arXiv:2304.14158v2 [math-ph] 2 Jun 2023

耗散与偏离哈密顿动力学的信息内容

Marius Buliga 罗马尼亚科学院数学研究所

版本：2023年4月27日。许可协议：知识共享署名 4.0 国际许可协议

摘要

我们阐述了一种耗散性哈密顿力学表述，其依据是偏离哈密顿动力学的信息内容。基于这一表述，我们推导出最小耗散原理、动力包含，或带有哈密顿漂移重述的受约束演化。在应用方面，我们还得到了 Mielke 等人准静态率无关过程的动力学推广。

本文清晰、统一地阐述了带凸耗散的哈密顿包含理论，或辛 Brezis-Ekeland-Nayroles 原理。该理论曾采用不同约定，先后发表于 [3] arXiv:0810.1419、[4] arXiv:1408.3102；关于双势与辛对偶性的关系，则见 [2] arXiv:1902.04598v1。

1 一般记号与哈密顿动力学

在哈密顿力学中，物理系统由一对 $z = (q, p)$ 描述，其中 $q \in Q$是状态向量，$p \in P$ 是动量向量。空间 Q 和 P 是带有对偶配对的拓扑局部凸实向量空间

$$(q, p) \mapsto \langle q, p\rangle \in \mathbb{R}$$

该对偶配对满足：对于任意线性连续的 $A\colon Q \to \mathbb{R}$，都存在唯一的 $p \in P$，使得对所有 $q \in Q$，均有 $A(q) = \langle q, p\rangle$。反过来同样成立：对于任意线性连续的 $B\colon P \to \mathbb{R}$，都存在唯一的 $q \in Q$，使得对所有 $p \in P$，均有$B(p) = \langle q, p\rangle$。

在空间 $Q \times P$上存在一个辛形式，它可以看作是 $Q \times P$与自身之间的对偶性，定义为

$$\omega(z', z") = \langle q", p'\rangle - \langle q', p"\rangle$$

该物理系统的动力学由能量函数 $H = H(q, p, t)$ 描述，称为该系统的哈密顿量。我们假设 H 是一个可微函数

$$H : Q \times P \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

H 在点 $z=(q,p) \in Q \times P$ 处的偏导数通过 Q 与 P 之间的对偶性定义，因此 H 关于 p 的偏导数是 Q 中的一个元素，其中

$$\langle \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), p' \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(H\left(q, p+\varepsilon p', t\right) - H(q,p,t) \right)$$

对于任意 $p' \in P$，且 H 关于 q 的偏导数属于 P，其中 b y

$$\langle q', \frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(H\left(q+\varepsilon q', p, t\right) - H(q,p,t) \right)$$

对于任意 $q' \in Q$。 H 关于时间 t 的导数是一个实数

$$\frac{\partial H}{\partial t}(q,p,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(H\left(q,p,t+\varepsilon\right) - H(q,p,t) \right)$$

H的辛梯度，记作 $XH(q,p,t) \in Q \times P$，为

$$XH(q,p,t) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \right) \tag{1}$$

哈密顿动力学的演化方程为:

$$\dot{c}(t) = XH(c(t),t)$$

或者，用更清晰的形式表示为

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\dot{q}$、 $\dot{p}$ 分别表示 q、 p对时间的导数。

哈密顿动力学是保守的，具体而言：考虑一条演化曲线$z(t) = (q(t)\ p(t))$，并计算

$$\frac{d}{dt} H(z(t),t) - \frac{\partial H}{\partial t}(z(t),t) = \langle \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), \dot{p} \rangle + \langle \dot{q}, \frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \rangle$$

由 (2) 得:

$$\langle \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), \dot{p} \rangle + \langle q', \frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \rangle = \langle \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \rangle + \langle \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), \frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \rangle = 0$$

因此

$$\frac{d}{dt} H(z(t),t) - \frac{\partial H}{\partial t}(z(t),t) = 0$$

2 似然函数

在辛 lectic 空间 $Q \times P$我们将两个向量之间的最大似然定义为 :

$$\pi_{max}(z', z") = e^{\min\{0, \omega(z', z")\}} \tag{3}$$

这是一个位于 $(0,1]$, 的数值，例如当 z' 和 z"共线时，它们的最大似然为 1；或者如果 ω（z'、 z"）> 0，那么最大似然同样为 1。

定义 2.1 似然函数是一个函数 π：$(Q \times P)^3 \to [0,1]$，具有以下性质：对于任意 z、z'、$z" \in Q \times P$

(a) 如果两个最大值均存在：$\max^{\pi}_{v \in Q \times P}(z, z', v)$、$\max^{\pi}_{w \in Q \times P}(z, w, z")$，那么它们等于 0 或 1

