对称性 分类与方形瓷砖结扣图案的枚举 s

Venkatraman Gopalan材料科学与工程系，宾夕法尼亚州立大学大学公园校区，宾夕法尼亚州*16802*vgopalanpsu@gmail.com

摘要

普利科拉姆是一种古老的数学艺术形式，如今在印度南部仍有超过25万人从事这一艺术。“Pulli”在泰米尔语中意为“点”。普利科拉姆有一种特定类型称为结扣图案：人们使用米粉排列一系列点，并依据三条简单规则在其周围绘制线条。本文聚焦于由方形瓷砖拼成的结扣图案。我们根据点群对称性对科拉姆图案进行分类，并推导出用于计算每种对称类型科拉姆图案数量的公式。此外，本文还提出了一些有趣的约束问题，可用于围绕这种优雅的艺术形式设计新游戏。

关键词：普利科拉姆、结扣图案、线状图案、kolam 拼块、方形瓷砖结扣图案、点群

1 引言

普利科拉姆在印度南部已有数千年的历史，目前主要分布于泰米尔纳德邦、安得拉邦、特伦甘纳邦、喀拉拉邦和卡纳塔克邦，这些地区目前总人口超过2.6亿。普利科拉姆有一种特殊类型称为结扣图案（在泰米尔语中意为“结形图案”），或称线状图案（意为“线形图案”）。本文聚焦于由正方形瓷砖构成的结扣图案。我们将其称为方形拼块 kolam。不过需要注意的是，尽管瓷砖本身是正方形，拼合而成的科拉姆图案不一定是正方形；只要按照以下三条规则拼接正方形瓷砖，就可以构成任意形状：（1）所有点都分别被曲线围住，（2）线交叉是离散的点，且（3）所画的线没有松散端。

2 六种基本的 kolam 拼块

本文讨论的六种方形瓷砖如图1所示。我们为它们取了相应的描述性名称。每块瓷砖的中心都有一个点，并有一条或多条曲线的线段将其围住。对于这六种瓷砖，松散端只出现在瓷砖边的中点处，并以灰色箭头标示。Circle、Drop、Eye、Door、Fan 和 Diamond 分别有0、1、2、2、3和4个松散端。当两块瓷砖的松散端相互接合时，它们会彼此抵消，相应的线会连续地穿过两块瓷砖。需要注意的是，除了这六种基本类型之外，还有许多其他瓷砖类型，事实上是无限多种。我们将在未来的研究中介绍这类瓷砖类型的扩展。

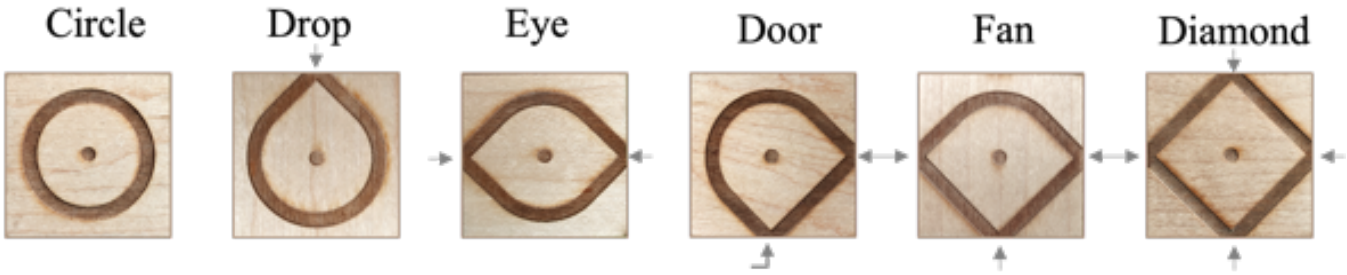

图1。本文所讨论的六种方形 kolam 拼块。灰色箭头表示松散端。这些拼块由作者与 Amy Alznauer博士合作设计，并由 Christopher Danielson 实体制作。

图1中的瓷砖经过精心设计，使科拉姆的三条规则中有两条自动得到满足，即：(1) 每个点都被单独围住；(2) 线只在离散点处相交（即瓷砖边的中点）。对于每块正方形瓷砖，其松散端的数量恰有六种可能：0、1、2（位于相邻边）、2（位于相对边）、3或4；图1中每种类型的瓷砖恰好各有一块。因此，拼接这些瓷砖时，只需注意剩下的一条规则：(3) 不留松散端。具体做法是排列瓷砖，使能够彼此抵消的松散端两两配对，从而消除所有松散端。任何不含松散端的瓷砖拼接图案都可以视为有效的普利科拉姆。

3 前人文献

过去五十年间，许多开创性研究从数学角度揭示了科拉姆的形式。这些研究包括将科拉姆转化为数字和线性图示（Yanagisawa & Nagata，2007年）、运用图、图像和数组文法（Siromoney 等人，1974；Siromoney & Siromoney，1987；Subramanian & Siromoney，1987；David 等人，2007；Pradella 等人，2011；Siromoney 等人，1976；Siromoney 等人，1983；Demaine 等人，2007；Subramanian，1979）、扩展粘贴方案（Robinson，2007）、幺半群态射（Allouche 等人，2006）、L系统和P系统（Prusinkiewicz & Hanan，1989；Subramanian，2007）、手势词汇表（Waring，2012）、纽结理论（Ishimoto，2007）以及镜面曲线（Gerdes，1999）。Yanagisawa & Nagata 从科拉姆的五条规则（而非此处的三条规则）入手，并定义了可拼接成更大科拉姆图案的正方形单位瓦片。他们定义了点之间两种最近邻相互作用（线相交记为1，不相交记为0），并将这些瓦片转换为二进制数阵列。在 Gopalan & VanLeeuwen（2015）的研究中，采用纯粹的拓扑方法，只规定定义科拉姆的三条强制规则。他们将这些思想推广到任意点的排列（不一定是方阵），将“相互作用”推广到任意两点之间（而不仅限于最近邻或次近邻），并推广到相互作用点对之间存在三条或更多条“连接”的情形。他们的研究表明，对于给定数量的点，*N,* 母型科拉姆图案的数量有限，所有其他科拉姆图案都由这些母型衍生而来。同一母型类别中的所有母型科拉姆图案彼此同伦（或拓扑等价）。

本研究与 Gopalan & VanLeeuwen 所采用的方法密切相关；在该方法中，我们将研究的科拉姆图案限定为使用方形拼块创建的图案。点之间的相互作用仅限于最近邻点。这也是 Yanagisawa & Nagata（2007年）和 Nagata（2015年）具体研究的情形；不过，他们在每个拼块中放置了多个点，并以线性图示和纽结理论来讨论科拉姆图案。相比之下，我们运用群论对方形拼块 kolam 进行分类，并为其赋予晶体学中广为人知的点群。不同科拉姆图案类型的枚举也采用了这些对称性分类。Hall, Almeida & Teixeira（2019年）对 Truchet瓦片玫瑰图的研究就是这种对称性分类与枚举的一个例子。

4 方形拼块 kolam 的八种对称类型

使用图1所示的六种基本 kolam 拼块，我们可以构造科拉姆图案。所有由这些拼块构造的科拉姆图案

方形瓷砖可以 归类为图2所示的八种点群对称性之一 .

