arXiv:2304.14128v1 [math.CT] 27 Apr 2023

理想与连续性在quantaloid-富集范畴中

MIN LIU、SHENGWEI HAN 和 ISAR STUBBE

Abstract. 我们研究理想，以及，quantaloid-富集范畴（$\mathcal{Q}$——简称"多值且多类型"的域理论的一种推广。抽象而言，对于任意(饱和的) 类 Φ 预层，我们定义并研究Φ-范畴的连续性 $\mathcal{Q}$。具体来说，我们计算了这类预层的饱和类——平坦理想类、不可约理想类和锥形理想类——它们是域理论中理想的真推广。

1. 引言

域理论[1, 14] 源于 Dana Scott 的研究 [41, 42] ，作为编程语言语义学的形式化基础。通过研究偏序集的特殊性质，它以非常一般的方式形式化了逼近和收敛的直观概念。自 America 和 Rutten 的[4] 以及 Smyth 的 [47] 早期工作以来，他们在度量空间范畴中求解递归域方程，已有[40, 13, 56, 57, 19, 32, 33, 60] 若干其他论文撰写出来以比较并统一这两种偏序与度量求解域方程的方法。由此产生了所谓的定量域理论：通常以量子格富集范畴取代偏序集或度量空间，并为其发展逼近与收敛的一般概念。本文希望为这一研究方向作出贡献，将量子格进一步替换为 quantaloid。

而 *quantale* 是对称幺半闭范畴 **Sup**中的一个幺半群，其中对象为完备格，态射为保上确界态射；而 量化范畴 是一个在 **Sup** 中富集的范畴。 将 一个量化范畴 $\mathcal{Q}$ 视为（局部偏序的）双范畴 [8], ，研究在 $\mathcal{Q}$ [58, 48, 49, 50, 51] 中富集的范畴、函子和分配子便顺理成章。作为双范畴中富集范畴的一个特例，quantaloid-富集范畴具有特殊性质和重要应用。Walters [59] 利用 $\mathcal{Q}$-范畴来描述小位点上的层的拓扑斯 （另见 [16]），而 Rosenthal [38, 39] 将 $\mathcal{Q}$-范畴与自动机理论联系起来。 近来，（多值）拓扑学概念也已在量化范畴富集范畴的背景下得到形式化 [10, 21, 26, 29, 43, 44, 45, 46]。

由于量子格是恰好是具有单个对象的量化范畴，因此，完备剩余格和框架都是特殊的量化范畴。因此，量子格富集范畴 [57, 27]和 L序集[7, 12, 62] 都是特殊的量子格富集范畴。量子格富集范畴的理论可以看作是以下理论的多类型扩展：

通讯作者：Min Liu 2020年数学学科分类：18B35, 18D20, 06F07。关键词和短语：量化范畴，富集范畴，域理论，模糊序。 © Min Liu、Shengwei Han 和 Isar Stubbe，2023年。允许复制供私人使用。

量子格富集范畴。这使我们能够解释一些无法在量子格富集范畴框架中处理的结构。例如，偏度量空间和概率偏度量空间可以被视为量化范畴富集范畴[54, 22, 15]，，然而它们不可能是量子格富集范畴，因为无法仅使用一种类型来处理它们。

在 [52], Stubbe 将 $\mathcal{Q}$-范畴研究为一种关键的数学结构，用于所谓的动态逻辑，作为计算机科学和物理学中动态现象的共同数学基础。在该论文中，完全连续的余完备 $\mathcal{Q}$-范畴被研究为“动态域”。然而，正如 Stubbe 所声称的那样，[52], 完全连续的余完备 $\mathcal{Q}$-范畴是非常强的结构。可以认为，在放弃有向性的概念后，它们在计算中的实用性相当有限。因此，研究如何重新引入有向性的概念，无疑是一个有趣的课题。在过去十年中，该领域的研究进展缓慢，且大多局限于框架富集范畴或量子格富集范畴。

在本文中，我们通过 [52]定义相对于任意（饱和的）预层类的 $\mathcal{Q}$-范畴的连续性，进一步发展了 Stubbe 的工作。我们提出了若干饱和预层类，它们是域理论中理想概念的自然推广，（偏序的）从而建立了基于 $\mathcal{Q}$-范畴的定量域理论，使我们能够将量子格富集范畴的方法与偏度量空间的方法统一到同一个框架中。

本文内容安排如下。第 2 节列出有关量化范畴和 quantaloid-富集范畴的一些预备概念与结果。第 3 节基于预层的一个（饱和的）类 Φ，研究 Φ-范畴的余完备性 $\mathcal{Q}$。第 4 节给出预层的三个饱和类：所有不可约理想、所有平坦理想以及所有锥形理想。第 5 节定义并研究 $\mathcal{Q}$-范畴中的 Φ-连续性，将其作为域理论中连续性的推广，并计算若干例以说明该推广并非平凡。第 6 节定义并研究 $\mathcal{Q}$-范畴中的 Φ-代数性。最后在第 7 节给出结论。

2. 关于 quantaloid-富集范畴的预备知识

一个 *quantaloid* $\mathcal{Q}$ [39] 是一个在对称幺半闭范畴**Sup**（由完备格及保持任意上确界的态射组成）中富集的范畴。用初等术语来说，量化范畴 $\mathcal{Q}$ 是一个范畴，其中每个同态-集合 $\mathcal{Q}(p,q)$ 都是完备格，并且对于所有 $u, u_i \in \mathcal{Q}(p,q)$ 以及所有 $v, v_j \in \mathcal{Q}(q,r)$，

$$v \circ (\bigvee_i u_i) = \bigvee_i (v \circ u_i) \quad \text{and} \quad (\bigvee_j v_j) \circ u = \bigvee_j (v_j \circ u).$$

给定任意箭头 $u: p \to q$ 以及 r 中的对象 $\mathcal{Q}$，两者 $- \circ u: \mathcal{Q}(q,r) \to \mathcal{Q}(p,r)$ 和 $u \circ -: \mathcal{Q}(r,p) \to \mathcal{Q}(r,q)$ 都保持完备格之间的上确界，因而各自具有一个右伴随；我们将它们分别记为 $(- \circ u) \dashv (- \swarrow u)$ 和 $(u \circ -) \dashv (u \searrow -)$。

接下来，我们将回顾一些关于量化范畴-富集范畴的基本事实，这些事实来自 [49]。从现在起，$\mathcal{Q}$ 始终表示一个小量化范畴，而 $\mathcal{Q}_0$ 表示其对象的集合。

一个 $\mathcal{Q}$-typed set X 是一个（小）集合 X，连同一个映射 $t: X \to \mathcal{Q}_0: x \mapsto tx$，该映射将每个元素 $x \in X$ 分配给其类型 $tx \in \mathcal{Q}_0$。在全文中，我们使用 tx 表示 $\mathcal{Q}$-typed set X 中元素 x 的类型。

2.1. Definition.一个 *$\mathcal{Q}$-enriched category* [1]（或 *$\mathcal{Q}$-category* 简称） $\mathbb{A}$ 由一个 *$\mathcal{Q}$-typed set* $\mathbb{A}_0$ 以及 同态箭头 $\mathbb{A}(a', a)$ 组成： $ta' \to ta$ 属于 $\mathcal{Q}$ 对所有 a， $a' \in \mathbb{A}_0$ 满足

$$\mathbb{A}(a', a'') \circ \mathbb{A}(a, a') \leq \mathbb{A}(a, a'') \quad \textit{and} \quad 1_{ta} \leq \mathbb{A}(a, a)$$

对所有 a， a'， $a'' \in \mathbb{A}_0$。

在 $\mathbb{A}_0$ 上存在一个自然的底层预序，其定义 为

$$x \leq y \iff tx = ty \text{ and } 1_{tx} \leq \mathbb{A}(x, y).$$

当 $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 在 $(\mathbb{A}_0, \leq)$ 中均成立时，我们记为 $x \cong y$，并称它们是同构元素；当 $x \cong y$ 总是蕴含 $x = y$时，称 $\mathbb{A}$ 为骨架的。一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个满 $\mathcal{Q}$-子范畴，如果对于所有 $x, y \in \mathbb{B}_0$， $\mathbb{B}_0 \subseteq \mathbb{A}_0$ 且 $\mathbb{B}(x, y) = \mathbb{A}(x, y)$；此时，只要 $\mathbb{A}$ 是骨架的， $\mathbb{B}$ 也总是骨架的。

2.2. Definition.一个 $\mathcal{Q}$-函子 $F: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 范畴之间的 $\mathcal{Q}$-范畴是一个保持类型的映射$F: \mathbb{A}_0 \to \mathbb{B}_0$ 满足

$$\mathbb{A}(a', a) \leq \mathbb{B}(Fa', Fa)$$

对所有 a、 $a' \in \mathbb{A}_0$.

当上述定义中的不等式实际上是等式时（对所有 a、 $a' \in \mathbb{A}_0$）， $\mathcal{Q}$-函子 $F: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 是全忠实的。

赋予 $\mathcal{Q}$-函子逐点序，可定义为

$$F \leq G : \mathbb{A} \to \mathbb{B} \iff Fx \leq Gx \text{ for all } x \in \mathbb{A}_0,$$

再加上显然的复合与恒等映射， $\mathcal{Q}$-范畴和 $\mathcal{Q}$-函子构成一个 2-范畴 Cat($\mathcal{Q}$)。按照一般的 2-范畴原理，Cat($\mathcal{Q}$) 中的 $\mathcal{Q}$-函子 $F: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 称为 $\mathcal{Q}$-函子 $G: \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ 的左伴随（此时 G 称为 F的右伴随），记作 $F \dashv G$，若满足 $1_{\mathbb{A}} \leq G \circ F$和 $F \circ G \leq 1_{\mathbb{B}}$（或者等价地，对所有 $x \in \mathbb{A}_0, y \in \mathbb{B}_0$，都有 $\mathbb{B}(Fx, y) = \mathbb{A}(x, Gy)$。）若存在一个 $\mathcal{Q}$-函子 $G: \mathbb{B} \to \mathbb{A}$，使得 $GF \cong 1_{\mathbb{A}}, FG \cong 1_{\mathbb{B}}$，则称 $\mathcal{Q}$- 函子 $F: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 为 $\mathcal{Q}$- 范畴的等价；此时记作 $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$。

[1]这里给出的 $\mathcal{Q}$-范畴的定义不同于 Stubbe 在一系列论文中所采用的定义[49, 50, 52, 54] （但与论文 [26, 43, 55] 中的定义一致），区别在于同态箭头方向的选择。参见 [49, 命题 3。8]: 本文所称的 $\mathcal{Q}$-范畴恰好是 Stubbe 所称的$\mathcal{Q}^{op}$-范畴 [49] （而后者本身是 $\mathcal{Q}$-范畴术语中所谓 [49] 的“对偶”）。因此，本文中 $\mathcal{Q}$-分配子的方向（见下文）也与 [49] 中的方向相反。除去这种对偶性，本文介绍的所有概念（预层、余极限等）都与 [49] 中的概念一致。

2.3. Definition. A $\mathcal{Q}$-分配子 $\phi\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$ 两个 $\mathcal{Q}$-范畴之间的矩阵 由 $\mathcal{Q}$-箭头 $(\phi(x, y)\colon tx \to ty)_{x\in\mathbb{A}_0,\ y\in\mathbb{B}_0}$ 构成，并满足

$$\mathbb{B}(y', y) \circ \phi(x', y') \circ \mathbb{A}(x, x') \leq \phi(x, y)$$

对于所有 x、$x' \in \mathbb{A}_0$ 以及 y、$y' \in \mathbb{B}_0$。

Two 这样的 $\mathcal{Q}$-分配子 $\phi\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$ 和 $\psi\colon \mathbb{B}\nrightarrow\mathbb{C}$ 按以下公式进行复合

$$(\psi \circ \phi)(x, z) = \bigvee_{y\in\mathbb{B}_0} \psi(y, z) \circ \phi(x, y).$$

$\mathbb{A}$ 上的恒等 $\mathcal{Q}$-分配子由同态箭头 $\mathbb{A}\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{A}$给出，并且与从 $\mathcal{Q}$、 $\mathcal{Q}$-范畴和 $\mathcal{Q}$-分配子继承的逐点局部序一起构成一个（大型）量化范畴 $\mathbf{Dist}(\mathcal{Q})$。这尤其意味着，$\mathbf{Dist}(\mathcal{Q})$本身是一个 2-范畴，因此我们可以以显然的方式讨论左/右伴随 $\mathcal{Q}$-分配子：对于 $\phi\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$ 和 $\psi\colon \mathbb{B}\nrightarrow\mathbb{A}$，当且仅当 $\mathbb{A} \leq \psi \circ \phi$和 $\phi \circ \psi \leq \mathbb{B}$时，我们记作 $\phi \dashv \psi$。但是，量化范畴 $\mathbf{Dist}(\mathcal{Q})$ 还是“闭的”，即 $\phi\circ -$和 $-\circ\phi$都有右伴随（分别记作 $\phi \searrow -$ 和 $- \swarrow \phi$）。这些与 $\mathcal{Q}$ 中复合的伴随之间的关系如下：对于任意 $\phi\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$、 $\gamma\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{C}$ 和 $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$,

$$(\phi \searrow \psi)(c, a) = \bigwedge_{b\in\mathbb{B}_0} \phi(a, b) \searrow \psi(c, b) \quad \text{and} \quad (\phi \swarrow \gamma)(c, b) = \bigwedge_{a\in\mathbb{A}_0} \phi(a, b) \swarrow \gamma(a, c).$$

