arXiv:2304.14101v1 [math.DG] 27 Apr 2023

从度量几何的观点证明小林适当性判据

KENTO OGAWA，TAKAYUKI OKUDA

Abstract. 设 G 为局部紧群，且 (H, L) 是 G 的一对闭子群。对于 G 为实线性约化李群的情形，T. Kobayashi [Math. Ann. ' 89, J. Lie Theory '96] 利用 G 的 Cartan 的 KAK 分解，建立了关于 L 在齐性空间 G/H 上的作用的适当性判据。本文证明，当 G 为一个允许在度量空间上进行适当等距作用的局部紧群时，也成立类似的定理，并利用非紧黎曼对称空间上的 CAT(0) 度量几何给出 Kobayashi 适当性判据的证明。

1. Introduction

设 G 为局部紧（豪斯多夫）群，且 (H_1, H_2) 是 G 的一对闭子群。本文旨在对于 G 允许在度量空间上进行适当等距作用的情形，给出 H_2 在齐性空间 G/H_1 上的作用的适当性判据。特别地，我们还从非紧黎曼对称空间上的 CAT(0) 度量几何的观点，给出 T. Kobayashi 在 [19, 22] 中提出的适当性判据的证明。

首先，回顾一下：局部紧群H 在局部紧豪斯多夫空间 X 上的连续作用称为适当作用，若对 X的任意紧子集 D，闭子集

$$H_D := \{h \in H \mid (h \cdot D) \cap D \neq \emptyset\}$$

H 的紧子集。

我们的工作源于以下研究主题：

2020 年数学主题分类。主要分类号 57S30，次要分类号 22E40、22F30、53C35、53C23。关键词和短语：适当作用；不连续群；对称空间；CAT(0) 空间。第一作者受 JST SPRING 资助，项目编号 JP-MJSP2132。第二作者受 JSPS 科学研究补助金资助，项目编号为 JP20K03589、JP20K14310 和 JP22H0112。

- 对于给定的局部紧群 G，研究其闭子群的对 (H_1, H_2)，使得 H_2 在齐性空间 G/H_1 上的作用是适当的（或等价地， H_1 在齐性空间 G/H_2 上的作用是适当的）。

需要注意的是，对于 G 的一对闭子群（H_1， H_2），如果 H_1 和 H_2 中有一个是紧的，那么 H_2 在 G/H_1 上的作用应当是适当的。然而，当 H_1 和 H_2 都非紧时，该作用不必是适当的。一个极端的例子是，若取（G，H_1）$=$（SO_0（$n+1$，$\mathbf{1}$） SO_0（n，$\mathbf{1}$））， 那么对于 G 的任意非紧闭子群 H_2， H_2 在 G/H_1 上的作用都不是适当的（Calabi–Markus 现象 [8]）。

T. Kobayashi 于 20 世纪 80 年代的研究 [19, 20, 21] 开启了对上述主题的系统考察：研究约化群 G 中的非紧闭子群（H_1， H_2），以及约化型齐性空间 G/H 上的不连续群和 Clifford–Klein 形式。此后，许多研究者从不同角度对这一主题进行了拓展（关于不连续群和 Clifford–Klein 形式的详情，参见 T. Kobayashi 在第 4] 节中所作的综述 [24] 和 [25, ）。

在本文中，作为上述研究主题中的一个基本问题，我们聚焦于以下问题：

问题 1.1. 对于给定的局部紧群 G 以及 G 的一对闭子群 (H_1, H_2)，为 H_2 在齐性空间 G/H_1 上的作用寻找一个良好的适当性判据。

需要强调的是，为了证明 H_2 在 G/H_1 上的作用具有适当性，正如我们将在第 2.1 节中看到的，我们需要验证子集

$$H_1 \cap (D \cdot H_2 \cdot D^{-1})$$

G 的子集对于 G 的任意紧子集 D 都是紧的。在许多情形下，这样的问题可能并不容易。

现在，对于实线性约化李群 G，我们陈述 Kobayashi 的适当性判据如下：

定理 1.2（Kobayashi [19, 22]；详细版本另见定理 2.5）。设 G 是一个实线性约化李群，并固定一个 Cartan 的 KAK 分解 $G = KAK$。记 A 的李代数为 $\mathfrak{a}$。那么，对于 G 的一对闭子群 (H_1, H_2)，H_2 在 G/H_1 上的作用具有适当性，当且仅当交集

$$\mathfrak{a}(H_1) \cap (\mathfrak{a}(H_2) + D)$$

对于 $\mathfrak{a}$ 的任意紧子集 D，都是紧的，其中我们令

$$\mathfrak{a}(H) := \{X \in \mathfrak{a} \mid (K \cdot (\exp X) \cdot K) \cap H \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{a}$$

对于 G的每个非空子集 H。

在定理 1.2 的设定中， $\mathfrak{a}$ 只是一个有限维向量空间，而 $\mathfrak{a}$（H_1）和 $\mathfrak{a}$（H_2）都是 $\mathfrak{a}$的子集。此外，我们只需将闭球视为 $\mathfrak{a}$ 中的紧子集 D（相对于 $\mathfrak{a}$上的一个固定内积）。因此，定理 1.2 中陈述的条件比原来的条件容易得多。

在 H_1 和 H_2 都是 G 的约化子群的情形下，通过在 G 中对 H_1 和 H_2 取内共轭，可以将 $\mathfrak{a}(H_1)$ 和 $\mathfrak{a}(H_2)$ 选为 $\mathfrak{a}$ 的线性子空间的有限并（更多细节见 [19]），因此无需考虑 $\mathfrak{a}$ 的紧子集 D 。特别地，在这种情况下，H_2 对 G/H_1 的作用是适当的，当且仅当 H_2 对 G/H_1 的作用具有（CI）性质，也就是说， H_2 的各向同性子群在 G/H_1 中的任意点处都是紧的。

Kobayashi 的适当性判据是研究约化型齐性空间 G/H 的不连续群和 Clifford–Klein 形式的基本工具。作为其重要应用之一，在 G/H 上的 Calabi–Markus 现象判据见 [19,推论 4.3], ，即他证明了，约化型齐性空间 G/H 存在无限不连续群，当且仅当秩$_{\mathbb{R}} G >$ 秩$_{\mathbb{R}} H$。此外，许多研究者还发现了 Kobayashi 适当性判据的大量应用（例如，[5, 14, 15, 16, 17, 23, 26, 28, 30, 31, 33, 35]）。

需要指出的是，Y. Benoist [4] 也证明了一个实质上与定理 1.2 相同的论断，该论断受到了 Kobayashi 在 [19]中的早期工作的启发。此外，对于 G 是非阿基米德局部域上的半单代数群的情形，他也给出了类似的判据（另见注 2.11）。

我们也作如下说明：设 K 是正交群 $O(n)$的一个闭李子群，并定义半直积群$G := K \ltimes \mathbb{R}^n$。随后，T. Yoshino [39] 针对 G 是与实约化李群相关的 Cartan 运动群的情形下的 G 的闭子群，给出了某些类型的适当性判据；A. Baklouti、S. Bejar 和 R. Fendri [1] 则针对一般的 $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$ 以及 G的连通子群或离散子群对给出了这类判据（另见第 2.4 节中的注 2.10）。

与其他情形一样，关于可解或幂零李群的闭子群对的适当性与（CI）性质之间关系的研究，可见 [2, 3, 27, 29, 36, 37, 38]。

值得注意的是，Kobayashi 在 [19, 22] 中给出的定理 2.5 的证明，基于实线性约化李群的结构理论。本文旨在从度量几何的角度理解定理 2.5。

在本文中，我们称度量空间 (M, d) 是适当的，如果 M 中的任意闭球都是紧的。作为我们的主要结果，我们将证明类似于定理 1.2 的结论（见第 2.4 节中的定理 2.8 和 2.9），适用于 G 是一个具有适当等距

传递作用于适当度量空间 (M, d) 上且具有以下性质的局部紧群的情形：

> 性质 (S)：对于每个 $r \geq 0$，存在 $\tau(r) \geq 0$，使得对于任意满足 $d(p_0, p_0) \leq r$ 的 $p_0, p, q \in M$，均可选择一个等距变换 $g \in G$，使其满足 $g \cdot p = p_0$，且 $d(q, g \cdot q) \leq \tau(r)$。

粗略地说，上述 G-空间 M 上的性质 (S) 意味着，对于 M 中的任意三个点 p_0, p, q，都可以在 M 中选择一个点 q_0，使得线段 pq 和 p_0q_0 彼此 G-共轭，并且距离 $d(q, q_0)$ 在某种意义下是有界的。

我们将利用 CAT(0) 空间的几何性质，给出度量 G-空间 M 满足性质 (S) 的一个充分条件（见第 5 节）。此外，定理 1.2 还可以通过不含紧因子的黎曼对称空间上的 CAT(0) 度量几何来解释（见第 6 节）。

1.1. 论文结构。本文结构如下：在第 2 节中，我们建立适当对和 HBI 对的记号。此外，我们将 Kobayashi 的适当性判据表述为 [22]，并陈述主要结果。在第 3 节中，我们考察适当度量空间之间的非扩张映射，并研究 HBI 对之间通过该映射建立的关系。在同一节中，我们还讨论紧群在适当度量空间上的等距作用：此时，轨道空间可以视为适当度量空间，且商映射是非扩张的。我们的主要定理 2.8 和 2.9 将在第 4 节中得到证明。在第 5 节中，我们利用 CAT(0) 空间给出度量齐性空间具有性质 (S) 的一个充分条件。最后，在第 6 节中，我们讨论 Kobayashi 的适当性判据（定理 2.5）如何通过将定理 2.9 与黎曼对称空间上的度量几何的一些事实相结合来加以解释。

2. Kobayashi's properness criterion and main results of this paper

本节将介绍相关术语，并以 [22] 的形式陈述 Kobayashi 的适当性判据，以及本文的主要结果。

2.1. 局部紧群中的适当对。为表述 [22]，中给出的 Kobayashi 适当性判据，我们固定如下术语：设 G 为局部紧群。对于 G 的子集 H 和 G 的紧子集 D，记

$$\begin{aligned}\overline{N}_D(H) &:= D \cdot H \cdot D^{-1} \\ &= \{d_1 \cdot h \cdot d_2^{-1} \in G \mid d_1, d_2 \in D, h \in H\}.\end{aligned}$$

