}})(z)\otimes 1) = E(z)\otimes 1.$$

最后，$\widehat{\mathrm{map}}$ 如果 G 是 Kac 型的，那么要证明 E 的 G-等变性，只需证明

$$(X\rtimes_{\alpha,\mathcal{F}}\widehat{\mathbb{G}},\mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\Delta}_r)\to(X,\alpha):z\mapsto(\mathrm{id}\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}})(z)$$

是 $\widehat{\text{G}}$-等变的。利用恒等式 (1)，我们看到

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}}\overline{\otimes}\mathrm{id})(\mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\Delta}_r)(z) &= (\mathrm{id}\overline{\otimes}\mathrm{id}\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}})(\mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\Delta}_l)(z)\\ &= (\mathrm{id}\overline{\otimes}\mathrm{id}\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}})(\alpha\overline{\otimes}\mathrm{id})(z) = \alpha((\mathrm{id}\overline{\otimes}\omega_{\xi_{\mathbb{G}}})(z)),\end{aligned}$$

命题得证。 □

推论 3.42。 如果 $X\rtimes_{\alpha,\,r}\widehat{\mathbb{G}}$ 是 $\mathbb{G}$-C^*-单射的，则 X 作为一个算子系统是内射的。如果 $X\rtimes_{\alpha,\,\mathcal{F}}\widehat{\mathbb{G}}$ 是 $\mathbb{G}$-W^*-单射的，则 X 作为一个算子系统是内射的。

证明。 根据引理 3.41，存在一个 G-W^*-等变条件期望 $E:(X\rtimes_{\alpha,\,\mathcal{F}}\widehat{\text{G}},\ \text{恒等映射}\ \overline{\otimes}\Delta)\to(\alpha(X)\ \tau)\cong(X,\tau)$。因此，$(X,\tau)$ 是 G-W^*-单射的，即 X 作为一个算子系统是内射的。另一个断言可用同样的方法证明。 □

4 交叉积的等变内射性

本节从一个 $\widehat{\text{G}}$-算子系统 (X,α) 出发，证明该算子的 $\widehat{\text{G}}$-单射性等价于相应交叉积的 G-单射性。作为一项$\widehat{\text{应}}$用，我们将用相关算子代数的等变内射性刻画 DQG G 的可和性。

$\widehat{\text{以}}$下关键引理确保某些映射自动具有 G-等变性 t:

引理 *4.1.* 设 $X\subseteq B(H)$ 是一个算子系统，且 $\psi:X\overline{\otimes}B(L^2(G))\to X\overline{\otimes}B(L^2(G))$ 是一个 *ucp* 映射，满足对于所有 $a\in O(G)$，均有 $\psi(1\otimes\lambda(a)) = 1\otimes\lambda(a)$。则 ψ 自动保持右余作用 $id_X\overline{\otimes}\hat{\Delta}_r : X\overline{\otimes}B(L^2(G))\to X\overline{\otimes}B(L^2(G))\ \overline{\otimes}\mathscr{L}^\infty(\widehat{G})$。

证明。 根据 Arveson 延拓定理，ψ 可延拓为一个 ucp 映射

$$\widetilde{\psi}:B(\mathcal{H}\otimes L^2(\mathbb{G}))\to B(\mathcal{H}\otimes L^2(\mathbb{G})).$$

由 [KKV22，引理 6.2] 中的论证，$\widetilde{\psi}$ 保持余作用 $\mathrm{id}_{B(\mathcal{H})}\overline{\otimes}\hat{\Delta}_r$，引理遂立即得证。 □

现在进入本文的主要结果。类似的结果已在未发表预印本 [Moa18，定理 7.5 和推论 7.7] 中，在冯·诺伊曼代数的语境下得到，其中使用了冯·诺伊曼代数的编织张量积这一非平凡概念。下述定理中的 Kac 型情形推广了原始结果 [Ham82，II，引理 3.1]。

定理 4.2。 设 $(X,\ \alpha)$ 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统。以下映射的存在性彼此等价：

1. 一个 $\widehat{\ }$\hat{G}-等变的完全正且幺正的条件期望 $(X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\ }G), id \overline{\otimes} \hat{\ }\Delta) \to (\alpha(X), id \overline{\otimes} \hat{\ }\Delta)$。*2.* 一个 $\widehat{\ }$\hat{G}-等变的完全正且幺正的条件期望 $(X \overline{\otimes} B(L^2(G)), id \overline{\otimes} \hat{\ }\Delta_r) \to (\alpha(X), id \overline{\otimes} \hat{\ }\Delta)$。*3.* 一个 G