每个 $\mathcal{Q}$-函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 确定 $\mathcal{Q}$-分配子 $F_\natural\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$ 和 $F^\natural\colon \mathbb{B}\nrightarrow\mathbb{A}$ 通过

$$F_\natural(x, y) = \mathbb{B}(Fx, y) \quad \text{and} \quad F^\natural(y, x) = \mathbb{B}(y, Fx),$$

它们在 $F_\natural \dashv F^\natural$ 中形成伴随关系 $\mathbf{Dist}(\mathcal{Q})$。因此 我们有

$$F_\natural \searrow - = F^\natural \circ - \quad \text{and} \quad - \swarrow F^\natural = - \circ F_\natural. \tag{2.1}$$

特别地，$(1_\mathbb{A})_\natural = (1_\mathbb{A})^\natural = \mathbb{A}$，对于两个 $\mathcal{Q}$-函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 和 $G\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$，我们有

$$(G \circ F)_\natural = G_\natural \circ F_\natural \quad \text{and} \quad (G \circ F)^\natural = F^\natural \circ G^\natural. \tag{2.2}$$

也就是说，赋值 $F \mapsto F_\natural$ 和 $F \to F^\natural$ 从 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 到 $\mathbf{Dist}(\mathcal{Q})$ 是（协变地和逆变地）2-函子性的；因此它们也将伴随函子映射为伴随分配子。不过请注意， $F_\natural = F'_\natural$（或 $F^\natural = F'^\natural$）仅蕴含 $F \cong F'$，而不一定蕴含 $F = F'$。

对于一个y $\mathcal{Q}$-分配子 $\phi\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$ 和 $\mathcal{Q}$-函子 $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{A}$， $G\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{B}$，我们有 e

$$\phi(F-, G-) = G^\natural \circ \phi \circ F_\natural. \tag{2.3}$$

对于每个 $q \in \mathcal{Q}_0$，我们将 $\{q\}$ 记作具有单个 $\mathcal{Q}$-范畴对象 q的离散 $tq = q$，其中 $\{q\}(q,\ q) = 1_q$.

2.4. Definition.一个类型为 q 、定义在$\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 上的（逆变）预层（也称为权）是一个 $\mathcal{Q}$-分配子 $\mu\colon \mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$。 $\mathbb{A}$上所有预层组成的 $\mathcal{Q}$-类型集合构成一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathcal{P}\mathbb{A}$，其同态箭头为 $\mathcal{P}\mathbb{A}(\mu,\mu') = \mu' \swarrow \mu$，对所有 $\mu,\mu' \in (\mathcal{P}\mathbb{A})_0$.

对偶地， $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathcal{P}^\dagger\mathbb{A}$ 上的协变预层 (也称为余预层) [49, 43] 具有 $\mathbb{A}$-分配子 $\mathcal{Q}$: λ作为对象，$\{q\}\nrightarrow\mathbb{A}$ 而 $\mathcal{P}^\dagger\mathbb{A}(\lambda,\lambda') = \lambda' \searrow \lambda$作为同态箭头。注意， $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 和 $\mathcal{P}^\dagger\mathbb{A}$ 都是骨架的 $\mathcal{Q}$-范畴。

在 (协变) Yoneda 嵌入 于一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 上是 $\mathcal{Q}$-函子 $Y_\mathbb{A}$： $\mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{A}$它将每个映射到可表预层 $\mathbb{A}(-,x)$： $\mathbb{A}\nrightarrow\{tx\}$。米田引理 [49,命题 63] 指出：

$$\mathcal{P}\mathbb{A}(Y_\mathbb{A}x,\mu) = \mu(x) \tag{2.4}$$

for 所有 $x\in\mathbb{A}_0, \mu\in(\mathcal{P}\mathbb{A})_0$。 对于两个可表预层，这意味着

$$\Big((Y_\mathbb{A})^\natural \circ (Y_\mathbb{A})_\natural\Big)(x,y) = \mathcal{P}\mathbb{A}(Y_\mathbb{A}x, Y_\mathbb{A}y) = (Y_\mathbb{A}y)(x) = \mathbb{A}(x,y) \tag{2.5}$$

对于所有 $x,y\in\mathbb{A}_0$。也就是说，Yoneda 嵌入是全忠实的。

每个 $\mathcal{Q}$函子 F： $\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 确定一对 $\mathcal{Q}$函子，

$$F^\to : \mathcal{P}\mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{B} : \mu\mapsto \mu\circ F^\natural \quad \text{and} \quad F^\leftarrow : \mathcal{P}\mathbb{B}\to\mathcal{P}\mathbb{A} : \lambda\mapsto \lambda\circ F_\natural \tag{2.6}$$

使得 $F^\to \dashv F^\leftarrow$在$\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 中。对于 F： $\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 以及 G： $\mathbb{B}\to\mathbb{C}$，我们有

$$(G\circ F)^\to = G^\to\circ F^\to \quad \text{and} \quad (G\circ F)^\leftarrow = F^\leftarrow\circ G^\leftarrow. \tag{2.7}$$

2.5. Definition. 给定一个 $\mathcal{Q}$函子 F： $\mathbb{B}\to\mathbb{A}$ 以及一个 $\mathcal{Q}$分配器 θ： $\mathbb{B}\nrightarrow\mathbb{C}$，由加权的 F余极限 θ是（只要它存在）一个 $\mathcal{Q}$函子$\mathrm{colim}(\theta, F)$： $\mathbb{C}\to\mathbb{A}$ 使得

$$\mathrm{colim}(\theta,F)_\natural = F_\natural \swarrow \theta.$$

该余极限被函子 G保留，当且仅当： $\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$如果 $\mathrm{colim}(\theta, G\circ F)$（存在且）等于$G\circ \mathrm{colim}(\theta, F)$。

余极限不一定唯一，但总是本质唯一的（在同构意义下）。

对于预层 μ： $\mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$ 以及一个 $\mathcal{Q}$-函子 F： $\mathbb{A}\to\mathbb{B}$，$\mathrm{colim}(\mu, F)$ 原则上是一个从 $\{q\}$到 $\mathbb{B}$的$\mathcal{Q}$-函子。但这样的 $\mathcal{Q}$-函子只是选取了 $\mathbb{B}$中一个 q 类型的对象。因此，我们通常会把 $\mathrm{colim}(\mu, F)$ 直接看作对象 [49]。特别地，给定 $\mu\in(\mathcal{P}\mathbb{A})_0$, ，如果 $\mathrm{colim}(\mu, 1_\mathbb{A})$ 存在于 $\mathbb{A}$中，我们就称其为 μ的“上确界”，并将其记作 $\sup(\mu)$。因此，我们可以将 $\sup(\mu)$ 视为 $\mathbb{A}$ 中一个类型为 $t\mu$的对象，它在同构意义下确定，并满足

$$\mathbb{A}(\sup(\mu),-) = (1_\mathbb{A})_\natural \swarrow \mu = \mathbb{A}\swarrow\mu.$$

由于 $F_\natural \swarrow \mu = (1_\mathbb{A}\circ F)_\natural \swarrow \mu = ((1_\mathbb{A})_\natural \circ F_\natural) \swarrow \mu = (1_\mathbb{A})_\natural \swarrow F^\natural \swarrow \mu$，由预层 $\mu\in(\mathcal{P}\mathbb{A})_0$ 加权的 $\mathcal{Q}$-函子 F: $\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 的余极限是 $\mu\circ F^\natural$的上确界。此外，直接验证可知，由一个 $\mathcal{Q}$-分布 θ： $\mathbb{B}\nrightarrow\mathbb{C}$ 加权的 F： $\mathbb{B}\to\mathbb{A}$ 的余极限是一个 $\mathcal{Q}$-函子，它将每个对象 $c\in\mathbb{C}_0$ 映射为$\theta(-,c)\circ F^\natural$的上确界，即 $\mathrm{colim}(\theta, F)(c) = \sup(\theta(-,c)\circ F^\natural)$。因此，一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$具有所有加权余极限，当且仅当每个 $\mu\in(\mathcal{P}\mathbb{A})_0$ 都有一个上确界。

2.6. Definition. [49, 26] 如果一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 满足以下任一等价条件，则称其为余完备：

(1) $\mathbb{A}$ 具有所有加权余极限；(2) 每个 $\mu \in (\mathcal{P}\mathbb{A})_0$ 都有一个上确界；(3) Yoneda 嵌入 $Y_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 在 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 中有一个左伴随 $\sup\colon \mathcal{P}\mathbb{A} \to \mathbb{A}$。

富集 $\mathcal{Q}$-范畴的完备性是对偶地定义的。一个 $\mathcal{Q}$-范畴是完备的，当且仅当它是余完备的，见 [49, 命题5.10。]。范畴 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 上的预层 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 总是余完备的 [49, 命题6.4。]：对于 $\Psi \in (\mathcal{P}(\mathcal{P}\mathbb{A}))_0$ 可以验证

$$\sup(\Psi) = Y_{\mathbb{A}}^{\leftarrow}(\Psi) = \Psi \circ (Y_{\mathbb{A}})_{\natural}. \tag{2.8}$$

注意，这是一个等式（而不仅仅是一个同构），因为 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 是骨架的。

2.7. Example. （1）一个含幺量子格 $(Q, \bigvee, \cdot, 1)$ 恰好是一个含有单个对象的量子格范畴的同态格。若 $\mathcal{Q}$ 是（单对象悬挂的）一个含幺交换量子格，那么 $\mathcal{Q}$-范畴恰好是 [27, 57]中所研究的量子格富集范畴。由于完备剩余格 L 是一个交换的积分量子格，我们看到L-序集（按照 Bˇelohl´avek 和 Fan 的意义）[7, 12, 62] 是特殊的 $\mathcal{Q}$-范畴。因此， $\mathcal{Q}$-范畴可以被解释为多类型框架下量子格富集范畴的一种推广。

(2) 设 $\mathbf{2}$ 为二元布尔代数。那么，$\mathbf{2}$-范畴就是预序集，$\mathbf{2}$-分配子就是理想关系，$\mathbf{2}$-函子就是保序映射，而预层就是下集。因此， $\mathcal{Q}$-范畴可解释为（预）序集在多值、多类型框架下的推广。若 $\mathbb{A}$ 是一个$\mathbf{2}$-范畴，那么范畴 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 就是 $\mathbb{A}$上所有下集按包含序构成的偏序集。

(3) 设 $[0,\infty]_+ = ([0,\infty], \bigwedge, +, 0)$ 为一个量子，其底层完备格是扩展非负实数轴 $[0,\infty]$，并赋予序 $\geq$。集合 上的偏度量[32, 60] 是集合 X 到 $p\colon X \times X \to [0,\infty)$ 的映射，并且对所有 x， y， $z \in X$，

(i) $p(x,y) = p(y,x)$（对称性）。(ii) $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ 蕴含 $x = y$ (T_0 分离公理)。(iii) $p(x,y) \leq p(x,z) - p(z,z) + p(z,y)$（尖锐三角不等式）。(iv) $p(x,x) \leq p(x,y)$（小自距离——“小的自距离”）

如果我们放弃公理 (i) 和 (ii)，并将 p 的取值范围扩展为 $[0,+\infty]$，那么 p 被称为广义偏度量 [34]。令 $\mathsf{D}[0,\infty]_+$ 表示由 对角线 构成的量化范畴 $[0,\infty]_+$。值得注意的是，（广义）偏度量空间恰好是 $\mathsf{D}[0,\infty]_+$-范畴，参见 [22, 34]，，尤其是 [54, 例 2。14] 以及 [18]。

(4) 对于量化范畴 $\mathcal{Q}$ 中的任意对象 A，我们将 $\mathcal{Q}^A$ 记作单对象 $\mathcal{Q}$-范畴 $\{A\}$上的反变预层所构成的 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathcal{P}\{A\}$。如同 [49, 例 3.9], 中一样，我们可以明确描述 $\mathcal{Q}^A$：集合 $(\mathcal{Q}^A)_0$ 包含所有以 A 为定义域的 $\mathcal{Q}$-箭头； $f\colon A \to X$ 的类型是其余域 X；并且对于 $f\colon A \to X$ 和 $g\colon A \to Y$，有 $(\mathcal{Q}^A)(g,f) = f \swarrow g$ 属于 $\mathcal{Q}(Y,X)$。作为预层范畴，$\mathcal{Q}^A$ 是（完备且）余完备的。具体而言，对于 $\mu \in (\mathcal{P}\mathcal{Q}^A)_0$，，由（2.6）可得 $\sup(\mu) = \mu(1_A)$，因为 Yoneda 嵌入 $Y_{\{A\}}\colon \{A\} \to \mathcal{P}\{A\} = \mathcal{Q}^A$ 将 $\{A\}$ 的单个对象映射到 1_A。