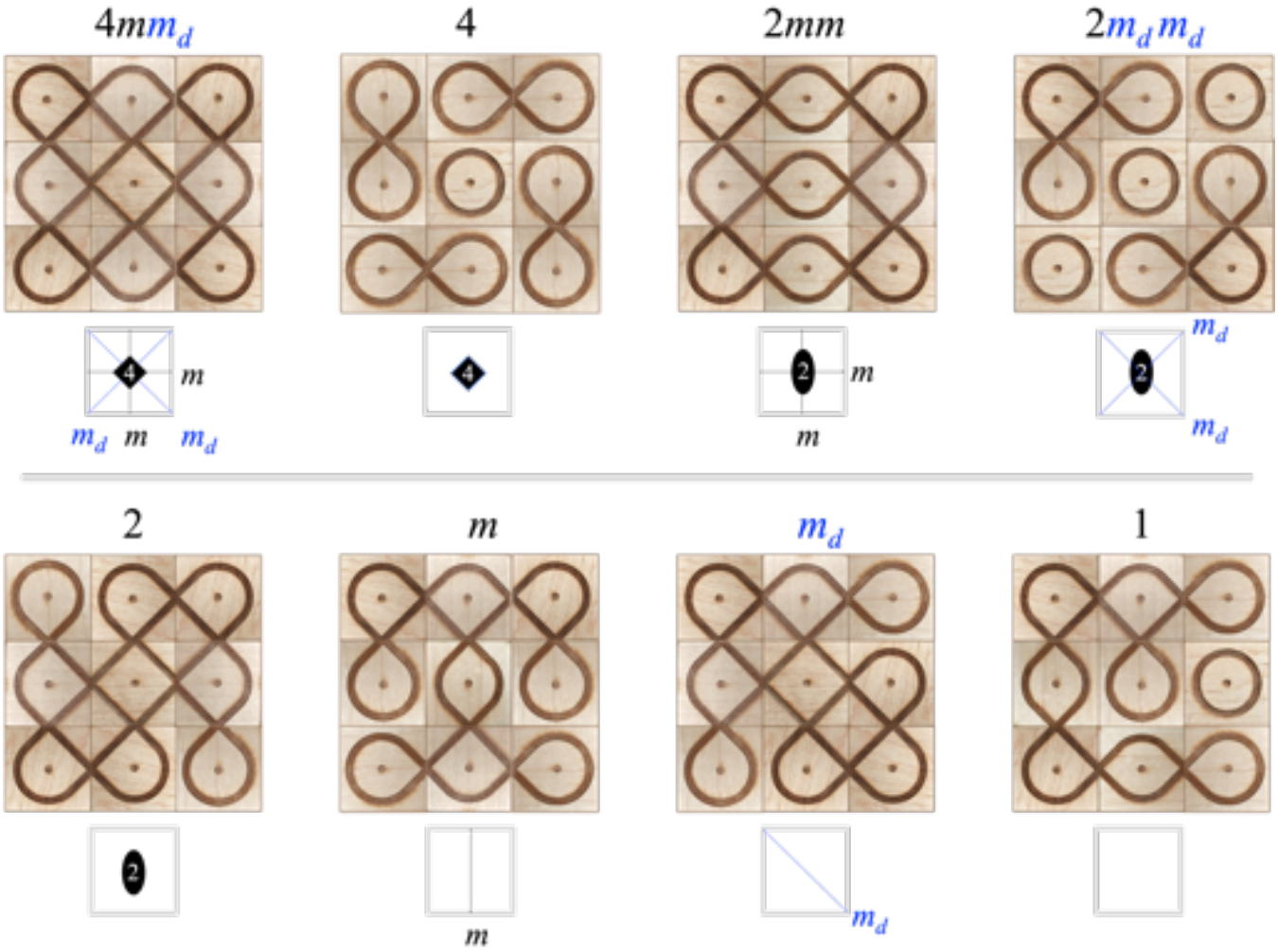

图2。所有方形拼块 kolam 的对称性都可以归类为上方所示的八种点群之一。每幅科拉姆图案旁边的灰色正方形代表整个图案，并展示其对称元素。线条表示镜面对称轴，黑色正方形表示四重旋转中心，菱形表示二重旋转中心。每幅科拉姆图案均由图1所示的六种基本瓷砖类型中的一部分构成。

群是具有特定必备性质的数学集合（Washburn 与 Crowe，1991）。对于给定的科拉姆图案，对称群是对该科拉姆图案执行后仍能使其保持不变的所有可能对称操作的集合。点群规定，所有对称操作都必须至少保持科拉姆图案中的一个点不动。在我们的情况下，这个点通常是科拉姆图案的中心

科拉姆图案可绕其旋转，所有镜面对称轴也都经过该轴。旋转和镜面反射是与二维科拉姆图案相关的点群对称操作。以下是一些有用的术语：

（1）一条 p-重旋转轴意味着，科拉姆图案可以绕该轴旋转 360°/p，且旋转后科拉姆图案看起来仍然相同，其中p为自然数。在方形拼块 kolam 中，只有四重（90°）、二重（180°）和一重（360°）旋转轴是可能的。

（2）镜面用m表示，它会反射垂直于镜面的坐标，同时保持与镜面平行的其他坐标不变。所有对称镜面都必须经过科拉姆图案的中心。在方形拼块 kolam 中，有两种镜面：一种平行于科拉姆图案的边（在图2中用标有m的黑线表示），另一种位于科拉姆图案的对角线上（在图2中用m_d线表示）。