$\Delta)$-W^*-等变完全正且幺正的条件期望 $(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) \to (X \rtimes_\alpha, \mathscr{F}\widehat{\ }\mathbb{G}, \mathrm{id} \overline{\otimes}$

*-等变完全正且幺正的条件期望 $\mathcal{R}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) \to (X \rtimes_{\alpha,\ r}\widehat{\ }\mathbb{G}, \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)$。

如果 $\mathbb{G}$ 是 *Kac* 型，则这些映射的存在性等价于以下对象的存在：

5. 一个完全正且幺正的条件期望 $X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \to X \rtimes_{\alpha,\ \mathscr{F}}\widehat{\ }\mathbb{G}$。

证明。 我们将假设 $X \subseteq B(\mathrm{H})$。

(1) $\Leftrightarrow$ (2) 只需注意到该映射

$$B(L^2(\mathbb{G})) \to \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) : x \mapsto (\omega_{\xi_{\mathbb{G}}} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\hat{\Delta}_r(x))$$

$\widehat{\ }$是一个 ucp \hat{G}-等变条件期望。

(1) $\Rightarrow$ (3)+(4) 根据假设，存在一个等变 ucp 映射 $\phi : (X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\ }G), \mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\ }\Delta) \to (X, \alpha)$，使得 $\phi \circ \alpha = \mathrm{id}_X$。定义

$$\psi := (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l) : X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \to X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})).$$

$\widehat{\ }$若 $z \in X \rtimes_{\alpha,\ \mathscr{F}}\widehat{\ }\mathbb{G}$，则

$$\psi(z) = (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) = (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(z) = z.$$

此外，若 $z \in X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))$，则

$$\begin{aligned}
(\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(\psi(z)) &= (\alpha \overline{\otimes} \mathrm{id})(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) \\
&= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) \\
&= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) \\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(z) \\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(\psi(z)) ,
\end{aligned}$$

因此 $\psi(z) \in X \rtimes_{\alpha,\ \mathscr{F}}\widehat{\ }\mathrm{G}$。由此可知，$\psi : X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G})) \to X \rtimes_{\alpha,\ \mathscr{F}}\widehat{\ }\mathrm{G}$ 是一个完全正且幺正的条件期望。我们声称 ψ 是 G-W^*-等变的。事实上，正如定理 3.37 的证明所示，由于 $(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)\hat{\ }\Delta_l = (\hat{\ }\Delta_l \overline{\otimes} \mathrm{id})\Delta$，对于 $z \in X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G}))$，我们可以计算得

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(\psi(z)) &= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) \\
&= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l)(z) \\
&= (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta}_l \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z) \\
&= (\psi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(z).
\end{aligned}$$

此外，由于 ψ 是 G-W^*-等变的，它限制为一个 G-C^*-等变的 ucp 条件期望

$$\mathcal{R}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))) \to \mathcal{R}(X \rtimes_{\alpha,\mathscr{F}} \widehat{\mathbb{G}}) = X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) 设给定一个 G-W^*-等变条件期望 $P : X \overline{\otimes} B(L^2(\mathrm{G})) \to X \rtimes_{\alpha,\ \mathscr{F}}\widehat{\ }\mathrm{G}$。由引理 4.1， P 自动保持余作用 $\mathrm{id}_X \overline{\otimes} \Delta_r$。由于 P 保持 $\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta$-余作用，因此它限制为一个完全正且幺正的条件期望

$$Q : \mathrm{Fix}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) = X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to \mathrm{Fix}(X \rtimes_{\alpha,\mathscr{F}} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta) = \alpha(X)$$

ˆ，显然它保持余作用 id$\overline{\otimes}\Delta$。

(4) Ô⇒ (1) 设有一个 G-C^*-等变的完全正且幺正的条件期望

$$P : (\mathcal{R}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))), \mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta) \to (X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta)$$

⌢。由 Arveson 延拓定理和引理 4.1 可知， P有一个完全正且幺正的 G-等变延拓

$$\widetilde{P} : (B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\Delta}_r) \to (B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}\overline{\otimes}\hat{\Delta}_r).$$