注 意，如果 $\mathcal{Q}$ 含有多于一个元素，那么 $\mathcal{Q}^A$ 是一个 $\mathcal{Q}$-范畴，无法纳入量子格富集范畴的框架。

参考文献中还可以找到更多例子。

3. Φ-余完备 $\mathcal{Q}$-范畴

为了在 $\mathcal{Q}$-范畴中发展域理论，第一步是构建有向完备性 [3, 24] 的概念。基于通过子集系统研究域理论所取得的成功经验，并 考虑到 在 -范畴中不存在标准的有向完备性概念这一事实，我们将 抽象地研究 $\mathcal{Q}$-范畴，这些范畴相对于某个合适的权类是余完备的。

3.1. Definition.一个预层类 Φ 由一个集合$(\Phi\mathbb{A})_0 \subseteq (\mathcal{P}\mathbb{A})_0$ 对于每个$\mathcal{Q}$范畴 $\mathbb{A}$所确定，使得

(i) 每个 $(\Phi\mathbb{A})_0$ 包含 $\mathbb{A}$ 上的所有可表预层，(ii) 对于每个 $\mu \in (\Phi\mathbb{A})_0$ 以及每个 $\mathcal{Q}$- 函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$， $\mu \circ F^\natural \in (\Phi\mathbb{B})_0$。我们将 $\mu \in (\Phi\mathbb{A})_0$ 称为 $\mathbb{A}$ 中的一个 Φ-理想。

显然， $\mathbb{A}$ 中的 Φ-理想是 $\mathcal{P}\mathbb{A}$的一个满 $\mathcal{Q}$-子范畴 $\Phi\mathbb{A}$ 的对象；我们将包含函子写作 $i_\mathbb{A} : \Phi\mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$。由于 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 是骨架的， $\Phi\mathbb{A}$也是骨架的。上述定义中的第一个条件恰好说明，Yoneda 嵌入 $Y_\mathbb{A}\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$余限制为一个 a $\mathcal{Q}$-函子 $Y_\mathbb{A}\colon \mathbb{A} \to \Phi\mathbb{A}$；上述定义中的第二个条件恰好说明，对于任意 $\mathcal{Q}$-函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$， $\mathcal{Q}$-函子 $F^\to\colon \mathcal{P}\mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{B}$ （余）限制为一个 $\mathcal{Q}$-函子 $F^\to\colon \Phi\mathbb{A} \to \Phi\mathbb{B}$。

从现在起，我们用 Φ 表示一个预层类。

3.2. Definition.一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 称为 Φ-余完备的，如果 每个 Φ-理想在 $\mathbb{A}$ 具有一个上确界，也就是说，对于每个 $\mu \in (\Phi\mathbb{A})_0, \sup(\mu) = \mathrm{colim}(\mu, 1_\mathbb{A})$ 存在。

类型为 q 的元素 a 属于 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$，它唯一确定一个 $\mathcal{Q}$-函子$a\colon \{q\} \to \mathbb{A}\colon q \mapsto a$，反之亦然。设 $\phi\colon \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{B}$ 是一个 $\mathcal{Q}$-分配子， $b \in \mathbb{B}_0$。那么 $\phi(-, b) = b^\natural \circ \phi$ 是 $\mathbb{A}$ 上的一个预层。若一个 $\mathcal{Q}$-分配子 $\phi : \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{B}$ 满足：对每个$b \in \mathbb{B}_0$， $\phi(-, b)$ 都是 $\mathbb{A}$. 中的一个 Φ-理想，则称它为 Φ-分配子。显然， Φ-理想是一个特殊的 Φ-分配子。根据预层上确界与一般加权余极限之间的关系，可得：

3.3. Proposition.对于任意 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$，以下各条件等价：*(1)* $\mathbb{A}$ 是 Φ-余完备的；(2) 余限制 Yoneda 嵌入 $Y_\mathbb{A} : \mathbb{A} \to \Phi\mathbb{A}$ 是右伴随 $\sup(\mu)$；(3) $\mathbb{A}$ 具有所有以 Φ-理想为权的余极限；(4) $\mathbb{A}$ 具有所有以 Φ-分配子为权的余极限。

3.4. Definition.*A* $\mathcal{Q}$-函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 两个 $\mathcal{Q}$-范畴之间的 Φ-余连续，如果它保持 上确界 Φ-理想在 $\mathbb{A}$中存在的所有 $\phi \in$ （$\Phi\mathbb{A}$）$_0$,；如果 上确界(ϕ) 存在，那么 上确界$(F^\to(\phi))$ 存在，并且等于 F（上确界(ϕ)）。

再次利用预层的上确界与一般加权余极限之间的关系，可以得到：

3.5. Proposition. 对于任意 $\mathcal{Q}$-函子 $F\colon \mathbb{A}\to\mathbb{B}$，以下各项等价：
(1) F 是 Φ-余连续的；(2) F 保留由 Φ-理想加权的所有余极限，这些余极限存在于 $\mathbb{A}$中；(3) F 保留由 Φ-分配子加权的所有余极限，这些余极限存在于 $\mathbb{A}$中。

由于预层 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 范畴是余完备的，因此它当然对于任意预层类 Φ都是 Φ-余完备的。然而，请注意， $\Phi\mathbb{A}$ 一般并不是 Φ-余完备的。为了“修正”这一点，我们需要对预层类 Φ附加一个条件，下面先回顾该条件。

3.6. Definition. [53] 预层类 Φ 称为饱和的，如果对于每个 $\mu\in(\Phi\mathbb{A})_0$ 以及每个 $G\colon \mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{B}$，其中每个 $G(a)\in(\Phi\mathbb{B})_0$, 余极限$(\mu, G)$ 都属于 $(\Phi\mathbb{B})_0$。

3.7. Remark.若预层类 Φ 是饱和的，那么定义3.1 中的条件 (ii) 可由定义3.1 中的条件 (i) 以及定义 3.6 中的余极限条件推出；这正是 [53, 定义 4.1], 的表述方式，其中并未考虑“非饱和”类。然而，有趣之处在于，预层类的饱和性等价于每个 $\Phi\mathbb{A}$ 都是 Φ余完备的，下面将证明这一点。

3.8. Proposition.对于预层类 Φ，以下条件等价：(1) 对所有 $\mathbb{A}$， $\Phi\mathbb{A}$ 都是 Φ余完备的，且包含映射 $i_{\mathbb{A}}\colon \Phi\mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{A}$ 是 Φ余连续的；(2) Φ是饱和的；(3) 任意两个 Φ分配子的复合都是一个 Φ分配子。在此情形下，对所有 $\Psi\in(\Phi(\Phi\mathbb{A}))_0$, 上确界$\Psi$ = 上确界$(i_{\mathbb{A}}^{\rightarrow}(\Psi))$。

Proof. (1⇒2) 假设 $\mu\colon \mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$ 属于 $(\Phi\mathbb{A})_0$，且 $G\colon \mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{B}$ 是一个 $\mathcal{Q}$-函子，对于每个 $G(a)$，均有 $G(a)$ 属于 $(\Phi\mathbb{A})_0$。则 G 是其余限制$G'\colon \mathbb{A}\to\Phi\mathbb{B}$ 与包含映射 $i_{\mathbb{B}}\colon \Phi\mathbb{B}\to\mathcal{P}\mathbb{B}$的复合。根据假设，$\mathrm{colim}(\mu, G')$ 在 $\Phi\mathbb{B}$ 中存在，并且由 $i_{\mathbb{B}}$ 保持，即 $i_{\mathbb{B}}(\mathrm{colim}(\mu, G'))=\mathrm{colim}(\mu, i_{\mathbb{B}}\circ G')=\mathrm{colim}(\mu, G)$。因此，后者属于 $(\Phi\mathbb{B})_0$, ，如所要求。

(2⇒1) 这属于 [53,命题 4。4]。
(2 ⇔ 3) 这属于 [53, 命题 4。2]。
现在假设陈述中的（等价）条件，对于任意 $\Psi\in(\Phi(\Phi\mathbb{A}))_0$， $\mathrm{colim}(\Psi, 1_{\Phi\mathbb{A}})=\sup(\Psi)$ 以及 $\mathrm{colim}(\Psi, i_{\mathbb{A}})=\mathrm{colim}(i_{\mathbb{A}}^{\rightarrow}(\Psi)\ 1_{\mathcal{P}\mathbb{A}})=\sup(i_{\mathbb{A}}^{\rightarrow}(\Psi))$ 均存在，并且 $\mathrm{colim}(\Psi, 1_{\Phi\mathbb{A}})=i_{\mathbb{A}}(\mathrm{colim}(\Psi, 1_{\Phi\mathbb{A}}))=\mathrm{colim}(\Psi, i_{\mathbb{A}})$。这就解释了所述公式。 ■

3.9. Remark.（1）如果 $\mathcal{Q}$ 是交换幺量子格，那么预层饱和类的概念与量子格富集范畴中的饱和权类概念一致，后者见[27]。因此，$\mathbf{Cat}(\mathcal{Q}$上的预层饱和类可以视为多类型框架下量子格富集范畴中饱和权类的推广。

(2) 继 Wright、Wagner 和 Thatcher 在所谓的子集系统 [61] 上的开创性工作 Z之后，偏序集的序理论、拓扑和范畴性质已扩展到一般的 Z情形 [5, 11, 30]。回想一下，2 是二元素布尔

代数，$\mathbf{Cat}(\mathbf{2})$ 是预序集及保序映射所构成的范畴。因此，若 Φ是$\mathbf{Cat}(\mathbf{2})$ 上的饱和预层类，那么按照[61], 的定义，它是一个并完备子集系统， Φ不过这里讨论的是预序，且所有 Φ-理想都是下集。严格来说，并完备子集系统 Z 只针对偏序集定义，而 Z-集合不一定是下集。然而，这对在一般情形下发展偏序集/预序集的完备性与连续性理论几乎没有影响。因此，在多类型多值情形下，$\mathbf{Cat}(\mathcal{Q}$上的饱和预层类这一概念，可以视为$\mathbf{Poset}$ 上并完备子集系统概念的推广。

(3) 在 [53], Stubbe 研究了更多关于 Φ-余完备 $\mathcal{Q}$-范畴以及 Φ-余连续 $\mathcal{Q}$-函子的范畴性质。特别地， [53, 定理 4。6], 表明，在一方面， Φ 关于 $\mathcal{Q}$-范畴的预层饱和类与所谓的满子 KZ-教条$(\mathcal{T}$， $\varepsilon)$——自由余完备 KZ-教条 $\mathcal{P}$： $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ $\to\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 之间存在本质上的双射对应关系。特别地，任意预层饱和类 Φ都确定了 KZ-教条（一个特殊的 2-单子）

$$\Phi : \mathbf{Cat}(\mathcal{Q}) \to \mathbf{Cat}(\mathcal{Q}) : (F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}) \mapsto (F^{\to} : \Phi\mathbb{A} \to \Phi\mathbb{B})$$

其像恰好是 Φ-余完备 $\mathcal{Q}$-范畴以及 Φ-余连续函子所构成的范畴。有关详情，请参阅 [53]。

(4) 最小预层类 Φ_{min} 仅包含可表预层；它是饱和的，并且 $\Phi_{min}\mathbb{A} = Y_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})$。最大类包含所有预层；它同样是饱和的，并且 $\Phi_{max}\mathbb{A} = \mathcal{P}\mathbb{A}$。下一节将研究一些更有趣的例子。

4. 饱和预层类的例子

随着定量域理论的迅速发展，量子格富集范畴中的理想以及 L-序集中的理想都得到了研究，并取得了一些优雅的结果 [27, 31,28, 62, 65]。最近，Lai 和 Zhang 对模糊序集中的三类理想进行了比较研究 [28], ，每一类都是对广为人知的偏序定义的推广。

我们先回顾偏序情形。对于偏序集 I 的非空下集 P，以下条件等价:

(i) I是一个理想：对于每个 x、$y \in I$，都存在某个 $z \in I$使得 x、$y \leq z$；(ii) I是不可约的：对于偏序集 P的下集 B、C，若 $I \subseteq B \cup C$，则 $I \subseteq B$或 $I \subseteq C$；(iii) I是平坦的：对于偏序集 P的上集 G、H，若 I与 G相交且与 H相交，则 I与 $G \cap H$相交。

偏序集中的理想的上述刻画已推广到量子格富集范畴（或 L-序集）中, [27, 28, 31, 62], 其中它们不再等价，正如 [28]所指出的。下文将介绍饱和预层类，从而将上述定义进一步推广到量化范畴-富集范畴的“多值、多类型”情形。