(b) 函数 $v \in Q \times P \mapsto -\ln \pi(z, z', v)$ $w \in Q \times P \mapsto -\ln \pi(z, w, z")$ 是凸且下半连续的（下半连续性）。

似然函数的信息内容 π 为 I：$(Q \times P)^3 \to [0, +\infty]$,

$$I(z, z', z") = -\ln \pi(z, z', z")$$

约定 $-\ln 0 = +\infty$。

如果一个似然 π：$(Q \times P)^3 \to [0,1]$ 还满足对于任意 z、z'、$z" \in Q \times P$，则称其为温度化似然

(c) $\pi(z, z', z") \leq \pi_{max}(z', z")$

显然，根据定义 2.1，最大似然是一个温和似然函数，但我们将看到，还存在许多其他有趣的似然。为了描述它们，我们需要引入一些凸分析概念，即源自 Moreau [12], 并针对辛空间 $Q \times P$进行调整的经典概念。

令 d：$(Q \times P)^2 \to \mathbb{R}$ 为 $Q \times P$上的一个对偶性。

定义 2.2 对于函数 f：$Q \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 以及点 $(q, p) \in Q \times P$， f相对于对偶性 d在 (q, p) 处的左次梯度，是由所有满足以下性质的 $(q', p') \in Q \times P$组成的集合 $\partial^L_d f(q, p)$：对于任意 $(q" \ p") \in Q \times P$

$$f(q, p) + d((q', p'), (q", p") - (q, p)) \ \leq \ f(q", p")$$

左极 值 f相对于对偶性 d是函数 f^{*L}_d：$Q \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty$ $\}$,

$$f^{*L}_d(q", p") \ = \ \sup\left\{d((q", p"), (q', p')) - f(q', p') \ : \ (q', p') \in Q \times P\right\}$$

同样， f相对于对偶性 d在 (q, p) 处的右次梯度，是由所有满足以下性质的 $(q', p') \in Q \times P$组成的集合 $\partial^R_d f(q, p)$：对于任意 $(q" \ p") \in Q \times P$

$$f(q, p) + d((q", p") - (q, p), (q', p')) \ \leq \ f(q", p")$$

相对于对偶性 d， f 的右极是函数 f^{*R}_d：$Q \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$f^{*R}_d(q", p") \ = \ \sup\left\{d((q', p'), (q", p")) - f(q', p') \ : \ (q', p') \in Q \times P\right\}$$

展开这个定义，我们得到以下 Fenchel不等式定理。

定理 2.3（Fenchel不等式。）设 $f\colon\ Q\times P\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为凸且下半连续性。则对于任意 (q',p')，$(q",p")\in Q\times P$

$$f(q',p')+f_d^{*R}(q",p")\ \geq\ d((q',p'),(q",p"))$$

函数 f_d^{*R}是凸的下半连续性函数。等式

$$f(q',p')+f_d^{*R}(q",p")\ =\ d((q',p'),(q",p"))$$

等价于

$$(q",p")\in\partial_d^R f(q',p')$$

同样地，对于任意的 (q',p'),$(q",p")\in Q\times P$

$$f_d^{*L}(q',p')+f(q",p")\ \geq\ d((q',p'),(q",p"))$$

函数 f_d^{*L}是凸的下半连续性函数。等式

$$f_d^{*L}(q',p')+f(q",p")\ =\ d((q',p'),(q",p"))$$

等价于

$$(q',p')\in\partial_d^L f(q",p")$$

最后，$g=f_d^{*R}$意味着 $f=g_d^{*L}$，而 $g=f_d^{*L}$意味着 $f=g_d^{*R}$。

这为我们提供了一种构造似然函数的方法。

定理 2.4 对于任意函数 $f\colon\ Q\times P\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，若其为凸且下半连续；并且对于任意对偶性 $d\colon(Q\times P)^2\to\mathbb{R}$，若它是 $Q\times P$与自身之间的对偶性，则下列函数

$$\pi_f^R(z,z',z")\ =\ \exp\big(d(z',z")-f(z')-f_d^{*R}(z")\big)$$

$$\pi_f^L(z,z',z")\ =\ \exp\big(d(z',z")-f_d^{*L}(z')-f(z")\big)$$

是定义 2.1 意义下的似然函数。

证明。设 I_f^R为似然函数 π_f^R的信息内容:

$$I_f^R(z,z',z")\ =\ f(z')+f_d^{*R}(z")-d(z',z")$$

根据定义可知，$I_f^R(z,z',z")$ 对每个变量z'和 $z"$都是凸且下半连续的。Fenchel不等式意味着 $I_f^R(z,z',z")\ \in\ [0,+\infty]$，等价地，$\pi_f^R(z,z',z")\ \in[0,1]$。若 $\max\limits_{w\in Q\times P}\pi_f^R(z,w,z")$ 存在且不等于 0，则存在一个 $z'\in Q\times P$，使得

$$\min_{w\in Q\times P}\big(f(w)+f_d^{*R}(z")-d(w,z")\big)\ =\ f(z')+f_d^{*R}(z")-d(z',z")\in\mathbb{R}$$