由于 P 保持余作用 id$\overline{\otimes}\Delta$，它限制为一个完全正且幺正的条件期望

$$Q : X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to \alpha(X) \ ,$$

ˆ ˜ ˆ，且由于 P 是 G-等变的，该条件期望也是 G-等变的。

(5) Ô⇒ (1)（在额外假设 G 为 Kac 型的情况下。）根据假设，存在一个完全正且幺正的条件期望

$$P : X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \to X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} \ ,$$

ˆ，它自动保持余作用 id$\overline{\otimes}\Delta_r$。由于 G 为 Kac 型，命题 3.41 告诉我们， E :($X \rtimes_\alpha$, $\mathcal{F}$ ⌢G，id $\overline{\otimes}$ˆΔ_r) →($\alpha(X)$，id$\overline{\otimes}$ˆΔ) 是 ⌢G-等变的。其复合映射

$$X \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \xrightarrow{\subseteq} X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})) \xrightarrow{P} X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}} \xrightarrow{E} \alpha(X)$$

⌢因此是\hat{G}-等变的。结果得证。 □

我们现在得到以下结果：

Theo注 4.3。 设(X, α) 是一个 ⌢$\mathbb{G}$-算子系统。以下陈述等价。 :

1. (X, α) 是 ⌢$\mathbb{G}$-内射的。 *2.* ($X \rtimes_\alpha$, $\mathcal{F}$ ⌢$\mathbb{G}$，id$\overline{\otimes}\Delta$) 是 $\mathbb{G}$-W^*-内射的。 *3.* ($X \rtimes_{\alpha,\ r}$ ⌢$\mathbb{G}$，id $\overline{\otimes}\Delta$) 是 $\mathbb{G}$-C^*-内射的。

此外，若 $\mathbb{G}$ 为 *Kac* 型，则 (X, α) 是 ⌢$\mathbb{G}$-内射，当且仅当 $X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}}$ ⌢$\mathbb{G}$ 作为算子系统是内射的。

证明。 (1) Ô⇒ (2) 假设 (X, α) 是 ⌢G-内射的。根据命题 3.28 和定理 4.2，X 是内射的，并且存在一个 G-W^*-完全正且幺正的条件期望

$$(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta) \to (X \rtimes_{\alpha,\mathcal{F}} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta).$$

根据引理 3.12，可知 ($X \rtimes_\alpha$, $\mathcal{F}$ ⌢G, id$\overline{\otimes}\Delta$) 是 G-W^*-内射的。

(2) Ô⇒ (3) 根据引理 3.16 可立即得到。

(3) Ô⇒ (1) 注意到 $X \rtimes_{\alpha,\ r}$ ⌢G ⊆ R($X \overline{\otimes} B$(L^2(G)), id$_X$ $\overline{\otimes}\Delta$)，因此根据 G-C^*-内射性，存在一个 ucp G-C^*-等变条件期望

$$(\mathcal{R}(X \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G}))), \mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta) \to (X \rtimes_{\alpha,r} \widehat{\mathbb{G}}, \mathrm{id}\overline{\otimes}\Delta).$$

结合定理 4.2、推论 3.42 和命题 3.28，我们看到 (X, α) 是 ⌢G-内射的。

Kac 情形下的断言可用类似的方法证明，依据是定理 4.2。 □

现在，我们将定理 4.3 应用于带有平凡作用的 G-算子系统 C。在 Kac 情形下，我们由此重新得到 [Rua96] 中确立的一个结果。

推论 4.4。以下陈述等价：

1. $\mathbb{G}$是可 *amenable* 的。*2.* 存在一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-等变态 $(B(L^2(\mathbb{G})), \hat{}\Delta_r) \to (\mathbb{C}\ \tau)$。*3.* $(\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})\ \Delta)$ 是 $\mathbb{G}$-W^*-内射的。*4.* $(C_r(\mathbb{G})\ \Delta)$ 是 $\mathbb{G}$-C^*-内射的。

此外，如果 $\mathbb{G}$ 是 *Kac* 型，那么 $\widehat{\mathbb{G}}$ 可和当且仅当 $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{G})$ 是内射的。

在 [Cra17], 中，（G）作为算子（G）-模的 1-内射性这一概念被提出（在一般局部紧量子群的背景下）。本文的主要结果表明，这一 1-内射性概念等价于 G 的可和性，这与推论 4.4 中的一个等价关系相似。