在本文中，我们讨论科拉姆图案的对称性时，不仅包括点和曲线，也包括印有这些图案的方形瓷砖。方形瓷砖科拉姆图案可能具有的最大对称点群，其晶体学记号为 $4mm_d$，如图2所示。科拉姆图案旁标有$4mm_d$的灰色方框示意表示整个科拉姆图案，而各种对称操作则以符号形式表示在这个灰色方框内。四重旋转轴垂直于纸面，穿过该科拉姆图案的中心；它允许整个图案旋转 360°/4 = 90°，旋转后图案与旋转前完全相同。存在四重旋转对称，必然意味着也存在二重旋转轴。所有科拉姆图案也都显然具有一重旋转对称性。还有两组镜面对称轴穿过该科拉姆图案的中心：黑色标出的镜面对称轴（m）平行于科拉姆图案的边，而蓝色标出的镜面对称轴（即m_d）位于对角线上。两条黑色镜面对称轴是对称等价的（共轭的），因为四重旋转轴可以将其中一条旋转至另一条。同理，两条蓝色镜面对称轴也等价。然而，黑色和蓝色的镜面对称轴并不等价，因为点群中的任何对称操作都无法将黑色镜面对称轴变为蓝色镜面对称轴，反之亦然。在群论中，镜面对称轴集合m和m_d被称为属于不同的类。请注意，这些对称操作中的任意两种（四重旋转、关于m的反射，以及关于m_d的反射）都会自动产生第三种。

有了上述详细解释，图2中所示的另外七种对称点群应该就很清楚了，即：4、2mm、2m_dm_d、2、 m、m_d和1。请注意，点群2mm具有两条不等价的

镜面对称轴（即它们属于不同的类），因为群内没有任何对称操作能够将其中一条镜面对称轴变换为另一条。点群1除一重轴外没有其他对称操作，即绕位于其中心的轴旋转360°；一重轴不作标注。顺便提一下，在晶体学中，点群m和m_d不会被单独区分，但出于科拉姆图案的实际和艺术原因，我们选择在此将它们区分开来。点群2mm和2m_dm_d这一对也是如此。

5 按对称群统计科拉姆数量

在图1中，瓦片有无穷多种可能的排列方式；为进行枚举，我们只考虑两种基本类型的方形瓷砖科拉姆模板。它们分别是（1）由kl块瓷砖组成的单矩形（1R）（因此有kl个点），以及（2）由$kl + (k-1)(l-1)$块瓷砖组成的双矩形（2R）（因此有$kl + (k-1)(l-1)$个点）。图3展示了两个示例；它们的对称类型为2mm（见中心示意图）。不过，图2中的其他所有对称类型也都可能出现。对于方形模板，$k = l$.

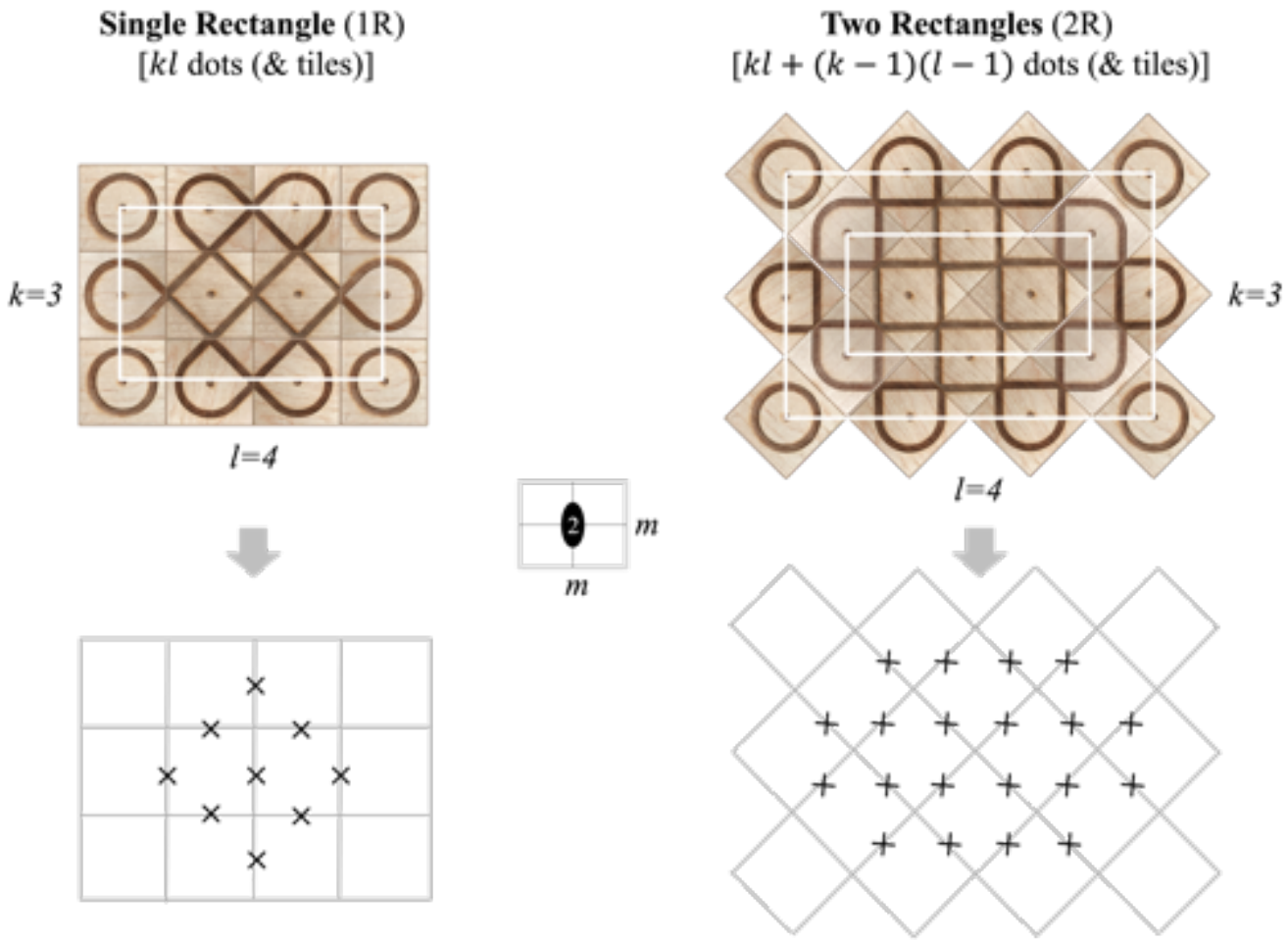

图3. 枚举中考虑的两种基本科拉姆模板。单矩形（1R）模板（左侧图像）由边沿水平方向和垂直方向对齐的方形瓷砖构成，包含$kl = 3 \times 4 = 12$ 个点（其 3 x 4 矩形以白色勾勒）。双矩形（2R）模板（右侧图像）由边沿对角线方向对齐的方形瓷砖构成，包含$kl + (k-1) \times (l-1) = 3 \times 4 + 2 \times 3 = 18$ 个点（其3×4 矩形和2×3 矩形以白色勾勒）。下方的两幅图用灰色勾勒出上方科拉姆图案中的瓷砖，× 符号则标示出科拉姆图案中线条交叉的位置。

