PROCEEDINGS OF SCIENCE

编织标量场论的BV量子化

Dj. Bogdanović, [a] **M. Dimitrijević Ćirić,** [a,*] **V. Radovanović**[a] **和 R. J. Szabo**[b]

[a]贝尔格莱德大学，物理学院，*Studentski trg 12*，贝尔格莱德，塞尔维亚[b]
数学系，赫瑞瓦特大学，爱丁堡，英国 麦克斯韦数学科学研究所，爱丁堡，
英国 希格斯理论物理中心，爱丁堡，英国电子邮箱：
djbogdan@ipb.ac.rs，dmarija@ipb.ac.rs，rvoja@ipb.ac.rs，
R.J.Szabo@hw.ac.uk

arXiv:2304.14073v1 [hep-th] 27 Apr 2023

我们从编织 L_∞-结构和巴塔林–维尔科夫斯基形式的视角，探讨非交换量子场论中的紫外/红外混合问题。我们描述编织非交换标量场理论的例子，并利用编织同调微扰理论对其进行量子化。通过在四维中的 ϕ^4-理论和六维中的 ϕ^3-理论的二点函数进行单圈计算，阐释了这一形式。在这两种情况下，我们都发现不存在非平面图，也不存在紫外/红外混合。

*2022*年科孚夏季学院“基本粒子物理与引力学校及研讨会”，*2022*年*8*月*28*日至*10*月*1*日 科孚，希腊

*演讲者
†预印本：EMPG–23–07

© 版权所有归作者所有，依据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎4.0国际许可协议（CC BY-NC-ND 4.0）的条款执行。

目录

1 引言 **2**

2 同伦代数与BV量子化3

3 编织标量量子场论8
3.1 编织 L_∞-标量场论的代数83.2 编织标量场论的 BV量子化9

4 示例：单圈二点函数 15
4.1 编织 ϕ-理论 154.2 编织 ϕ^3-理论 16

Drinfel'd 扭曲变形形式主义 20

1. 引言

非交换场论的量子化是一个长期存在的问题。在 Moyal–Weyl 型及其他类型的非交换场论中，微扰理论中会出现非平面费曼图。在单圈层面，除非外部动量非常小，否则这些图是紫外有限的；在外部动量很小时，未变形理论的紫外发散会重新出现。这种现象称为紫外/红外混合，并且不利于场论的可重整化性 [1], 例如 [2]综述。

多年来，人们投入了大量研究来理解这一问题，例如参见 [3] 综述。为了解释（扭曲）变形的庞加莱对称性，若干研究提出了对场的产生算符和湮灭算符的振子代数进行编织变形，例如参见 [4–7]。基于此，文献 [4] 认为，具有编织对称性的非交换标量量子场论在S矩阵元中不会表现出紫外/红外混合。这与 Oeckl的"编织量子场论" [8], 的结果一致；不过，该理论尚未扩展到具有规范对称性的理论。

利用扭曲形式主义，文献 [9]构造了编织 L_∞-代数及其相关的编织非交换场论。文献 [10], 回顾了 L_∞-代数与 Batalin–Vilkovisky（BV）形式主义之间的对应关系，文献 [11], 将其推广到编织 L_∞-代数，从而为编织量子场论提供了另一条路径；如今，该路径已经能够处理规范理论。文献 [11], 讨论了编织模糊标量场论的 BV量子化，而文献 [12]讨论了编织标量场论以及编织量子电动力学的 BV量子化。

本文旨在处理文献 [12] 所开启的非交换标量场理论子化问题，所采用的是其基础编织 L_∞-代数及其相关的 BV形式主义；为简单起见，本文将使用 Moyal–Weyl形变，但也可以类似地研究更一般的形变，参见附录A。在第2 节中，我们简要回顾场论中 L_∞-代数与 BV形式主义之间的联系。在第3 节中，我们介绍编织非交换标量场理论，并使用编织同调微扰理论对其进行量子化。在第4节中，我们给出两个具体例子：在 $\mathbb{R}^{1,3}$ 上的编织ϕ^4-理论，以及在 $\mathbb{R}^{1,5}$上的编织 ϕ^3-理论的二点函数的单圈计算。在这两种情况下，单圈二点函数都与交换情形相同，这证实了 [4–8]的预期。这表明，在编织标量场论中，非平面图和紫外/红外混合可能完全不存在。

2. 同伦代数与BV量子化

本节将简要讨论场论的 L_∞-代数、其对偶 BV 描述，以及通过“同伦传递”过程进行的量子化。

L_∞-代数。一个 L_∞-代数是一个 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 $V=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k$，带有一系列次数为 $2-n$ 的分次反对称多线性映射，这些映射作用于 $n\geq 1$，称为 n-括号：

$$\ell_n : V^{\otimes n} \longrightarrow V\,, \quad v_1\otimes\cdots\otimes v_n \longmapsto \ell_n(v_1,\dots,v_n)$$
$$\ell_n(\dots,v,v',\dots) = -(-1)^{|v|\,|v'|}\,\ell_n(\dots,v',v,\dots)\,,$$

其中，$|v|$ 表示齐次元素 $v\in V$ 的次数。 n-括号还必须满足一系列称为同伦雅可比恒等式的关系。前三个关系为

$$\underline{n=1:}\quad l_1(l_1(v))=0\,, \tag{1}$$

$$\underline{n=2:}\quad \ell_1\big(\ell_2(v_1,v_2)\big)=\ell_2\big(\ell_1(v_1),v_2\big)+(-1)^{|v_1|}\,\ell_2\big(v_1,\ell_1(v_2)\big)\,, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\underline{n=3:}\quad \ell_1\big(\ell_3(v_1,v_2,v_3)\big) &= -\ell_3\big(\ell_1(v_1),v_2,v_3\big)-(-1)^{|v_1|}\,\ell_3\big(v_1,\ell_1(v_2),v_3\big)\\ &\quad -(-1)^{|v_1|+|v_2|}\,\ell_3\big(v_1,v_2,\ell_1(v_3)\big)\\ &\quad -\ell_2\big(\ell_2(v_1,v_2),v_3\big)-(-1)^{(|v_1|+|v_2|)\,|v_3|}\,\ell_2\big(\ell_2(v_3,v_1),v_2\big)\\ &\quad -(-1)^{(|v_2|+|v_3|)\,|v_1|}\,\ell_2\big(\ell_2(v_2,v_3),v_1\big)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

循环 L_∞-代数包含一种称为循环配对的附加结构，它是一个分次对称且非退化的双线性映射 $\langle -,-\rangle\colon V\otimes V\to\mathbb{R}$，其次数为 -3，满足

$$\langle a_0,\ell_n(a_1,a_2,\dots,a_n)\rangle=(-1)^{n+(|a_0|+|a_n|)\,n+|a_n|\,\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|}\,\langle a_n,\ell_n(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})\rangle\,, \tag{4}$$

对所有 $n\geq 1$均成立。

如 [13], 所述，任意经典场论的数据都完全编码在相应的 L_∞-代数中。本文将研究范围限定为仅具有不可约规范对称性的理论，对于这些理论，

$$V=V_0\oplus V_1\oplus V_2\oplus V_3\,,$$

其中 V_0 包含规范参数， V_1 包含规范场， V_2 包含运动方程， V_2 包含第二诺特恒等式。

L_∞标量场论的-代数。我们用一个极为简单的例子来说明这一形式体系：在四维中，具有 $\lambda\,\phi^4$相互作用的实有质量标量场 ϕ 。该理论没有规范对称性，因此 $V = V_1 \oplus V_2$，其中 $V_1 = V_2 = C^\infty(\mathbb{R}^{1,\ 3})$。非零括号为

$$\ell_1(\phi) = \left(-\Box - m^2\right)\phi\ , \tag{5}$$

$$\ell_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \lambda\,\phi_1\,\phi_2\,\phi_3\ , \tag{6}$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\phi,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3 \in V_1$。次数为 -3 的循环配对定义为

$$\langle \phi, \phi^+ \rangle = \int \mathrm{d}^4x\ \phi\,\phi^+ \tag{7}$$

其中 $\phi \in V_1$ 和 $\phi^+ \in V_2$。

该构造导出了作用泛函

$$\begin{aligned} S(\phi) &= \frac{1}{2!}\,\langle \phi, \ell_1(\phi)\rangle - \frac{1}{3!}\,\langle \phi, \ell_2(\phi,\phi)\rangle - \frac{1}{4!}\,\langle \phi, \ell_3(\phi,\phi,\phi)\rangle + \cdots \\ &= \int \mathrm{d}^4x\ \left(\frac{1}{2}\,\phi\left(-\Box - m^2\right)\phi - \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4\right) \end{aligned} \tag{8}$$

以及运动方程

$$F_\phi = \ell_1(\phi) - \frac{1}{2}\,\ell_2(\phi,\phi) - \frac{1}{3!}\,\ell_3(\phi,\phi,\phi) + \cdots = \left(-\Box - m^2\right)\phi - \frac{\lambda}{3!}\,\phi^3 = 0\ .$$

这可以以显而易见的方式推广到任意维度中具有任意多项式相互作用的标量场论。

BV形式体系和 L_∞-代数。具有规范对称性的场论量子化并非 straightforward。标准的 Faddeev–Popov量子化程序适用于大量理论，例如量子电动力学和杨–米尔斯理论。它基于路径积分方法，在规范固定后会出现鬼场。这些是具有费米统计的标量场，对于保持规范固定理论的幺正性是必需的。规范固定作用量仍具有一种幂零奇全局对称性，即 Becchi–Rouet–Stora–Tyutin（BRST）对称性。物理态属于 BRST 对称性生成元的上同调，Q_{BRST}。

Faddeev–Popov量子化后来被推广为 Batalin–Vilkovisky（BV）量子化方法。BV 形式体系的主要优势之一是，它可以应用于更一般的场论，例如具有可约和/或开放规范代数的理论。特别是，BV形式体系被用于开放和闭玻色弦场论以及拓扑场论的量子化。