对于 G 的两个非空子集 H_1 和 H_2，若存在 G 的紧子集 D 使得，则记为 $H_1 \sim H_2$

$$H_1 \subset \overline{N}_D(H_2) \text{ and } H_2 \subset \overline{N}_D(H_1).$$

于是，“∼”在 G的所有非空子集的集合 $\mathcal{P}^\times(G)$上定义了一个等价二元关系。 $H \in \mathcal{P}^\times(G)$的等价类记为 $[H]$，而 $\mathcal{P}^\times(G)$关于等价关系 $\sim$ 的商集写作 $[\mathcal{P}^\times(G)]$。

Kobayashi [19, 20]指出了以下命题:

命题 2.1. 设（H_1, H_2）是 G的一对闭子群。则关于（H_1, H_2）的以下条件等价:

（i） H_2在齐性空间 G/H_1 上的作用是适当的。（ii） H_1在齐性空间 G/H_2 上的作用是适当的。（iii）（$H_1 \times H_2$）在群流形 $G = (G\times G)/(\text{diag}\, G)$上的作用是适当的，其中 diag $G := \{(g, g) \mid g \in G\}$。（iv）对于任意 $H_1' \in [H_1]$ 和任意 $H_2' \in [H_2]$，交集 $H_1' \cap H_2'$在 G中是相对紧的。

受上述事实启发，对于 G 的任意一对非空子集 (H_1, H_2)，我们称 (H_1, H_2) 在 G 中是适当的，并记作

$$H_1 \pitchfork H_2 \text{ in } G \quad (\text{ or } [H_1] \pitchfork [H_2] \text{ in } G)$$

若对于任意 $H_1' \in [H_1]$ 和任意 $H_2' \in [H_2]$，交集 $H_1' \cap H_2'$ 在 G 中相对紧。

注意，以下命题给出了对子集对 (H_1, H_2) 在 G 中适当的充要条件:

命题 2.2. 设 H_1 和 H_2 是 G 的非空子集。则以下四个条件等价:

(i) 子集对 (H_1, H_2) 在 G 中是适当的。(ii) 对于 G 的任意紧子集 D，交集 $\overline{N}_D(H_1) \cap H_2$ 在 G 中相对紧。(iii) 对于 G 的任意紧子集 D，交集 $H_1 \cap \overline{N}_D(H_2)$ 在 G 中相对紧。(iv) 对于 G 的任意紧子集 D_1 和 D_2，交集 $\overline{N}_{D_1}(H_1) \cap \overline{N}_{D_2}(H_2)$ 在 G 中相对紧。

命题 2.2 的证明。命题 2.6 的证明中的论证同样适用于证明命题 2.2, 如下所述。等价性 (i)⇔ (iv)、蕴含关系 (i) ⇒ (ii) 和 (i) ⇒ (iii) 都很容易证明。蕴含关系 (ii) ⇒ (iv) 和 (iii) ⇒(iv) 直接由包含关系得出

$$\overline{N}_{D_1}(H_1) \cap \overline{N}_{D_2}(H_2) \subset \overline{N}_{D_1}(H_1 \cap \overline{N}_{D_1^{-1}\cdot D_2}(H_2)),$$
$$\overline{N}_{D_1}(H_1) \cap \overline{N}_{D_2}(H_2) \subset \overline{N}_{D_2}(\overline{N}_{D_2^{-1}\cdot D_1}(H_1) \cap H_2)$$

分别对于 G 的紧子集 D_1 和 D_2。 □

对于 G 的每个非空子集 H，定义

$$\pitchfork(H:G):=\{H'\in\mathcal{P}^{\times}(G)\mid H\pitchfork H' \text{ in } G\},$$
$$\pitchfork([H]:G):=\{\mathcal{H}'\in[\mathcal{P}^{\times}(G)]\mid [H]\pitchfork \mathcal{H}' \text{ in } G\}.$$

在 G 是 σ-紧的情况下，也就是说，G 是 G 的紧子集的一个可数族的并，以下结论成立：

命题 2.3（Yoshino [40]）。假设 G 是 σ-紧的。那么，对于 G 的两个非空子集 H_1 和 H_2，以下三个条件等价：

(i) $H_1\sim H_2$ 属于 G。(ii) $\pitchfork(H_1:G)=\pitchfork(H_2:G)$。(iii) $\pitchfork([H_1]:G)=\pitchfork([H_2]:G)$。

命题 2.3 的证明。蕴含关系（i）$\Rightarrow$（ii）以及等价关系（ii）$\Leftrightarrow$（iii）都是显然的。我们将证明蕴含关系（ii）$\Rightarrow$（i）的逆否命题。假设 $H_1\not\sim H_2$。不失一般性，可以假设

$$H_1\not\subset \overline{N}_D(H_2)$$

对于 G 的任意紧子集 D。由于 G 是 σ-紧且局部紧的，众所周知，可以找到 G 的一个紧子集序列 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，满足

对于每个 n，• D_n 是 G 的单位元的一个邻域，
对于每个 n，• $D_n\subset D_{n+1}^{\circ}$，其中 D_{n+1}° 表示 D_{n+1} 在 G 中的内部，并且

• $G=\bigcup_n D_n$。

注意，对于 G 的任意紧子集 D，存在 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 $D\subset D_k$ 且 $D\subset\overline{N}_{D_k}$（$H_2$）。固定一个点

$$g_n\in H_1\setminus\overline{N}_{D_n}(H_2)$$

对于每个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，并定义 $H':=\{g_n\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。那么交集

$$H'\cap H_1=H'$$

在 G 中不是相对紧的，因为对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $H'\not\subset\overline{N}_{D_k}(H_2)$。因此，$(H_1,H')$ 在 G 中不是适当的。另一方面，对于 G 的任意紧子集 D，交集 $H'\cap\overline{N}_D(H_2)$ 是紧的，因为

$$H'\cap\overline{N}_D(H_2)\subset H'\cap\overline{N}_{D_k}(H_2)=\{g_k\mid k\leq n\}.$$

对于某个满足 $D\subset D_k$ 的 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。因此，根据命题 2.2，(H_2,H') 在 G 中是适当的。这证明了 $\pitchfork(H_1:G)\neq\pitchfork(H_2:G)$。□

我们还要指出，下面的命题给出了 G 的 σ-紧性的一条充分条件：

命题 2.4. 设 G 是一个局部紧群。若 G 在一个非空适当度量空间（M, d）上具有连续适当等距作用，则 G 是 σ-紧的。

命题 2.4 的证明。固定 $*$ 的一个点，并定义

$$\pi : G \to M,\ g \mapsto g \cdot *.$$

则映射 π 是适当的。由于 d 是 M上的适当度量，对于每个$r \geq 0$, 闭球 $\overline{N}_r(*)$ 是紧的，因此 $D_r := \pi^{-1}(\overline{N}_r(*))$ 也是紧的。这证明了

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} D_n$$

是 σ-紧的。 □

2.2. Kobayashi 的适当性判据。我们将陈述 [22]中给出的 Kobayashi 适当性判据。设 G 是一个实线性约化李群， θ 是 G的一个嘉当对合。记 $K := G^\theta$ 为 G在 θ下的不动点子群，它是G的极大紧子群。对于 $\mathfrak{g}$ 的李代数 G，由 θ 诱导的 $\mathfrak{g}$ 上的嘉当分解记为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$。我们选取 $\mathfrak{p}$ 的一个极大阿贝尔子空间$\mathfrak{a}$ 。于是有嘉当的 KAK 分解 $G = K \cdot A \cdot K$, 其中 $A := \exp(\mathfrak{a})$ 表示关于 $\mathfrak{a}$的 G 的连通阿贝尔解析子群。我们记作用在 $\mathfrak{a}$上的魏尔群为 $W := N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$。对于 G的每个非空子集 H , 我们通过下式定义 $\mathfrak{a}$ 的非空 W-不变子集 $\mathfrak{a}(H)$

$$\mathfrak{a}(H) := \{X \in \mathfrak{a} \mid (K \cdot \exp(X) \cdot K) \cap H \neq \emptyset\}.$$

那么， $\mathfrak{a}(H)$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个非空 W-稳定子集，并且 $H \sim \exp(\mathfrak{a}(H))$ 属于 G。

将 $\mathfrak{a}$ 视为一个局部紧加法群（关于 $\mathfrak{a}$ 上的标准豪斯多夫拓扑）。在 $\mathcal{P}^\times(\mathfrak{a})^W$ 的所有 $\mathfrak{a}$ 的非空 W-不变子集上，我们按照上述含义定义等价关系$\sim$ 以及 $\mathcal{P}^\times(\mathfrak{a})^W$ 中的适当对。对于每个 $C \in \mathcal{P}^\times(\mathfrak{a})^W$, 定义

$$\pitchfork (C : \mathfrak{a})^W := \{C' \in \mathcal{P}^\times(\mathfrak{a})^W \mid C \pitchfork C' \text{ in } \mathfrak{a}\} \subset \mathcal{P}^\times(\mathfrak{a})^W.$$

那么， [22] 中的 Kobayashi 适当性判据可以表述如下:

定理 2.5（Kobayashi [22, 定理 3.4 和 5.6]）。设 (H_1, H_2) 是实线性约化李群 G 的一对非空子集。

（1）对 (H_1, H_2) 在 G 中是适当的，当且仅当对 $(\mathfrak{a}(H_1)\ \mathfrak{a}(H_2))$ 在 $\mathfrak{a}$中是适当的，也就是说，对于 $\mathfrak{a}$ 的任意紧子集 D , 交集

$$\mathfrak{a}(H_1) \cap (\mathfrak{a}(H_2) + D)$$

在 $\mathfrak{a}$ 中是相对紧的。

（2）关于（H_1、 H_2）的以下四个条件是等价的:

（2a） $H_1 \sim H_2$ 属于 G。（2b） $\mathfrak{a}$（H_1）
$\sim \mathfrak{a}$（H_2）属于 $\mathfrak{a}$。（2c） $\pitchfork$（H_1： G）
$=\pitchfork$（H_1： G）（2d） $\pitchfork$（$\mathfrak{a}$（H_1）： $\mathfrak{a}$）
$^W =\pitchfork$（$\mathfrak{a}$（H_2）： $\mathfrak{a}$）^{W}。

2.3. 适当度量空间中的 HBI 对。设 (M, d) 是一个适当度量空间，即 (M) 是一个度量空间，使得 M 中的任意闭球都是紧的。注意， M 的子集在 M 中有界，当且仅当其在 M 中相对紧。

在本小节中，为了陈述我们的主要结果，我们如下引入 M 的非空子集的“HBI 对”概念：

对于 M 的每个子集 C 以及每个 $r \geq 0$，我们通过下式定义 M 的子集 $\overline{N}_r(C)$：

$$\overline{N}_r(C) := \{p \in M \mid d(p, c) \leq r \text{ for some } c \in C\}.$$

在本文中，对于 M 的两个非空子集 C_1 和 C_2，如果存在 $r \geq 0$ 使得下式成立，我们记作 $C_1 \sim C_2$：

$$C_1 \subset \overline{N}_r(C_2) \text{ and } C_2 \subset \overline{N}_r(C_1).$$

注意，当且仅当 C_1 与 C_2 之间的 Hausdorff 距离有限时，$C_1 \sim C_2$ 成立。于是，“$\sim$”在 M 的所有非空子集的集合 $\mathcal{P}^{\times}(M)$ 上定义了一个等价二元关系。对于每个非空子集 C，我们用 $[C]$ 表示 C 的等价类。此外， $\mathcal{P}^{\times}(M)$ 关于 $\sim$ 的商集记为 $[\mathcal{P}^{\times}(M)]$。

在本文中，对于 M 的两个非空子集 C_1 和 C_2，如果对于任意 $C_1' \in [C_1]$ 和任意 $C_2' \in [C_2]$，交集 $C_1' \cap C_2'$ 在 M 中有界，我们就称这对 (C_1, C_2) 在 M 中具有 HBI 性质。在这种情况下， $[\mathcal{P}^{\times}(M)]$ 中的这对 $([C_1], [C_2])$ 也称为在 M 中具有 HBI 性质。

下面的命题给出了使一对 (C_1, C_2) 在 M 中具有 HBI 性质的充要条件。

命题 2.6. 设 C_1 和 C_2 都是 M 的非空子集。那么，关于 (C_1, C_2) 的以下四个条件等价：

(i) (C_1, C_2) 在 M 中具有 HBI 性质。(ii) 对任意 $r \geq 0$，交集 $C_1 \cap \overline{N}_r(C_2)$ 在 M 中有界。(iii) 对任意 $r \geq 0$，交集 $\overline{N}_r(C_1) \cap C_2$ 在 M 中有界。(iv) 对任意 r_1、$r_2 \geq 0$，交集 $\overline{N}_{r_1}(C_1) \cap \overline{N}_{r_2}(C_2)$ 在 M 中有界。

命题 2.6 的证明。等价性 (i) $\Leftrightarrow$ (iv)、蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii) 和 (i) $\Rightarrow$ (iii) 都很容易证明。蕴含关系 (ii) $\Rightarrow$(iv) 和 (iii) $\Rightarrow$ (iv) 立即由包含关系得出

$$\overline{N}_{r_1}(C_1) \cap \overline{N}_{r_2}(C_2) \subset \overline{N}_{r_1}(C_1 \cap \overline{N}_{r_1+r_2}(C_2)),$$
$$\overline{N}_{r_1}(C_1) \cap \overline{N}_{r_2}(C_2) \subset \overline{N}_{r_2}(\overline{N}_{r_1+r_2}(C_1) \cap C_2)$$

分别对于 r_1 和 $r_2 \geq 0$。 □

对于 M 的每个非空子集 C，定义

$$\mathcal{HBI}(C\colon M) := \{C' \in \mathcal{P}^{\times}(M) \mid \text{该对 } (C, C') \text{ 在 } M\} \text{ 中是 HBI},$$
$$\mathcal{HBI}([C]\colon M) := \{\mathcal{C}' \in [\mathcal{P}^{\times}(M)] \mid \text{该对 } ([C], \mathcal{C}') \text{ 在 } M\}. \text{ 中是 HBI}$$

那么，与命题 2.4 类似，下面的命题成立：

命题 2.7。对于 M 的两个非空子集 C_1 和 C_2，以下三个条件等价：

(i) $C_1 \sim C_2$ 属于 M。(ii) $\mathcal{HBI}(C_1\colon M) = \mathcal{HBI}(C_2\colon M)$。(iii) $\mathcal{HBI}([C_1]\colon M) = \mathcal{HBI}([C_2]\colon M)$。

命题 2.7 的证明。(i) $\Rightarrow$ (ii) 的蕴含关系以及 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) 的等价关系都显然。我们将证明蕴含关系 (ii) $\Rightarrow$ (i) 的逆否命题。假设 $C_1 \not\sim C_2$。不失一般性，可以设

$$C_1 \not\subset \overline{N}_r(C_2)$$

对任意 $r \geq 0$。对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都可以找到并取 $p_n \in C_1 \setminus \overline{N}_n(C_2)$。令 $C' := \{p_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。那么交集

$$C' \cap C_1 = C'$$

在 M 中无界。因此，(C_1, C') 这一对在 M 中不是 HBI。然而，对于任意 $r \geq 0$，交集 $C' \cap \overline{N}_r(C_2)$ 都是有限的，因此根据命题 2.6，(C_2, C') 这一对在 M 中是 HBI。这就证明了 $\mathcal{HBI}(C_1\colon M) \neq \mathcal{HBI}(C_2\colon M)$。□

2.4. 主要结果。我们将陈述如下结果：设 (M, d) 是一个适当度量空间，且 G 是一个局部紧群，它在 M 上连续、适当地、等距且传递地作用。如第 1 节所述，假设度量 G-空间 M 具有以下性质：

> 性质 (S)：对于每个 $r \geq 0$，存在 $\tau(r) \geq 0$，使得对于任意满足 $d(p, p_0) \leq r$ 的 p_0、p、$q \in M$，都可以选取一个等距变换 $g \in G$，使其满足 $g \cdot p = p_0$，且 $d(q, g \cdot q) \leq \tau(r)$。

固定 M 的一个基点 $*$，记 K 为 G 在 M 的点 $*$ 处的紧各向同性子群。M 中 K-轨道的空间记为 $K\backslash M$，并赋予由 M 上的度量 d 诱导的适当度量 d^K（度量 d^K 在 $K\backslash M$ 上的定义见第 3.2 节）。我们定义映射 $\mu\colon G \to K\backslash M$ 为

$$\mu : G \to K\backslash M,\ g \mapsto K \cdot (g \cdot *).$$

我们的主要结果之一如下所述：

定理 2.8. 在上述设定中，设 H_1 和 H_2 都是 G 的非空子集。

(1) 有序对 (H_1, H_2) 在 G 中是适当的，当且仅当有序对 $(\mu(H_1)\ \mu(H_2))$ 在 $K\backslash M$ 中是 HBI；也就是说，对于任意 $r \geq 0$，交集

$$\mu(H_1) \cap \overline{N}_r(\mu(H_2))$$

在适当度量空间 $K\backslash M$ 中是有界的。

（2）关于（H_1， H_2）的以下四个条件等价：（2-a） $H_1 \sim H_2$ 在 G 中。（2-b） μ（H_1）$\sim \mu$（H_2）在 $K\backslash M$ 中。（2-c） $\pitchfork$（H_1： G）$=\pitchfork$（H_2： G）。（2-d） $\mathcal{HBI}$（μ（H_1）： $K\backslash M$）$= \mathcal{HBI}$（μ（H_2）： $K\backslash M$）。

此外，固定 Σ 为 M 的闭子集，并满足以下两个条件：

- For each K-orbit $\mathcal{O}$ in M, the intersection $\Sigma \cap \mathcal{O}$ is non-empty.
- For each pair of K-orbits $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ in M, there exists $(p, q) \in (\Sigma \cap \mathcal{O}_1) \times (\Sigma \cap \mathcal{O}_2)$ such that $d(p, q) = d^K(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$.

记

$$\eta : \Sigma \to K\backslash M,\ p \mapsto K \cdot p$$

表示商映射的限制，并定义

$$\Theta : \mathcal{P}^\times(\Sigma) \to \mathcal{P}^\times(\Sigma),\ S \mapsto \eta^{-1}(\eta(S)).$$

于是 $\Theta^2 = \Theta$ 在 $\mathcal{P}^\times(\Sigma)$ 上。记

$$\mathcal{P}^\times(\Sigma)^\Theta := \{S \in \mathcal{P}^\times(\Sigma) \mid \Theta(S) = S\} \subset \mathcal{P}^\times(\Sigma).$$

通过考虑 d 的限制，集合 Σ 本身是一个适当度量空间。对于每个 $S \in \mathcal{P}^\times(\Sigma)^\Theta$，记

$$\mathcal{HBI}(S : \Sigma)^\Theta := \{S' \in \mathcal{P}^\times(\Sigma)^\Theta \mid \text{ the pair } (S, S') \text{ is HBI in } \Sigma\}.$$

此外，对于 G 的每个非空子集 H，我们定义 Σ 的非空 Θ-不变子集 $\Sigma(H)$ 为

$$\begin{aligned}\Sigma(H) &:= \{p \in \Sigma \mid (K \cdot p) \cap (H \cdot *) \neq \emptyset\},\\ &= \Sigma \cap (K \cdot H \cdot *).\end{aligned}$$