域理论中的有向集和理想通常被假定为非空 [14]。基于对非空模糊集的定义 [28], 我们将给出一个相应的

概念，用于中的理想 $\mathcal{Q}$-范畴。

4.1. Definition. 预层 $\mu\colon\ \mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$ 是非空的，当且仅当

$$1_q \leq \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0, ta=q} \mu(a)$$

余预层 $\lambda\colon\ \{p\}\nrightarrow\mathbb{A}$ 是非空的，当且仅当

$$1_p \leq \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0, ta=p} \lambda(a).$$

接下来我们回顾一下，Dist($\mathcal{Q}$) 是一个量化范畴，因此我们可以计算平行分配子的上确界（进而也可以计算下确界）。这尤其适用于平行的（协变或逆变）预层，我们将在下文的陈述中用到这一点。

4.2. Definition. 预层 $\phi\in(\mathcal{P}\mathbb{A})_0$ 是：

1. 一个不可约理想，当且仅当

$$\mathcal{P}\mathbb{A}(\phi,\phi_1\vee\phi_2)=\mathcal{P}\mathbb{A}(\phi,\phi_1)\vee\mathcal{P}\mathbb{A}(\phi,\phi_2)$$

对所有具有相同类型的 ϕ_1、$\phi_2\in(\mathcal{P}\mathbb{A})_0$ 均成立；

2. 若为平坦理想，则

$$\phi\circ(\lambda_1\wedge\lambda_2)=\phi\circ\lambda_1\wedge\phi\circ\lambda_2$$

对所有具有相同类型的 λ_1、$\lambda_2\in(\mathcal{P}^\dagger\mathbb{A})_0$ 均成立；

3. 若为弱平坦理想，则

$$\phi\circ(\lambda_1\wedge\lambda_2)=\phi\circ\lambda_1\wedge\phi\circ\lambda_2$$

对所有非空余预层 λ_1、$\lambda_2\in(\mathcal{P}^\dagger\mathbb{A})_0$ 均成立。

4.3. Remark.(1) 在 [55], Tao、Lai 和 Zhang 研究了量化范畴富集范畴中的平坦权。后来，Lai 在量化范畴富集范畴中研究了不可约理想和平坦理想 [28]。注意，在 [28], 不可约理想和平坦理想被假定为非空。本文意义下的平坦理想在[55]中被称为弱平坦权。

(2) 按照 [27], 中给出的理想定义，量子格富集范畴的序理论性质和范畴性质已在一系列论文 [31, 62] 中得到研究。根据 [55], 中的命题 3.9 和 3.11，我们知道，若 $\mathcal{Q}$ 是框架，则 ϕ 是非空平坦理想，当且仅当 ϕ 是 [27] 意义下的理想。

(3) 更具体地说，设 $\mathcal{Q}$ 是二元素布尔代数 **2** ，并且$\mathbb{A}$ 是一个 骨架的 **2**-范畴。由于 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}$ 的所有下集所成的集合，并带有包含序，因此我们知道以下条件等价：

(i) ϕ是偏序集 $\mathbb{A}_0$中的一个理想；(ii) ϕ 按照 定义 4.1 和 4.2 的含义是一个有元不可约理想；(iii) ϕ 按照 定义 4.1 和4.2 的含义是一个非空平坦理想。

4.4. Theorem.设 $\mathcal{I}$ （分别为 $\mathcal{I}_{in}$）是所有不可约理想（分别为有元不可约理想）组成的类。这些是饱和预层类。

Proof. 显然，这两个类都包含所有可表预层。接下来，令 $\phi\colon \mathbb{A} \nrightarrow \{q\}$为一个不可约理想，并令 $G\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{B}$ 为一个 $\mathcal{Q}$-函子，使得每个 $G(a)$都是不可约的。对于 ϕ_1， $\phi_2 \in (\mathcal{P}\mathbb{B})_0$ 具有相同类型时，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}\mathbb{B}(\mathrm{colim}(\phi, G), \phi_1 \vee \phi_2)\\
&= \mathcal{P}\mathbb{B}(\sup(\phi \circ G^{\natural}), \phi_1 \vee \phi_2)\\
&= \mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{B}(\phi \circ G^{\natural}, Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}}(\phi_1 \vee \phi_2)) && (\sup \dashv Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}})\\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}}(\phi_1 \vee \phi_2) \circ G_{\natural}) && (G^{\to} \dashv G^{\leftarrow})\\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, \mathcal{P}\mathbb{B}(G-, \phi_1 \vee \phi_2))\\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, \mathcal{P}\mathbb{B}(G-, \phi_1) \vee \mathcal{P}\mathbb{B}(G-, \phi_2)) && (\text{each } G(a) \text{ is irreducible})\\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, \mathcal{P}\mathbb{B}(G-, \phi_1)) \vee \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, \mathcal{P}\mathbb{B}(G-, \phi_2)) && (\phi \text{ is irreducible})\\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}}(\phi_1) \circ G_{\natural}) \vee \mathcal{P}\mathbb{A}(\phi, Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}}(\phi_2) \circ G_{\natural})\\
&= \mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{B}(\phi \circ G^{\natural}, Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}}(\phi_1)) \vee \mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{B}(\phi \circ G^{\natural}, Y_{\mathcal{P}\mathbb{B}}(\phi_2))\\
&= \mathcal{P}\mathbb{B}(\mathrm{colim}(\phi, G), \phi_1) \vee \mathcal{P}\mathbb{B}(\mathrm{colim}(\phi, G), \phi_2).
\end{aligned}
$$

这足以得出结论： $\mathcal{I}$ 是一个饱和预层类（另见注记 3.7）。此外，假设 ϕ 且每个 $G(a)$都是非空的。我们有

$$
\begin{aligned}
\bigvee_{b\in\mathbb{B}_0, tb=q} \mathrm{colim}(\phi, G)(b) &= \bigvee_{b\in\mathbb{B}_0, tb=q} (\phi \circ G^{\natural} \circ (Y_{\mathbb{B}})_{\natural})(b)\\
&= \bigvee_{b\in\mathbb{B}_0, tb=q} \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0} \bigvee_{\psi\in(\mathcal{P}\mathbb{B})_0} \phi(a) \circ \mathcal{P}\mathbb{B}(\psi, G(a)) \circ \mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}(b), \psi)\\
&\geq \bigvee_{b\in\mathbb{B}_0, tb=q} \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0} \phi(a) \circ \mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}(b), G(a))\\
&\geq \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0, ta=q} \left(\phi(a) \circ \bigvee_{b\in\mathbb{B}_0, tb=q} G(a)(b) \right)\\
&\geq \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0, ta=q} (\phi(a) \circ 1_q)\\
&= \bigvee_{a\in\mathbb{A}_0, ta=q} \phi(a)\\
&\geq 1_q.
\end{aligned}
$$

因此， $\mathcal{I}_{in}$ 是一个饱和预层类。 ∎

4.5. Theorem. 令 $\mathcal{F}$ （分别为 $\mathcal{F}_{in}$、 $\mathcal{WF}$）表示平坦理想（分别为有元平坦理想、弱平坦理想）的类。这些是饱和预层类。

PROOF. 显然，这些类包含所有可表预层。接下来，令 $\phi\colon\ \mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$为一个平坦理想，且 $G\colon\ \mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{B}$ 为一个 $\mathcal{Q}$-函子，使得每个 $G(a)$ 都是平坦的。对于 $\lambda_1,\ \lambda_2\in(\mathcal{P}^{\dagger}\mathbb{B})_0$型相同的情形，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}(\phi,G)\circ(\lambda_1\wedge\lambda_2)&=\phi\circ G^{\natural}\circ(Y_{\mathbb{B}})_{\natural}\circ(\lambda_1\wedge\lambda_2)\\&=\phi\circ\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\circ(\lambda_1\wedge\lambda_2)\\&=\phi\circ(\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\circ\lambda_1\wedge\mathbb{A}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\circ\lambda_2)\\&=\phi\circ\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\circ\lambda_1\wedge\phi\circ\mathbb{A}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\circ\lambda_2\\&=\phi\circ G^{\natural}\circ(Y_{\mathbb{B}})_{\natural}\circ\lambda_1\wedge\phi\circ G^{\natural}\circ(Y_{\mathbb{B}})_{\natural}\circ\lambda_2\\&=\operatorname{colim}(\phi,G)\circ\lambda_1\wedge\operatorname{colim}(\phi,G)\circ\lambda_2.\end{aligned}$$

因此，我们可以得出结论： $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{WF}$ 是饱和预层类。根据定理 4.4 中给出的类似论证，我们得到 $\mathcal{F}_{in}$ 是一个饱和预层类。 ∎

最后，基于锥形预层类，我们在 [53, 第 5], 节中研究并引入 $\mathcal{Q}$-富集范畴中的第三类理想。下面我们将用（$\mathbb{A}_q$， $\leq_q$）表示类型为 q 在 $\mathbb{A}$中的对象的预序集。

4.6. DEFINITION. 预层 $\phi\colon\ \mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$ 是一个 - 锥形预层，当且仅当存在一个集合 $\{a_i\}_{i\in I}$属于（$\mathbb{A}_q$， $\leq_q$），使得$\phi=\bigvee_{i\in I}\mathbb{A}$（−， a_i）；- 锥形理想，当且仅当存在一个有向集 $\{a_i\}_{i\in I}$ 属于（$\mathbb{A}_q$， $\leq_q$），使得$\phi=\bigvee_{i\in I}\mathbb{A}$（−， a_i）。

由于每个有向集都非空，因此每个锥形理想都是非空的。

4.7. THEOREM.令 $\mathcal{C}$ （分别为 $\mathcal{C}^D$）表示锥形预层（分别为锥形理想）的类。这些都是饱和预层类。

PROOF.显然，这两个类都包含所有可表预层。 $\mathcal{C}$ 是一个饱和预层类这一点已在[53, 命题 5.3]中得到证明。现在设 $\phi\colon\ \mathbb{A}\nrightarrow\{q\}$ 为一个锥形理想，且 $G\colon\ \mathbb{A}\to\mathcal{P}\mathbb{B}$ 为一个 $\mathcal{Q}$-函子，使得每个 $G(a)$都是锥形理想。于是，在$(\mathbb{A}_q,\leq_q)$中存在一个有向集 $\{a_i\}_{i\in I}$，使得 $\phi=\bigvee_{i\in I}\mathbb{A}(-,a_i)$。对于每个 a_i，存在一个有向集 $\{b_k^i\}_{k\in J_i}$，使得 $G(a_i)=\bigvee_{k\in J_i}\mathbb{B}(-,b_k^i)$。

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}(\phi,G)&=\phi\circ G^{\natural}\circ(Y_{\mathbb{B}})_{\natural}\\&=\phi\circ\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\\&=\left(\bigvee_{i\in I}\mathbb{A}(-,a_i)\right)\circ\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G-)\\&=\bigvee_{i\in I}(\mathbb{A}(-,a_i)\circ\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G-))\\&=\bigvee_{i\in I}\mathcal{P}\mathbb{B}(Y_{\mathbb{B}}-,G(a_i))\\&=\bigvee_{i\in I}G(a_i)\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{i\in I}\bigvee_{k\in J_i} \mathbb{B}(-, b_k^i)$$

由 $\{a_i\}_{i\in I}$ 和 $\{b_k^i\}_{k\in J_i}$的有向性，$\{b_k^i \mid i \in I, k \in J_i\}$ 也是一个有向集。因此，余极限(ϕ, G)是一个锥形理想。 ∎

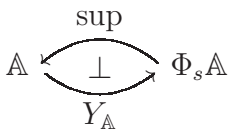
5. Q-范畴中的连续性

如前所述，Stubbe [52] 研究了“完全连续”的 quantaloid-富集范畴，即满足关于全体预层类的额外连续性条件的余完备 quantaloid-富集范畴。对于量子格富集范畴，Hofmann 和 Waszkiewicz [19] 在不要求余完备性的情况下，表述了关于任意给定预层类的连续性。本节将结合这两项工作，恰当地表述 quantaloid-富集范畴的 Φ-连续性。

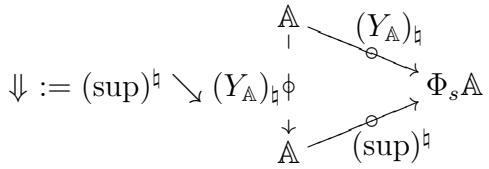
回顾一下，给定 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 上的预层类 Φ，$\Phi\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}$ 中 Φ-理想所构成的范畴。它是 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 的全子范畴，并且我们知道 Yoneda 嵌入 $Y_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 余限制到 $\Phi\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}\mathbb{A}$。现在考虑由以下条件确定的 $\Phi\mathbb{A}$ 的另一个全子范畴（因此也是 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 的全子范畴）：

$$(\Phi_s\mathbb{A})_0 = \{\phi \in (\Phi\mathbb{A})_0 \mid \sup(\phi) \text{ exists}\}.$$