BV量子化具有显式的规范不变性，并引入反场作为这一对称性的源。对于每个场和鬼场，都引入一个反场，以这种方式使自由度的数量翻倍。反括号 $\{-,\ -\}$ 是场与反场空间上的奇非退化泊松括号。原经典作用量 S 被扩展为一个新的 BV作用量 S_{BV} ，其满足经典主方程 $\{S_{\mathrm{BV}},\ S_{\mathrm{BV}}\} = 0$，从而以紧凑的方式重现原理论的规范结构。

为了对该理论进行量子化，需要将经典主方程修改为量子主方程 on

$$\frac{1}{2}\{S_{\mathrm{BV}}, S_{\mathrm{BV}}\} - \mathrm{i}\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}} S_{\mathrm{BV}} = 0\,,$$

此时 S_{BV} 表示量子BV作用量，并引入了一个新的算子 Δ_{BV}，称为 BV 拉普拉斯算子。为了计算关联函数和散射振幅，必须进行规范固定。在 BV形式体系中，通过选择场与反场空间的拉格朗日子流形来实施规范固定；这会将反场消去，使其表示为场的泛函。适当实施后，即可使用通常的费曼图方法。有关 BV形式体系的详细综述，请参见 [14]。

从代数的角度来看，BV形式体系为分次向量空间 $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ 构造了一个微分分次交换代数[1] $(\mathrm{Sym}(V[1])^*,\ Q_{\mathrm{BV}})$ 该空间编码了 BV 场（与给定规范场论相关的鬼场和场）及其反场。BV微分 Q_{BV} 作用于场 $A \in V_1$ 和鬼场 $c \in V_0$，编码了场论的运动学规范对称性，即规范变换以及规范代数的闭合性。Q_{BV} 作用于反场 $A^+ \in V_2$，则纳入了 L_∞-代数的动力学括号，而反场的 BV 变换 $c^+ \in V_3$ 对应于第二诺特恒等式以及规范参数的相应作用。因此，Q_{BV} 在次数 0 上的上同调同时编码了场空间分别关于运动方程和规范变换作用所得的商。这些正是场论的经典可观测量。

这些数据还由反括号 $\{-,\ -\}$ 补充。它是与微分 Q_{BV}相容的典范分次泊松括号，其逆为定义在 V 上、次数为 -1 的辛形式 ω_{BV}。利用这一非退化辛配对，我们将对偶空间 $V^* \simeq V[1]$ 与

$$\mathrm{Sym}(V[1])^* \simeq \mathrm{Sym}(V[2])\,.$$

最后，经典可观测量的代数由 $(\mathrm{Sym}(V[2]),\ Q_{\mathrm{BV}},\ \{-,\ -\})$ 完全确定。

现在我们简要说明如何按照 [10]提取相应的 L_∞-代数。BV微分的作用由与 BV 作用泛函 S_{BV},$Q_{\mathrm{BV}} = \{S_{\mathrm{BV}},\ -\}$ 取反括号给出。作用泛函可以展开为

$$S_{\mathrm{BV}} = \sum_{m\geq 2} S^{(m)}_{\mathrm{BV}}\,,$$

其中，$S^{(m)}{}_{\mathrm{BV}}$ 是 S_{BV} 中关于 BV 场次数为 m 的多项式部分。接着，L_∞-代数的括号l_n 由 $\left\{S^{(n+1)}{}_{\mathrm{BV}},\ -\right\}$（其中 $n \geq 1$）给出。幂零性（Q_{BV}）$^2 = 0$，或等价地，经典主方程 $\{S_{\mathrm{BV}},\ S_{\mathrm{BV}}\} = 0$，对应于括号$l_n$的同伦雅可比恒等式；而 $(V,\ \{l_n\})$ 是一个 L_∞-代数。(-1)-移位辛结构 ω_{BV} 在 V 上诱导出次数为 -3 的循环配对，使其成为一个循环 L_∞-代数。

反之，从一个具有循环结构 $\langle -,-\rangle$（次数为 -3）的 L_∞-代数（V，$\{l_n\}$）出发，选取一个基 $\{\mathsf{e}_k\} \subset V$及相应的对偶基 $\{\mathsf{e}^k\} \subset V^* \simeq V[3]$，使得对于所有 k，l，均有 $\langle \mathsf{e}^k,\ \mathsf{e}_l\rangle = \delta^k_l$。按照 [10],，引入“收缩坐标函数”作为元素[2]

$$\xi := \mathsf{e}^k \otimes \mathsf{e}_k \ \in\ \mathrm{Sym}(V[2]) \otimes V \tag{9}$$

[1]移位向量空间 $V[1]$ 与 V 具有相同的底层向量空间，但其齐次子空间的次数整体移位 1。例如，元素 $A \in V[1]_1$ 的次数为 $1-1=0$。[2]本文始终采用重复上下指标的爱因斯坦求和约定。

次数为 1。

L_∞-结构通过扩展括号自然延拓到张量积 $\mathrm{Sym}(V[2]) \otimes V$

$$\ell_n^{\mathrm{ext}}(a_1 \otimes v_1, \ldots, a_n \otimes v_n) := \pm (a_1 \odot \cdots \odot a_n) \otimes \ell_n(v_1, \ldots, v_n) \,,$$

对所有 $n \geq 1$, $a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathrm{Sym}(V[2])$ 和 $v_1, \ldots\ldots, v_n \in V$; 显式的 Koszul符号因子 $\pm$取决于分次，参见 [10]。类似地，循环结构自然延拓为对称非退化配对 $\langle -, - \rangle^{\mathrm{ext}}$: $\big(\mathrm{Sym}(V[2]) \otimes V\big) \otimes \big(\mathrm{Sym}(V[2]) \otimes V\big) \to \mathrm{Sym}(V[2])$ 其次数为 -3 定义如下:

$$\langle a_1 \otimes v_1, a_2 \otimes v_1 \rangle^{\mathrm{ext}} := \pm (a_1 \odot a_2) \, \langle v_1, v_2 \rangle \,.$$

利用收缩坐标函数（9），现在令

$$Q_{\mathrm{BV}} \xi = - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \, \ell_n^{\mathrm{ext}}(\xi^{\otimes n}) \,.$$

同伦雅可比恒等式蕴含 $(Q_{\mathrm{BV}})^2 = 0$。扩展配对 $\langle -, - \rangle^{\mathrm{ext}}$ 诱导出一个 (-1)-移位辛结构

$$\omega_{\mathrm{BV}} := -\frac{1}{2} \langle \delta\xi, \delta\xi \rangle^{\mathrm{ext}} \in \Omega^2(V[1])$$

其逆定义了相应的反括号。通过这种方式，我们直接从场论的循环 L_∞-代数中恢复出BV形式体系的微分 Q_{BV}和反括号 $\{-, -\}$。

BV 作用泛函由元素

$$S_{\mathrm{BV}} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n+1)!} \langle \xi, \ell_n^{\mathrm{ext}}(\xi^{\otimes n}) \rangle^{\mathrm{ext}} \in \mathrm{Sym}(V[2])$$

次数为 0。于是

$$Q_{\mathrm{BV}} = \{ S_{\mathrm{BV}}, - \} \,,$$

且幂零性 $(Q_{\mathrm{BV}})^2 = 0$ 等价于经典主方程

$$\{ S_{\mathrm{BV}}, S_{\mathrm{BV}} \} = 0 \,.$$

同调微扰理论。 让我们回到描述经典场论的原始 L_∞-代数 $(V, \{l_n\})$。自由理论的传播子 h 定义了一个强变形收缩，即上链复形 (V, l_1) 到其上同调 $H^\bullet(V)$ 的一个同伦等价:

$$(V, \ell_1) \;\; \overset{\mathsf{h}}{\circlearrowright} \;\; \underset{\mathsf{p}}{\overset{\iota}{\leftrightarrows}} \;\; (H^\bullet(V), 0) \quad . \tag{10}$$

这里我们介绍了

- 包含映射：一个次数为 0 的余链映射 $\iota\colon H^\bullet(V) \to V$；
- 投影：一个次数为 0 的余链映射 $\mathsf{p}\colon V \to H^\bullet(V)$；
- 收缩同伦 $\mathsf{h}\colon V \to V$，次数为 -1。

这些映射需要满足以下条件：

- $\mathsf{p}\,\iota = \mathrm{id}_{H^\bullet(V)}$；
- $\iota\,\mathsf{p} - \mathrm{id}_V = l_1\,\mathsf{h} + \mathsf{h}\,l_1$；
- $\mathsf{h}^2 = 0$、$\mathsf{h}\,\iota = 0$ 和 $\mathsf{p}\mathsf{h} = 0$。

现在，我们将这一结构扩展到自由理论的经典可观测量代数 $(\mathrm{Sym}(V[2]), l_1, \{-,-\})$。反括号是分次泊松括号

$$\{-,-\} : \mathrm{Sym}(V[2]) \otimes \mathrm{Sym}(V[2]) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V[2])[1]$$

它在 $\mathrm{Sym}(V[2])$ 的每个槽位上也是分次导子；例如

$$\{a_1, a_2 \odot a_3\} = \langle a_1, a_2\rangle \odot a_3 \pm a_2 \odot \langle a_1, a_3\rangle\,, \tag{11}$$

对于 $a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{Sym}(V[2])$。反括号与微分 l_1 相容；该微分作为分次导子扩展到 $\mathrm{Sym}(V[2])$ 的整个空间，这一性质源于内积 $\langle -,-\rangle$ 的循环性。

由此，我们得到一个新的强变形收缩

$$\overset{\mathsf{H}}{\circlearrowright}\ (\mathrm{Sym}(V[2]), \ell_1) \underset{\mathsf{P}}{\overset{\mathsf{I}}{\leftrightarrows}} (\mathrm{Sym}(H^\bullet(V[2])), 0)\quad . \tag{12}$$

映射 P、I和 H 是（10）中相应映射的扩展。我们将在第 3.2 节通过一个具体示例进一步说明这些扩展是如何实现的。

为纳入相互作用并对理论进行量子化，我们使用同调扰动引理 [15]。我们将微分 l_1 微扰为 $Q_{\mathrm{BV}} = l_1 + \delta$，其中 δ 是一个小微扰。这~~~~产生了一个新的强变形收缩，并带有新的映射 P、I和H：

$$\overset{\tilde{\mathsf{H}}}{\circlearrowright}\ (\mathrm{Sym}(V[2]), Q_{\mathrm{BV}}) \underset{\tilde{\mathsf{P}}}{\overset{\tilde{\mathsf{I}}}{\leftrightarrows}} (\mathrm{Sym}(H^\bullet(V[2])), \tilde{\delta})\quad . \tag{13}$$