那么以下定理也成立：

定理 2.9。在上述设定下，设 H_1 和 H_2 都是 G 的非空子集。

(1) (H_1, H_2) 这一对在 G 中是适当的，当且仅当 $(\Sigma(H_1)\ \Sigma(H_2))$ 在 Σ 中是 HBI 的。(2) 关于 (H_1, H_2) 的以下四个条件等价：(2-a) $H_1 \sim H_2$ 在 G 中。(2-b) $\Sigma(H_1) \sim \Sigma(H_2)$ 在 Σ 中。(2-c) $\pitchfork(H_1 : G) = \pitchfork(H_2 : G)$。(2-d) $\mathcal{HBI}(\Sigma(H_1) : \Sigma)^\Theta = \mathcal{HBI}(\Sigma(H_2) : \Sigma)^\Theta$。

我们将讨论，Kobayashi 的适当性判据（定理 2.5）可以通过结合定理 2.9 与黎曼对称空间上度量几何的一些事实来解释，其中这些黎曼对称空间不含紧因子（见第 6 节）。

注 2.10. 固定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和正交群 $O(n)$的一个闭李子群 K。我们将李群 $G := K \ltimes \mathbb{R}^n$ 定义为 K 与加法李群 $\mathbb{R}^n$的半直积。于是， G 在 n维欧几里得空间 $M := \mathbb{R}^n$上具有适当等距传递作用，并且很容易验证， G-空间 M 具有性质 (S)。因此，定理 2.8（更准确地说，是第 4 节中陈述的定理 4.5）适用于 $G := K \ltimes \mathbb{R}^n$。值得指出的是，Baklouti–Bejar–Fendri $[1,\ 定理\ 3.9]$ 所给出的关于 G 的连通子群或离散子群的适当性判据，在上述意义上与我们的工作相关。此外，若我们取 $\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$上的 K-表示的一个截面 Σ，则定理 2.9 也适用。这涵盖了吉野适当性判据 $[39,\ 定理\ 9]$，该判据针对的是与实线性约化群相关联的 Cartan 运动群 $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$ 中的一对子集。

注 2.11. 正如我们在第 1 节中提到的，类似于定理 2.5 (1)，Benoist $[4]$ 为非阿基米德局部域 k上的单连通半单代数群 G 的两个闭子群对 G的作用给出了一个适当性判据。我们相信，他的判据可以通过将定理 2.9 应用于 Bruhat–Tits建筑 $\mathcal{B}(G;k)$ 上的等距作用以及 G 的一个公寓 Σ ($\mathcal{B}$;G) 来解释。这将在未来的工作中进行详细探讨。

注 2.12. Gu ´eritaud–Kassel $[12,\ 定理\ 1.8]$ 证明，在适当假设下，群流形 $PO(n, 1)$ 的不连续群应当是“尖锐的”（关于不连续群尖锐性的定义，见 $[18]$ ）。他们的方法基于双曲空间上的度量几何。我们同样对不连续群的尖锐性感兴趣，并将在未来的工作中研究我们所处情形下的此类问题。

3. Non-expanding proper surjective maps and HBI-pairs

设 $(\Omega\ d)$ 和 (Ω', d') 都是适当度量空间。在本节中，我们考虑一个连续适当满射 $\eta : \Omega \to \Omega'$，满足以下两个条件:

条件 (1): 映射 $\eta : \Omega \to \Omega'$ 是非扩张的，即

$$d'(\eta(x), \eta(y)) \leq d(x, y)$$

对任意 $x, y \in \Omega$，均成立。

条件 (2): 对于每个 $x \in \Omega$ 和 $y' \in \Omega'$，存在 $y \in \eta^{-1}(y')$ 使得

$$d(x, y) = d'(\eta(x), y').$$

对于 Ω 的每个子集 C，我们将 Ω 的子集 $\Theta(C)$ 定义为

$$\Theta(C) := \eta^{-1}(\eta(C)) \subset \Omega.$$

于是，Θ 在 Ω 的所有非空子集构成的集合 $\mathcal{P}^{\times}(\Omega)$ 上诱导出一个变换。此外，可以看出 $\Theta^2 = \Theta$ 和 Θ 保包含关系。

本节中，我们通过 η（见定理 3.1）给出 Ω 中若干类 HBI 对与 Ω′ 中相应 HBI 对之间的关系；该定理可应用于适当度量空间中的紧群轨道空间（见第 3.2 节）。

3.1. 通过非扩张映射建立 HBI 对之间的关系。本小节旨在证明以下定理，该定理通过 η给出 Ω 中若干类 HBI 对与 Ω′ 中相应 HBI 对之间的关系：

定理 3.1. 设 C_1 和 C_2 均为 Ω 的非空子集。
(1) 若 $C_1 \sim C_2$ 属于 Ω，则 $\Theta(C_1) \sim \Theta(C_2)$ 属于 Ω。(2) 关于 (C_1, C_2) 的以下两个条件等价：(2a) $\Theta(C_1) \sim \Theta(C_2)$ 属于 Ω。(2b) $\eta(C_1) \sim \eta(C_2)$ 属于 Ω′。(3) 关于 (C_1, C_2) 的以下四个条件等价：(3a) 数对 $(C_1, \Theta(C_2))$ 是 Ω 中的 HBI 对。
(3b) 数对 $(\Theta(C_1)\ C_2)$ 是 Ω 中的 HBI 对。(3c) 数对 $(\Theta(C_1)\ \Theta(C_2))$ 是 Ω 中的 HBI 对。(3d) 数对 $(\eta(C_1)\ \eta(C_2))$ 是 Ω′中的 HBI 对。

下面应用以下引理来证明定理 3.1：

引理 3.2。设 C 是 Ω 的非空子集，C' 是 Ω′ 的非空子集。再固定 $r \geq 0$。则下列等式成立：

$$\eta^{-1}(\overline{N}_r(C')) = \overline{N}_r(\eta^{-1}(C')) \quad in\ \Omega. \tag{3.1}$$

$$\eta(\overline{N}_r(C)) = \overline{N}_r(\eta(C)) \quad in\ \Omega', \tag{3.2}$$

$$\Theta(\overline{N}_r(C))) = \overline{N}_r(\Theta(C))) \quad in\ \Omega. \tag{3.3}$$

引理 3.2 的证明。等式 (3.1) 和 (3.2) 直接由映射 $\eta : \Omega \to \Omega'$ 上的条件 (1) 和 (2) 得出。等式 (3.3) 由等式 (3.1) 和 (3.2) 得到。□

定理 3.1 的证明。首先，断言 (1) 直接由方程 (3.3) 以及 Θ保持包含关系这一观察得到。其次，断言 (2) 可由引理 3.2 中的方程 (3.1) 和 (3.2) 得出。下面证明断言 (3)。蕴含关系 (3c) $\Rightarrow$(3a) 和 (3c) $\Rightarrow$ (3b) 都是显然的。我们来证明蕴含关系 (3a) $\Rightarrow$ (3c) 和 (3b) $\Rightarrow$ (3c)。任取 $r \geq 0$。根据 η上的条件 (2)，可以

很容易看出下面两个方程成立：

$$\Theta(C_1)\cap\overline{N}_r(\Theta(C_2))=\Theta(C_1\cap\overline{N}_r(\Theta(C_2))),$$
$$\overline{N}_r(\Theta(C_1))\cap\Theta(C_2)=\Theta(\overline{N}_r(\Theta(C_1))\cap C_2).$$

蕴含关系 (3a) $\Rightarrow$ (3c) 和 (3b) $\Rightarrow$ (3c) 均可直接由以下观察和上述等式得到：对于 Ω 的任意有界子集 C_0，子集$\Theta(C_0)$ 也是 Ω 中的有界子集。最后，我们证明等价性 (3c) $\Leftrightarrow$ (3d)。固定 $r\geq 0$。根据引理 3.2，我们有：

$$\begin{aligned}\eta(C_1)\cap\overline{N}_r(\eta(C_2))&=\eta(C_1)\cap\eta(\overline{N}_r(C_2))\\&=\eta(\Theta(C_1))\cap\eta(\Theta(\overline{N}_r(C_2)))\\&=\eta(\Theta(C_1)\cap\Theta(\overline{N}_r(C_2)))\\&=\eta(\Theta(C_1)\cap\overline{N}_r(\Theta(C_2))).\end{aligned}$$

由于 $\Theta(C_1)\cap\overline{N}_r(\Theta(C_2))$ 是 Ω 的一个 Θ-不变子集，且 η 是适当映射，可以看出，$\eta(C_1)\cap\overline{N}_r(\eta(C_2))$ 在 Ω 中有界′当且仅当$\Theta(C_1)\cap\overline{N}_r(\Theta(C_2))$ 在 Ω 中有界。这证明了等价性 (3c)$\Leftrightarrow$(3d)。□

我们记

$$\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta:=\{C\in\mathcal{P}^\times(\Omega)\mid\Theta(C)=C\},$$
$$[\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta]:=\{[C]\in[\mathcal{P}^\times(\Omega)]\mid C\in\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta\}\subset[\mathcal{P}^\times(\Omega)].$$

此外，对于 Ω 的每个非空子集 C，我们也记作

$$\mathcal{HBI}(C:\Omega)^\Theta:=\mathcal{HBI}(C:\Omega)\cap\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta\subset\mathcal{HBI}(C:\Omega),$$
$$\mathcal{HBI}([C]:\Omega)^\Theta:=\mathcal{HBI}([C]:\Omega)\cap[\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta]\subset\mathcal{HBI}([C]:\Omega).$$

于是，作为定理 3.1 的推论，我们还得到以下结果：

推论 3.3. 考虑双射

$$\eta_*:\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta\xrightarrow{\sim}\mathcal{P}^\times(\Omega'),\ C\mapsto\eta(C).$$

(1) 对每个 $C\in\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta$，映射 η_* 在 $\mathcal{HBI}(C:\Omega)^\Theta$ 与 $\mathcal{HBI}(\eta(C):\Omega')$之间建立一一对应关系。
(2) 双射 $\eta_*:\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta\xrightarrow{\sim}\mathcal{P}^\times(\Omega')$ 诱导出下面的双射

$$\eta_*^-:[\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta]\xrightarrow{\sim}[\mathcal{P}^\times(\Omega')],\ [C]\mapsto[\eta(C)].$$

此外，对于每个 $C\in\mathcal{P}^\times(\Omega)^\Theta$，映射 η_*^-在 $\mathcal{HBI}([C]:\Omega)^\Theta$ 与 $\mathcal{HBI}([\eta(C)]:\Omega')$ 之间给出一一对应。