由于灰色网格中的每个方格，对于每种可能的线交叉数量和位置，都恰好对应一块瓷砖，因此，构成图3顶部两个科拉姆图案所需的全部信息，都包含在底部的线交叉示意图中。因此，枚举可能的科拉姆图案的一种方法是计算共享边的总数，并为每条共享边指定一条线

交叉、‘×’或不交叉。不考虑任何对称性时（即对于图2中的点群1），每条共享边都可以独立指定。对于其他对称群，只需独立指定其中一部分边，即可构造出完整的科拉姆图案。

因此，根据科拉姆图案所需的对称性，只需标记最少数量的共享边“$_s^{PG}$，并为其指定两种状态之一：× 或“不×”，即可生成完整的科拉姆图案。（此处的‘点群’表示正在枚举的科拉姆图案所属的点群。）对于没有对称性的科拉姆图案（对称群为1），需要指定每条共享边的状态。但对于其他所有情况，只需指定部分共享边的状态，因为对称操作会相应确定未指定的共享边状态。例如，对于具有点群对称性4%%$_d$ 、采用1R模板且包含&^{2} 个瓦片的科拉姆图案，共有2&(& − 1)条共享边；其中，如果&为偶数，只需指定&^{2}/4条共享边的状态；如果&为奇数，只需指定(&^{2} − 1)/4条共享边的状态。因此，对于& = 5，“$_s^{4mm_d}$ = 6。不难为图2所示8个点群中的每一个，推导出图3所示1R和2R模板的类似通式；这些通式列于附录的表1中。现在可以如下计算每个对称群的唯一科拉姆图案数量：

$$0(12) = 2^{E_s^{PG}} \tag{1}$$

这里，上标 *PG* 可以是图2所示的八种点群对称性之一。为了了解生成的科拉姆图案数量，附录中的表2列出了图3中每个模板对应的一些较小科拉姆尺寸的独特科拉姆数量。由于“$_s^{PG}$ ”的定义已经考虑了对称性，因此它会从上述公式（1）的计数中排除任何重复科拉姆。这里所说的重复，是指一个已完成的科拉姆仅经过旋转或镜面变换后，并不算作独特的科拉姆；因此，这些图案不会被计入。即便如此，可能的科拉姆数量仍会迅速变得非常庞大。对称性越高，独特科拉姆的数量越少；对称性越低，独特科拉姆的数量越多。图4和图5展示了具有最高对称性 4mm_d 的所有方形拼块 kolam：对于 2R模板，尺寸最大达到 3 × 3 ；对于 1R模板，尺寸最大达到 4 × 4 。其他科拉姆也可以通过图3所示的技术以类似方式构造。

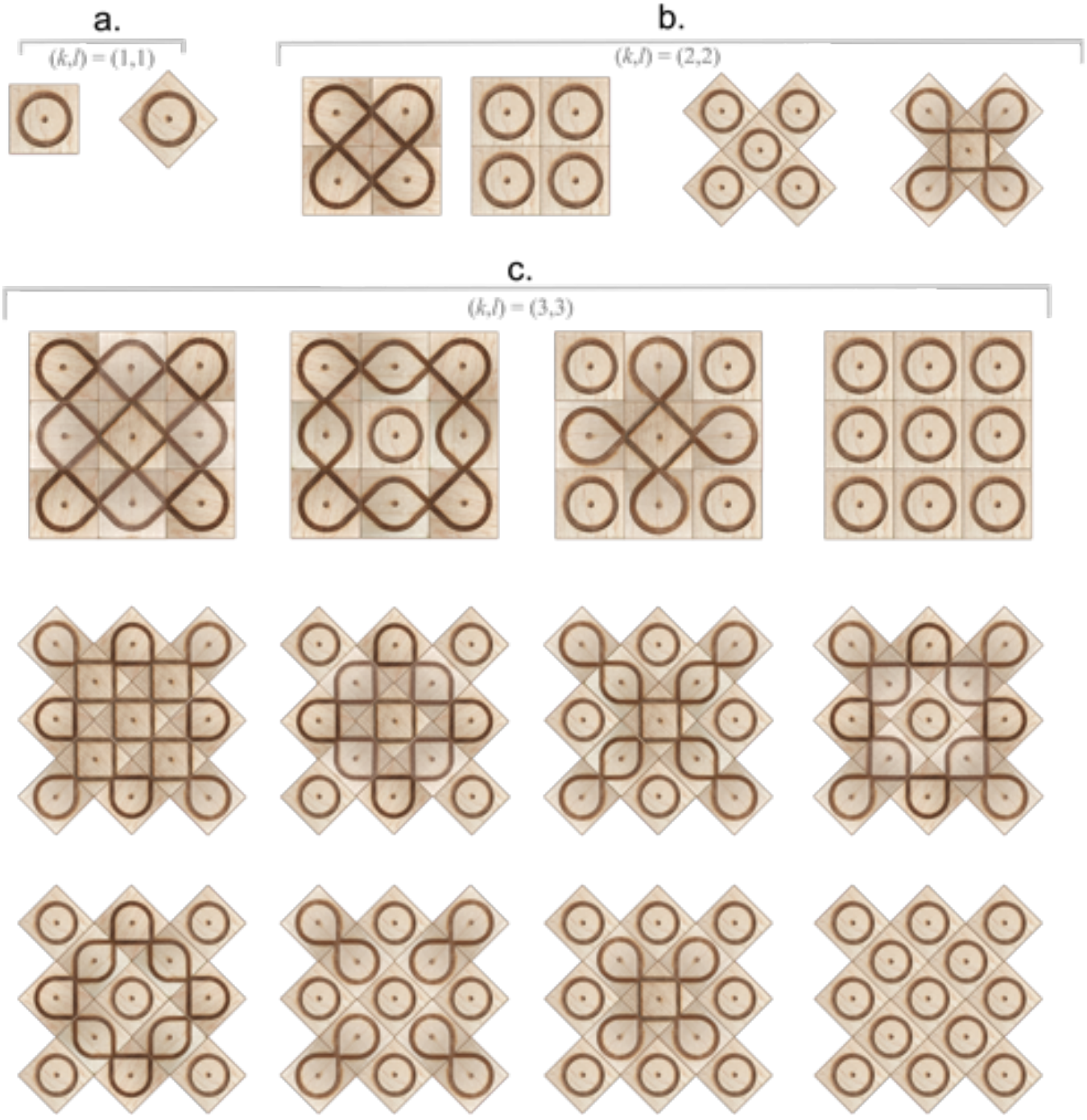

图4. (a) $k \times l = 1 \times 1$、(b) $k \times l = 2 \times 2$和(c) $k \times l = 3 \times 3$情况下，具有 $4mm_d$ 对称性的所有1R和2R模板科拉姆图案。计数结果与表2一致。