~特别地，新的投影映射由 $\mathsf{P} = \mathsf{P} + \mathsf{P}_\delta$ 给出，其中

$$\mathsf{P}_\delta = \mathsf{P}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{Sym}(V[2])} - \delta\,\mathsf{H}\right)^{-1}\delta\,\mathsf{H}\,.$$

文献 [15] 已证明，P_δ 给出了路径积分。

于是，量子场论的 n 点关联函数定义为

$$\begin{aligned} G_n(x_1,\dots,x_n) &= \langle 0|\mathrm{T}[A(x_1)\cdots A(x_n)]|0\rangle := \mathsf{P}_\delta(\delta_{x_1}\odot\cdots\odot\delta_{x_n}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\mathsf{P}\left((\delta\,\mathsf{H})^m\,(\delta_{x_1}\odot\cdots\odot\delta_{x_n})\right), \end{aligned} \tag{14}$$

其中，$\delta_{x_a}(x) := \delta(x - x_a)$ 是支撑在物理场 $A \in V_1$ 的插入点 x_a 处的狄拉克分布。我们将考虑两个重要的微扰 δ。

自由量子场论由 $\delta = \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}$ 和 BV 拉普拉斯算子定义

$$\Delta_{\mathrm{BV}} : \mathrm{Sym}(V[2]) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V[2])[1] \,.$$

BV 拉普拉斯算子满足两个关键性质 $(\Delta_{\mathrm{BV}})^2 = 0$ 以及 $\Delta_{\mathrm{BV}} \circ l_1 = -l_1 \circ \Delta_{\mathrm{BV}}$，这保证了 $Q_{\mathrm{BV}} = l_1 + \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}$ 是一个微分，$(Q_{\mathrm{BV}})^2 = 0$。它还通过下式与反括号相关

$$\Delta_{\mathrm{BV}}(a_1 \odot a_2) = \Delta_{\mathrm{BV}}(a_1) \odot a_2 + (-1)^{|a_1|}\, a_1 \odot \Delta_{\mathrm{BV}}(a_2) + \{a_1, a_2\} \,, \tag{15}$$

对所有 $a_1,\ a_2 \in \mathrm{Sym}(V[2])$。

相互作用量子场论由 $\delta = \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}} + \{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\ -\}$定义，其中 $\mathcal{S}_{\mathrm{int}}$ 是 BV 作用泛函的相互作用部分 S_{BV}。于是（14）是关于 $\hbar$ 以及 $\mathcal{S}_{\mathrm{int}}$中出现的耦合常数的形式幂级数，表示微扰展开。

3. 编织标量量子场论

在本节中，我们将 BV 量子化应用于编织非交换标量场理论。为便于具体说明，我们将在此研究 ϕ^4-理论，其定义在 $\mathbb{R}^{1,\,3}$。在第 4.2 节中，我们还将讨论六维中的 ϕ^3-理论这一例子。

3.1 标量场论的编织 L_∞-代数

编织非交换场论 [9] 通过扭曲形式主义构造，该形式主义已在附录 A中简要回顾；此处我们考虑 Moyal–Weyl 扭曲（A.5）。遵循 [12, 16], 我们为 L_∞-理论定义编织 ϕ^4-代数。其底层分次向量空间 $V = V_1 \oplus V_2$ 和动能括号（5）保持不变，$l_1^\star = l_1$, 而相互作用括号（6）则变为

$$\ell_3^\star(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \lambda\, \phi_1 \star \phi_2 \star \phi_3 \,. \tag{16}$$

Moyal–Weyl 扭曲与循环内积（7）相容，$\langle -, - \rangle_\star = \langle -, - \rangle$因此自由编织标量场论与其交换版本保持不变。

相互作用编织标量场论的作用泛函变为

$$\begin{aligned} S_\star &= \frac{1}{2!}\,\langle \phi, \ell_1(\phi) \rangle_\star - \frac{1}{4!}\,\langle \phi, \ell_3^\star(\phi, \phi, \phi) \rangle_\star \\ &= \int \mathrm{d}^4 x\, \left(\frac{1}{2}\,\phi\,(-\Box - m^2)\,\phi - \frac{\lambda}{4!}\,\phi \star \phi \star \phi \star \phi \right) . \end{aligned} \tag{17}$$

在经典层面，可以看出编织标量场论与标准的非交换标量场论相同。

3.2 编织标量场论的BV量子化

现在说明如何使用 [11]中建立的编织BV形式体系计算相互作用编织标量场论的关联函数。更多详细内容见 [12]。

我们从阿贝尔 L_∞-代数 $H^\bullet(V)$的上同调开始，该代数为(V, l_1)，描述了 $\mathbb{R}^{1,3}$上的自由（编织）标量场论的经典真空。这同样是一个集中在次数1和2上的阿贝尔 L_∞-代数，由大质量Klein–Gordon方程的解空间 $H^1(V) = \ker(l_1)$以及空间 $H^2(V) = \mathrm{coker}(l_1)$给出，其微分为平凡微分0。

按照第2 节和附录A中的讨论，我们需要定义一个次数为0的平移等变投影$\mathsf{p}\colon\ V \to H^\bullet(V)$，以及一个平移不变收缩同伦$\mathsf{h}\colon\ V_2 \to V_1$。为此，令$\mathsf{G}\colon\ C^\infty(\mathbb{R}^{1,3}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{1,3})$表示标量费曼传播子

$$\mathsf{G} = -\frac{1}{\Box + m^2} \qquad \text{with} \quad \tilde{\mathsf{G}}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}\,,$$

其中，$\tilde{\mathsf{G}}(k)$ 是格林算子 G 作用于形如 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot x}$ 的平面波特征函数时的特征值。它满足

$$\ell_1 \circ \mathsf{G} = -\big(\Box + m^2\big) \circ \mathsf{G} = \mathrm{id}_{C^\infty(\mathbb{R}^{1,3})}\,.$$

由于我们关注的是计算（编织）关联函数，因此取平凡投影映射 $\mathsf{p} = 0$，或者更准确地说，将 $H^\bullet(V)$ 的上链复形限制在其平凡子空间上。在这些选择下，收缩同伦$\mathsf{h}\colon\ V_2 \to V_1$ 由传播子$\mathsf{h} = \mathsf{G}$给出。明确地说，

$$\mathsf{h}(\phi^+)(x) = -\frac{1}{\Box + m^2}\,\phi^+(x) = \int \mathrm{d}^4y \int_k \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2}\,\phi^+(y)\,, \tag{18}$$

对于 $\phi^+ \in V_2$，其中我们使用简写记号 $\int_k = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$。在动量空间表示中，收缩同伦的作用为

$$\mathsf{h}(\phi^+)(k) = \frac{\phi^+(k)}{k^2 - m^2}.$$

现在我们应用编织同调微扰理论。与未变形情形一样，我们将映射 p和 h扩展到 V 上的泛函编织空间 $\mathrm{Sym}_\mathcal{R}(V[2])$。上述数据诱导出一个平凡投影映射 $\mathsf{P}\colon\ \mathrm{Sym}_\mathcal{R}(V[2]) \to \mathrm{Sym}_\mathcal{R}(H^\bullet(V[2]))$，其定义为

$$\mathsf{P}(1) = 1 \qquad \text{and} \qquad \mathsf{P}(\varphi_1 \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_n) = 0\,.$$

扩展的收缩同伦 $\mathsf{H}\colon\ \mathrm{Sym}_\mathcal{R}(V[2]) \to \mathrm{Sym}_\mathcal{R}(V[2])$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathsf{H}(1) &= 0\,, \\ \mathsf{H}(\varphi_1 \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_n) &= \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} \pm\, \varphi_1 \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_{a-1} \odot_\star \mathsf{h}(\varphi_a) \odot_\star \varphi_{a+1} \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_n\,, \end{aligned} \tag{19}$$

对所有 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V[2]$。我们利用了 h 在 (19) 中的平移不变性，它使 $\mathcal{R}$-矩阵的作用变得平凡。注意，在生成元 $\varphi_a \in V[2]$ 上，扭曲对称积 $\odot_\star$ 是编织分次交换的：

$$\varphi_a \odot_\star \varphi_b = (-1)^{|\varphi_a|\,|\varphi_b|}\, \mathrm{R}_\alpha(\varphi_b) \odot_\star \mathrm{R}^\alpha(\varphi_a)\,.$$

与未变形情形一样，我们将自由微分l_1, 扩展为作用于整个 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$ 上的分次导子，得到“量子”微分

$$Q_{\mathrm{BV}} = \ell_1 + \delta$$

在 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$上，带有形式平移不变扰动 δ。编织扩展的˜同调扰动引理 [11] 随后构造出扰动后的投影映射 $\mathsf{P} = \mathsf{P} + \mathsf{P}_\delta$，其中

$$\mathsf{P}_\delta = \mathsf{P}\left(\mathrm{id}_{\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])} - \delta\,\mathsf{H}\right)^{-1}\delta\,\mathsf{H}\,.$$

我们关注两个对 δ l_1的微扰。

自由理论。 自由编织标量场论的关联函数由微扰计算得到

$$\delta = \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,,$$

其中 $\Delta_{\mathrm{BV}}\colon \mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2]) \to \mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])[1]$ 是由下式定义的编织BV拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathrm{BV}}(1) = 0 \quad , \quad \Delta_{\mathrm{BV}}(\varphi_1) = 0 \quad , \quad \Delta_{\mathrm{BV}}(\varphi_1 \odot_\star \varphi_2) = \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_\star\,,\\
&\Delta_{\mathrm{BV}}(\varphi_1 \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_n) = \sum_{a<b} \pm \langle \varphi_a, \mathrm{R}_{\alpha_{a+1}} \cdots \mathrm{R}_{\alpha_{b-1}}(\varphi_b)\rangle_\star\, \varphi_1 \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_{a-1}\\
&\qquad\qquad \odot_\star \mathrm{R}^{\alpha_{a+1}}(\varphi_{a+1}) \odot_\star \cdots \odot_\star \mathrm{R}^{\alpha_{b-1}}(\varphi_{b-1}) \odot_\star \varphi_{b+1} \odot_\star \cdots \odot_\star \varphi_n\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