由于对任意 $a \in \mathbb{A}_0$，$\sup(Y_{\mathbb{A}}(a)) = a$；且当上确界存在时，对任意 $\mu \in \mathcal{P}\mathbb{A}$，$Y_{\mathbb{A}}(\sup(\mu)) \geq \mu$，我们发现，Yoneda 嵌入的余限制是上确界映射的限制的右伴随：



5.1. Definition.对于一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 和一个预层类 Φ，$\mathbb{A}$ 上的 Φ-远低于分配子是由下式定义的分配子 $\Downarrow : \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{A}$

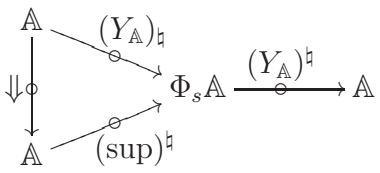


以及相应的远低于函子定义为 $F_\Downarrow : \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A} : a \mapsto \Downarrow^\Phi(-, a)$。

该 $\mathcal{Q}$-分配子 $\Downarrow$与 $\mathcal{Q}$-函子 $F_\Downarrow$ 在 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathcal{P}\mathbb{A}$的“分类性质”，参见命题 6。1]。

5.2. Proposition.对于任意 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$，我们都有 $\Downarrow \leq \mathbb{A}$（因而也有 $F_\Downarrow \leq Y_{\mathbb{A}}$和 $\Downarrow \circ \Downarrow \leq \Downarrow$）。

Proof.考虑下面的 $\mathcal{Q}$-分配子图:



根据 $\Downarrow$ 的定义，我们知道 $(\sup)^\natural \circ \Downarrow \leq (Y_{\mathbb{A}})_\natural$，因此与 $(Y_{\mathbb{A}})^\natural$ 复合可得 $(Y_{\mathbb{A}})^\natural \circ (\sup)^\natural \circ \Downarrow \leq (Y_{\mathbb{A}})^\natural \circ (Y_{\mathbb{A}})_\natural$。由于 $(Y_{\mathbb{A}})^\natural \circ (\sup)^\natural = (\sup \circ Y_{\mathbb{A}})^\natural = (1_{\mathbb{A}})^\natural = \mathbb{A}$ 且 $(Y_{\mathbb{A}})^\natural \circ (Y_{\mathbb{A}})_\natural = \mathbb{A}$，我们得到 $\mathbb{A} \circ \Downarrow \leq \mathbb{A}$，由此可推出 $\Downarrow \leq \mathbb{A} \searrow \mathbb{A} = \mathbb{A}$。 ∎

尽管 $\Downarrow\colon \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{A}$ 总是一个分配子，因此相应的函子 $F_\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 是良定义的，但 $F_\Downarrow$ 未必余限制到 $\Phi_s\mathbb{A}$。

5.3. Proposition.对于预层类 Φ 和一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$，以下陈述是等价的:

(1) $\sup\colon \Phi_s\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 具有一个左伴随；(2) 对所有 $a \in \mathbb{A}_0$、$F_\Downarrow(a) \in (\Phi_s\mathbb{A})_0$ 以及 $\sup(F_\Downarrow(a)) \cong a$,

(3) $\Downarrow\colon \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{A}$ 是一个具有逼近性的 Φ-分配子，即它满足 $\mathbb{A} = \mathbb{A} \swarrow \Downarrow$。在这种情况下，$F_\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 分解为经过全包含 $\Phi_s\mathbb{A} \hookrightarrow \mathcal{P}\mathbb{A}$ 的映射，而所得的余限制 $F_\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \Phi_s\mathbb{A}$ 是 $\sup\colon \Phi_s\mathbb{A} \to \mathbb{A}$的左伴随。

Proof.（$1 \Rightarrow 2$）假设 $\sup\colon \Phi_s\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 具有左伴随 $L\colon \mathbb{A} \to \Phi_s\mathbb{A}$，且位于 $\mathsf{Cat}(\mathcal{Q})$ 中，则我们可以计算出

$$\begin{aligned}
\Downarrow &= (\sup)^\natural \searrow (Y_{\mathbb{A}})_\natural && \text{定义 5.1}\\
&= (L)_\natural \searrow (Y_{\mathbb{A}})_\natural && L \dashv \sup\\
&= (L)^\natural \circ (Y_{\mathbb{A}})_\natural && \text{方程 2.1}\\
&= \Phi_s\mathbb{A}(Y_{\mathbb{A}}-, L-) && \text{方程2.3}\\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(Y_{\mathbb{A}}-, L-) && \text{全子范畴}
\end{aligned}$$

因此，根据米田引理，我们发现对于任意 $a \in \mathbb{A}_0$ 都有

$$L(a) = \mathcal{P}\mathbb{A}(Y_{\mathbb{A}}-, L(a)) = \Downarrow(-, a) = F_\Downarrow(a).$$

这意味着每个 $F_\Downarrow(a)$ 都属于 $\Phi_s\mathbb{A}$。此外，由 $L \dashv \sup \dashv Y_{\mathbb{A}}$ 以及 $\sup \circ Y_{\mathbb{A}} = 1_{\mathbb{A}}$，我们很容易得到 $\sup \circ L = 1_{\mathbb{A}}$，这在此处意味着对于所有 $a \in \mathbb{A}_0$，$\sup(F_\Downarrow(a)) = a$。

($2 \Rightarrow 1$) 根据假设，函子 $F_\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 通过 $\Phi_s\mathbb{A} \hookrightarrow \mathcal{P}\mathbb{A}$分解，且余限制 $F_\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \Phi_s\mathbb{A}$ 满足 $\sup \circ F_\Downarrow = 1_{\mathbb{A}}$。直接计算表明，对于任意 $\phi \in \Phi_s\mathbb{A}$ 和 $a \in \mathbb{A}_0$,

$$\begin{aligned}
F_\Downarrow(\sup(\phi))(a) &= \bigwedge_{\psi \in (\Phi_s\mathbb{A})_0} \mathbb{A}(\sup(\phi), \sup(\psi)) \searrow \psi(a)\\
&\leq \mathbb{A}(\sup(\phi), \sup(\phi)) \searrow \phi(a)
\end{aligned}$$

$$\leq \phi(a),$$

也就是说，$F_{\Downarrow} \circ \mathsf{Sup} \leq 1_{\Phi_s\mathbb{A}}$。这意味着 $F_{\Downarrow} \dashv \mathsf{Sup}$。

(2 $\Leftrightarrow$ 3) 根据定义 5.1，$\Downarrow(-, a) = F_{\Downarrow}(a)$ 对所有 $a \in \mathbb{A}_0$，因此 $\Downarrow\colon \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{A}$ 是一个Φ-分布，如果且仅如果 $F_{\Downarrow}(a) \in \Phi$ 对于每个 $a \in \mathbb{A}_0$。此外，

$$\sup(F_{\Downarrow}(a)) = \mathrm{colim}(F_{\Downarrow}(a), 1_{\mathbb{A}}) = \mathrm{colim}(\Downarrow(-, a), 1_{\mathbb{A}}) = \mathrm{colim}(\Downarrow, 1_{\mathbb{A}})(a)$$

并且函子 $\mathsf{colim}(\Downarrow, 1_{\mathbb{A}})\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 由以下条件刻画：

$$\mathrm{colim}(\Downarrow, 1_{\mathbb{A}})_\natural = (1_{\mathbb{A}})_\natural \swarrow \Downarrow = \mathbb{A} \swarrow \Downarrow .$$

因此，$\sup(F_{\Downarrow}(a))$ 存在且等于 a 对所有 $a \in \mathbb{A}_0$ 成立，当且仅当 $\mathsf{colim}(\Downarrow, 1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}}$，当且仅当 $\mathbb{A} = \mathbb{A} \swarrow \Downarrow$。 ∎

5.4. Definition.一个 $\mathcal{Q}$-范畴称为 Φ-连续的，如果它满足命题 5.3的等价条件。

5.5. Proposition.如果 Φ 是一个饱和预层类，且 $\mathbb{A}$ 是一个 Φ-连续的 $\mathcal{Q}$-范畴，那么 $\Downarrow\colon \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{A}$ 是 插值的，也就是说，$\Downarrow = \Downarrow \circ \Downarrow$。

Proof.利用命题 5.3 中的 (3)，我们可以计算 Φ-连续的 $\mathbb{A}$：

$$(1_{\mathbb{A}})_\natural = \mathbb{A} = \mathbb{A} \swarrow \Downarrow = (\mathbb{A} \swarrow \Downarrow) \swarrow \Downarrow = \mathbb{A} \swarrow (\Downarrow \circ \Downarrow) = (1_{\mathbb{A}})_\natural \swarrow (\Downarrow \circ \Downarrow)$$

wh这表明 $1_{\mathbb{A}} = \mathsf{colim}(\Downarrow \circ \Downarrow, 1_{\mathbb{A}})$。由此，对于任意 $a \in \mathbb{A}_0$，我们有

$$a = \mathrm{colim}(\Downarrow \circ \Downarrow, 1_{\mathbb{A}})(a) = \mathrm{colim}((\Downarrow \circ \Downarrow)(-, a), 1_{\mathbb{A}}) = \sup((\Downarrow \circ \Downarrow)(-, a)).$$

由于 $\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 是一个 Φ-分布子，且类 Φ 是饱和的，所以 $\Downarrow \circ \Downarrow$ 也是一个 Φ-分布子（参见命题 3.8中的 (3)）。因此上述结果意味着 $(\Downarrow \circ \Downarrow)(-, a) \in \Phi_s\mathbb{A}$，并通过与 $F_{\Downarrow} \dashv \mathsf{Sup}$ 的伴随关系可得

$$\Downarrow(-, a) = F_{\Downarrow}(a) \leq (\Downarrow \circ \Downarrow)(-, a).$$

这证明了 $\Downarrow \leq \Downarrow \circ \Downarrow$；反向不等式已在命题 5.2中证明 . ∎

5.6. Remark. (1) 若 $\Phi = \mathcal{F}_{in}$，$\Phi = \mathcal{C}^D$ 或 $\Phi = \mathcal{I}_{in}$，则一个 (Φ-余完备) Φ-连续2-范畴就是 [14] 意义下的（有向完备）连续偏序集。

（2）如果 $\mathcal{Q} = \mathbf{2}$、Φ 是饱和预层类，Z 是并完备子集系统，那么 Φ-连续2-范畴就是 Z-连续偏序集（按照 [6],的意义），而 Φ-连续 Φ-完备2-范畴就是 Z-连续偏序集（按照[5]的意义）。

（3）在 $\mathcal{Q}$ 是交换幺量子格、Φ和 J 是饱和的情况下，Φ-连续 $\mathcal{Q}$-范畴的概念与[19]中的 J-连续量子格富集范畴相一致。

(4) 设 $\mathcal{Q}$ 为一个框架，设 $\mathcal{F}_{in}$ 为非空平坦理想的预层类。注意，非空平坦理想的概念与[27]中的理想概念一致。因此，一个 $\mathcal{F}_{in}$-连续的 $\mathcal{F}_{in}$-余完备 $\mathcal{Q}$-范畴就是连续 Ω-偏序集，或按 [27, 62]的意义而言的模糊域。

5.7. Remark.正如 $\mathcal{Q}$中所定义和研究的完全连续 [52] -范畴（考虑到较早脚注中提到的对偶性）与本文中的 $\mathcal{P}$-余完备 $\mathcal{P}$-连续 $\mathcal{Q}$-范畴相对应。本文还在[52, 命题 5.1]中证明了，一个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 是 $\mathcal{P}$-余完备且 $\mathcal{P}$-连续的，当且仅当它是“正则 $\mathcal{Q}$-半范畴上的正则预层”范畴。这里不再完整地回顾这一结论，但仅提及一个特殊情形：任意预层范畴 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 都是 $\mathcal{P}$-余完备且 $\mathcal{P}$-连续的。事实上，参见公式 2.6 和 2.8，我们知道

$$F_{\Downarrow} : \mathcal{P}\mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{A} : \phi \mapsto Y_{\mathbb{A}}^{\rightarrow}(\phi) \quad \text{and} \quad \sup : \mathcal{P}\mathcal{P}\mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A} : \Psi \mapsto Y_{\mathbb{A}}^{\leftarrow}(\Psi)$$

彼此互为左伴随/右伴随。

给定一个对象 $A \in \mathcal{Q}_0$，回顾一下，我们将 $\{A\}$ 记作单对象 $\mathcal{Q}$-范畴，其唯一的同态箭头是 1_A，并且 $\mathcal{Q}^A$ 表示 $\mathcal{P}\{A\}$。由注记5.7可知， $\mathcal{Q}^A$ 是 $\mathcal{P}$-连续的。为准备进一步的例子，我们在此将其列出，并对记号作一些简化：

5.8. Proposition.设 A 是任意量化范畴 $\mathcal{Q}$中的任意对象，则 $\mathcal{Q}^A$ 是 $\mathcal{P}$-连续的，而 $\mathcal{Q}$-函子 $\sup : \mathcal{P}\mathcal{Q}^A \to \mathcal{Q}^A$ 的左伴随由下式给出

$$d : \mathcal{Q}^A \to \mathcal{P}\mathcal{Q}^A : f \mapsto \Big(df : \mathcal{Q}^A \nrightarrow \{\mathrm{dom}(f)\}\Big) \quad \textit{where} \quad df(g) = f \circ (1_A \swarrow g).$$