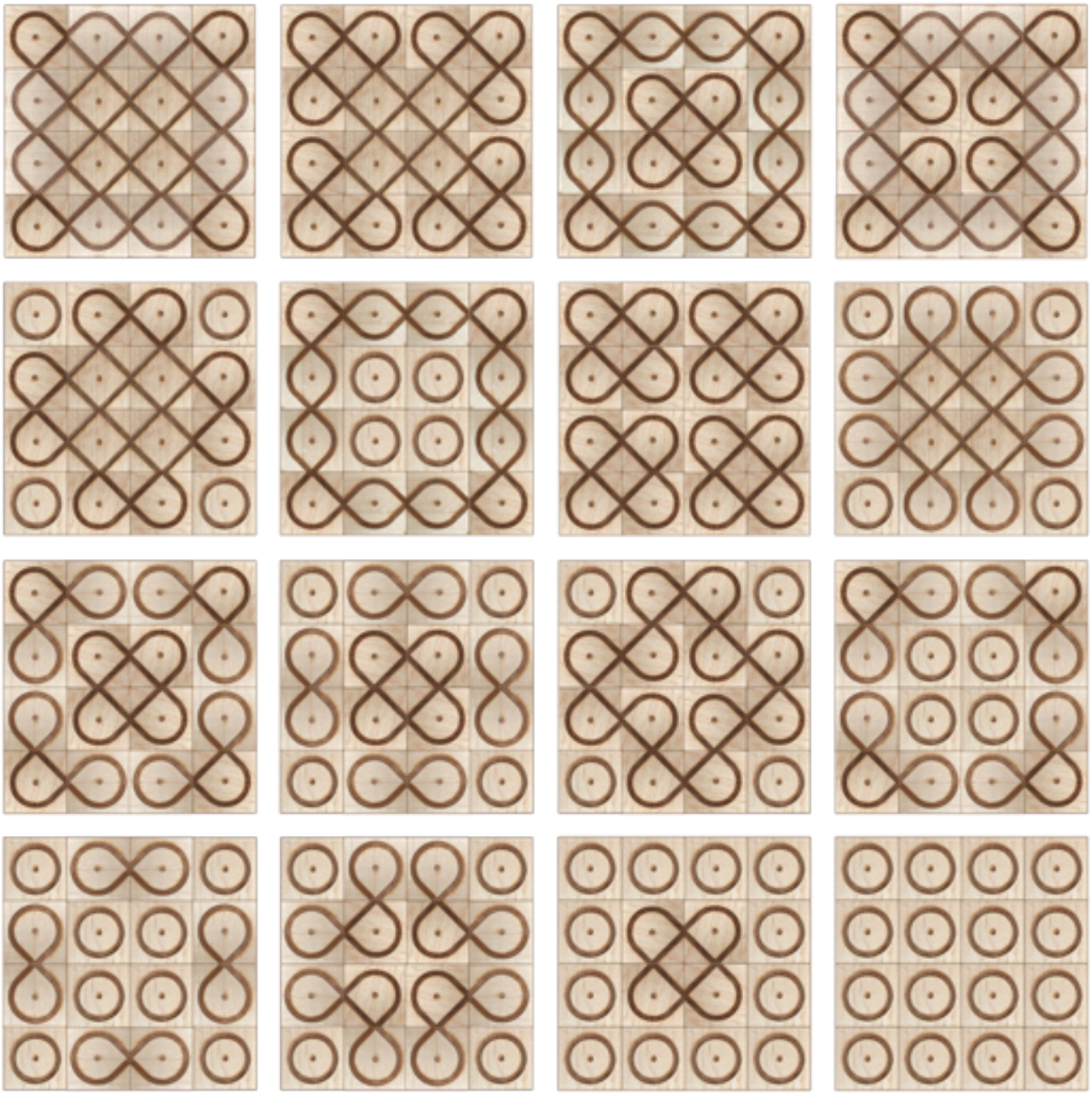

图5。具有 4毫米$_d$ 对称性的所有 1R模板科拉姆图案，其中 $k \times l = 4 \times 4$。数量16与表2一致。

6 科拉姆存在的充要条件

一个充分条件是　　构成科拉姆图案的条件是《引言》中给出的三条规则。其中两条　　f

规则通过图1中的科拉姆拼块构造自动得到满足。因此，对于方形拼块科拉姆图案而言，充分条件就是不存在松散端。

现在，我们可以确定实现没有松散端所需的一些必要条件。首先，我们证明

没有松散端的必要条件是：

科拉姆中的 *Drop* 拼块和 *Fan* 拼块总数（见图*1*）必须为偶数。（2）

给定指定的瓦片集合后，该条件可以帮助我们轻松判断一个科拉姆何时无法拼成。例如，假设我们得到以下瓦片，并被要求拼成一个科拉姆：一个 Circle、三个 Drop 拼块、两个 Eye 拼块、两个 Fan 拼块、四个 Door 拼块和一个 Square 拼块。甚至在开始之前，我们就可以判断出，不可能使用这些瓦片拼成一个不留下松散端的科拉姆。这是因为我们有三个 Drop 拼块和两个 Fan 拼块，总数为五，是奇数；因此无法拼成科拉姆。

必要条件（2）的证明很直接。令N_i表示类型为i的瓦片数量，其中i 可以是C（Circle）、Dr（Drop）、E（Eye）、Do（Door）、F（Fan）或Di（Diamond）。回顾一下，这些瓦片分别具有0、1、2、2、3和4个松散端。由于松散端必须成对出现才能彼此完全抵消，因此我们可以得出：

$$0N_C + 1N_{Dr} + 2(N_E + N_{Do}) + 3N_f + 4N_{Di} = 2n, \qquad (n, \text{a natural number}) \qquad (3)$$