对所有 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V[2]$。

由于编织BV拉普拉斯算子两两收缩场，并将对称代数次数从 n降至 $n-2$，显然在这种情况下，关联函数（14）除非 $n = 2k$为偶数，否则均为零；此时自由编织 $2k$点函数定义为

$$\begin{aligned}
G^\star_{2k}(x_1, \ldots, x_{2k})^{(0)} &= \langle 0|\mathrm{T}[\phi(x_1) \star \cdots \star \phi(x_{2k})]|0\rangle^{(0)}_\star\\
&:= (\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H})^k(\delta_{x_1} \odot_\star \cdots \odot_\star \delta_{x_{2k}})\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

利用（7）、（18）、（19）和（20），我们得到编织Wick展开

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H}(\delta_{x_1} \odot_\star \cdots \odot_\star \delta_{x_{2k}}) = \frac{1}{2k}\sum_{a<b} \phi_a\,\underbrace{\mathrm{R}_{\alpha_{a+1}} \cdots \mathrm{R}_{\alpha_{b-1}}}(\phi_b)\,\delta_{x_1} \odot_\star \cdots \odot_\star \delta_{x_{a-1}}\\
\odot_\star \mathrm{R}^{\alpha_{a+1}}(\delta_{x_{a+1}}) \odot_\star \cdots \odot_\star \mathrm{R}^{\alpha_{b-1}}(\delta_{x_{b-1}}) \odot_\star \delta_{x_{b+1}} \odot_\star \cdots \odot_\star \delta_{x_{2k}}\,.
\end{aligned}$$

我们采用如下记号

$$\phi_a\,\underbrace{\phi_b} := \langle 0|\mathrm{T}[\phi(x_a)\,\phi(x_b)]|0\rangle^{(0)} = -\mathrm{i}\,\hbar\,\mathsf{G}(x_a - x_b)$$

对于自由传播子，由于唯一的非零配对是 $\langle \delta_{x_a}, \mathsf{G}(\delta_{x_b})\rangle_\star = \mathsf{G}(x_a - x_b)$。请注意，对于反场，Koszul符号因子是平凡的 $\varphi_a = \delta_{x_a} \in V[2]_2$。下面通过二点函数和四点函数的例子来说明这些定义的运作方式。

对于二点函数，可以立即得到自由传播子

$$\begin{aligned} G_2^\star(x_1,x_2)^{(0)} &= \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H}(\delta_{x_1}\odot_\star\delta_{x_2}) \\ &= \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\frac{1}{2}\left(\mathsf{G}(\delta_{x_1})\odot_\star\delta_{x_2}+\delta_{x_1}\odot_\star\mathsf{G}(\delta_{x_2})\right) \\ &= \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{1}{2}\left(\langle\mathsf{G}(\delta_{x_1}),\delta_{x_2}\rangle_\star+\langle\delta_{x_1},\mathsf{G}(\delta_{x_2})\rangle_\star\right) \\ &= -\mathrm{i}\,\hbar\int_k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-m^2} = -\mathrm{i}\,\hbar\,\mathsf{G}(x_1-x_2)\,, \end{aligned}$$

其中我们使用（18）来计算 $\mathsf{G}(\delta_{x_a})$。在动量空间表示中，二点函数定义为

$$\tilde{G}_2^\star(k_1,k_2)^{(0)} = \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H}(\mathsf{e}^{k_1}\odot_\star\mathsf{e}^{k_2}) = \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_2)}{k_1^2-m^2} = \underbrace{\phi_1\,\phi_2}\,,$$

其中 $\mathsf{e}^k(x) = \mathsf{e}^{\,\mathrm{i}\,k\cdot x}$，收缩在动量空间中进行。

对于位置空间表示中的四点函数，我们从下式开始

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H}(\delta_{x_1}\odot_\star\cdots\odot_\star\delta_{x_4}) = \frac{1}{2}\Big(&\underbrace{\phi_1\,\phi_2}\;\delta_{x_3}\odot_\star\delta_{x_4}+\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha}(\phi_3)\,\mathrm{R}^\alpha(\delta_{x_2})\odot_\star\delta_{x_4} \\ &+\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha\,\mathrm{R}_\beta}(\phi_4)\,\mathrm{R}^\alpha(\delta_{x_2})\odot_\star\mathrm{R}^\beta(\delta_{x_3})+\underbrace{\phi_2\,\phi_3}\,\delta_{x_1}\odot_\star\delta_{x_4} \\ &+\underbrace{\phi_2\,\mathrm{R}_\alpha}(\phi_4)\,\delta_{x_1}\odot_\star\mathrm{R}^\alpha(\delta_{x_3})+\underbrace{\phi_3\,\phi_4}\,\delta_{x_1}\odot_\star\delta_{x_2}\Big)\,. \end{aligned}$$

利用

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H}(\delta_{x_a}\odot_\star\delta_{x_b}) = \underbrace{\phi_a\,\phi_b}$$

于是我们得到四点函数为

$$\begin{aligned} G_4^\star(x_1,x_2,x_3,x_4)^{(0)} &= (\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H})^2\,(\delta_{x_1}\odot_\star\delta_{x_2}\odot_\star\delta_{x_3}\odot_\star\delta_{x_4}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\underbrace{\phi_1\,\phi_2}\,\underbrace{\phi_3\,\phi_4}+\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha}(\phi_3)\,\mathrm{R}^\alpha\underbrace{(\phi_2)\,\phi_4}+\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}^\alpha}(\phi_3)\,\underbrace{\phi_2\,\mathrm{R}_\alpha}(\phi_4) \\ &\quad+\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha\,\mathrm{R}_\beta}(\phi_4)\,\mathrm{R}^\alpha\underbrace{(\phi_2)\,\mathrm{R}^\beta}(\phi_3)+\underbrace{\phi_1\,\phi_4}\,\underbrace{\phi_2\,\phi_3}\Big)\,. \end{aligned}$$

现在我们利用以下关系对 R矩阵进行一些运算

$$\partial_i^2\underbrace{(\phi_2\,\phi_4)} = -\partial_i^4\underbrace{(\phi_2\,\phi_4)}$$

从而得出第二项与第三项相等。根据恒等式 [12]

$$\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha\,\mathrm{R}_\beta}(\phi_4)\,\mathrm{R}^\alpha\underbrace{(\phi_2)\,\mathrm{R}^\beta}(\phi_3) = \underbrace{\phi_1\,\phi_4}\,\underbrace{\phi_2\,\phi_3}\,, \tag{22}$$

我们看到，最后两项也相等。综上可得

$$G_4^\star(x_1,x_2,x_3,x_4)^{(0)} = \underbrace{\phi_1\,\phi_2}\,\underbrace{\phi_3\,\phi_4}+\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha}(\phi_3)\,\mathrm{R}^\alpha\underbrace{(\phi_2)\,\phi_4}+\underbrace{\phi_1\,\phi_4}\,\underbrace{\phi_2\,\phi_3}\,. \tag{23}$$

在动量空间中重复这一计算可得

$$\begin{aligned}\tilde{G}_4^{\star}(k_1,k_2,k_3,k_4)^{(0)} &= (\mathrm{i}\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H})^2\,(\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star \mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{e}^{k_3}\odot_\star \mathrm{e}^{k_4})\\ &= (\mathrm{i}\hbar)^2\Big(\frac{(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_2)}{k_1^2-m^2}\,\frac{(2\pi)^4\,\delta(k_3+k_4)}{k_3^2-m^2}\\ &\qquad + \frac{(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_4)}{k_1^2-m^2}\,\frac{(2\pi)^4\,\delta(k_2+k_3)}{k_2^2-m^2}\\ &\qquad + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_3\cdot\theta\,k_2}\,\frac{(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_3)}{k_1^2-m^2}\,\frac{(2\pi)^4\,\delta(k_2+k_4)}{k_2^2-m^2}\Big)\\ &= \underbrace{\phi_1}\,\underbrace{\phi_2}\,\underbrace{\phi_3}\,\underbrace{\phi_4} + \underbrace{\phi_1}\,\underbrace{\phi_4}\,\underbrace{\phi_2}\,\underbrace{\phi_3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_3\cdot\theta\,k_2}\,\underbrace{\phi_1}\,\underbrace{\phi_3}\,\underbrace{\phi_2}\,\underbrace{\phi_4}\,,\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $k\cdot\theta\,p := k_\mu\,\theta^{\mu\nu}\,p_\nu = -p\cdot\theta\,k$。式（24）中的最后一项正是式（$\underbrace{\phi_1\,\mathrm{R}_\alpha}\,\phi_3\,\mathrm{R}^\alpha\,\underbrace{\phi_2}$ ϕ_4中的项（23）。

相互作用理论。 相互作用的编织标量量子场论由微扰展开描述

$$\delta = \mathrm{i}\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}} + \{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},-\}_\star\,. \tag{25}$$

式（25）中的反括号就是编织分次泊松括号

$$\{-,-\}_\star : \mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])\otimes\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2]) \longrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])[1]$$

定义为

$$\{\varphi_a,\varphi_b\}_\star = \langle\varphi_a,\varphi_b\rangle_\star = \pm\,\{\mathrm{R}_\alpha(\varphi_b),\mathrm{R}^\alpha(\varphi_a)\}_\star$$

对于 $\varphi_a\in V[2]$，并将其扩展到整个 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$，使其成为编织分次李括号；该括号在 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$ 的每个槽位上都是编织分次导子；例如

$$\{\varphi_1,\varphi_2\odot_\star\varphi_3\}_\star = \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_\star\odot_\star\varphi_3 \pm \mathrm{R}_\alpha(\varphi_2)\odot_\star\langle\mathrm{R}^\alpha(\varphi_1),\varphi_3\rangle_\star\,. \tag{26}$$