注 4.5. 设 G 是任意一个余 amenable 紧量子群，其函数代数 C(G) 可分且无限维（例如，考虑 G = $\widehat{\Gamma}$，其中 Γ 是一个可 amenable 的可数无限群）。那么 C_r(G) 是 G-C^*-内射的，但作为算子系统并非内射。◇

5 交叉积的扩张与内射包

在本节中，我们使用来自 [HHN22] 的一个命题来证明，每个 G-C^*-算子系统X 都存在一个 G-C^*-内射包 I^{C^*} 𝔊 (X)，且每个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统 X 都存在一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-内射包 $I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X)$。另请参见 [HY22 第 3] 节，其中应用了此引理来证明 Yetter-Drinfeld 代数存在等变内射包；还可参见 [KKV22 第4] 节，其中使用了类似技术来构造与离散量子群相关联的非交换 Furstenberg 边界。

接下来我们证明，若 (X, α) 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统，则 $I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X) \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}$ 是 G-C^*-内射包络，其中 $(X \rtimes_{\alpha,\ r} \widehat{\mathbb{G}}$,id $\otimes\Delta)$ 是 G-C^*-算子系统。

我们先给出以下直接的定义：

定义 *5.1.* 设 X 是一个 *G-*C^*-算子系统。若一对 (Y, ι) 满足：Y 是一个 *G-*C^*-算子系统，且 $\iota : X \to Y$ 是一个 *G-*C^*-等变完全等距幺映射，则称其为 X 的 *G-*C^*-扩张。若 *G-*C^*-扩张 (Y, ι) 具有如下性质：对于满足 $\phi\iota = \iota$ 的任意 *ucp* 映射 $\phi : Y \to Y$，都有 $\phi = id_Y$，则称其为 *G-*C^*-刚性的。若 Y 是 *G-*C^*-内射的，则称其为 X 的 *G-*C^*-内射扩张。若以下情形 $\iota(X) \subseteq X \subseteq Y$ 中，$X^{\sim}$ 是 Y 的 *G-*C^*-内射算子子系统时必有 $X = Y$，则称 X 的 *G-*C^*-$^{\sim}$ $^{\sim}$内射扩张为 *G-*C^*-内射包络。

对$\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统作类似定义。

命题 5.2。设(X, α)，(Y, β) 为 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统，且 $\iota : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ 为一个等变完全等距幺映射。以下陈述等价：

1. $(Y, \iota : (X, \alpha) \to (Y, \beta))$ 是 $\widehat{G}$-刚性扩张 X。*2.* $(Y \rtimes_{r,\beta} \widehat{G}\ \iota \rtimes_r \widehat{G}\ : (X \rtimes_{r,\alpha} \widehat{G}$, id $\overline{\otimes}\Delta) \to (Y \rtimes_{r,\beta} \widehat{G}$, id $\overline{\otimes}\Delta))$ 是 *G-*C^*-刚性扩张$\frown X \rtimes_{r,\alpha} G$。

证明。(1) Ô⇒ (2) 设 $\Phi : (Y \rtimes_{r,\ \beta} \widehat{\mathbb{G}}$, 恒等映射 $\overline{\otimes}\Delta) \to (Y \rtimes_{r,\ \beta} \widehat{\mathbb{G}}$, 恒等映射 $\overline{\otimes}\Delta)$ 是一个 G-C^*-等变 ucp 映射，使得 $\Phi \bigcirc (\iota \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}) = \iota \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}$。我们必须证明 Φ = 恒等映射。根据假设，对于 $\Phi(1 \otimes \lambda(a)) = 1 \otimes \lambda(a)$

对所有 $a \in \mathrm{O}(\mathbb{G})$ 均成立。此外，由于 Φ 的等变性，我们看到 $\Phi(\beta(Y)) \subseteq \beta(Y)$，因此可以通过复合定义映射 $\phi : Y \to Y$

$$Y \xrightarrow{\beta} \beta(Y) \xrightarrow{\Phi} \beta(Y) \xrightarrow{\beta^{-1}} Y.$$

如果 $x \in X$，则有

$$\phi\iota(x) = \beta^{-1}\Phi\beta(\iota(x)) = \beta^{-1}\Phi(\iota \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x) = \beta^{-1}(\iota \overline{\otimes} \mathrm{id})\alpha(x) = \beta^{-1}\beta(\iota(x)) = \iota(x) \ ,$$