这意味着$N_{Dr} + 3N_f$必须为偶数，因此$N_{Dr} + N_f$ 也必须为偶数。

即使松散端的数量为偶数，原则上可以湮灭，也必须有足够数量的瓷砖之间的共享边，才能实现这种湮灭。如果“t_s 表示一个科拉姆中的共享边总数，且一对松散端在一条共享边处彼此湮灭，那么由方程（3）可知，

$$\& \leq "_s^t < 2T \qquad (4)$$

其中 T 是组成科拉姆所指定的固定瓦片数，也就是说，$T = N_C + N_{\mathrm{Dr}} + N_E + N_{Do} + N_f + N_{Di}$.。第一个不等式断言，松散端对的总数应小于或等于共享边的数量，“t_s；根据第二个不等式，共享边的数量应小于科拉姆中瓦片总数 T 的两倍。在开始用一组正方形瓷砖拼装科拉姆之前，我们就可以检验式（2）和式（4）中的第一个不等式所给出的必要条件。式（4）中的第二个

不等式总是成立，并非用来进行“检验”；注意到任何科拉姆都不可能让每块瓷砖的所有边都成为共享边，因为根据定义，科拉姆的外围边不会与任何其他瓷砖共享，因此可以推导出该不等式。由于，T块正方形瓷砖有 $4T$ 条边，其中 $2"_s^t$ 条属于共享边，因此，$2"_s^t < 4T$，由此可得 $"_s^t < 2T$。

7 对称性施加的条件

要构成具有特定对称性的科拉姆，对所需瓷砖总数T还会施加额外限制。

• 4重旋转：如果期望的科拉姆具有四重旋转轴，那么当T为偶数时，必须有四组T/4块瓷砖，因此T必须能被4整除。当T为奇数时，则必须有四组（$T-1$）/4块瓷砖；因此（$T-1$）必须能被4整除。此外，当 T为奇数时，必须有一块瓷砖放置在科拉姆的中心。四重轴将穿过这块中心瓷砖。对于T=1，只有一块正方形瓷砖，即Circle，可以单独构成科拉姆；将瓷砖的正方形形状计算在内时，它具有四重对称性；如果不考虑正方形瓷砖模板而只考虑圆形，则它具有∞重旋转轴。对于任何不是自然数平方的T，都不可能构成具有四重对称性的科拉姆，因此$T=2$ 或$T=3$ 等情况都会被排除。对于$T\geq 4$，假设满足关于 T 的必要条件，则当T为奇数时，至少需要指定（$T-1$）/4 + 1 块瓷砖；当T为偶数时，至少需要指定T/4块瓷砖，才能构成完整的科拉姆。

• 2重旋转：如果所需的科拉姆具有二重旋转轴，那么当T为偶数时，必须有两组T/2 块瓷砖（这是因为T能被 2 整除）。当T为奇数时，必须有两组($T-1$)/2 块瓷砖。此外，当T为奇数时，必须将一块奇数瓷砖放在科拉姆的中心，也就是二重旋转轴所在的位置。对于$T=1$，只有 Circle 拼块符合条件。对于$T\geq 2$，若T为奇数，则至少需要指定($T-1$)/2 + 1 块瓷砖；若T为偶数，则需要指定T/2 块瓷砖，才能构成完整的科拉姆。

• 一条镜面，*m*： 对于一个 1R模板，若要使一条镜面平行于其中一个边的方向（k 或 l），且具有 $T=k\times l$ 个瓦片，并且 T 为奇数，则（$T-k$）和 $(T-l)$ 都能被 2 整除。在这种情况下，只需指定（$T+k$）/2 个瓦片，就能生成整个科拉姆，并使镜面平行于 k边。由于 T 为奇数，k 必须为奇数，因此科拉姆中会有被镜面m切开的瓦片；这些瓦片 自身必须关于m具有镜像对称性，这就排除了 Door 拼块。（关于k的最后两点，也可以将k替换为l后重复使用。）

当T为偶数时，假设l 为偶数且k为奇数，如果镜面m 平行于k边，则只需指定T/2 个瓦片；此外，没有瓦片会被m切开。若要使镜面m平行于l边，则需要指定（T + 1）/2 个瓦片来生成整个科拉姆，而被m切开的瓦片 不能是 Door 拼块。当k和l 均为偶数时，没有瓦片会被m切开，只需指定T/ 2 个瓦片。

对于一个2R模板，可以进行与1R相同的分析，但必须分别考虑两种情况：$T = kl$瓦片，以及$(k - 1)(l - 1)$个额外瓦片。与1R模板不同，2R科拉姆图案总会有被m切分的瓦片，而这些瓦片必须关于各自方形瓷砖的对角线呈镜像对称。这使得被镜面m切分的瓦片只能是圆形、菱形或门形。

• **两条镜线，m：**如果方形瓦片1R科拉姆中只有两条镜线，它们必须相互正交（垂直）。此外，它们的交点处存在一个二重旋转轴；换言之，其点群对称性为2mm，如图2所示。上述关于二重旋转和镜面m所施加的约束同样适用于这种1R科拉姆。1R科拉姆的瓦片总数为T =:;。具有2mm对称性的1R科拉姆所需指定的最少瓦片数为：若k为奇数且l为偶数，则为$(T + l)/4$；若 l 为奇数且 k 为偶数，则为 $(T + k)/4$ ；若 k 和 l 均为奇数，则为 $(T + l + k)/4$ ；若 k 和 l 均为偶数，则为T/4个瓦片。1R科拉姆镜线上的瓦片不能是Door 拼块。

对于 2R 科拉姆，T = : ； + （: − 1）（； − 1）。对于具有 2mm 对称性的 2R 科拉姆，适用于 1R 科拉姆的相同考虑同样适用，但需要分别应用于带有 kl 瓷砖的 1R 科拉姆，以及带有（k − 1）（l –1）瓷砖的 1R 科拉姆，然后将两者相加，得到需要指定的瓷砖总最小数量。通过执行这一过程，对于具有 2mm 对称性的 2R 科拉姆，在 k 为偶数、l 为奇数，或 k 为奇数、l 为偶数的情况下，需要指定的瓷砖最小数量为（$T + k + l$ -1）/4。对于 k 为奇数、l 为奇数的情况，需要指定的瓷砖最小数量为（T+ $k + l$ ）/4；而对于 k 为偶数、l 为偶数的情况，则为（$T + k + l$ - 2 ） /4。与 1R 科拉姆不同，2R 科拉姆总会有位于镜线上的瓷砖，并且这些瓷砖必须关于各个正方形瓷砖的对角线具有镜像对称性。这将 2R 科拉姆中被镜面 m 切割的瓷砖限制为 Circle、菱形或门形。