与未变形情形一样，由于内积 $\langle-,-\rangle_\star$ 的循环性，反括号与微分l_1, 兼容。它还与编织BV拉普拉斯算子有关，具体如下

$$\Delta_{\mathrm{BV}}(a_1\odot_\star a_2) = \Delta_{\mathrm{BV}}(a_1)\odot_\star a_2 + (-1)^{|a_1|}\,a_1\odot_\star\Delta_{\mathrm{BV}}(a_2) + \{a_1,a_2\}_\star\,, \tag{27}$$

对于所有 $a_1,\ a_2\in\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(L[2])$。

对于 $\lambda\phi^4$-理论，其定义在 $\mathbb{R}^{1,\,3}$相互作用作用量 $\mathcal{S}_{\mathrm{int}}\in\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$ 式（25）中定义为

$$\mathcal{S}_{\mathrm{int}} := -\frac{1}{4!}\,\langle\xi\,,\,\ell_3^{\star\,\mathrm{ext}}(\xi,\xi,\xi)\rangle_\star^{\mathrm{ext}}\,. \tag{28}$$

收缩坐标函数 $\xi\in\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(L[2])\otimes V$给出为

$$\xi = \int_k\,\left(\mathsf{e}_k\otimes\mathsf{e}^k + \mathsf{e}^k\otimes\mathsf{e}_k\right),$$

其中 $\mathsf{e}_k(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot x}$ 是 V_1 的平面波基，其对偶基为 $\mathsf{e}^k(x) = \mathsf{e}^*_k(x) = \mathsf{e}^{\,\mathrm{i}\,k\cdot x}$，适用于 V_2。

这些基关于内积（7）构成对偶空间，即

$$\int_p \langle \mathsf{e}_k, \mathsf{e}^p\rangle_\star\, \mathsf{e}_p = \mathsf{e}_k \qquad \text{and} \qquad \int_k \mathsf{e}^k\, \langle \mathsf{e}_k, \mathsf{e}^p\rangle_\star = \mathsf{e}^p \ ,$$

其中我们始终使用

$$\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,k\cdot x} = (2\pi)^4\, \delta(k) \ .$$

基场之间的星乘积为

$$\mathsf{e}_k \star \mathsf{e}_p = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\,k\cdot\theta\, p}\ \mathsf{e}_{k+p} \ , \tag{29}$$

而逆R矩阵对它们的作用为

$$\mathcal{R}^{-1}(\mathsf{e}_k \otimes \mathsf{e}_p) = \mathrm{R}_\alpha(\mathsf{e}_k) \otimes \mathrm{R}^\alpha(\mathsf{e}_p) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,k\cdot\theta\, p}\ \mathsf{e}_k \otimes \mathsf{e}_p \ . \tag{30}$$

如 [11, 16], 中所述，相互作用作用量（28）满足经典主方程

$$\ell_1(\mathcal{S}_{\mathrm{int}}) + \frac{1}{2}\,\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}}, \mathcal{S}_{\mathrm{int}}\}_\star = 0 \ ,$$

且它被编织BV拉普拉斯算子湮灭，$\Delta_{\mathrm{BV}}(\mathrm{S}_{\mathrm{int}}) = 0$。因此，算子

$$Q_{\mathrm{BV}} = \ell_1 + \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}} + \{\mathcal{S}_{\mathrm{int}}, -\}_\star$$

是一个微分，$(Q_{\mathrm{BV}})^2 = 0$，它用编织量子L_∞-代数描述关联函数。

为显式计算（28），我们通过非零括号将 L_∞ 上的编织 V-结构扩展到 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2]) \otimes V$：[16]

$$\begin{aligned}
\ell_1^{\mathrm{ext}}(a_1 \otimes \phi_1) &= \pm\, a_1 \otimes \ell_1(\phi_1) \ , \\
\ell_3^{\star\,\mathrm{ext}}(a_1 \otimes \phi_1, a_2 \otimes \phi_2, a_3 \otimes \phi_3) &= \pm\, \big(a_1 \odot_\star \mathrm{R}_\alpha(a_2) \odot_\star \mathrm{R}_\beta\, \mathrm{R}_\sigma(a_3)\big) \\
&\qquad \otimes \ell_3^\star\big(\mathrm{R}^\beta\, \mathrm{R}^\alpha(\phi_1), \mathrm{R}^\sigma(\phi_2), \phi_3\big) \ ,
\end{aligned}$$

对于 $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$ 和 $\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3 \in V_1$；同样，我们用 $\pm$ 表示由所有运算中相关元素的分次所决定的Koszul符号因子。类似地，循环结构通过非零的 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$-值配对扩展

$$\langle a_1 \otimes \phi, a_2 \otimes \phi^+\rangle_\star^{\mathrm{ext}} = \pm\, \big(a_1 \odot_\star \mathrm{R}_\alpha(a_2)\big)\, \langle \mathrm{R}^\alpha(\phi), \phi^+\rangle_\star \ ,$$

对于 $a_1, a_2 \in \mathrm{Sym}_{\mathcal{R}}(V[2])$，$\phi \in V_1$ 以及 $\phi^+ \in V_2$。

使用（28），结合（7）、（29）和（30）进行显式计算，得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{int}} &= -\frac{1}{4!}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} \langle \mathrm{e}^{k_1}\otimes \mathrm{e}_{k_1}\,,\, \ell_3^{\star\,\text{ext}}(\mathrm{e}^{k_2}\otimes \mathrm{e}_{k_2},\mathrm{e}^{k_3}\otimes \mathrm{e}_{k_3},\mathrm{e}^{k_4}\otimes \mathrm{e}_{k_4})\rangle_\star^{\text{ext}} \\
&= -\frac{1}{4!}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} \langle \mathrm{e}^{k_1}\otimes \mathrm{e}_{k_1}\,,\, \big(\mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{R}_\alpha(\mathrm{e}^{k_3})\odot_\star \mathrm{R}_\beta\,\mathrm{R}_\sigma(\mathrm{e}^{k_4})\big) \\
&\qquad\qquad \otimes \ell_3^\star\big(\mathrm{R}^\beta\,\mathrm{R}^\alpha(\mathrm{e}_{k_2}),\mathrm{R}^\sigma(\mathrm{e}_{k_3}),\mathrm{e}_{k_4}\big)\rangle_\star^{\text{ext}} \\
&= -\frac{1}{4!}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_2\cdot\theta\,k_3+\mathrm{i}\,k_2\cdot\theta\,k_4+\mathrm{i}\,k_3\cdot\theta\,k_4} \\
&\qquad\qquad \times \langle \mathrm{e}^{k_1}\otimes \mathrm{e}_{k_1}\,,\, (\mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{e}^{k_3}\odot_\star \mathrm{e}^{k_4})\otimes \ell_3^\star(\mathrm{e}_{k_2},\mathrm{e}_{k_3},\mathrm{e}_{k_4})\rangle_\star^{\text{ext}} \\
&= -\frac{1}{4!}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_2\cdot\theta\,k_3+\mathrm{i}\,k_2\cdot\theta\,k_4+\mathrm{i}\,k_3\cdot\theta\,k_4} \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{e}^{k_1}\odot_\star \mathrm{R}_\alpha(\mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{e}^{k_3}\odot_\star \mathrm{e}^{k_4})\,\langle \mathrm{R}^\alpha(\mathrm{e}_{k_1}),\ell_3^\star(\mathrm{e}_{k_2},\mathrm{e}_{k_3},\mathrm{e}_{k_4})\rangle_\star \\
&= -\frac{\lambda}{4!}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{a<b} k_a\cdot\theta\,k_b}\,\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star \mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{e}^{k_3}\odot_\star \mathrm{e}^{k_4}\,\langle \mathrm{e}_{k_1},\mathrm{e}_{k_2}\star \mathrm{e}_{k_3}\star \mathrm{e}_{k_4}\rangle_\star \\
&= -\frac{\lambda}{4!}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{a<b} k_a\cdot\theta\,k_b}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum\limits_{a<b} k_a\cdot\theta\,k_b} \\
&\qquad\qquad \times (2\pi)^4\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\,\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star \mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{e}^{k_3}\odot_\star \mathrm{e}^{k_4} \\
&=: \int_{k_1,k_2,k_3,k_4} V_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\,\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star \mathrm{e}^{k_2}\odot_\star \mathrm{e}^{k_3}\odot_\star \mathrm{e}^{k_4}\,.
\end{aligned}
$$

相互作用顶点

$$
V_4(k_1,k_2,k_3,k_4) = -\frac{\lambda}{4!}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum\limits_{a<b} k_a\cdot\theta\,k_b}\,(2\pi)^4\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \tag{31}
$$

与标准非交换 $\lambda\,\phi_4^4$ 理论 [1, 2] 的顶点一致。它具有编织对称性

$$
V_4(\ k_{a+1},k_a\ ) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_a\cdot\theta\,k_{a+1}}\,V_4(k_1,k_2,k_3,k_4) \tag{32}
$$

在交换任意一对相邻动量时保持不变，同时还具有循环对称性

$$
V_4(k_1,k_2,k_3,k_4) = V_4(k_4,k_1,k_2,k_3) \tag{33}
$$

这是由动量守恒推出的。

编织量子场论的相互作用关联函数现在由下式给出

$$
\begin{aligned}
G_n^\star(x_1,\dots,x_n)^{\text{int}} &= \langle 0|\mathrm{T}[\phi(x_1)\star\cdots\star\phi(x_n)]|0\rangle^{\text{int}} \\
&:= \sum_{m=1}^{\infty}\mathsf{P}\left((\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H}+\{\mathcal{S}_{\text{int}},-\}_\star\,\mathsf{H})^m\,(\delta_{x_1}\odot_\star\cdots\odot_\star\delta_{x_n})\right),
\end{aligned} \tag{34}
$$

或在动量空间表示中

$$
\tilde{G}_n^\star(p_1,\dots,p_n)^{\text{int}} = \sum_{m=1}^{\infty}\mathsf{P}\left((\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H}+\{\mathcal{S}_{\text{int}},-\}_\star\,\mathsf{H})^m\,(\mathrm{e}^{p_1}\odot_\star\cdots\odot_\star\mathrm{e}^{p_n})\right). \tag{35}
$$