3.2. 适当度量空间中的轨道空间。设 (M, d) 是一个配备了紧群 K 的连续等距作用的适当度量空间。我们将 M 中的 K-轨道空间记为 $K\backslash M$，并记

$$\varpi : M \to K\backslash M,\ p \mapsto K \cdot p$$

商映射。注意到，空间 $K\backslash M$ 关于商拓扑是局部紧豪斯多夫空间，并且映射 ϖ : M $\to K\backslash M$ 是适当映射。于是

$$\begin{aligned} d^K : K\backslash M \times K\backslash M &\to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ (\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2) &\mapsto \min\{d(x,y) \mid (x,y) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2\} \end{aligned}$$

定义良好，并在空间 $K\backslash M$ 上定义了一个适当度量。 $K\backslash M$ 上的商拓扑与由度量 d^K 在 $K\backslash M$ 上诱导的拓扑一致。

容易验证映射 ϖ : $M \to K\backslash M$ 满足条件（1）和（2），因此定理 3.1 和推论 3.3 可应用于 $(\Omega, \Omega', \eta) = (M, K\backslash M, \varpi)$。

此外，设 Σ 是 M 的一个满足以下两个条件的闭子集：

- 对于 M 中的每个 K-轨道 $\mathcal{O}$，交集 $\Sigma \cap \mathcal{O}$ 非空。
- 对于 M 中的每一对 K-轨道（$\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$），存在（p，q）$\in$（$\Sigma \cap \mathcal{O}_1$）$\times$（$\Sigma \cap \mathcal{O}_2$），使得 d（p，q）$= d^K$（$\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$）。

令我们考虑 Σ，其中度量取为 Σ 上度量 d 的限制，并将其视为适当度量空间。那么该限制

$$\eta := \varpi|_\Sigma : \Sigma \to K\backslash M,\ p \mapsto K \cdot p$$

是满射的，并满足条件（1）和（2）。因此，定理 3.1 和推论 3.3 可应用于（Ω，Ω'，η）$=$（Σ，$K\backslash M$，η）。

令我们考虑这样的情形： M 是一个连通完备的黎曼流形，并且 K 在 M 上的作用是光滑且等距的，即 M 上的黎曼度量张量在 K 的作用下保持不变。若一个连通、闭的正则光滑子流形 Σ 位于 M 中，并且与 M 中的所有 K-轨道正交相交（详见 [32] ），则称其为 K 在 M 上的作用的截面。此外，如果 K 在 M 上的作用存在截面 [（分别为平坦截面]），则称该作用为极性的 [（分别为超极性的] ）。

对于 K 在 M 上的作用，截面 Σ 满足上述两个条件（证明见 [11, 命题 1.3.2]），因此，即使在上述情形下，定理 3.1 和推论 3.3 也可应用于 $(\Omega, \Omega', \eta) = (\Sigma, K\backslash M, \eta)$。注意，对于 K 在 M 上的作用的截面 Σ，通过定义

$$\begin{aligned} N_K(\Sigma) &:= \{k \in K \mid k \cdot \Sigma = \Sigma\} \subset K, \\ Z_K(\Sigma) &:= \{k \in K \mid k \cdot p = p \text{ for any } p \in \Sigma\} \subset N_K(\Sigma), \end{aligned}$$

我们得到作用在截面 Σ 上的广义 Weyl 群 $W:=N_K(\Sigma)/Z_K(\Sigma)$。众所周知，广义 Weyl 群 W（在我们的设定中）是有限的，并且对于每个 $p\in\Sigma$,

$$(K\cdot p)\cap\Sigma=W\cdot p$$

（详情请参见 $[32,$ 第 $4]$ 节）。特别地，在此情形下，我们有

$$\Theta(C):=\eta^{-1}(\Theta(C))=W\cdot C$$

对于 Σ中的任意非空子集 C。

4. 定理 2.8 和 2.9 的证明

本节旨在证明第 2.4 节中陈述的定理 2.8 和 2.9。

设 (M,d) 是一个配备有局部紧群 G的连续适当等距传递作用的适当度量空间。我们固定 M的一个基点 $*$，并令

$$\pi:G\to M,\ g\mapsto g\cdot *.$$

注意，映射 π 是连续、适当且满射的。G在点 $*$ 处的紧各向同性子群记为 K。

我们首先指出，在上述情形下，根据命题 2.3，G应当是 σ-紧的。

引入以下概念：对于 G 的非空子集 H 和 M 的非空紧子集 C，我们将 M 的非空子集 $S^H(C)$ 定义为

$$\begin{aligned}S^H(C)&:=\pi^{-1}(C)\cdot\pi(H)\\&=\{g\cdot\pi(h)\mid g\in\pi^{-1}(C)\text{ and }h\in H\}\subset M.\end{aligned}$$

对于 $C=\{*\}$ 的情形，我们只需令

$$S^H(*):=S^H(\{*\})=K\cdot\pi(H)=K\cdot H\cdot *\subset M.$$

4.1. 度量空间上的适当等距传递作用与适当对。本小节的目标是证明以下定理：

定理 4.1. 设 H_1 和 H_2 都是 G 的非空子集。

(i) 若 $S^{H_1}(*)\sim S^{H_2}(*)$ 属于 M，则 $H_1\sim H_2$ 属于 G。(ii) 若有序对 (H_1,H_2) 在 G 中是适当的，则有序对 $(S^{H_1}(*)\ S^{H_2}(*))$ 在 M 中是 HBI。

为证明定理 4.1，我们先给出下面引理的证明：

引理 4.2. 设 H 是 G 的非空子集，并固定 $r\geq 0$。令 $D_r:=\pi^{-1}(\overline{N}_r(*))\subset G$。则

$$\pi^{-1}(\overline{N}_r(S^H(*)))=K\cdot H\cdot D_r.$$

引理 4.2 的证明。首先，我们证明

$$\pi^{-1}(\overline{N}_r(S^H(*))) \subset K \cdot H \cdot D_r.$$

任取 $g \in \pi^{-1}(\overline{N}_r(S^H(*)))$。令 $p := \pi(g) \in \overline{N}_r(S^H(*))$。可以找到并取 $q \in S^H(*)$，使得 $d(p,q) \leq r$。由于 $S^H(*) = K \cdot H \cdot *$，还可以取 $k \in K$ 和 $h \in H$，使得 $q = k \cdot h \cdot *$。于是

$$d(\pi(h^{-1} \cdot k^{-1} \cdot g), *) = d(p,q) \leq r.$$

因此，$h^{-1} \cdot k^{-1} \cdot g \in D_r$，从而 $g \in K \cdot H \cdot D_r$。

反之，我们证明

$$\pi^{-1}(\overline{N}_r(S^H(*))) \supset K \cdot H \cdot D_r.$$

固定任意的 $k \in K$、$h \in H$ 和 $d \in D_r$。令 $p := \pi(d) \in \overline{N}_r(*)$。于是$\pi(k \cdot h \cdot d) = k \cdot h \cdot p$，并且

$$d(k \cdot h \cdot p, k \cdot h \cdot *) = d(p, *) \leq r.$$

由于 $k \cdot h \cdot * \in S^H(*)$，我们有 $\pi(k \cdot h \cdot d) \in \overline{N}_r(S^H(*))$。 □

我们如下给出定理 4.1 的证明:

定理 4.1 的证明。首先，我们证明断言 (i)。假设

$$S^{H_1}(*) \subset \overline{N}_r(S^{H_2}(*)) \text{ and } S^{H_2}(*) \subset \overline{N}_r(S^{H_1}(*))$$

对于 $r \geq 0$。令 $D_r := \pi^{-1}(\overline{N}_r(*))$。则 D_r 是紧的，并且 $D_r^{-1} = D_r \supset K$。对于 $(i,j) = (1,2)$ 或 $(2,1)$，由引理 4.2，有

$$\begin{aligned} H_i &\subset K \cdot H_i \cdot K \\ &= \pi^{-1}(S^{H_i}(*)) \\ &\subset \pi^{-1}(\overline{N}_r(S^{H_j}(*))) \\ &= K \cdot H_j \cdot D_r \\ &\subset D_r \cdot H_j \cdot D_r^{-1}. \end{aligned}$$

这就证明了 $H_1 \sim H_2$。

接下来，我们证明断言 (ii)。假设对 (H_1, H_2) 而言，G 是适当的。固定 $r \geq 0$。由命题 2.6，我们只需证明 M 中的子集 $S^{H_1}(*) \cap \overline{N}_r(S^{H_2}(*))$ 是有界的。令$D_r := \pi^{-1}(\overline{N}_r(*))$。于是由引理 4.2，有

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(S^{H_1}(*) \cap \overline{N}_r(S^{H_2}(*))) &= \pi^{-1}(S^{H_1}(*)) \cap \pi^{-1}(\overline{N}_r(S^{H_2}(*))) \\ &= (K \cdot H_1 \cdot K) \cap (K \cdot H_2 \cdot D_r). \end{aligned}$$

由于 $K \cdot H_1 \cdot K \in [H_1]$、$K \cdot H_2 \cdot D_r \in [H_2]$ 和 $([H_1], [H_2])$ 在 G 中是适当的，交集 $(K \cdot H_1 \cdot K) \cap (K \cdot H_2 \cdot D_r)$ 在 G 中是相对紧的。因此，由于 π 是满射的，$S^{H_1}(*) \cap \overline{N}_r(S^{H_2}(*))$ 在 M 中是有界的。□

4.2. 定理 2.8 和 2.9 的证明。本小节给出定理 2.8 和 2.9 的证明。我们假设度量 G-空间M 具有第 1 节中所述的性质 (S)。

于是，下面的定理成立，该定理断言了定理 4.1 中蕴含关系的逆命题：

定理 4.3。在上述设定下，令 H_1 和 H_2 均为 G 的非空子集。

(i) $H_1 \sim H_2$ 属于 G 当且仅当 $S^{H_1}(*)$ 在 M 中 $\sim S^{H_2}(*)$。(ii) 有序对 (H_1, H_2) 在 G 中是适当的，当且仅当有序对 ($S^{H_1}(*)$ $S^{H_2}(*)$) 在 M 中是 HBI。