• **一条对角镜像，m_d：**具有 $T = kl$ 瓦片的 1R 科拉姆只有在 $k = l$ 且因此 $T = k_2$ 必须是平方数时，才可能具有对角镜像 m_d 对称性。此外，只有 Circle、门形和菱形拼块可以位于此类 1R 科拉姆的对角线上。同时，$(T - k)$ 必须是偶数，

并且至少需要 $(T + k)/2$ 个瓦片才能完成完整的科拉姆。

对于具有一条对角镜像m_d且平行于模板的一条对角线的 2R 模板，$T = k^2 + (k - 1)^2$ 是两个平方数之和。此外，Door 拼块不能位于m_d上。具有一条m_d 镜面对称轴的 2R 科拉姆，需要（$T + 2k + 1$）/2 块瓦片才能完成整个科拉姆。

• 两条对角镜面对称轴 md：点群 2mdmd 和 4mmd 各有一对彼此正交的对角镜面对称轴。这些科拉姆图案的瓦片数量必须是平方数：对于 1R，为 T = k2；对于 2R，为 $T = k^2 + (k - 1)$ 2。对于 2mdmd 和 4mmd 的 1R 科拉姆图案，对角线上只能放置 Circle、Door 拼块和 Diamond 拼块。如果 k 为奇数，构造整个 2mdmd 1R 科拉姆所需指定的最少瓦片数为（T + 2 k + 1）/4；如果 k 为偶数，则为（T + 2k ）/4。对于 4mmd 的 1R 科拉姆图案，如果 k 为奇数，所需的最少瓦片数为（T + 4k + 3）/8；如果 k 为偶数，则为（T + 2k）/8。

对于 $2m_dm_d$ 和 $4mm_d$ 2R 科拉姆，可以采用类似于 1R 科拉姆的分析方法，先分析 k^2 1R 科拉姆，再分析 $(k - 1)^2$ 1R 科拉姆。将两者相加，即可得到完成该科拉姆所需的最少瓷砖数量。对于 $2mm_d$2R 科拉姆，无论 k+4k-1)/4，还是 k 为奇数或 k 为偶数，都必须指定最少（T+4 k-1)/4 块瓷砖。对于 $4m_dm_d$ 2R 科拉姆，当 k 为奇数时，必须指定最少（T+6k+1）/8 块瓷砖；当 k 为偶数时，必须指定最少（ T+6k-1 ） /8 块瓷砖。2R 科拉姆中始终会有瓷砖位于镜线上，并且这些瓷砖必须关于各自正方形瓷砖的对角线具有镜像对称性。因此，2R 科拉姆中位于镜m_d 线上的瓷砖只能是 Circle、门形或菱形瓷砖。

•1一重旋转： 所有科拉姆图案都具有一重旋转对称性。如果这是科拉姆图案唯一具有的对称性，那么除构成科拉姆图案的三条规则外，不存在其他限制。

8 讨论与结论

我们将所有方形拼块 kolam 划分为 8 个对称群，并给出了两种特定模板的计数表达式，即单矩形（1R）和双矩形（2R）。最后，我们指出了本研究的一些未来拓展方向。

我们在图1中仅展示了6种基本方形瓷砖；原则上，通过为环绕点的线添加装饰性曲线，以及考虑非最近邻点之间的连通性，还可以构造出更多瓷砖。瓷砖内部的线条也可以采用不同的朝向，以便拼出更多种类的科拉姆图案。拼接图1中的方形瓷砖，只能生成点呈正方形或矩形网格排列的科拉姆图案。一般而言，应当可以实现任意的点排列。六边形瓦片是这项工作的自然延伸，将在另一项研究中

探讨。2R模板与六边形网格模板之间一个有趣的变换是：将方形2R模板沿一个方向拉伸√3 后，就会变成正六边形网格。本文对六种基本方形瓷砖的讨论并不全面，尚未涵盖用多边形瓦片构造所有类型科拉姆图案的可能性。尽管如此，如表2所示，仅用这六种瓷砖所能构成的科拉姆图案数量会随着瓷砖数量的增加而呈指数级增长，充分展现了这种艺术形式的丰富性。

9 致谢

我谨向西北大学的 Amy Alznauer博士致谢，感谢她协助设计这些科拉姆正方形瓷砖图案；同时感谢 Christopher Danielson 用枫木制作这些瓦片。

10 参考文献

Allouche, P.G., Allouche, J-P, Shallit, J.（2006）印度科拉姆：瓦努阿图群岛沙地上的图案、谢尔宾斯基曲线与幺半群态射，Amm. Inst. Grenoble, 56, 7, 2115-2130。

Andreia Hall, Paulo Almeida & Ricardo Teixeira（2019）探索 Truchet瓦片玫瑰图中的对称性，《Journal of Mathematics and the Arts》，13:4, 308-335，DOI: 10.1080/17513472.2019.1581963

David, N. G., Robinson, T., Thomas, D. G., Balamurugan, B. J., Samuel, S. C.（2007年）科拉姆图案与蜂窝图案的图语法，《International Journal of Mathematical Science》，6, 355-367。

Demaine, E. D., demaine, M. L., Taslakian, P., Toussaint, G. T.（2007年）沙画与高斯图，《数学与艺术杂志》，1:2，125-132。

Gerdes, P.（1999）论隆达设计及其若干对称性，《视觉数学》（ISSN 1821-1437）1,1, http://symmetry-us.com/journals/paulus/index.html

Gopalan, V.、Vanleeuwen, B.K.（2015）《使用拓扑方法创建任意普利科拉姆：一种源自印度南部的艺术形式》，Forma，30，35-41，https://doi.org/10.48550/arXiv.1503.02130, https://forma.katachi-jp.com/pdf/3001/30010035.pdf

Ishimoto, Y.（2007年）《用纽结理论求解无限 kolam》，Forma，22，15-30。Pradella, M.、Cherubini, A.、Crespi Reghizzi, S.，《一种统一的图画文法方法》（2011），Information and Computation，209，1246-1267。

Prusinkiewicz, P. 和 Hanan, J.（1989）《Lindenmayer系统、分形与植物》。Springer-Verlag，纽约，ISBN 0-387-97092-4。生物数学讲义，第79卷。