这意味着，对于任意 $w\in Q\times P$，我们有

$$f(w)-d(w,z")\ \geq\ f(z')-d(z',z")$$

因此 $z" \in \partial_d^R f(z')$；根据 Fenchel等式，这意味着 $I_f^R(z, z', z") = 0$。因此，$\max_{w \in Q \times P} \pi_f^R(z, w, z")$ 等于 1。

最后，记 $g = f_d^{*R}$。那么 $f = g_d^{*L}$，因此

$$\pi_f^R(z, z', z") = \pi_g^L(z, z', z")$$

只需对 g 重复相同的推理，即可完成证明。 □

对于凸的下半连续函数 f：记为

$$b_f(z', z") = f(z') + f_d^{*R}(z")$$

这称为与 f 相关的可分双势。双势在 [14] 中作为一种凸分析概念被引入，它非常适用于非关联本构定律的应用。双势曾应用于土力学、塑性、损伤和摩擦领域。在所有这些应用中，所考虑的对偶性都是静态变量之间的对偶性，但双势的定义及其理论结果适用于任何对偶性。关于双势理论及其在准静态力学中的应用，参见综述论文 [6]。在 [3] 中，辛对偶首次得到应用，并引入了带耗散的哈密顿包含，将其应用于动态损伤力学。我们在那里表明，这可以得到 Mielke 等人的率无关过程理论 [9], [10], [11]在动力学中的推广。随后， [4] 继续开展了这项工作，其中使用了相对于辛对偶的可分双势。相应的次梯度和极集被称为“辛”的，并将带耗散的哈密顿包含重新表述为辛 Brezis-Ekeland-Nayroles 原理（SBEN），用于证明在准静态近似下可以恢复 Brezis-Ekeland [1]和 Nayroles [13]的经典变分原理。

在我们的语境中，对于一个与自身处于对偶关系中的空间 $Q \times P$：(d)$Q \times P^2 \to \mathbb{R}$，双势的定义如下。

定义 2.5 若函数 b：$(Q \times P)^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 满足以下条件，则称其为双势：

(a) 对任意 z'、$z"$，$b(z', z") \geq d(z', z") \in Q \times P$

(b) $b(z', z") = d(z', z")$ *if and only if* $z" \in \partial_d^R b(\cdot, z")(z')$ *if and only if* $z' \in \partial_d^L b(z', \cdot)(z")$

似然函数与双势相关。这种关系此前已有记载，其中似然函数的信息内容以同步项的形式出现，见定义 2.3 [7]。同样的现象最早在关系式 (51)、(52) 中得到观察 [8]。以下定理的证明与命题 2.4 [7], 的证明相同，只是改用了本文的记号。

定理 2.6 设 π：$(Q \times P)^3 \to [0, 1]$ 是一个函数，且 d：$(Q \times P)^2 \to \mathbb{R}$ 是 $Q \times P$ 与自身之间的对偶性。记函数 π 的信息内容为 $I = -\ln \pi$，并记

$$b_d(z, z', z") = I(z, z', z") + d(z', z")$$

函数 π 是似然，当且仅当函数 $b_d(z, \cdot, \cdot)$ 关于对偶性 d是一个双势。

正如我们所见，似然函数与对偶性无关，而双势则取决于对偶性。我们可以通过以下公式，轻松地将关于对偶性 d 的双势 b 转换为关于另一种对偶性 d' 的另一个双势 b'：

$$b'(z', z") - d'(z', z") \;=\; b(z', z") - d(z', z")$$

对于特定的对偶性 ω，辛形式，我们为任意似然关联其辛双势。

定义 2.7 设 $\pi\colon (Q \times P)^3 \to [0,1]$ 是一个似然。令 $I(z, z', z") \;= -\ln\, \pi(z, z', z")$ 为 π的信息内容，则与该似然关联的辛双势为

$$b^{\pi}_{\omega}(z, z', z") \;=\; I(z, z', z") + \omega(z', z")$$

最小辛双势是最大似然π_{max}的辛双势，即

$$b^{min}_{\omega}(z', z") \;=\; \max\left\{0, \omega(z', z")\right\}$$

似然 π 是温度化的，当且仅当对于任意 $z, z', z" \in Q \times P$

$$b^{\pi}_{\omega}(z, z', z") \geq 0$$

或者等价地

$$b^{\pi}_{\omega}(z, z', z") \geq b^{min}_{\omega}(z', z")$$

3 偏离哈密顿动力学

这里给出了哈密顿力学 (2) 的一种耗散性修正，它延续了 [2],[3], [4], [5]。在此修正中，我们需要一个哈密顿量和一个温和似然函数。

耗散物理系统的动力学通过引入新变量来获得，这些变量汇集在间隙向量 $\eta = (\eta_q, \eta_p) \in Q \times P$ 中。我们还需要一些新方程，它们来自似然函数。