若 $1_A = \top_{A,\ A}$ 是 $\mathcal{Q}(A, A)$ 的顶元素，则这可简化为 $df(g) = f \circ \top_{\mathrm{cod}(g),\ A}$。

Proof.这只是将注记5.7 中关于 $\mathbb{A} = \{A\}$的公式明确写出。 $\mathcal{Q}^A$ 中的一个对象是某个态射 $f : A \to X$ ，属于 $\mathcal{Q}$。Yoneda 嵌入 $Y_{\{A\}} : \{A\} \mapsto \mathcal{Q}^A$ 将 $\{A\}$的唯一对象映射到 1_A。因此

$$df := F_{\Downarrow}(f) = Y_{\{A\}}^{\rightarrow}(f) = f \circ \mathcal{Q}^A(-, 1_A) = f \circ (1_A \swarrow -)$$

如上所述。对于任意 $g : A \to Y$ 我们有

$$\top_{Y,A} \leq 1_A \swarrow g \iff \top_{Y,A} \circ g \leq 1_A,$$

后一个条件在 $1_A = \top_{A,\ A}$ 时成立；因此在此情况下我们得到 $\top_{Y,\ A} = 1_A \swarrow g$ 。 ∎

以类似的方式，我们得到：

5.9. Proposition. 设 A 是量化范畴 $\mathcal{Q}$ 中的任意对象，且 $1_A = \top_{A,\ A}$。如果对于每个态射 $f : A \to X$ 和 B 中的对象 $\mathcal{Q}$，映射 $f \circ - : \mathcal{Q}(B,\ A) \to \mathcal{Q}(B,\ X)$ 保持有限交，那么 $\mathcal{Q}^A$ 是 $\mathcal{F}$-连续的。

Proof. 设 $\lambda : \{q\} \nrightarrow \mathcal{Q}^A$ 为任意余预层。则对于 $f \in \mathcal{Q}(A, X)$ 和 $g \in \mathcal{Q}(A, Y)$，有 $\mathcal{Q}^A(f, g) \circ \lambda(f) \leq \lambda(g)$，即 $g \swarrow f \leq \lambda(g) \swarrow \lambda(f)$。因此，$\top_{Y,\ A} \leq \top_{A,\ A} \swarrow g \leq \lambda(\top_{A,A}) \swarrow \lambda(g)$，从而 $\top_{Y,\ A} \circ \lambda(g) \leq \lambda(\top_{A,A})$。此外，如果 $g \in \mathcal{Q}(A, A)$，那么$\lambda(g) \leq \lambda(1_A)$。

现在，for $f \in (\mathcal{Q}^A)_0$ 和 λ_1， $\lambda_2 \in (\mathcal{P}^\dagger \mathcal{Q}^A)_0$ 具有相同类型 q，我们有

$$\begin{aligned}(df \circ \lambda_1) \wedge (df \circ \lambda_2) &= \left(\bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} df(g) \circ \lambda_1(g) \right) \wedge \left(\bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} df(g) \circ \lambda_2(g) \right) \\ &= \left(\bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} f \circ \top_{\mathrm{cod}(g),A} \circ \lambda_1(g) \right) \wedge \left(\bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} f \circ \top_{\mathrm{cod}(g),A} \circ \lambda_2(g) \right) \\ &= f \circ \left(\bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} \top_{\mathrm{cod}(g),A} \circ \lambda_1(g) \right) \wedge f \circ \left(\bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} \top_{\mathrm{cod}(g),A} \circ \lambda_2(g) \right) \\ &= (f \circ \lambda_1(1_A)) \wedge (f \circ \lambda_2(1_A))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}df \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) &= \bigvee_{g \in (\mathcal{Q}^A)_0} df(g) \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2)(g) \\ &\geq df(1_A) \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2)(1_A) \\ &= f \circ (\lambda_1(1_A) \wedge \lambda_2(1_A)).\end{aligned}$$

由上述论证可容易看出，$(df \circ \lambda_1) \wedge (df \circ \lambda_2) = df \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2)$。因此，对于每个 $f \in (\mathcal{Q}^A)_0$, df 都是一个平坦理想。所以， $\mathcal{Q}^A$ 是 $\mathcal{F}$-连续的。 ∎

对于下一个命题，我们回顾 [22, 55] 中的结论：一个（含幺）量子格（Q， $\bigvee$，$\&$，$\mathbf{1}$），其中我们将剩余运算记为（$a\&-$） $\dashv$（$a\backslash-$）和（$-\&a$） $\dashv$（$-/a$），称为可除的，当

$$a\&(a\backslash b) = a \wedge b = (b/a)\&a$$

对所有的 $a, b \in Q$ 均成立。正如所引文献中指出的，任何这样的可除量子格都具有若干性质，尤其是：

(i) Q 是积分的，即 $1 = \top$；(ii) Q 是局部的，即对所有 a，$(b_j)_j \in Q$ 满足 $a \wedge \bigvee_j b_j = \bigvee_j (a \wedge b_j)$；(iii) 对所有 $a, b, c \in$，$(b \wedge c)\&a = (b\&a) \wedge (c\&a)$，且 $a\&(b \wedge c) = (a\&b) \wedge (a\&c)$ Q.

正如 Hohle 和 Kubiak [22]首先指出的，与一个可除的量化格 B_Q 相关联着一个重要的量化范畴 B_Q，如下所示：

- 对象：是 Q 的元素 x、y、z、.....；- 同态格：$B_Q(x, y)$：$= \{a \in Q \mid a \leq x \wedge y\}$（其序关系继承自 Q）；- 复合：对于 $a \in B_Q(x, y)$ 和 $b \in B(y, z)$， $b \circ a := b\&(y\backslash a) = (b/y)\&a$；- 恒等态射： $1_x := x$。

富集于此量化范畴上的范畴可以看作带有模糊预序的模糊集合 [22, 55],；当应用于例 2.7(3) 中的可除量化幺半群（$[0, \infty]$、$\bigwedge$、$+$、0）时，这些富集范畴就是（广义）偏度量空间 [22, 54, 18]。（在适当的语境下，从 B_Q 构造 Q 具有泛性质，参见 [54, 例 2。14]）

5.10. Proposition. 设 $(Q、\bigvee、\&、1)$ 是一个 含幺可除量化幺半群，并令 B_Q 为上文所述的量化范畴。那么对于 A 中的每个对象 B_Q，$(B_Q)^A$ 是 $\mathcal{F}$-连续的。

Proof. 由于量化范畴 B_Q 是积分的（即，$1_x = x$ 是 $B_Q(x,x)$ 的顶元素），我们只需证明，对于任意 $b \in B_Q(y,z)$ 和 $x \in (B_Q)_0$，上确界态射$b \circ -\colon B_Q(x,y) \to B_Q(x,z)$ 保持有限交。对于 $a_1、a_2 \in B_Q(x,y)$，我们计算：$b \circ (a_1 \wedge a_2) = b\&(y \backslash (a_1 \wedge a_2)) = b\&(y \backslash a_1 \wedge y \backslash a_2) = b\&(y \backslash a_1) \wedge b\&(y \backslash a_2) = b \circ a_1 \wedge b \circ a_2$。 ∎

5.11. Example.根据 [54, 例 2.7 和 2.11]，，对于任意集合 X，我们将 $\mathcal{Q}(X)$ 记为这样一个量化范畴：其对象是 X 的子集，且从 $S \subseteq X$ 到 $T \subseteq X$ 的箭头恰好是所有 $U \subseteq S \cap T$。$\mathcal{Q}(X)$ 中的复合律由交集给出，而对象 $S \subseteq X$ 上的恒等态射是 $S\colon S \to S$ 本身。利用 $\mathcal{Q}(X)$-富集范畴，我们可以克服量化幺半群富集范畴中部分元素的问题。事实上，很容易看出，集合 X 的量化幺半群 $(\mathcal{P}(X), \bigcup, \cap, X)$ 是可除的，而量化范畴 $\mathcal{Q}(X)$ 正是 $B_{\mathcal{P}(X)}$。因此，对于 $\mathcal{Q}(X)$ 中的每个对象 S，$\mathcal{Q}(X)$-富集范畴 $\mathcal{Q}(X)^S$ 是 $\mathcal{F}$-连续的。

6. $\mathcal{Q}$-范畴中的代数性

在本节中，我们概述 [52, 第 6]节的适当推广：我们定义并研究 Φ-紧元素在 $\mathcal{Q}$-范畴中的情形。

由命题5.2 可知，对于任意预层类 Φ 以及任意 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$，总有一个 $\mathcal{Q}$-函子 $F_\Downarrow\colon \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 其满足 $F_\Downarrow \leq Y_{\mathbb{A}}$。现在我们研究这一不等式何时实际上是一个等式。

6.1. Proposition.设 $\mathbb{A}$ 为一个 $\mathcal{Q}$-范畴，Φ 为 $\mathsf{Cat}(\mathcal{Q})$ 上的一个预层类。对于$a \in \mathbb{A}_0$，以下条件等价：

(1) $Y_{\mathbb{A}}(a) \leq F_\Downarrow(a)$；(2) 对每个 $x \in \mathbb{A}_0$，$\mathbb{A}(x,a) \leq \Downarrow(x,a)$；(3) 对每个 $x \in \mathbb{A}_0$，$\mathbb{A}(a,x) \leq \Downarrow(a,x)$；(4) $1_{ta} \leq \Downarrow(a,a)$。（5）对于所有 $\phi \in (\Phi_s\mathbb{A})_0$，$\mathbb{A}(a,\mathsf{sup}(\phi)) \leq \phi(a)$。

除了第四个条件之外，不等式都可以替换为等式。

Proof. $(1 \Leftrightarrow 2)$ 是重言式。$(2 \Rightarrow 4$ 和 $3 \Rightarrow 4)$ 设 $x = a$，并利用 $1_{ta} \leq \mathbb{A}(a,a)$。$(4 \Rightarrow 2$ 和 $4 \Rightarrow 3)$ 由分配不等式直接得出

$$\Downarrow(a,a) \circ \mathbb{A}(x,a) \leq \Downarrow(x,a) \text{ and } \mathbb{A}(a,x) \circ \Downarrow(a,a) \leq \Downarrow(a,x).$$

$(4 \Leftrightarrow 5)$ 直接由 $\Downarrow$ 与定义 5.1 的显式计算得出。 ∎

6.2. Definition.令 $\mathbb{A}$ 为一个 $\mathcal{Q}$-范畴，且 Φ 为 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$上的一个预层类。我们称 $a \in \mathbb{A}_0$ 是 Φ-紧的，如果命题 *6.1* 中的等价条件成立。

这类紧元有一些非平凡的例子:

6.3. Proposition.设 Φ 是 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$上的一个饱和预层类。对于任意 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 以及任意 $x \in \mathbb{A}_0$，可表预层 $Y_{\mathbb{A}}(x)$ 是 Φ中的 $\Phi\mathbb{A}$-紧的。

Proof.由命题 3.8 可知， $\Phi\mathbb{A}$ 是 Φ-余完备的，而且全嵌入$i_{\mathbb{A}}$: $\Phi\mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 是 Φ-余连续的。为清楚起见，我们将 $Y'_{\mathbb{A}}$: $\mathbb{A} \to \Phi\mathbb{A}$ 记作 Yoneda 嵌入的分解 $Y_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 经由 $i_{\mathbb{A}}$。于是，对于任意 $\Psi \in (\Phi(\Phi\mathbb{A}))_0$ 和 $x \in \mathbb{A}_0$ ，我们可以计算得

$$
\begin{aligned}
\Phi\mathbb{A}(Y'_{\mathbb{A}}(x), \sup(\Psi)) &= \mathcal{P}\mathbb{A}(i(Y'_{\mathbb{A}}(x)), i(\sup(\Psi))) && \text{全嵌入} \\
&= \mathcal{P}\mathbb{A}(Y_{\mathbb{A}}(x), \sup(i^{\rightarrow}_{\mathbb{A}}(\Psi))) && \Phi\text{-余连续性} \\
&= \sup(i^{\rightarrow}_{\mathbb{A}}(\Psi))(x) && \text{方程 2.4} \\
&= (i^{\rightarrow}_{\mathbb{A}}(\Psi))(Y_{\mathbb{A}}(x)) && \text{方程 2.8} \\
&= \Psi \circ \mathcal{P}\mathbb{A}(Y_{\mathbb{A}}(x), i-) && i^{\rightarrow}_{\mathbb{A}}\text{的定义} \\
&= \Psi \circ \Phi\mathbb{A}(Y'_{\mathbb{A}}(x), -) && \text{全嵌入} \\
&\leq \Psi(Y'_{\mathbb{A}}(x)) && \text{分配子不等式}
\end{aligned}
$$