从而 $\phi \bigcirc \iota = \iota$。此外，如果 $Y \subseteq B(\mathrm{H})$，则根据 Arveson 延拓定理，$\Phi$ 可延拓为映射 $B(\mathrm{H} \otimes L^2(\mathbb{G})) \to B(\mathrm{H} \otimes L^2(\mathbb{G}))$，并且根据引理 4.1，该映射是 $\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta_r$-等变的。因此，$\phi : (Y, \beta) \to (Y, \beta)$ 也是 $\widehat{\mathbb{G}}$-等变的，并且根据延拓的 $\widehat{\mathbb{G}}$-刚性，我们得出 $\phi = \mathrm{id}_Y$。换言之，$\Phi\beta = \beta$。若此时 $y \in Y$ 且 $a \in \mathrm{O}(\mathbb{G})$，则我们看到

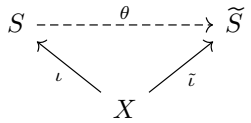
$$\Phi(\beta(y)(1 \otimes \lambda(a))) = \Phi(\beta(y))(1 \otimes \lambda(a)) = \beta(y)(1 \otimes \lambda(a)) \ ,$$

因此 $\Phi = \mathrm{id}$ 作用于 $Y \rtimes_{\beta, r} \mathbb{G}$ 上。

(2) $\hat{\mathrm{O}} \Rightarrow$ (1) 假设 $\phi : (Y, \beta) \to (Y, \beta)$ 是一个 $\widehat{\mathbb{G}}$-等变 ucp 映射，且满足 $\phi\iota = \iota$。显然，$(\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\iota \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}) = \iota \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}$，因此根据 $\mathbb{G}$-C^*-刚性，我们看到 $\phi \overline{\otimes} \mathrm{id} = \mathrm{id}_{Y \rtimes_{\beta, r} \widehat{\mathbb{G}}}$。于是，对于 $y \in Y$，$\beta(y) = (\phi \overline{\otimes} \mathrm{id})\beta(y) = \beta(\phi(y))$，由 β 的单射性可知 $\phi(y) = y$。因此，$\phi = \mathrm{id}_Y$。 □

接下来，我们证明 $\mathbb{G}$-C^*-内射包的存在性与唯一性。

命题 5.3。设 X 为一个 $\mathbb{G}$-C^*-算子系统。则存在一个 $\mathbb{G}$-C^*-内射包 $\widetilde{(S, \iota)}$，其对应于 X。若 (S, ι) 是另一个 $\mathbb{G}$-C^*-内射包，则存在唯一的 $\mathbb{G}$-C^*-单位序同构 $\theta : S \to S$，使得图表



交换。此外，$(S, \iota : X \to S)$ 是一个 $\mathbb{G}$-C^*-内射包，当且仅当 (S, ι) 是 $\mathbb{G}$-C^*-内射的，并且 $\mathbb{G}$-C^*-刚性的。

证明。若 (S, ι) 是 $\mathbb{G}$-C^*-内射且 $\mathbb{G}$-C^*-刚性的 $\mathbb{G}$-C^*-算子系统 X 的扩张，则 (S, ι) 是 X 的 $\mathbb{G}$-C^*-内射包。事实上，若 $\iota(X) \subseteq T \subseteq S$，其中 T 是 S 的 $\mathbb{G}$-C^*-内射算子子系统，则存在一个 $\mathbb{G}$-C^* ucp 映射 $\theta : S \to T$，使得 $\theta|_T = \mathrm{id}_T$。将 θ 视为一个 $S \to S$ 的映射，并注意到 $\theta\iota = \iota$，$\mathbb{G}$-C^*-刚性表明 $\theta = \mathrm{id}_S$。因此，$S = \theta(S) \subseteq T \subseteq S$ 且 $S = T$。

现在我们利用这一事实证明 $\mathbb{G}$-C^*-内射包的存在性。不妨假设 $X \subseteq B(\mathrm{H})$。令 $Y := \mathrm{R}(B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} B(L^2(\mathbb{G})), \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)$，它是一个 $\mathbb{G}$-C^*-内射算子系统，并考虑由所有满足 $\varphi \bigcirc \alpha = \alpha$ 的 $\mathbb{G}$-C^*-等变完全正幺映射 $\varphi : Y \to Y$ 所组成的集合 $\mathbb{G}$。将 $\mathbb{G}$ 视为 ucp 映射 $Y \to B(\mathrm{H} \otimes L^2(\mathbb{G}))$ 的子集，我们注意到 $\mathbb{G}$ 在逐点 σ-弱收敛拓扑下是闭的。事实上，设 $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathbb{G}$ 中一个收敛于此拓扑下 ucp 映射 $\varphi : Y \to B(\mathrm{H} \otimes L^2(\mathbb{G}))$ 的网。若 y 属于 $\mathbb{G}$-C^*-作用 $\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta : Y$ $\mathbb{G}$ 的代数核心，则