Robinson, T.（2007）《用于kolam图案生成的扩展粘贴方案》，Forma，22，55-64。

Siromoney, G.、Siromoney, R. 和 Krithivasan, K.（1974）《阵列文法与科拉姆》，Computer Graphics and Image Processing 3，63-82。

Siromoney, R.、Subramanian, K. G.、Rangarajan, K.（1976）《Kolam阵列控制》，Information and Control，32，272-275。

Siromoney, R.、Rajkumar Dare, V. 和 Subramanian, K. G.（1983）《无限阵列与无限计算》，Theoretical computer science，24，195-205（1983）。

Siromoney, G. 和 Siromoney, R.（1987）Rosenfeld循环文法与科拉姆，《图文法及其在计算机科学中的应用》，564-579。

Subramanian, K. G.（1979）关于生成直角三角形的正规科拉姆阵列文法的注记，《Pattern Recognition》，11，343-345。

Subramanian, K. 和 Siromoney, R.（1987）论阵列文法与语言，《Cybernetics and Systems》，18(1)，77-98。

Subramanian, K., Saravanan, R., and Robinson, T.（2007年）用于阵列生成并应用于Kolam图案的P系统，Forma，22，47-54。

Waring, T. M.（2012）泰米尔科拉姆图案的序列编码，Forma，27，83-9　2.

Washburn，D. K. 和 Crowe，D. W.，（1991）《文化对称性：平面图案分析的理论与实践》，华盛顿大学出版社（ISBN-10：0295970847）

Yanagisawa，K.、Nagata，S.（2007年）《科拉姆图案设计系统基础研究》，Forma，22，31-46。

11 附录

科拉姆的点群（PG）对称性								
1	%(⊥ $\boldsymbol{k}$)	%(⊥ $\boldsymbol{l}$)	m_d	2	$2mm$	2%$_d$%$_d$	4	$4mm_d$
E_s^{PG} **单矩形 (1R)**: (kl) 瓦片								
2"# − " −#	k-偶数: $kl-\frac{k}{2}$	l-偶数: $kl-\frac{l}{2}$	" =# = &: &(& − 1)	(" +#) 偶数: $kl-\frac{"+\#}{2}$	("#) 偶数: $\frac{kl}{2}$	" =# =&: $\frac{\&(\& - 1)}{2}$	" =# =&: $\frac{\&(\& - 1)}{2}$	$k = l = n$ 偶数: $\frac{!}{4}$! $k = l = n$ 奇数: $\frac{!\ !\#\$}{4}$
	k-奇数: $"\# - \frac{(k+1)}{2}$	l-奇数: $"\# - \frac{(l+1)}{2}$	" ≠#: 无科拉姆	(" +#) 奇数: $kl-\frac{(" + \# - 1)}{2}$	("#) 奇数: $\frac{("\# - 1)}{2}$	" ≠#: 没有科拉姆	" ≠#: 没有科拉姆	" ≠#: 没有科拉姆
E_s^{PG} **对于两个矩形（2R）**: $(kl + (k - 1)(l - 1))$ 瓷砖								
4("# −" −# + 1)	2(" − 1) × (# − 1)	2(" − 1) × (# − 1)	" =# = &: $2(\& - 1)^2$ +(& − 1)	2（“ − 1）× （# − 1）	（“ − 1）× （# − 1）	“ =# =&: $(\& - 1)^2$ + （和 − 1）	“ =# =&: $(和 - 1)^2$	“ = # =&: $\frac{(和 - 1)^2}{2} + \frac{\& - 1}{2}$
			" ≠#: 无科拉姆			" ≠#: 无科拉姆	" ≠#: 无科拉姆	" ≠#: 没有科拉姆图案

表1. 图3中给定模板的科拉姆图案所需的最小共享边数“$_s^{PG}$，按其对称群分类，并以点群（点群）标注，如图2所示。科拉姆图案的数量由公式（1）给出。粗体标签$\boldsymbol{k}$和 $\boldsymbol{l}$ 分别表示在图3的矩形模板中统计k块瓦片和l 块瓦片时所用的边的方向。

每个点群（PG）的单矩形（1R）kolam数量，$N(PG)$,									
： ×；	1	%(⊥ ***k***)	%(⊥ ***l***)	m_d	2	$2mm$	$2\%_d\%_d$	4	$4mm_d$
1 ×1	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0
1 ×2	2^1	2^1	2^1	-	2^1	2^1	-	-	-
2 ×2	2^4	2^3	2^3	2^2	2^2	2^2	2^1	2^1	2^1
2 ×3	2^7	2^5	2^4	-	2^4	2^3	-	-	-
3 ×3	2^{12}	2^7	2^7	2^6	2^6	2^4	2^3	2^3	2^2
3 ×4	2^{17}	2^{10}	2^{10}	-	2^8	2^6	-	-	-
4 ×4	2^{24}	2^{14}	2^{14}	2^{12}	2^{12}	2^8	2^6	2^6	2^4
4 ×5	2^{31}	2^{18}	2^{17}	-	2^{16}	2^{10}	-	-	-
5 ×5	2^{40}	2^{22}	2^{22}	2^{20}	2^{20}	2^{12}	2^{10}	2^{10}	2^6
每个点群（PG）的双矩形（2R）科拉姆图案数量，$N(PG)$,									
1 ×1	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0	2^0
1 ×2	2^0	2^0	2^0	-	2^0	2^0	-	-	-
2 ×2	2^4	2^2	2^2	2^3	2^2	2^1	2^2	2^1	2^1
2 ×3	2^8	2^4	2^4	-	2^4	2^2	-	-	-
3 ×3	2^{12}	2^8	2^8	2^{10}	2^8	2^4	2^6	2^4	2^3
3 ×4	2^{24}	2^{12}	2^{12}	-	2^{12}	2^6	-	-	-
4 ×4	2^{28}	2^{18}	2^{18}	2^{21}	2^{18}	2^9	2^{12}	2^9	2^6
4 ×5	2^{40}	2^{24}	2^{24}	-	2^{24}	2^{12}	-	-	-
5 ×5	2^{56}	2^{32}	2^{32}	2^{36}	2^{32}	2^{16}	2^{20}	2^{16}	2^{10}

表2. 根据公式（1）得出的1R和2R模板的独特科拉姆数量 N(点群)，这些模板如图3所示。表1中的最小共享边表达式已被采用。粗体标签***k***和 ***l*** 分别表示图3矩形模板中用于计数k个瓦片和l 个瓦片的边的方向。