下面的引理在我们证明定理 4.3 的过程中起着关键作用。

引理 4.4。设 H 是 G 的非空闭子集。那么对于每个 $r \geq 0$，存在 $\tau \geq 0$，使得

$$S^H(\overline{N}_r(*)) \subset \overline{N}_\tau(S^H(*)).$$

引理 4.4 的证明。固定性质 (S) 中的 $\tau = \tau(r) \geq 0$。任取 $q \in S^H(\overline{N}_r(*))$，我们将证明 $q \in \overline{N}_\tau(S^H(*))$。固定满足 $q = g \cdot \pi(h)$ 的 $g \in \pi^{-1}(\overline{N}_r(*))$ 和 $h \in H$。令 $p := \pi(g) \in \overline{N}_r(*)$。根据 τ 的定义，存在 $g' \in G$，使得 $g' \cdot p = *$ 且 $d(q, g' \cdot q) \leq \tau$。令 $q_0 := g' \cdot q \in M$。由于

$$\begin{cases} (g')^{-1} \cdot * & = p = g \cdot *, \\ (g')^{-1} \cdot q_0 & = q = g \cdot h \cdot *, \end{cases}$$

我们得到 $k := g'g \in K$ 和 $q_0 = k \cdot h \cdot * \in S^H(*)$。这证明了 $q \in \overline{N}_\tau(S^H(*))$。□

下面给出定理 4.3 的证明。

定理 4.3 的证明。首先，我们讨论定理 4.3 中的断言 (i)。“如果”部分正是定理 4.1 (i)。下面证明“仅如果”部分。假设 $H_1 \sim H_2$ 属于 G，我们将证明 $S^{H_1}(*) \sim S^{H_2}(*)$ 属于 M。取 D为 G的一个紧子集，使得 $H_1 \subset \overline{N}_D(H_2)$ 且 $H_2 \subset \overline{N}_D(H_1)$。我们通过 $D' := D \cdot K$ 定义 G 的子集 D'。由于 D^{-1} 和 D' 都是紧的，因此可以找到并取 r_1、$r_2 \geq 0$，使得

$$\pi(D^{-1}) \subset \overline{N}_{r_1}(*) \text{ and } \pi(D') \subset \overline{N}_{r_2}(*).$$

取 $\tau \geq 0$ 为关于 $r = r_2$ 的引理 4.4 中的对象，并令 $r' := r_1 + \tau \geq 0$。那么对于 $(i, j) = (1, 2)$ 或 $(2, 1)$，我们得到

$$\begin{aligned}
S^{H_i}(*) &= K \cdot \pi(H_i) \\
&\subset K \cdot \pi(N_D(H_j)) \\
&= K \cdot \pi(D \cdot H_j \cdot D^{-1}) \\
&= D' \cdot H_j \cdot \pi(D^{-1}) \\
&\subset D' \cdot H_j \cdot \overline{N}_{r_1}(*) \\
&= \overline{N}_{r_1}(D' \cdot H_j \cdot *) \\
&\subset \overline{N}_{r_1}(\pi^{-1}(\overline{N}_{r_2}(*)) \cdot \pi(H_j)) \\
&= \overline{N}_{r_1}(S^{H_j}(\overline{N}_{r_2}(*))) \quad (\because \text{ the definition of } S^{H_j}(\overline{N}_{r_2}(*))) \\
&\subset \overline{N}_{r_1}\overline{N}_{\tau}(S^{H_j}(*)) \quad (\because \text{ Lemma 4.4}) \\
&\subset \overline{N}_{r'}(S^{H_j}(*)).
\end{aligned}$$

这证明了 $S^{H_1}(*) \sim S^{H_2}(*)$ 在 M 中成立。

接下来，我们将证明定理 4.3 中断言 (ii)。该断言的“仅当”部分就是定理 4.1 (ii)。我们来证明“如果”部分。假设对 $(S^{H_1}(*)\ S^{H_2}(*))$，其在 M 中是 HBI。任取 $H_1' \in [H_1]$ 和任意 $H_2' \in [H_2]$。我们将证明交集 $H_1' \cap H_2'$ 在 G 中相对紧。由于 $\pi\colon G \to M$ 是连续适当满射，且 (M, d) 是适当度量空间，我们只需证明像 $\pi(H_1' \cap H_2')$ 在 M 中有界。由于

$$\begin{aligned}
\pi(H_1' \cap H_2') &\subset \pi(H_1') \cap \pi(H_2') \\
&\subset (K \cdot \pi(H_1')) \cap (K \cdot \pi(H_2')) \\
&= S^{H_1'}(*) \cap S^{H_2'}(*),
\end{aligned}$$

只需证明交集 $S^{H_1'}(*) \cap S^{H_2'}(*)$ 在 M 中有界。回顾一下，定理 4.3 中的断言 (i) 已在上文证明。因此，对于 $i = 1, 2$，我们有 $S^{H_i'}(*) \in [S^{H_i}(*)]$。于是，根据假设，交集 $S^{H_1'}(*) \cap S^{H_2'}(*)$ 在 M 中有界。□

如第 3.2 节中一样，我们考虑适当度量空间（$K\backslash M, d^K$）、商映射

$$\varpi : M \to K\backslash M,$$

并定义

$$\mu := \varpi \circ \pi : G \to K\backslash M,\ g \mapsto K \cdot (g \cdot *)$$

请注意，正如我们在第 3.2 节中提到的，定理 3.1 和推论 3.3 可以应用于 $\varpi\colon M \to K\backslash M$。

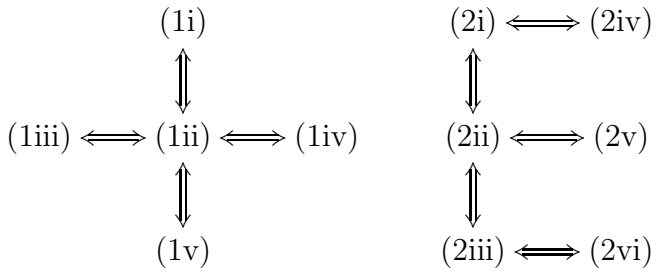
要证明定理 2.8，只需证明以下定理：

定理 4.5。在上述设定下，设 H_1 和 H_2 均为 G 的非空子集。

（1）关于 (H_1, H_2) 的以下五个条件等价：

(1i) (H_1, H_2) 在 G 中是适当的。(1ii) $(S^{H_1}(*)\ S^{H_2}(*))$ 在 M 中具有 HBI 性质。(1iii) $(\pi(H_1)\ S^{H_2}(*))$ 在 M 中具有 HBI 性质。(1iv) $(S^{H_1}(*)\ \pi(H_2))$ 在 M 中具有 HBI 性质。(1v) $(\mu(H_1)\ \mu(H_2))$ 在 $K\backslash M$ 中具有 HBI 性质。(2) 关于 (H_1, H_2) 的以下六个条件是等价的：(2i) $H_1 \sim H_2$ 在 G 中。(2ii) $S^{H_1}(*) \sim S^{H_2}(*)$ 在 M 中。(2iii) $\mu(H_1) \sim \mu(H_2)$ 在 $K\backslash M$ 中。(2iv) $\Cap(H_1 : G) = \Cap(H_2 : G)$。(2v) $\mathcal{HBI}(S^{H_1}(*) : M) = \mathcal{HBI}(S^{H_2}(*) : M)$。(2vi) $\mathcal{HBI}(\mu(H_1) : K\backslash M) = \mathcal{HBI}(\mu(H_2) : K\backslash M)$。

定理 4.5 的证明。我们的策略是证明以下等价性：



首先，等价性 (2ii) $\Leftrightarrow$ (2v) 和 (2iii) $\Leftrightarrow$(2vi) 均来自命题 2.7。此外，等价性 (2i) $\Leftrightarrow$ (2iv) 由命题 2.3 得出。接下来，等价性 (2ii) $\Leftrightarrow$(2iii) 可通过应用定理 3.1 (2) 加以证明，

$$(\Omega, \Omega', \eta, C_1, C_2) = (M, K\backslash M, \varpi, \pi(H_1), \pi(H_2))$$

因为对于每个非空子集 H，$\mu(H) = \varpi(S^H(*))$。通过类似的论证，条件 (1ii)、(1iii)、(1iv) 和 (1v) 之间的等价性由定理 3.1 (3) 得出。等价性 (1i) $\Leftrightarrow$ (1ii) 和 (2ii) $\Leftrightarrow$(2i) 均已作为定理 4.3 得到证明。□

我们考虑定理 2.9 中的情形。注意，正如我们在第 3.2 节中所提到的，定理 3.1 和推论 3.3 可以应用于映射 $\eta : \Sigma \to K\backslash M$。

我们通过应用下面的观察结果来证明定理 2.9：

引理 4.6. 对于 G 的一个非空子集 H，以下两个等式成立：

$$\Sigma(H) = \eta^{-1}(\mu(H))\ in\ \Sigma,$$
$$\mu(H) = \eta(\Sigma(H))\ in\ K\backslash M.$$

定理 2.9 的证明。定理 2.9 可直接由定理 4.5、引理 4.6，并应用定理 3.1 (3) 和推论 3.3 得出。

$$(\Omega, \Omega', \eta, C_1, C_2) = (\Sigma, K\backslash M, \eta, \Sigma(H_1), \Sigma(H_2)).$$

□

5. CAT(0) spaces and Property (S)

设 G 为一个群， M 为赋有等距传递 G-作用的适当度量空间。本节将从 CAT(0) 空间上的几何角度，给出度量 G-空间 M 具有第 1 节所述性质 (S) 的一个充分条件（见定理 5.2 和推论 5.4）。

5.1. CAT(0) 空间的记号。本小节沿用 [7]和 [9], ，固定 CAT(0) 空间的术语。

设 (Ω d) 为一个度量空间。对于 $-\infty < a < b < \infty$，等距映射 c : $[a, b] \to M$ 称为 Ω 中连接点 c(a) 和 c(b) 的测地线段。若 Ω 中任意两点都能由 Ω 内的一条测地线段连接，则称度量空间 (Ω d) 为测地度量空间。