这是关于 $\hbar$ 和耦合常数 λ的形式幂级数展开。

我们使用标准的费曼图技术表示微扰展开中的各项；费曼规则如图1所示。

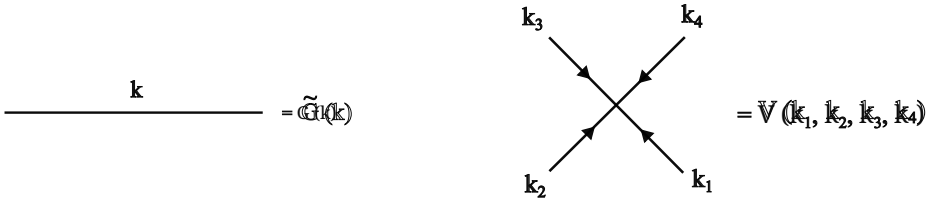


图1： 编织$\lambda\,\phi^4_4$理论的传播子（左）和相互作用顶点（右）的图示。

4. 示例：单圈阶的二点函数

在最后一节中，我们考虑两个说明性示例：四维编织 ϕ^4 理论和六维编织 ϕ^3 理论在单圈阶的二点函数。我们将以动量空间表示给出所有计算。

4.1 编织 ϕ^4理论

我们首先考虑第 ϕ^4 理论，其定义在 $\mathbb{R}^{1,\,3}$ 该理论在第 3 节中介绍，并在 [12] 中以位置空间表示进行了研究。现在让我们在动量空间中计算第 3.2 节中自由二点函数的单圈修正。根据（34），该修正为

$$\tilde{G}_2^{\star}(p_1,p_2)^{(1)} = (\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H})^2\,\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\}_\star\,. \tag{36}$$

我们首先利用以下非零配对计算 $\{\mathsf{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\}_\star$

$$\langle \mathsf{e}^{k},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p})\rangle_\star = \langle \mathsf{G}(\mathsf{e}^{p}),\mathsf{e}^{k}\rangle_\star = \langle \mathsf{e}^{p},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{k})\rangle_\star = \tilde{\mathsf{G}}(p)\,(2\pi)^4\,\delta(k+p)\,, \tag{37}$$

以及反括号的编织导子性质（26），还有相互作用顶点 V_4（k_1，k_2，k_3，k_4）的对称性质（32）和（33）。我们得到

$$\begin{aligned}\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\}_\star = \frac{4}{2}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} V_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\,\big(&\langle \mathsf{e}^{k_4},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_1})\rangle_\star\,\mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{k_3}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2}\\ &+\langle \mathsf{e}^{k_4},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star\,\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{k_3}\big)\,.\end{aligned}$$

将其代入（36）可得

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2^{\star}(p_1,p_2)^{(1)} = \frac{4}{2}\int_{k_1,k_2,k_3,k_4} & V_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\\ &\times\Big(\langle \mathsf{e}^{k_4},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_1})\rangle_\star\,(\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H})^2\,\big(\mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{k_3}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2}\big)\\ &\quad+\langle \mathsf{e}^{k_4},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star\,(\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\mathrm{BV}}\,\mathsf{H})^2\,\big(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{k_3}\big)\Big)\,.\end{aligned} \tag{38}$$

（38）中的自由四点函数通过在动量空间中使用编织Wick展开（23）计算。我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{i}\hbar\Delta_{\mathrm{BV}}\mathsf{H})^2\left(\mathsf{e}^{k_1}\odot_\star\mathsf{e}^{k_2}\odot_\star\mathsf{e}^{k_3}\odot_\star\mathsf{e}^{p_2}\right)\\
&\quad=-\hbar^2\left(\langle\mathsf{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{k_2})\rangle_\star\langle\mathsf{e}^{k_3},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3\cdot\theta k_2}\langle\mathsf{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{k_3})\rangle_\star\langle\mathsf{e}^{k_2},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star+\langle\mathsf{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star\langle\mathsf{e}^{k_2},\mathsf{G}(\mathsf{e}^{k_3})\rangle_\star\right)\\
&\quad=-\hbar^2(2\pi)^8\tilde{\mathsf{G}}(p_2)\left(\delta(k_1+k_2)\,\delta(k_3+p_2)\,\tilde{\mathsf{G}}(k_1)\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3\cdot\theta k_2}\,\delta(k_1+k_3)\,\delta(k_2+p_2)\,\tilde{\mathsf{G}}(k_1)+\delta(k_1+p_2)\,\delta(k_2+k_3)\,\tilde{\mathsf{G}}(k_2)\right),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

类似地

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{i}\hbar\Delta_{\mathrm{BV}}\mathsf{H})^2\left(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star\mathsf{e}^{k_1}\odot_\star\mathsf{e}^{k_2}\odot_\star\mathsf{e}^{k_3}\right)\\
&\quad=-\hbar^2(2\pi)^8\tilde{\mathsf{G}}(p_1)\left(\delta(k_1+p_1)\,\delta(k_3+k_2)\,\tilde{\mathsf{G}}(k_2)\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2\cdot\theta k_1}\,\delta(p_1+k_2)\,\delta(k_1+k_3)\,\tilde{\mathsf{G}}(k_1)+\delta(k_3+p_1)\,\delta(k_2+k_1)\,\tilde{\mathsf{G}}(k_1)\right).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

现在我们将（39）和（40）代入（38），并求出δ函数。我们发现，六项贡献都相同。总的来说，动量空间中二点函数的单圈贡献为

$$
\tilde{G}_2^\star(p_1,p_2)^{(1)}=\frac{\hbar^2\lambda}{2}\,\frac{(2\pi)^4\,\delta(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2)\,(p_2^2-m^2)}\int_k\frac{1}{k^2-m^2}\,. \tag{41}
$$

这一结果与 [12]中给出的位置空间计算一致。它与变形参数无关，并且与经典二点函数（在 $\theta=0$处）相同，包括正确的符号和整体组合因子。这表明，单圈阶的二点函数不存在紫外/红外混合，这与标准非交换量子场论 [1, 2]形成对比。这也表明，微扰理论中不存在非平面费曼图，见图2。这似乎是相互作用顶点的编织对称性所致，其源于编织 L_∞-结构与编织Wick定理之间的相互作用。

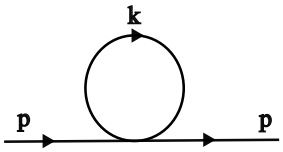


图 2： 在编织 $\lambda\phi_4^4$-理论中，单圈自能只有平面蝌蚪图的贡献。

4.2 编织 ϕ^3-理论

我们将四维中编织的 $\lambda\phi^4$-理论示例推广到六维中的编织 $\lambda\phi^3$-理论。这基于具有分次向量空间 $V=V_1\oplus V_2$ 的编织 L_∞-代数，其中

$V_1 = V_2 = C^\infty(\mathbb{R}^{1,\,5})$，微分 $l_1^\star = l_1 = -\Box - m^2$，以及唯一非零的高阶括号$l_2^\star$ 定义为

$$\ell_2^\star(\phi_1, \phi_2) = \lambda\, \phi_1 \star \phi_2 \,, \tag{42}$$

对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\phi_1,\ \phi_2 \in V_1$。

相互作用作用泛函 $\mathcal{S}_{\text{int}} \in \mathrm{Sym}^{\mathcal{R}}(V[2])$ 的计算与第 3.2节中的计算过程相同。我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{int}} &= -\frac{1}{3!}\int_{k_1,k_2,k_3} \langle \mathsf{e}^{k_1}\otimes \mathsf{e}_{k_1}\,,\, \ell_2^{\star\,\text{ext}}(\mathsf{e}^{k_2}\otimes \mathsf{e}_{k_2}, \mathsf{e}^{k_3}\otimes \mathsf{e}_{k_3})\rangle_\star^{\text{ext}} \\ &=: \int_{k_1,k_2,k_3} V_3(k_1,k_2,k_3)\ \mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{k_3}\,,\end{aligned}$$

其中相互作用顶点为

$$V_3(k_1,k_2,k_3) = -\frac{\lambda}{3!}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\sum\limits_{a<b} k_a\cdot\theta\, k_b}\,(2\pi)^6\,\delta(k_1+k_2+k_3)\,, \tag{43}$$

with $a,\ b = 1,\ 2,\ 3$。与（32）和（33）类似，顶点函数（43）具有编织对称性 ry

$$V_3(\ k_{a+1}, k_a\ ) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_a\cdot\theta\,k_{a+1}}\,V_3(k_1,k_2,k_3) \tag{44}$$

在交换任意一对相邻动量时，以及满足循环对称性时

$$V_3(k_1,k_2,k_3) = V_3(k_3,k_1,k_2)\,. \tag{45}$$

二点函数再次定义为

$$\tilde{G}_2^\star(p_1,p_2)^{\text{int}} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\left((\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H} + \{\mathcal{S}_{\text{int}}, -\}_\star\,\mathsf{H})^m\,(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\right). \tag{46}$$

自由二点函数的单圈修正由两项之和给出

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2^\star(p_1,p_2)_1^{(1)} &= \mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H}\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\left((\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H})\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\,(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\right\}_\star\right)\right\}_\star\,, \\ \tilde{G}_2^\star(p_1,p_2)_2^{(1)} &= (\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H})^2\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\,(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\right\}_\star\right\}_\star\,.\end{aligned} \tag{47}$$

我们从下式开始

$$\begin{aligned}\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\right\}_\star = \frac{3}{2}\int_{k_1,k_2,k_3} V_3(k_1,k_2,k_3)\,\big(&\langle \mathsf{e}^{k_3}, \mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_1})\rangle_\star\, \mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2} \\ &+ \langle \mathsf{e}^{k_3}, \mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star\, \mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\big)\,,\end{aligned} \tag{48}$$

其中非零配对的形式为

$$\langle \mathsf{e}^k, \mathsf{G}(\mathsf{e}^p)\rangle_\star = \langle \mathsf{G}(\mathsf{e}^p), \mathsf{e}^k\rangle_\star = \langle \mathsf{e}^p, \mathsf{G}(\mathsf{e}^k)\rangle_\star = \tilde{\mathsf{G}}(p)\,(2\pi)^6\,\delta(k+p)\,.$$