$$(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)\varphi(y) = \lim_{i \in I} (\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)\varphi_i(y) = \lim_{i \in I} (\varphi_i \odot \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(y) = (\varphi \odot \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)(y) \ ,$$

并且我们得出 $\varphi(Y) \subseteq Y$ 以及 $(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)\varphi = (\varphi \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta)$。此外，如果 $x \in X$，那么

$$\varphi(\alpha(x)) = \lim_{i \in I} \varphi_i(\alpha(x)) = \alpha(x) \ ,$$

因此 $\varphi \in \mathbb{G}$。根据 [HHN22，命题 2.1]，，可知存在一个幂等元 $\varphi \in \mathbb{G}$，使得对所有 $\phi \in \mathbb{G}$ 都有 $\varphi = \varphi\phi\varphi$。由于 $\varphi\alpha = \alpha$，我们看到 $\alpha(X) \subseteq \varphi(Y)$。我们断言，$(\varphi(Y)\ \alpha : X \to \varphi(Y))$ 是 X 的 $\mathbb{G}$-C^*-内射包。考虑作用 $\beta := \mathrm{id} \overline{\otimes} \Delta : Y \to Y \otimes C_r(\mathbb{G})$，$\widetilde{\ }$由于 φ 的 $\mathbb{G}$-C^*-等变性，该作用限制为一个映射 $\beta : \varphi(Y) \to \varphi(Y) \otimes C_r(\mathbb{G})$。以这种方式，$\widetilde{\ }(\varphi(Y)\ \beta)$ 成为一个 $\mathbb{G}$-C^*-算子系统。事实上，注意到

$$\widetilde{\beta}(\varphi(y))(1 \otimes \lambda(g)) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(\beta(y))(1 \otimes \lambda(g)) = (\varphi \otimes \mathrm{id})(\beta(y)(1 \otimes \lambda(g))$$

因此，$\varphi(Y)$ 的 Podleś 条件由 Y 的 Podleś 条件推出。

由于 $\varphi \bigcirc \varphi = \varphi$，我们看到 φ 是 $\varphi(Y)$ 上的恒等映射。因此，$\varphi(Y)$ 是 $\mathbb{G}$-C^*-内射的。

设 $\psi : \varphi(Y) \to \varphi(Y)$ 是一个满足 $\psi \bigcirc \alpha = \alpha$ 的 ucp $\mathbb{G}$-C^*-等变映射。于是 $\psi\varphi \in \mathbb{G}$ 和 $\varphi\psi = \psi$，从而

$$\varphi = \varphi(\psi\varphi)\varphi = \psi\varphi\ ,$$

这意味着 $\psi = \mathrm{id}$。这证明了该扩张的 $\mathbb{G}$-C^*-刚性。关于 $\mathbb{G}$-C^*-内射包唯一性的结论直接由 $\mathbb{G}$-C^*-内射性和 $\mathbb{G}$-C^*-刚性的定义得出。

最后，如果 (S, ι) 是一个 $\mathbb{G}$-C^*-内射包，那么根据唯一性，它与 $(\varphi(Y)\ \alpha)$ 规范同构，而后者具有所需的等变刚性和内射性。 □

根据前面的命题，我们可以讨论 $\mathbb{G}$-C^* 算子系统 X 的内射包，记作 $I^{C^*}_{\mathbb{G}}(X)$。该空间上的 $\mathbb{G}$-C^* 作用默认为已理解。

注 5.4。对于 $\mathbb{G}$-算子系统，当然也有类似的结果。在这种情况下，从一个带有 $X \subseteq B(\mathrm{H})$ 的 $\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统 (X, α) 出发，将 [HHN22，命题 2.1] 应用于由所有满足 $\varphi \bigcirc \alpha = \alpha$ 的 $\widehat{\mathbb{G}}$-等变 ucp 映射 $\varphi : B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 构成的集合 $\mathbb{G}$，可以找到一个最小幂等元 $\varphi \in \mathbb{G}$。然后可以验证

$$(\varphi(B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})), \alpha : X \to \varphi(B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})))$$