该结果由命题6.1中的（5）得到。 ∎

记 $\mathbb{A}_c$ 为由 Φ-紧致元素确定的 $\mathbb{A}$的全子范畴。根据定义可知，全包含映射 $j_{\mathbb{A}}$: $\mathbb{A}_c \hookrightarrow \mathbb{A}$ 是 2-胞腔反演子 [9]的

$$
\mathbb{A} \underset{F_{\Downarrow}}{\overset{Y_{\mathbb{A}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}\mathbb{A}
$$

在 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 中。我们还定义 $\mathcal{Q}$-分配子

$$\Sigma_{\mathbb{A}} := (j_{\mathbb{A}})_{\natural} \circ (j_{\mathbb{A}})^{\natural} : \mathbb{A} \nrightarrow \mathbb{A},$$

并利用 $\mathcal{P}\mathbb{A}$ 的分类性质来定义函子

$$S_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A} : a \mapsto \Sigma_{\mathbb{A}}(-, a)$$

也如此。由命题 6.1 和 5.2很容易推出

$$\Sigma_{\mathbb{A}}(x, y) = \bigvee_{a \in \mathbb{A}_c} \mathbb{A}(a, y) \circ \mathbb{A}(x, a) \leq \bigvee_{a \in \mathbb{A}_c} \Downarrow(a, y) \circ \Downarrow(x, a) \leq \Downarrow(x, y),$$

即 $\Sigma_{\mathbb{A}} \leq \Downarrow$ 属于 $\mathbf{Dist}(\mathcal{Q})$，因此 $S_{\mathbb{A}} \leq F_{\Downarrow}$ 也属于 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$。

6.4. Definition.设 Φ 是 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 上的一个预层类。我们称一个 $\mathcal{Q}$-范畴$\mathbb{A}$ 是 Φ-代数的，如果对于每个 $x \in \mathbb{A}_0$， $S_{\mathbb{A}}(x) \in (\Phi_s\mathbb{A})_0$ 且 $x \cong \mathbf{Sup}(S_{\mathbb{A}}(x))$。

6.5. Remark.根据 与注记 5.6 和5.7中的类似分析，我们可以看到，代数偏序集[14]， Z-代数偏序集 [6], 代数 Ω-范畴 [64] 以及完全代数的 $\mathcal{Q}$-范畴[52] 都是（骨架的） Φ-代数 $\mathcal{Q}$-范畴的特殊情形。

6.6. Proposition.设 Φ 是 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 上的预层类。 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$ 是 Φ-代数的 当且仅当 $\mathbb{A}$ 是 Φ-连续的，并且 $S_{\mathbb{A}} = F_{\Downarrow}$。

Proof.充分性显然。 反过来，假设 $\mathbb{A}$ 是 Φ-代数的，对于任意 x， $y \in \mathbb{A}_0$,

$$\begin{aligned}
\Downarrow(y,x) &= \bigwedge_{\phi\in(\Phi_s\mathbb{A})_0} \mathbb{A}(x,\sup(\phi)) \searrow \phi(y) \\
&\leq \mathbb{A}(x,\sup(S_{\mathbb{A}}(x))) \searrow S_{\mathbb{A}}(x)(y) && S_{\mathbb{A}}(x) \in (\Phi_s\mathbb{A})_0 \\
&\leq \mathbb{A}(x,x) \searrow S_{\mathbb{A}}(x)(y) && \sup(S_{\mathbb{A}}(x)) = x \\
&\leq 1_{tx} \searrow \Sigma_{\mathbb{A}}(y,x) && 1_{tx} \leq \mathbb{A}(x,x) \\
&= \Sigma_{\mathbb{A}}(y,x)
\end{aligned}$$

因此 $F_{\Downarrow} \leq S_{\mathbb{A}}$，并且由于反向不等式始终成立，结论得证。 ∎

6.7. Proposition.设 Φ 是定义在 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$上的饱和预层类。则对于任意$\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{A}$， $\Phi\mathbb{A}$ 都是(Φ-余完备且) Φ-代数的。

Proof. 利用命题 3.8，我们用 $Y'_{\mathbb{A}}\colon\ \mathbb{A} \to \Phi\mathbb{A}$ 表示 Yoneda 嵌入 $Y_{\mathbb{A}}\colon\ \mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$ 经过全嵌入 $i_{\mathbb{A}}\colon\ \Phi\mathbb{A} \to \mathcal{P}\mathbb{A}$的分解。对于函子 $(Y'_{\mathbb{A}})^{\to}\colon\ \Phi\mathbb{A} \to \Phi(\Phi\mathbb{A})$ 以及任意 $\phi \in (\Phi\mathbb{A})_0$，我们于是可以计算得

$$\begin{aligned}
\sup\Big((Y'_{\mathbb{A}})^{\to}(\phi)\Big) &= \sup\Big(((i_{\mathbb{A}})^{\to} \circ Y'^{\to}_{\mathbb{A}})(\phi)\Big) && \text{命题 3.8} \\
&= \sup\Big((Y_{\mathbb{A}})^{\to}(\phi)\Big) && \text{公式 2.7} \\
&= \sup\Big(\phi \circ (Y_{\mathbb{A}})^{\natural}\Big) && (Y_{\mathbb{A}})^{\to} \text{的定义} \\
&= \phi \circ (Y_{\mathbb{A}})^{\natural} \circ (Y_{\mathbb{A}})_{\natural} && \text{方程2.8} \\
&= \phi \circ \mathbb{A} && \text{方程2.5} \\
&= \phi.
\end{aligned}$$

同样，对于任意 $\Psi \in (\Phi(\Phi\mathbb{A}))_0$,，我们可以具体写出

$$\begin{aligned}
(Y'_{\mathbb{A}})^{\to}\Big(\sup(\Psi)\Big) &= \Psi \circ (i_{\mathbb{A}})^{\natural} \circ (Y_{\mathbb{A}})_{\natural} \circ (Y'_{\mathbb{A}})^{\natural} && \text{as above} \\
&= \Psi \circ (i_{\mathbb{A}})^{\natural} \circ (i_{\mathbb{A}} \circ Y'_{\mathbb{A}})_{\natural} \circ (Y'_{\mathbb{A}})^{\natural} && Y_{\mathbb{A}} = i_{\mathbb{A}} \circ Y'_{\mathbb{A}} \\
&= \Psi \circ (i_{\mathbb{A}})^{\natural} \circ (i_{\mathbb{A}})_{\natural} \circ (Y'_{\mathbb{A}})_{\natural} \circ (Y'_{\mathbb{A}})^{\natural} && \text{Equation 2.2} \\
&= \Psi \circ (Y'_{\mathbb{A}})_{\natural} \circ (Y'_{\mathbb{A}})^{\natural} && i_{\mathbb{A}} \text{ is fully faithful} \\
&\leq \Psi. && (Y'_{\mathbb{A}})_{\natural} \dashv (Y'_{\mathbb{A}})^{\natural}
\end{aligned}$$

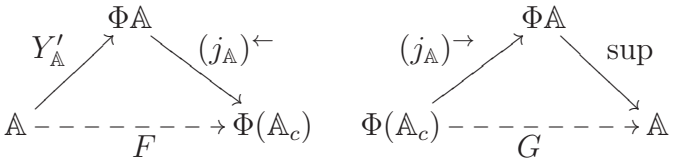
也就是说，$(Y'_{\mathbb{A}})^{\to}\colon\ \Phi\mathbb{A}\to\Phi(\Phi\mathbb{A})$ 是 $\sup\colon\Phi(\Phi\mathbb{A})$ 的左伴随 $\to\Phi\mathbb{A}$。根据命题 5.3，$\Phi\mathbb{A}$ 是 Φ-连续的，并且 $F_{\Downarrow}=(Y'_{\mathbb{A}})^{\to}$ 在 $\Phi\mathbb{A}$上。 最后，对于任意 $\phi_1,\ \phi_2\in(\Phi\mathbb{A})_0$ 我们计算得

$$\begin{aligned}
F_{\Downarrow}(\phi_1)(\phi_2) &= \Big((Y'_{\mathbb{A}})^{\to}(\phi_1)\Big)(\phi_2) && \text{shown above}\\
&= \Big(\phi_1\circ(Y'_{\mathbb{A}})^{\natural}\Big)(\phi_2) && \text{definition of } (Y'_{\mathbb{A}})^{\to}\\
&= \Big(\bigvee_{x\in\mathbb{A}_0}\phi_1(x)\circ\Phi\mathbb{A}(-,Y'_{\mathbb{A}}(x))\Big)(\phi_2) && \text{definition of } (Y'_{\mathbb{A}})^{\natural}\\
&= \bigvee_{x\in\mathbb{A}_0}\phi_1(x)\circ\Phi\mathbb{A}(\phi_2,Y'_{\mathbb{A}}(x))\\
&= \bigvee_{x\in\mathbb{A}_0}\Phi\mathbb{A}(Y'_{\mathbb{A}}(x),\phi_1)\circ\Phi\mathbb{A}(\phi_2,Y'_{\mathbb{A}}(x)) && \text{Equation 2.4}\\
&\le \bigvee_{\kappa\in((\Phi\mathbb{A})_c)_0}\Phi\mathbb{A}(\kappa,\phi_2)\circ\Phi\mathbb{A}(\phi_1,\kappa) && \text{Proposition 6.3}\\
&= \Sigma_{\Phi\mathbb{A}}(\phi_2,\phi_1)\\
&= S_{\mathbb{A}}(\phi_1)(\phi_2)
\end{aligned}$$

因此我们得到 $F_{\Downarrow}\le S_{\mathbb{A}}$ 在 $\Phi\mathbb{A}$上，并且由于反向不等式总是成立，我们得到$F_{\Downarrow}=S_{\mathbb{A}}$。由命题 6.6， $\Phi\mathbb{A}$ 是 Φ-代数的。 ∎

6.8. Proposition.设 Φ 是定义在 $\mathbf{Cat}(\mathcal{Q})$ 上的预层类。 若 $\mathbb{A}$ 是一个 Φ-余完备且 Φ-代数的 $\mathcal{Q}$-范畴，则 $\mathbb{A}\simeq\Phi(\mathbb{A}_c)$。

Proof. 对于全嵌入 $j_{\mathbb{A}}\colon\ \mathbb{A}_c\to\mathbb{A}$、Yoneda 嵌入的余限制 $Y'_{\mathbb{A}}\colon\ \mathbb{A}\to\Phi\mathbb{A}$ 以及其左伴随 $\sup\colon\Phi\mathbb{A}\to\mathbb{A}$，考虑复合函子



那么，对于任意 $x\in\mathbb{A}_0$，我们有

$$\begin{aligned}
(G\circ F)(x) &= (\sup\circ(j_{\mathbb{A}})^{\to}\circ(j_{\mathbb{A}})^{\leftarrow}\circ Y'_{\mathbb{A}})(x)\\
&= \sup\Big(\mathbb{A}(-,x)\circ(j_{\mathbb{A}})_{\natural}\circ(j_{\mathbb{A}})^{\natural}\Big)\\
&= \sup(\Sigma_{\mathbb{A}}(-,x))\\
&= \sup(S_{\mathbb{A}}(x))\\
&\cong x,
\end{aligned}$$

因此 $G\circ F\cong 1_{\mathbb{A}}$。类似地，对于任意 $\phi\in\Phi(\mathbb{A}_c)$,

$$(F\circ G)(\phi)=((j_{\mathbb{A}})^{\leftarrow}\circ Y'_{\mathbb{A}}\circ\sup\circ(j_{\mathbb{A}})^{\to})(\phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= Y'_{\mathbb{A}}\Big(\sup((j_{\mathbb{A}})^{\rightarrow}(\phi))\Big) \circ (j_{\mathbb{A}})_{\natural} \\
&= \mathbb{A}\Big(-, \sup((j_{\mathbb{A}})^{\rightarrow}(\phi))\Big) \circ \mathbb{A}(j_{\mathbb{A}}-, -) \\
&= \mathbb{A}\Big(j_{\mathbb{A}}-, \sup((j_{\mathbb{A}})^{\rightarrow}(\phi))\Big) \\
&= \phi,
\end{aligned}
$$