为计算 $\tilde{G}_2^\star(p_1,\ p_2)_1^{(1)}$，我们将 $\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\mathsf{H}$作用于（48），得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H})\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2})\right\}_\star \\ &\quad= \frac{3}{2}\int_{k_1,k_2,k_3} V_3(k_1,k_2,k_3)\,\big(\langle \mathsf{e}^{k_3}, \mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_1})\rangle_\star\,(\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H})\,(\mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2}\odot_\star \mathsf{e}^{p_2}) \\ &\qquad\qquad + \langle \mathsf{e}^{k_3}, \mathsf{G}(\mathsf{e}^{p_2})\rangle_\star\,(\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H})\,(\mathsf{e}^{p_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_1}\odot_\star \mathsf{e}^{k_2})\big)\,.\end{aligned}$$

这两项产生

$$(\mathrm{i}\hbar\Delta_{\mathrm{BV}}\mathsf{H})\,(\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star\mathrm{e}^{k_2}\odot_\star\mathrm{e}^{p_2}) = \frac{2}{3}\,\mathrm{i}\hbar\,\big(\langle\mathrm{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_2})\rangle_\star\,\mathrm{e}^{p_2} + \langle\mathrm{e}^{k_2},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star\,\mathrm{e}^{k_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_1\cdot\theta\,k_2}\,\langle\mathrm{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star\,\mathrm{e}^{k_2}\big) \tag{49}$$

and

$$(\mathrm{i}\hbar\Delta_{\mathrm{BV}}\mathsf{H})\,(\mathrm{e}^{p_1}\odot_\star\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star\mathrm{e}^{k_2}) = \frac{2}{3}\,\mathrm{i}\hbar\,\big(\langle\mathrm{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_1})\rangle_\star\,\mathrm{e}^{k_2} + \langle\mathrm{e}^{k_1},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_2})\rangle_\star\,\mathrm{e}^{p_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_2\cdot\theta\,k_1}\,\langle\mathrm{e}^{p_1},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_2})\rangle_\star\,\mathrm{e}^{k_1}\big)\,. \tag{50}$$

再加入一个顶点插入会引入三个新的内部动量，其中两个将通过再次应用 $\mathrm{i}\,\hbar\Delta_{\mathrm{BV}}\mathsf{H}$ 进行缩并，从而得到

$$(\mathrm{i}\hbar\Delta_{\mathrm{BV}}\mathsf{H})\,\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}(\mathrm{e}^r)\}_\star = 3\int_{q_1,q_2,q_3} V_3(q_1,q_2,q_3)\,\langle\mathrm{e}^{q_3},\mathsf{G}(\mathrm{e}^r)\rangle_\star\,\langle\mathsf{G}(\mathrm{e}^{q_1}),\mathrm{e}^{q_2}\rangle_\star\,, \tag{51}$$

这里我们使用了对称性质（44）和（45）。将（51）应用于（49）和（50），并将所有项相加，我们得到第一个修正项

$$\tilde{G}^\star_2(p_1,p_2)^{(1)}_1 = \frac{(\mathrm{i}\hbar\lambda)^2}{6}\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1)}{p_1^2-m^2}\,\left[\int_k\frac{1}{k^2-m^2}\right]^2\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_2)}{p_2^2-m^2} + \frac{(\mathrm{i}\hbar\lambda)^2}{3}\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2)\,(p_2^2-m^2)}\int_k\frac{1}{(0-m^2)\,(k^2-m^2)}\,. \tag{52}$$

我们认出，$\tilde{G}^\star_2(p_1,\ p_2)^{(1)}_1$中的第一项是非连通蝌蚪图对的贡献，第二项是连通蝌蚪图的贡献，见图3。

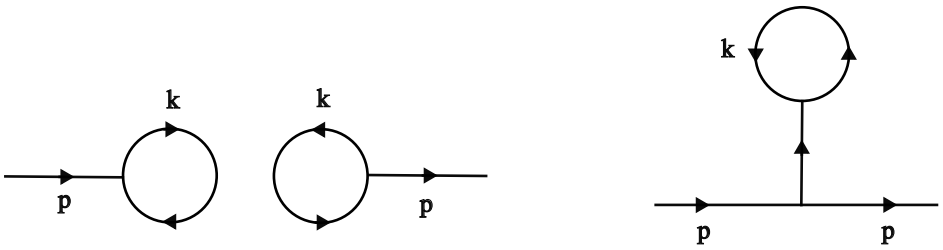


图3： 编织 $\lambda\phi_6^3$ 理论中单圈二点函数的蝌蚪图贡献 y.

为了计算 $\tilde{G}^\star_2\ (p_1,\ p_2)^{\ (1)}_2$，我们首先必须在（48）中再添加一个顶点：

$$\big\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}\,\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}\,(\mathrm{e}^{p_1}\odot_\star\mathrm{e}^{p_2})\}_\star\big\}_\star = \frac{3}{2}\int_{k_1,k_2,k_3} V_3(k_1,k_2,k_3)\,\big(\langle\mathrm{e}^{k_3},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_1})\rangle_\star\,\big\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}\,(\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star\mathrm{e}^{k_2}\odot_\star\mathrm{e}^{p_2})\big\}_\star + \langle\mathrm{e}^{k_3},\mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star\,\big\{\mathcal{S}_{\mathrm{int}},\mathsf{H}\,(\mathrm{e}^{p_1}\odot_\star\mathrm{e}^{k_1}\odot_\star\mathrm{e}^{k_2})\big\}_\star\big)\,.$$

第一项由下式明确给出

$$\begin{aligned}\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\left(\mathrm{e}^{k_1} \odot_\star \mathrm{e}^{k_2} \odot_\star \mathrm{e}^{p_2}\right)\right\}_\star \\ = \frac{3}{3} \int_{q_1,q_2,q_3} V_3(q_1,q_2,q_3) \left(\langle \mathrm{e}^{q_3}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_1})\rangle_\star \, \mathrm{e}^{q_1} \odot_\star \mathrm{e}^{q_2} \odot_\star \mathrm{e}^{k_2} \odot_\star \mathrm{e}^{p_2}\right. \\ + \langle \mathrm{e}^{q_3}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_2})\rangle_\star \, \mathrm{e}^{k_1} \odot_\star \mathrm{e}^{q_1} \odot_\star \mathrm{e}^{q_2} \odot_\star \mathrm{e}^{p_2} \\ \left. + \langle \mathrm{e}^{q_3}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star \, \mathrm{e}^{k_1} \odot_\star \mathrm{e}^{k_2} \odot_\star \mathrm{e}^{q_1} \odot_\star \mathrm{e}^{q_2}\right),\end{aligned}$$

第二项也同理。

下一步是连续两次应用算子 $\mathrm{i}\,\hbar\,\Delta_{\text{BV}}\,\mathsf{H}$，这等价于对积分下任意四个场的乘积应用编织Wick定理。结果为

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\hbar\Delta_{\text{BV}}\mathsf{H})^2 \left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\left\{\mathcal{S}_{\text{int}}, \mathsf{H}\left(\mathrm{e}^{p_1} \odot_\star \mathrm{e}^{p_2}\right)\right\}_\star\right\}_\star \\ = \frac{3}{2} \int_{k_1,k_2,k_3} \int_{q_1,q_2,q_3} V_3(k_1,k_2,k_3)\, V_3(q_1,q_2,q_3) \left(\langle \mathrm{e}^{k_3}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_1})\rangle_\star \, \langle \mathrm{e}^{q_3}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_1})\rangle_\star \right. \\ \times \left(\langle \mathrm{e}^{q_1}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{q_2})\rangle_\star \, \langle \mathrm{e}^{k_2}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k_2\cdot\theta\,p_2} \langle \mathrm{e}^{q_1}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_2})\rangle_\star \, \langle \mathrm{e}^{q_2}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star \right. \\ \left.\left. + \langle \mathrm{e}^{q_1}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{p_2})\rangle_\star \, \langle \mathrm{e}^{q_2}, \mathsf{G}(\mathrm{e}^{k_2})\rangle_\star\right) + \ldots\right),\end{aligned}$$

为简洁起见，我们这里只明确展示所产生的第一个乘积的编织Wick展开。将所有内容展开后，可得到第二个修正项

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2^\star(p_1,p_2)_2^{(1)} = \frac{(\mathrm{i}\hbar\lambda)^2}{12} \frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1)}{p_1^2-m^2} \left[\int_k \frac{1}{k^2-m^2}\right]^2 \frac{(2\pi)^6\,\delta(p_2)}{p_2^2-m^2} \\ + \frac{(\mathrm{i}\hbar\lambda)^2}{6} \frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2)\,(p_2^2-m^2)} \int_k \frac{1}{(0-m^2)\,(k^2-m^2)} \\ + \frac{(\mathrm{i}\hbar\lambda)^2}{2} \frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2)\,(p_2^2-m^2)} \int_k \frac{1}{\left(k^2-m^2\right)\left((p_1-k)^2-m^2\right)}\,.\end{aligned} \tag{53}$$

第一项和第二项与我们在 $\tilde{G}_2^\star(p_1、\ p_2)_1^{(1)}$ 中得到的两项相同。第三项出现在 $\tilde{G}_2^\star(p_1、\ p_2)_2^{(1)}$ 中，来源于一个真空极化图，见图4。

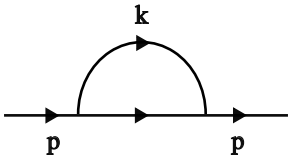


图4： 编织 $\lambda\,\phi_6^3$ 理论中单圈二点函数的真空极化贡献。

最后，将两项修正相加，可得二点

函数在动量空间中的单圈贡献为

$$\begin{aligned}\tilde{G}_2^{\star}(p_1,p_2)^{(1)} = &-\frac{(\hbar\lambda)^2}{4}\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1)}{p_1^2-m^2}\,\left[\int_k \frac{1}{k^2-m^2}\right]^2\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_2)}{p_2^2-m^2}\\ &-\frac{(\hbar\lambda)^2}{2}\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2)\,(p_2^2-m^2)}\,\int_k \frac{1}{(0-m^2)\,(k^2-m^2)}\\ &-\frac{(\hbar\lambda)^2}{2}\,\frac{(2\pi)^6\,\delta(p_1+p_2)}{(p_1^2-m^2)\,(p_2^2-m^2)}\,\int_k \frac{1}{\left(k^2-m^2\right)\left((p_1-k)^2-m^2\right)}\,.\end{aligned} \tag{54}$$