设（Ω d）为一个测地度量空间。对于每个三元组（x_1、 x_2、 x_3） ∈Ω × Ω × Ω，三元组（x'_1、 x'_2、 x'_3） $\in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 称为（x_1、 x_2、 x_3）的欧氏比较三角形，如果对于任意i、 $j = 1$，2，3，都有 d（x_i、 x_j） $= d_{\mathbb{R}^2}$（x'_i、 x'_j），其中 $d_{\mathbb{R}^2}$表示欧氏平面 $\mathbb{R}^2$上的标准度量。注意，对于Ω中的任意点三元组（x_1、 x_2、 x_3），在 $\mathbb{R}^2$ 中，（x_1、 x_2、 x_3）的欧氏比较三角形除全等外唯一存在。若对于每个三元组（x_1、 x_2、 x_3） ∈Ω × Ω × Ω、连接 x_2 与 x_3的任意测地线段上的任意点 p，以及（x_1、 x_2、 x_3）的任意欧氏比较三角形（x'_1、x'_2、x'_3），以下不等式成立，则称测地度量空间（Ω d）为CAT(0)空间:

$$d(x_1, p) \leq d_{\mathbb{R}^2}(x'_1, p')$$

其中， p' 表示 $\mathbb{R}^2$ 中满足 $d_{\mathbb{R}^2}(x'_2, p') = d(x_2, p)$且$d_{\mathbb{R}^2}(x'_3, p') = d(x_3, p)$的唯一点。

回顾一下，度量空间（Ω d）称为

- 度量完备的，如果Ω中的任意柯西序列都有一个属于Ω的极限，并且
- 测地完备的，如果任意测地线段都可以延拓为Ω $\mathbb{R}$ →中的一条测地线。

对于局部紧 CAT(0) 空间（Ω d），以下结论是已知的（参见 [9]）：

- （Ω d）作为度量空间是适当的，当且仅当它是度量完备的，
- 若(Ω d)是测地完备的，则它是适当的。

若• (Ω d)同胚于一个有限维流形，则它是测地完备的（见 [7, 第二章命题5.1.2]）。

我们还按照第 II 章的含义，引入 (Ω d) 的无穷远边界 $\partial\Omega$。等距映射 $c\colon [0,\infty) \to \Omega$ 称为从点 $c(0) \in \Omega$ 出发的测地射线。若存在常数 $a \geq 0$，使得对于任意 $t \in [0,\infty)$，都有 $d(c(t)\ c'(t)) \leq a$，则称两条测地射线 $c, c'\colon [0,\infty) \to \Omega$ 渐近或等价。所有测地射线等价类的集合记为 $\partial\Omega$。测地射线 c 的等价类记作 $c(\infty) \in \partial\Omega$。注意，Ω 上的每个等距变换 γ 都会在集合 $\partial\Omega$ 上诱导一个自然的置换。特别地，群 G 对 Ω 的每个等距作用都可以扩展为集合 $\Omega^- := \Omega \sqcup \partial$ 上的 G-作用。

注 5.1. 边界 $\partial\Omega$ 及并集 $\Omega^- := \Omega \sqcup \partial\Omega$ 具有一些重要的拓扑和度量。例如，若 (Ω d) 是一个适当 CAT(0) 空间，并且我们考虑 $\Omega^- := \Omega \sqcup \partial$ Ω 上的锥拓扑，那么 Ω^- 给出了 Ω 的一种紧化。详情见 [7,第二章] 。

5.2. 度量齐性 G-空间具有性质 (S) 的一个充分条件。设 (Ω d) 是一个适当（因而度量完备的）CAT(0) 空间，配备了群 G 的等距作用，且 M 是 Ω 的一个闭 G-轨道。注意， M 本身关于 M 上 d 的限制是一个适当度量空间。

对于每个 $\xi \in \partial\Omega$，我们将 P_ξ 处 G 的各向同性子群记为 ξ，即

$$P_\xi := \{g \in G \mid g \cdot \xi = \xi\} \subset G.$$

下面的命题给出了此类度量 G-空间 M 具有性质 (S) 的一个充分条件：

定理 5.2。在上述设定中，我们假设以下条件成立：存在一个常数 $b \geq 0$，使得对于任意 p、$q \in M$，都存在一条从 p 出发、位于 Ω 中的测地射线 c，满足

$$d(q,c) := \min_{t\in[0,\infty)} d(q,c(t)) \leq b$$

且 $P_{c(\infty)}$ 在 M 上的作用是传递的。则 G-空间 M 具有性质 (S)。

我们通过应用以下引理来证明定理 5.2：

引理 5.3（[7, 命题 8.2 及其在第二章中的证明8]）。任取 $p, p' \in \Omega$，并任取一条从 p 出发、位于 Ω 中的测地射线 c。则存在唯一一条从 p' 出发、位于 Ω 中且与 c 渐近的测地射线 c'。此外，对于任意 $t \in [0,\infty)$，

$$d(c(t), c'(t)) \leq d(p, p').$$

定理 5.2 的证明。取满足假设的 $b \geq 0$。任取 $r \geq 0$。令 $\tau(r) := r + 2b$。任取满足 $d(p, p_0) \leq r$ 的 $p_0, p, q \in M$。我们的目标是证明存在 $g \in G$，使得 $g \cdot p = p_0$ 且$d(q, g \cdot q) \leq \tau(r) = r + 2b$。根据假设，可以找到并选取一条从 p 出发、位于 Ω 中的测地射线 c，使得 $d(q, c) \leq b$，且 $P_{c(\infty)}$-作用在 M 上是传递的。任取 $t_0 \in [0, \infty)$，使得 $d(q, c(t_0)) \leq b$，并取满足 $g \cdot p = p_0$ 的 $g \in P_{c(\infty)}$。令 $q_0 := g \cdot q \in M$。我们只需证明 $d(q, q_0) \leq r + 2b$。考虑由 p_0 在 Ω 中出发的测地射线 $g \cdot c$，其定义如下：

$$g \cdot c : [0, \infty) \to \Omega,\ t \mapsto g \cdot c(t).$$

由于 $g \in P_{c(\infty)}$，我们有 $g \cdot c$ 渐近于 c。因此，由引理 5.3，

$$d(c(t_0), (g \cdot c)(t_0)) \leq d(p, p_0) \leq r.$$

注意到

$$d((g \cdot c)(t_0), q_0) = d(c(t_0), q) \leq b.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} d(q, q_0) &\leq d(q, c(t_0)) + d(c(t_0), (g \cdot c)(t_0)) + d((g \cdot c)(t_0), q_0) \\ &\leq r + 2b. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

我们还得到以下推论：

推论 5.4. 设 M 是一个具有群 G 的等距传递作用的测地完备 CAT(0) 空间。假设对于每个 $\xi \in \partial M$，G 在 ξ 处的各向同性子群 P_ξ 在 M 上具有传递作用。那么，度量 G-空间 M 具有性质 (S)。

注 5.5. 应当指出，Caprace–Monod [10,定理 1.3] 证明了：对于一个配备群 G 的等距作用的测地完备 CAT(0) 空间 M，如果各向同性群 P_ξ 对任意 $\xi \in \partial M$ 在 M 上具有紧商作用，那么 M 与对称空间、欧几里得建筑和 Bass–Serre树的乘积等距同构。

6. Kobayashi's properness criterion from Theorem 2.9

本节中，我们论证 Kobayashi 的适当性判据（定理 2.5）可以通过将定理 2.9 应用于实线性约化李群在非紧黎曼对称空间上的等距作用来解释。

设 G 为实线性约化李群。我们将 G 实现为 $GL(N, \mathbb{R})$ 的一个转置稳定的闭子群，并且它具有有限个连通分支（$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）。$G$ 上的嘉当对合 θ 定义为：对于 $g \in G$，$\theta(g) := {}^t(g^{-1})$，其中 ${}^tA$ 表示矩阵 A 的转置。于是，G 的 θ-不动点子群 $K = G \cap O(n)$ 是 G 的极大紧子群。G 的李代数记为 $\mathfrak{g}$

我们将 $\mathfrak{g}$ 关于嘉当对合 θ 的嘉当分解写作 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$。注意，通过伴随表示（记作 $\mathrm{Ad}: G\to GL(\mathfrak{g})$），$K$ 作用于 $\mathfrak{p}$。

我们记 $M:=G/K$ 为 (G,K) 的齐性流形，其基点为 $*:=eK\in M=G/K$，其中 e 是 G 的单位元。从 G 到 $M=G/K$ 的商映射记为 $\pi: G\to M$。众所周知，M 在点 $*$ 处的切空间 T_*M 可以自然地与 $\mathfrak{p}$ 等同。我们在 $\mathfrak{p}$ 上固定一个 K-不变内积。于是，该内积定义了 M 上一个 G-不变的黎曼度量。众所周知，赋予此度量的 M 是一个没有紧因子的单连通黎曼全局对称空间（详见 [13, 第五章] ）。特别地，M 有如下直积分解

$$M=M_0\times M_-$$

其中 M_0 是一个欧几里得空间，而 M_- 是一个非紧型黎曼全局对称空间。注意，对于欧几里得空间 M_0 上任意的平移 t，以及任意的 $h\in \mathrm{Isom}_0(M_-)$，都可以找到 $g\in G$，使得 g 在 $M=M_0\times M_-$ 上定义了等距变换 (t,h)，其中 $\mathrm{Isom}_0(M_-)$ 表示 M_- 的全等距群的恒等分支。

由于 M_0 和 M_- 都是测地完备 CAT(0) 空间（见 [9]），我们的 $M=M_0\times M_-$ 也是测地完备 CAT(0) 空间。我们用 $\partial M=\partial M_0\times \partial M_-$ 表示 M 的无穷远边界（∂M 的定义见第 5.1 节）。那么，对于每个 $\xi=(\xi_0,\ \xi_-)\in\partial M=\partial M_0\times\partial M_-$，不动点子群 $P_\xi:=\{g\in G\mid g\cdot\xi=\xi\}$ 在 M 上传递作用。事实上，在欧几里得空间 M_0 上，平移群在 M_0 上传递作用，并逐点固定边界 ∂M_0；而在 M_- 上，连通线性半单李群 $\mathrm{Isom}_0(M_-)$ 在 ξ_- 处的不动点子群是一个抛物子群，并在 M_- 上传递作用（细节见 [6, §I.1 和 I.2] ）。因此，根据推论 5.4，我们的 G 空间 M 具有性质 (S)。