（最后一个等式由命题 6.1 （5）得出），因此 $G \circ F = 1_{\Phi(\mathbb{A}_c)}$ 也成立。这就得到了所需的等价性。 ■

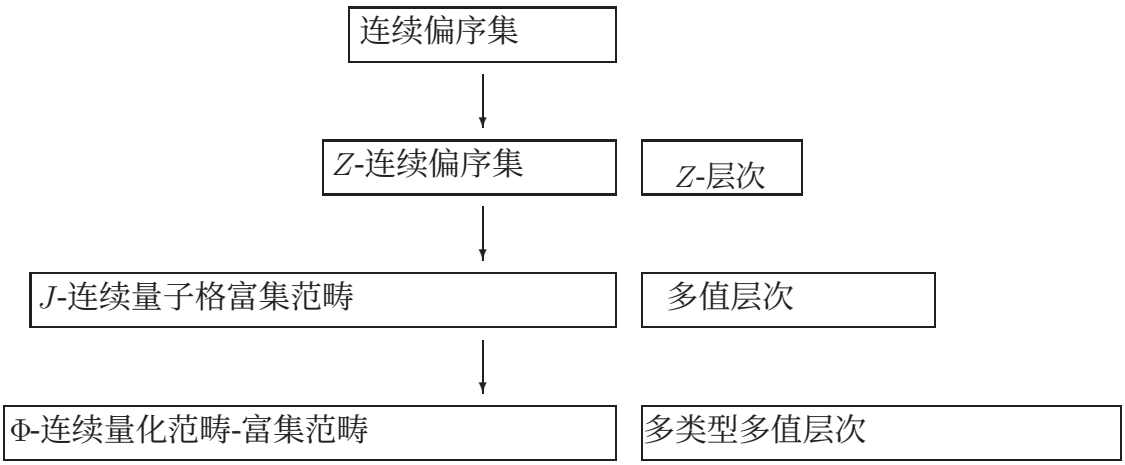
由命题 6.7 和 6.8，我们可以得出：

6.9. Theorem.设 Φ 是 $\mathsf{Cat}(\mathcal{Q})$ 上的一个饱和预层类。那么，一个 $\mathcal{Q}$-范畴$\mathbb{A}$ 是 Φ-余完备且 Φ-代数的，当且仅当 $\mathbb{A} \simeq \Phi\mathbb{B}$ 对于某个 $\mathcal{Q}$-范畴 $\mathbb{B}$。

如果 $\mathbb{A}$ 是一个骨架的 $\mathcal{Q}$-范畴，那么上述定理中的等价实际上是一个同构。

7. 结论及一些进一步的工作

本文将发展连续性的一些基本概念 $\mathcal{Q}$-范畴。我们主要提出了三类饱和预层类。它们不仅是域理论中理想概念的恰当推广，而且还具有不同的性质。这或许能为发展动态域理论提供有用的工具。迄今为止，偏序集中的连续性概念已经经历了一系列推广，如下图所示。（这里的连续偏序集、 Z-连续偏序集和 J-连续量子格富集范畴的概念，分别依照[14], [6] 和 [19],的定义。）



随着相关学科的快速发展，连续量化格富集范畴的许多方面都值得进一步研究：

(1) 完全分配的 quantaloid-富集范畴在 [52]中得到发展。在经典域理论中，我们知道，连续 dcpo 范畴、偏序集范畴与完全分配格范畴之间存在密切联系。因此，我们可以研究连续 quantaloid-富集范畴与其他一些结构（如完全分配 quantaloid-富集范畴）之间的范畴论关系。

（2）量化范畴-富集范畴之间的可指数化函子已在 [10] 中进行了研究。转向连续情形后，这一问题似乎变得更加复杂。因此，如何刻画连续量化范畴-富集范畴之间的可指数化函子，是一个有趣的问题。

（3）H¨ohle 在[21], 中发展了量化范畴富集拓扑空间理论，该理论为多值拓扑以及非交换拓扑提供了一个共同框架。这或许能启发我们研究连续量化范畴-富集范畴的拓扑方面。

域理论 也在序富集范畴的框架下进行了研究，该研究基于 Kock-Z¨oberlein 单子的概念，由 Hofmann 和 Sousa [17]开展。这些工作可以被视为沿不同方向将域理论推广到范畴层次，并且它们或许能够相互提供启发。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11871320、11501048）、陕西省自然科学基础研究计划（项目编号：2022JM-032）和中央高校基本科研业务费（项目编号：300102122109）资助。作者感谢审稿人提出的宝贵建议。

参考文献

[1] S. Abramsky, A. Jung, 《域理论》，载于：S. Abramsky, D. M. Gabbay, T. S. E. Maibaum（编），《计算机科学逻辑手册》第3卷，Clarendon Press，Oxford，1994年。[2] J. Ad´amek, H. Herrlich, G. E. Strecker, 《抽象范畴与具体范畴》，Wiley，NewYork，1990年。[3] M. H. Albert, G. M. Kelly，余极限类的闭包，《纯粹与应用代数学杂志》51（1988年）1–17。[4] P. America, J. J. M. M. Rutten，在完备度量空间范畴中求解自反域方程，《计算机与系统科学杂志》39（1989年）343–375。[5] H. J. Bandelt, M. Ern´e, Z-连续偏序集范畴，《纯粹与应用代数学杂志》30（1983年）219–226。

[6] A. Baranga，Z-连续偏序集，《离散数学》152（1996年）33–45。[7] R. Bˇelohl´avek，《模糊关系系统：基础与原理》，Kluwer Aca- demic Publishers，Plenum Publishers，New York，2002年。[8] J. B´enabou，双范畴导论，《数学讲义》47（1967年）1–77。[9] G. J. Bird, G. M. Kelly, A. J. Power and R. H. Street，2-范畴的柔性极限，《纯粹与应用代数学杂志》61（1989年）1–27。[10]M. M. Clementino, D. Hofmann, I. Stubbe，quantaloid-富集范畴之间的可指数化函子，《应用范畴结构》17（2009年）91–101。[11] M. Ern´e，Z-连续偏序集及其拓扑表现，《应用范畴结构》7（1999年）31–70。[12] L. Fan，定量域理论的新方法，《理论计算机科学电子札记》45（2001年）77–87。[13] R. C. Flagg, R. Kopperman，连续性空间：调和域与度量空间，《理论计算机科学》177（1997年）111–138。[14] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel 等，《连续格与域》，剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[15] J. He, H. Lai, L. Shen，迈向概率偏度量空间：距离分布之间的对角线，《模糊集与系统》370（2019年）99–119。[16] H. Heymans, I. Stubbe，闭筛量化范畴的初等刻画，《纯粹与应用代数学杂志》216（2012年）1952–1960。[17] D. Hofmann, L. Sousa，代数代数的若干方面，《计算机科学逻辑方法》13（2017年）1–25。[18] D. Hofmann, I. Stubbe，从富集得到拓扑：偏度量的奇特情形，《Cahiers Topologie G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques》59（2018年）307–353。[19]D. Hofmann, P. L. Waszkiewicz，量化族富集范畴中的逼近，《拓扑学及其应用》158（2011年）963–977。[20] U. H¨ohle，交换的残余l-幺半群，载于：U. H¨ohle, E.P. Klement（编），《非经典逻辑及其在模糊子集中的应用：模糊集理论数学基础手册》，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，1995年，第53–105页。[21] U. H¨ohle，拓扑的范畴基础及其在量化范畴富集拓扑空间中的应用，《模糊集与系统》256（2014年）166–210。[22] U. H¨ohle, T. Kubiak，量化族集合的非交换、非幂等理论，《模糊集与系统》166（2011年）1–43。

[23] G. M. Kelly，《富集范畴论基本概念》，伦敦数学会《数学讲义》丛书第64卷，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。[24] G. M. Kelly、V. Schmitt，关于具有某类余极限的富集范畴的札记，《范畴论及其应用》14（2005年）399–423。[25] R. Kopperman，所有拓扑都来自广义度量，《美国数学月刊》95（1988年）89–97。[26] H. Lai、L. Shen，量化范畴中富集的伴随函子的不动点，《模糊集与系统》321（2017年）1–28。[27] H. Lai、D. Zhang，完备与有向完备 Ω-范畴，《理论计算机科学》388（2007年）1–25。[28] H. Lai、D. Zhang、G. Zhang，模糊序中理想的比较研究，《模糊集与系统》382（2020年）1–28。[29] M. Liu、B. Zhao，量化范畴富集范畴上的闭包算子与闭包系统，《数学研究与应用》33（2013年）23–34。[30] M. Liu、B. Zhao，FZ-域的笛卡尔闭范畴，《数学学报（英文版）》29（2013年）2373–2390。[31] M. Liu、B. Zhao，模糊域的两个笛卡尔闭子范畴，《模糊集与系统》238（2014年）102–112。[32] S. G. Matthews，偏度量拓扑，载于《第八届拓扑及其应用夏季会议论文集》第728卷，1992年，176–185页。[33] S. J. O’Neill，偏度量空间理论及应用基础研究，博士论文，华威大学计算机科学系，1998年3月。[34] Q. Pu、D. Zhang，取值于 GL-幺半群的预序集，《模糊集与系统》187（2012年）1–32。[35] A. Pitts，上确界格富集范畴论在层论中的应用，《伦敦数学会会刊》57（1988年）433–480。[36] S. P. Rao、Q. G. Li，模糊 Z-连续偏序集，《抽象与应用分析》，第2013卷，文章编号607934，共14页，2013年。[37] K. I. Rosenthal，《量子格及其应用》，皮特曼数学研究笔记丛书第234卷，朗文，埃塞克斯，1990年。[38] K.I. Rosenthal，量化范畴、富集范畴与自动机理论，《应用范畴结构》3（1995年）279–301。[39] K. I. Rosenthal，《量子类理论》，皮特曼数学研究笔记丛书第348卷，朗文，埃塞克斯，1996年。

[40] J. J. M. M. Rutten，广义超度量域理论要论，《理论计算机科学》170（1996年）349–381。[41] D. S. Scott，计算数学理论纲要，载于《第四届普林斯顿信息科学与系统年会》，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，1970年，169–176页。[42] D. S. Scott，连续格、拓扑斯、代数几何与逻辑，载于《数学讲义》，施普林格，柏林，第274卷，1972年，97–136页。[43] L. Shen， $\mathcal{Q}$-闭包空间，《模糊集与系统》300（2016年）102–133。[44]L. Shen、Y. Tao、D. Zhang， $\mathcal{Q}$-分配子之间的 Chu 联系与反对角线，《纯粹与应用代数学杂志》220（2016年）1858–1901。[45]L. Shen、W. Tholen，拓扑范畴、量化范畴与 Isbell 伴随，《拓扑学及其应用》200（2016年）212–236。[46] L. Shen、D. Zhang，量子格范畴富集范畴：Isbell 伴随与 Kan 伴随，《范畴论及其应用》28（2013年）577–615。[47] M. B. Smyth，拟一致结构：调和域与度量空间，《计算机科学讲义》298（1988年）236–253。[48]R. H. Street，富集范畴与上同调，《数学问题》6（1983年）265–283。[49] I. Stubbe，量子格范畴富集的范畴结构：范畴、分配子、函子，《范畴论及其应用》14（2005年）1–45。[50] I. Stubbe，量子格范畴富集的范畴结构：张量范畴与余张量范畴，《范畴论及其应用》16（2005年）283–306。[51] I. Stubbe，量子格范畴富集的范畴结构：基量子格范畴上的序与理想，《应用范畴结构》13（2005年）235–255。[52] I. Stubbe，迈向“动态域”：完全连续的余完备 $\mathcal{Q}$-范畴，《理论计算机科学》373（2007年）142–160。[53] I. Stubbe，通过锥形余完备化定义“豪斯多夫距离”，《微分范畴拓扑学笔记》51（2010年）51–76。[54] I. Stubbe，量子格范畴富集范畴导论，《模糊集与系统》256（2014年）95–116。[55] Y. Tao、H. Lai、D. Zhang，量子格值预序：整体化与余完备性，《模糊集与系统》256（2014年）236–251。[56] K. R. Wagner，利用富集范畴求解递归域方程，博士论文，卡内基梅隆大学，1994年。

[57] K. R. Wagner，Ω-范畴中的下极限收敛，《理论计算机科学》184（1997）61–104。[58] R. F. C. Walters，层与柯西完备范畴，Cahiers Topologie G´éo- m´étrie Diff´érentielle Cat´égoriques 22（1981）283–286。[59] R. F. C. Walters，作为柯西完备范畴的 site 上的层，《纯粹与应用代数学杂志》24（1982年）95–102。[60] P. Waszkiewicz，定量连续域，《应用范畴结构》11（2003）41–67。[61] J. B. Wright，E. G. Wagner，J. W. Thatcher，归纳偏序集与归纳闭包的统一方法，《理论计算机科学》7（1978）57–77。[62] W. Yao，通过模糊集研究定量域：第一部分：模糊有向完备偏序集的连续性，《模糊集与系统》161（2010年）983–987。[63] W. Yao，F. G. Shi，通过模糊集研究定量域：第二部分：模糊有向完备偏序集上的模糊 Scott 拓扑，《模糊集与系统》173（2011）60–80。[64] W. Yao，B. Zhao，Ω-范畴与代数 Ω-范畴之间的对偶性，Electronic Notes in Theoretical Computer Science 301（2014年）153–168。[65] Q. Y. Zhang，L. Fan，定量域中的连续性，《模糊集与系统》154（2005年）118–131。

加州大学理学院 710064，中国西安

陕西师范大学数学与统计学院 710062，中国西安

纯粹与应用数学实验室，滨海大学 F. Buisson 街 50 号，62228 加来，法国

电子邮箱： liumin@chd.edu.cn
hansw@snnu.edu.cn
isar.stubbe@univ-littoral.fr