是 X 的 $\mathbb{G}$-内射包。

唯一可能不完全显然的是，$\mathbb{G}$ 在逐点σ-弱收敛拓扑下是闭的。但设 $\varphi : B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 是一个 ucp 映射，并且 $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathbb{G}$ 中收敛于 φ 的一个网，且收敛取该拓扑。如果 $\omega \in \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})_*$ 且 $y \in B(\mathrm{H}) \overline{\otimes} \mathscr{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$，我们看到

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)((\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})\varphi(y)) &= \lim_{i \in I} (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)((\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(\varphi_i(y))) \\
&= \lim_{i \in I} (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)((\varphi_i \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(y)) \\
&= \lim_{i \in I} \varphi_i((\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(y)) \\
&= \varphi((\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(y)) \\
&= (\mathrm{id} \overline{\otimes} \mathrm{id} \overline{\otimes} \omega)((\varphi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})(y))\ ,
\end{aligned}$$

因此我们得到 $(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})\varphi = (\varphi \overline{\otimes} \mathrm{id})(\mathrm{id} \overline{\otimes} \hat{\Delta})$，即 φ 是 $\widehat{\mathbb{G}}$-等变的，因此是 $\varphi \in \mathbb{G}$。 ◇

$\widehat{\mathbb{G}}$-算子系统 $\widehat{\mathbb{G}}$ 的 $\mathbb{G}$-内射包将记作 $I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X)$，并且默认理解 $I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X)$ 上的 $\widehat{\mathbb{G}}$ 作用。

在我们的工作之后，以下结果可直接得到：

定理 5.5。 设 X 是一个 $\widehat{\ }\mathbb{G}$-算子系统。设 $(Y,\ \iota)$ 是 $\widehat{\ }\mathbb{G}$-扩张。则 $(Y,\ \iota)$ 是 $\widehat{\ }\mathbb{G}$- X 的内射包，当且仅当 $(Y \rtimes_r \widehat{\ }\mathbb{G}\ \iota \rtimes_r \widehat{\ }\mathbb{G})$ 是 $\mathbb{G}$-C^*-$\backsim X \rtimes_r \mathbb{G}$ 的内射包。特别地，

$$I_{\widehat{\mathbb{G}}}(X) \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}} = I_{\mathbb{G}}^{C^*}(X \rtimes_r \widehat{\mathbb{G}}).$$

证明。 由定理 4.3、命题 5.2 和命题 5.3 可立即得出。 □

回顾一下，Furstenberg 边界 $\partial_F \widehat{\ }\mathrm{G}$ 的 C^*-代数 $C(\partial_F \widehat{\ }\mathrm{G})$ 可以实现为算子系统 $I_{\widehat{\mathbb{G}}}(\mathrm{C})$ [KKV22]。鉴于此，以下结论显而易见：
推论 5.6。 $I^{C^*}{}_{\mathbb{G}}(C_r(\mathbb{G})) = C(\partial_F \widehat{\ }\mathbb{G}) \rtimes_r \widehat{\ }\mathbb{G}$ 作为$\mathbb{G}$-C^*-算子系统。

致谢： 两位作者谨向 Kenny De Commer 致谢，感谢他在整个项目期间提供的宝贵意见。作者还要感谢 Sergey Neshveyev 进行有益的讨论，并感谢 Stefaan Vaes 分享命题 3.22 的证明并允许我们将其写入本文。

第一位署名作者谨向 Adam Skalski 致谢，感谢他在该作者于 IMPAN 进行研究访问期间提供的热情接待，并就本项目进行了有益的讨论。此次访问是在 FWO–PAS 项目 VS02619N“源自量子对称性的冯·诺伊曼代数”框架下进行的。该作者通过 FWO Aspirant 研究员奖学金（资助编号 1162522N）获得 Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek（佛兰德斯）的资助。第二位作者获得 NFR 项目 300837“量子对称性”的资助。