此外，取 $\mathfrak{p}$ 的极大阿贝尔子空间 $\mathfrak{a}$，并考虑由 $\mathfrak{p}$ 上固定的内积在 $\mathfrak{a}$ 上诱导出的内积。

我们定义有限群 W 为

$$\begin{aligned} N_K(\mathfrak{a}) &:= \{k\in K\mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\}\subset K,\\ Z_K(\mathfrak{a}) &:= \{k\in K\mid \mathrm{Ad}(k)X=X \text{ for each } X\in\mathfrak{a}\}\subset N_K(\mathfrak{a}),\\ W &:= N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

于是，W 可以视为内积空间 $\mathfrak{a}$上的正交群$O(\mathfrak{a})$的有限子群。注意，如果 G 包含于连通复李群 $G_{\mathbb{C}}$中，那么上述定义的有限群 W 与$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ 的限制根系的魏尔群重合。

我们定义 $A := \exp(\mathfrak{a}) \subset G$，并考虑 M中的连通、闭合、全测地平坦子流形 $\pi(A) = A \cdot *$。注意，双射

$$\iota : \mathfrak{a} \to \pi(A),\ X \mapsto \exp(X) \cdot *$$

是等距的，因此有限群 W 也等距地作用于 $\pi(A)$上。众所周知（参见 [34, 例 2.1 (iv)]），$\pi(A)$ 是符合第 3.2 节最后一部分意义下的截面，并且广义 Weyl 群与上面定义的有限群 W 重合。

因此，对截面 $\Sigma = \pi(A) \cong \mathfrak{a}$ 应用定理 2.9，即可得到定理 2.5。注意，对于局部紧加法群 $\mathfrak{a}$ 中的非空子集对 (C_1, C_2)，当且仅当 $C_1 \sim C_2$；同样，对于适当度量空间 $\mathfrak{a}$ 中的非空子集对 (C_1, C_2)，当且仅当 (C_1, C_2) 在群 $\mathfrak{a}$ 中是适当的，当且仅当 (C_1, C_2) 在适当度量空间 $\mathfrak{a}$ 中是 HBI。

Acknowledgements.

第二作者在 Toshiyuki Kobayashi 教授的指导下获得博士学位，并学到了许多关于齐性空间上适当作用的知识。若没有他的指导，我们的研究便不可能完成。我们还要感谢 Hiroshi Tamaru、Akira Kubo、Koichi Tojo、Kazuki Kannaka 和 Kaede Aoyama 提供的许多宝贵意见。

第一作者获得了 JST SPRING 的资助，项目编号为 JP- MJSP2132。第二作者获得了 JSPS 科学研究补助金的资助，项目编号为 JP20K03589、JP20K14310 和 JP22H0112。

References

[1] Baklouti Ali、Bejar Souhail 和 Fendri Ramzi，《某些紧扩张上的适当作用判据及其应用》，Internat. J. Math. Online First: 2350010（23 页）（2023）。
[2] Ali Baklouti 和 Fatma Khlif，《适当作用与某些指数可解齐性空间》，Internat. J. Math. 16（2005），第 9 期，941–955。MR 2180060[3] ———，《可解齐性空间上的弱真作用》，Internat. J. Math. 18（2007），第 8 期，903–918。MR 2339576[4] Yves Benoist，《约化齐性空间上的适当作用》，Ann. of Math. (2) 144（1996），第 2 期，315–347。MR 1418901[5] Maciej Boche´nski 和 Aleksy Tralle，《Clifford-Klein形与 a-双曲秩》，国际数学研究通知 IMRN（2015），第 15 期，6267–6285。MR 3384476[6] Armand Borel 和 Lizhen Ji，《对称空间和局部对称空间的紧化》，Mathematics: Theory & Applications，Birkh¨auser Boston, Inc.，Boston, MA，2006。MR 2189882[7] Martin R. Bridson 和 Andr´e Haefliger，《非正曲率度量空间》，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]，第 319 卷，Springer-Verlag，Berlin，1999。MR 1744486[8] E. Calabi 和 L. Markus，《相对论空间形式》，Ann. of Math. (2) 75（1962），63–76。MR 133789

[9] Pierre-Emmanuel Caprace，《适当 CAT(0) 空间及其等距群讲义》，《几何群论》，IAS/Park City Math. Ser.，第 21 卷，Amer. Math. Soc.，Providence, RI，2014，第 91–125 页。MR 3329726[10]Pierre-Emmanuel Caprace 和 Nicolas Monod，《非正曲率空间的等距群：结构理论》，J. Topol. 2（2009），第 4 期，661–700。MR 2574740[11] Claudio Gorodski，《极作用专题》，arXiv 预印本 arXiv:2208.03577（2022）。[12] Fran¸cois Gu´eritaud 和 Fanny Kassel，《几何有限双曲流形上的最大伸展层理》，Geom. Topol. 21（2017），第 2 期，693–840。MR 3626591[13] Sigurdur Helgason，《微分几何、李群与对称空间》，Graduate Studies in Mathematics，第 34 卷，American Mathematical Society，Providence, RI，2001；1978 年原版的修订重印本。MR 1834454[14] Kazuki Kannaka，《反德西特 3-流形上广义 Poincar´e 级数的线性无关性》，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 17（2021），论文编号 042，15 页。MR 4247755[15] ———，《反德西特 3-流形上的轨道计数与离散谱的定量研究》，日本学士院院刊A辑数学科学 97（2021），第 10 期，93–97。MR 4355065[16] Fanny Kassel，《余秩一约化齐性空间上的适当作用》，J. Lie Theory 18（2008），第 4 期，961–978。MR 2523148[17] ———，《约化齐性空间上适当作用的变形》，Math. Ann. 353（2012），第 2 期，599–632。MR 2915550[18] Fanny Kassel 和 Toshiyuki Kobayashi，《非黎曼局部对称空间的 Poincar´e 级数》，Adv. Math. 287（2016），123–236。MR 3422677[19] Toshiyuki Kobayashi，《约化型齐性空间上的适当作用》，Math. Ann. 285（1989），第 2 期，249–263。MR 1016093[20] ———，《作用于约化型齐性空间的不连续群》，《李群与李代数的表示理论》（Fuji-Kawaguchiko，1990），World Sci. Publ.，River Edge, NJ，1992，第 59–75 页。MR 1190750[21] ———，《约化型齐性空间存在紧克利福德-克莱因型的必要条件》，Duke Math. J. 67（1992），第 3 期，653–664。MR 1181319[22] ———，《约化群齐性空间上适当作用的判据》，J. Lie Theory 6（1996），第 2 期，147–163。MR 1424629[23] ———，《不定黎曼齐性流形的紧克利福德-克莱因型的变形》，Math. Ann. 310（1998），第 3 期，395–409。MR 1612325[24] ———，《非黎曼齐性空间的不连续群》，Mathematics unlimited—2001 and beyond，Springer，Berlin，2001，第 723–747 页。MR 1852186[25]Toshiyuki Kobayashi，《关于约化齐性空间的猜想》，arXiv:2204.08854v1，2022。[26] Toshiyuki Kobayashi 和 Taro Yoshino，《对称空间的紧克利福德-克莱因型——再探》，Pure Appl. Math. Q. 1（2005），第 3 期，特刊：纪念 Armand Borel。第 2 部分，591–663。MR 2201328[27] Ronald L. Lipsman，《适当作用与紧性条件》，J. Lie Theory 5（1995），第 1 期，25–39。MR 1362008[28] Yosuke Morita，《某些非约化子群的嘉当投影与齐性空间上的适当作用》，Transformation Groups（2022），1–23。

[29]Salma Nasrin，二步幂零李群的适当作用判据，东京数学杂志 24（2001），第 2 期，535–543。MR 1874988[30] Hee Oh 和 Dave Witte，SO(2, n) 齐性空间的紧克利福德-克莱因型新例子，国际数学研究通知（2000），第 5 期，235–251。MR 1747110[31] Takayuki Okuda，具有适当$SL(2,\mathbb{R})$-作用的半单对称空间的分类，微分几何杂志 94（2013），第 2 期，301–342。MR 3080484[32] Richard S. Palais 和 Chuu-Lian Terng，典范形式的一般理论，美国数学会汇刊 300（1987），第 2 期，771–789。MR 876478[33] Fran¸cois Salein，三维奇异反德西特簇，傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）50（2000），第 1 期，257–284。MR 1762345[34] Gudlaugur Thorbergsson，变换群与子流形几何，数学与应用报告（第 7 辑）25（2005），第 1 期，1–16。MR 2142121[35] Koichi Tojo，具有标准紧克利福德-克莱因型的不可约对称空间的分类，日本学士院院刊A辑数学科学 95（2019），第 2 期，11–15。MR 3905124[36] Taro Yoshino，对 $\mathbb{R}^4$ Lipsman 猜想的一个解，国际数学研究通知（2004），第 80 期，4293–4306。MR 2126626[37] ———，对 Lipsman 猜想的一个反例，国际数学杂志 16（2005），第 5 期，561–566。MR 2141321[38] ———，三步幂零李群的适当作用判据，国际数学杂志 18（2007），第 7 期，783–795。MR 2337155[39] ———，卡当运动群齐性空间上的适当作用判据，国际数学杂志 18（2007），第 3 期，245–254。MR 2314610[40] ———，不连续对偶定理，国际数学杂志 18（2007），第 8 期，887–893。MR 2339574

(K. Ogawa) Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, 1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima City, Hi-roshima, 739-8526, Japan.
电子邮箱地址：knt-ogawa@hiroshima-u.ac.jp

（T. Okuda） Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, 1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima City, Hi-roshima, 739-8526, Japan.
电子邮箱地址：okudatak@hiroshima-u.ac.jp