这与交换情形下的结果完全相同，因为来自不同方面的编织特征（例如顶点和编织 Wick定理）彼此抵消了。此外，所有数值因子都与交换情形下的结果一致。因此，我们得出结论：在六维编织非交换 ϕ^3理论中，单圈二点函数也不存在紫外/红外混合。

进一步扩展我们的分析，计算该模型的单圈β函数，并检验六维编织非交换 ϕ^3理论是否仍然渐近自由，将会很有意义。此外，探究关于非平面图和紫外/红外混合不存在这一结论在高圈以及高点关联函数中是否依然成立，也很有意义；这既包括 ϕ^3，也包括 ϕ^4 标量场论。我们计划在未来的工作中研究这些问题及其他问题。

A. Drinfel'd扭曲变形形式

本附录简要介绍 Drinfel'd 扭曲变形形式的基础知识，以及正文中使用的符号。更详细、全面的论述可见 [17, 18]。

在 Drinfel'd 扭曲形式中，通过扭曲元 $\mathrm{F} \in U\mathfrak{v}\otimes U\mathfrak{v}$引入变形，其中 $U\mathfrak{v}$ 是流形 M上向量场 $\mathfrak{v} := \Gamma(TM)$ 所成李代数的万有包络代数。我们使用符号 $\mathrm{F} = \mathrm{f}^{\alpha}\otimes\mathrm{f}_{\alpha}$和 $\mathrm{F}^{-1} = \bar{\mathrm{f}}^{\alpha}\otimes\bar{\mathrm{f}}_{\alpha}$。

可逆的 R矩阵 $\mathrm{R} \in U\mathfrak{v}\otimes U\mathfrak{v}$ 编码了编织，它由扭曲诱导为

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\,\mathcal{F}^{-1} =: \mathrm{R}^{\alpha}\otimes\mathrm{R}_{\alpha}\,,$$

其中 $\mathrm{F}_{21} = \tau(\mathrm{F}) = \mathrm{f}_{\alpha}\otimes\mathrm{f}^{\alpha}$ 是交换了张量因子顺序的扭曲。容易看出，R矩阵是三角的，即

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}^{-1} = \mathrm{R}_{\alpha}\otimes\mathrm{R}^{\alpha}\,. \tag{A.1}$$

最简单的一类扭曲是阿贝尔扭曲，其形式为

$$\mathcal{F} = \exp\left(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\theta^{ab}\,X_a\otimes X_b\right), \tag{A.2}$$

其中（θ^{ab}）是一个常反对称矩阵，而 $\{X_a\}$ 是一组对易向量场。对于这些扭曲，$\mathrm{F}_{21} = \mathrm{F}^{-1}$ 以及 $\mathrm{R} = \mathrm{F}^{-2}$。标准的 Moyal–Weyl 扭曲以及 [19] 的角向扭曲都是阿贝尔扭曲的示例。

扭曲（A.2）将函数代数 $f\cdot g$ 上的逐点乘积 C^∞（M）变形为非交换星乘积

$$\begin{aligned} f\star g &= \bar{\mathrm{f}}^\alpha(f)\cdot\bar{\mathrm{f}}_\alpha(g) = \mathrm{R}_\alpha(g)\star\mathrm{R}^\alpha(f) \\ &= f\cdot g + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\theta^{ab}\,X_a(f)\cdot X_b(g) + O(\theta^2)\ . \end{aligned} \tag{A.3}$$

利用李导数将 $U\mathfrak{v}$ 的作用扩展到张量场后，微分形式的外代数 $\Omega^\bullet(M)$ 也以类似方式发生变形，其中

$$\omega_1\wedge_\star\omega_2 = \bar{\mathrm{f}}^\alpha(\omega_1)\wedge\bar{\mathrm{f}}_\alpha(\omega_2) = (-1)^{|\omega_1|\,|\omega_2|}\,\mathrm{R}_\alpha(\omega_2)\wedge_\star\mathrm{R}^\alpha(\omega_1)\ , \tag{A.4}$$

and

$$\mathrm{d}(\omega_1\wedge_\star\omega_2) = \mathrm{d}\omega_1\wedge_\star\omega_2 + (-1)^{|\omega_1|}\,\omega_1\wedge_\star\mathrm{d}\omega_2\ .$$

我们用 $|\omega|$ 表示齐次形式 ω 的次数。外导数 d 在变形下保持不变。

我们使用扭曲形式主义定义编织场论。$\mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 上的经典场论通常具有庞加莱不变性，因此其 L_∞-代数由庞加莱代数 $\mathfrak{iso}(1,\,d-1)$ 的万有包络代数 $U\mathfrak{iso}(1,\,d-1)\subset U\mathfrak{v}$ 的模和等变括号构成。因此，我们必须将扭曲限制为 $\mathrm{F}\in U\mathfrak{iso}(1,\,d-1)\otimes U\mathfrak{iso}(1,\,d-1)$。我们还可以进一步限制为由 $\mathbb{R}^{d-1}\subset\mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 的空间等距变换构造的阿贝尔扭曲 $\mathrm{F}\in U\mathfrak{iso}(d-1)\otimes U\mathfrak{iso}(d-1)$，因为这简化了量子场论中的某些分析，例如时间排序的处理，同时也避免了幺正性方面的潜在问题。

为明确起见，也为了便于说明，正文中我们选择 Moyal–Weyl 扭曲

$$\mathcal{F} = \exp\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\theta^{ij}\,\partial_i\otimes\partial_j\big)\ , \tag{A.5}$$

其中（θ^{ij}）是一个（$d-1$）×（$d-1$）反对称实值矩阵，并且 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\in\Gamma(T\mathbb{R}^{d-1})$ 对于$i=1,\,\ldots\ldots,\,d-1$ 是生成 $\mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 中空间平移的向量场。

致谢。 我们感谢2022年科孚夏季学院的组织者举办了这次富有启发性的会议，并感谢他们给予我们展示研究初步成果的机会。我们还要感谢 Nikola Konjik 和 Biljana Nikolić 富有帮助的讨论。Dj. B.、M.D.C. 和 V.R. 的工作得到塞尔维亚教育、科学和技术发展部项目 451-03-47/2023-01/ 200162 的支持。R.J.S. 的工作部分得到英国科学技术设施委员会综合资助 ST/P000363/1 的支持。

参考文献

[1] S. Minwalla、M. Van Raamsdonk 和 N. Seiberg，非交换微扰动力学，JHEP**02** (2000) 020, [arXiv:hep-th/9912072].[2] R. J. Szabo，非交换空间上的量子场论，《物理报告》**378** (2003) 207–299，[arXiv:hep-th/0109162]。

[3] D. Blaschke, 《非交换空间上的微扰量子场论的若干方面》, 《科学论文集》 263 (2016) 104, [arXiv:1601.03109].[4] A. P. Balachandran、A. Pinzul 和 B. A. Qureshi, 《非交换平面中的紫外/红外混合》, 《物理快报B辑》634 (2006) 434–436, [arXiv:hep-th/0508151].[5] J. G. Bu、H. C. Kim、Y. Lee、C. H. Vac 和 J. H. Yee, 《由扭曲福克空间得到的非交换场论》, 《物理评论D辑》73 (2006) 125001, [arXiv:hep-th/0603251].[6] G. Fiore 和 J. Wess, 《关于完整的扭曲庞加莱对称性以及莫亚尔–韦尔空间上的量子场论》, 《物理评论D辑》75 (2007) 105022, [arXiv:hep-th/0701078].[7] P. Aschieri、F. Lizzi 和 P. Vitale, 《一路扭曲到底：从经典力学到量子场》, 《物理评论D辑》77 (2008) 025037, [arXiv:0708.3002].[8] R. Oeckl, 《解开非交换 $\mathbb{R}^d$ 以及量子场论的等价性》, 《核物理B辑》581 (2000) 559–574 [arXiv:hep-th/0003018].[9] M. Dimitrijević Ćirić、G. Giotopoulos、V. Radovanović 和 R. J. Szabo, 《编织 L_∞-代数、编织场论与非交换引力》, 《数学物理快报》111 (2021)148, [arXiv:2103.08939].[10] B. Jurčo、L. Raspollini、C. Sämann 和 M. Wolf, 《经典场论的 L_∞-代数与巴塔林–维尔科夫斯基形式》, 《物理进展》67 (2019) 1900025, [arXiv:1809.09899].[11] H. Nguyen、A. Schenkel 和 R. J. Szabo, 《模糊场论的巴塔林–维尔科维斯基量子化》, 《数学物理快报》111 (2021) 149, [arXiv:2107.02532].[12] M. Dimitrijević Ćirić、N. Konjik、V. Radovanović 和 R. J. Szabo, 《编织量子电动力学》, arXiv:2302.10713.[13] O. Hohm 和 B. Zwiebach, 《L_∞-代数与场论》, 《物理进展》65 (2017) 1700014, [arXiv:1701.08824].[14] J. Gomis、J. Paris 和 S. Samuel, 《反括号、反场与规范理论量子化》, 《物理报告》259 (1995) 1–145, [arXiv:hep-th/9412228].[15] M. Doubek、B. Jurčo 和 J. Pulmann, 《量子 L_∞-代数与同调扰动引理》, 《数学物理通讯》367 (2019) 215–240, [arXiv:1712.02696].[16] G. Giotopoulos 和 R. J. Szabo, 《非交换场论中的编织对称性》, 《物理学杂志A辑》55 (2022) 353001, [arXiv:2112.00541].[17] S. Majid, 《量子群理论基础》, 剑桥大学出版社 (1995)。[18] P. Aschieri、M. Dimitrijević、P. Kulish、F. Lizzi 和 J. Wess, 《非交换时空：非交换几何与场论中的对称性》, 《物理学讲义》774 (2009) 1–199。[19] M. Dimitrijević Ćirić、N. Konjik、M. A. Kurkov、F. Lizzi 和 P. Vitale, 《来自角向扭曲的非交换场论》, 《物理评论D辑》98 (2018) 085011, [arXiv:1806.06678]。