参考文献

[And21] Dimitrios Andreou。《局部紧群对偶算子空间的交叉积》。载于：*Studia Math.* 258.3（2021），第 241–267 页。[Cra17] Jason Crann。《局部紧量子群的可和性与协变内射性 II》。载于：*Canad. J. Math.* 69.5（2017），第 1064–1086 页。[De 17] Kenny De Commer。《紧量子群的作用》。载于：拓扑量子群。第 111 卷。Banach Center Publ. Polish Acad. Sci. Inst. Math.，华沙，2017 年，第 33–100 页。[DV10] An De Rijdt 和 Nikolas Vander Vennet。《幺半等价紧量子群的作用及其在概率边界中的应用》。载于：*Ann. Inst. Fourier(Grenoble)* 60.1（2010），第 169–216 页。[Ham11] Masamichi Hamana。《动力系统的内射包》。载于：*Toyama Math.J.* 34（2011），第 23–86 页。[Ham82] Masamichi Hamana。《单调完备 C^*-代数的张量积。I，II》。载于：*Japan. J. Math. (N.S.)* 8.2（1982），第 259–283、285–295 页。[Ham85] Masamichi Hamana。《C^*-动力系统的内射包》。载于：*Tohoku Math.J. (2)* 37.4（1985），第 463–487 页。[HHN22] Erik Habbestad、Lucas Hataishi 和 Sergey Neshveyev。《Drinfeld 双量子群的非交换 Poisson 边界与 Furstenberg-Hamana 边界》。载于：*J. Math.Pures Appl. (9)* 159（2022），第 313–347 页。[HY22] Lucas Hataishi 和 Makoto Yamashita。《具有量子对称性的代数与范畴的内射性》。2022 年。电子预印本：https://arxiv.org/abs/2205.06663。[KD97] J. Kustermans 和 A. van Daele。《由代数量子群产生的 C^*-代数量子群》。载于：*Internat. J. Math.* 8.8（1997），第 1067–1139 页。

[KK17] Mehrdad Kalantar 和 Matthew Kennedy。《离散群约化 C^*-代数的边界》。载于：J. Reine Angew. Math. 727（2017），第 247–267 页。[KKV22] Mehrdad Kalantar、Adam Kasprzak Paweł and Skalski 和 Roland Vergnioux。《非交换 Furstenberg 边界》。载于：Anal. PDE 15.3（2022），第 795–842 页。[Lan95] E. C. Lance。《Hilbert C^*-模》。第 210 卷。伦敦数学学会讲义系列。算子代数学家的工具书。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年，第 x+130 页。[Moa18] Mohammad S. M. Moakhar。《离散量子群在冯·诺伊曼代数上的可 amenable 作用》。2018 年。电子预印本：https://arxiv.org/abs/1803.04828。[NT04] Sergey Neshveyev 和 Lars Tuset。《离散量子群的 Martin 边界》。载于：J. Reine Angew. Math. 568（2004），第 23–70 页。[NT13] Sergey Neshveyev 和 Lars Tuset。《紧量子群及其表示范畴》。第 20 卷。Cours Spécialisés [专业课程]。法国数学会，巴黎，2013 年，第 vi+169 页。[Pau02] Vern Paulsen。《完全有界映射与算子代数》。第 78 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年，第 xii+300 页。[Rua96] Zhong-Jin Ruan。《Hopf 冯·诺伊曼代数与 Kac 代数的可和性》。载于：J. Funct. Anal. 139.2（1996），第 466–499 页。[Tim08] Thomas Timmermann。《量子群与对偶性的入门》。EMS 数学教材。从 Hopf 代数到乘法酉元及其后续发展。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2008 年，第 xx+407 页。[Tom06] Reiji Tomatsu。《可和离散量子群》。载于：J. Math. Soc. Japan 58.4（2006），第 949–964 页。[Vae23] Stefaan Vaes。《离散量子群的完全等距余作用是乘法保持的吗？》MathOverflow。2023 年。电子预印本：https://mathoverflow.net/questions/439526。[Van98] A. Van Daele。《群对偶性的代数框架》。载于：Adv. Math. 140.2（1998），第 323–366 页。[VV07] Stefaan Vaes 和 Roland Vergnioux。《普适离散量子群的边界、正合性与因子性》。载于：Duke Math. J. 140.1（2007），第 35–84 页。[Wor98] S. L. Woronowicz。《紧量子群》。载于：量子对称性（Les Houches，1995）。North-Holland，阿姆斯特丹，1998 年，第 845–884 页。

Joeri De Ro 布鲁塞尔自由大学电子邮箱：joeri.ludo.de.ro@vub.be

Lucas Hataishi 奥斯陆大学电子邮箱：lucasyh@math.uio.no