定义 3.1 给定一个哈密顿量 H 和一个温和似然函数 π

$$H : Q \times P \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \pi : (Q \times P)^3 \to [0,1]$$

物理系统的动力学由对哈密顿动力学方程 (2) 的修正来定义

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t) \;+\; \eta_q \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \;+\; \eta_p \end{cases} \tag{4}$$

以及新方程:

$$\pi(z, \dot{z}, \eta) \;=\; 1 \tag{5}$$

采用记号 $z = (q,p)$ $\eta = (\eta_q, \eta_p) \in Q \times P$, $\dot{z} = (\dot{p}, \dot{q}) \in Q \times P$。

将方程 (5) 写成更明确的形式。对于对偶性 d，根据定理 2.6，我们知道

$$b_d(z, z', z") = I(z, z', z") + d(z', z")$$

关于 d 是一个双势，其中 I 是似然 π 的信息内容。于是，方程 (5) 等价于

$$\eta \in \partial_d^R b_d(c(t), \cdot, \eta)(\dot{c}) \tag{6}$$

这也等价于

$$\dot{c} \in \partial_d^L b_d(c(t), \dot{c}, \cdot)(\eta) \tag{7}$$

我们定义 对于任意 $z \in Q \times P$ 和 $t \in [0, T]$，集合 $Gap(z,t)$ 包含所有满足以下条件的 $z" \in Q \times P$

$$z" \in \partial_d^R b_d(z, \cdot, z")(z" + XH(z, t)) \tag{8}$$

注意，当且仅当以下条件成立时， $z" \in Gap(z,t)$

$$b_d(z, z" + XH(z, t), z") = d(z" + XH(z, t), z")$$

因此，我们得到问题 3.1 的以下等价表述。

定理 3.2 $t \in [0, T] \mapsto (c(t)\ \eta(t))$ 是带初始条件 $c(0) = z_0$ 的 3.1 的解，当且仅当曲线 $t \in [0, T] \mapsto c(t)$ 满足 $c(0) = z_0$，并且对于任意 $t \in [0, T]$，以下任一条件成立：

(a)（动力包含）

$$\dot{c}(t) \in XH(c(t), t) + \partial_d^R b_d(c(t), \cdot, \dot{c}(t) - XH(c(t), t))(\dot{c}(t)) \tag{9}$$

(b)（动力包含）

$$\dot{c}(t) \in \partial_d^L b_d(c(t), \dot{c}(t), \cdot)(\dot{c}(t) - XH(c(t), t)) \tag{10}$$

(c)（带哈密顿漂移的约束）

$$\dot{c}(t) \in XH(c(t), t) + Gap(c(t), t) \tag{11}$$

(d)（隐式演化）

$$b_d(c(t), \dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t), t)) = d(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t), t)) \tag{12}$$

并且 η 定义为：

$$\eta(t) = \dot{c}(t) - XH(c(t), t) \tag{13}$$

请注意，对于相同的信息内容，在不同的对偶性下，我们会得到不同的双势，因此

$$b_d(z, z', z") - d(z', z") = b_\omega^\pi(z, z', z") - \omega(z', z") = I(z, z', z")$$

定义 3.3 沿曲线 $t \in [0,T] \mapsto c(t) \in Q \times P$的耗散是如下泛函:

$$Diss^{\pi}(c,0,T) \;=\; \int_0^T b_{\omega}^{\pi}(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t),t))\; dt \tag{14}$$

注意，对于任意曲线

$$Diss^{\pi}(c,0,T) \;\geq\; 0$$

因为似然 π 是温度化的。

I在下一个定理中，我们给出能量平衡和耗散不等式 .

定理 3.4 设 $t \in [0,T] \mapsto (c(t)\ \eta(t))$ 是满足 3.1 的解，且初始条件为 $c(0) = z_0$。那么，对于任意 $t \in [0,T]$:

(a)（能量平衡）

$$H(c(t),t) \;=\; H(z_0,0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial t}(c(\tau),\tau)\; d\tau \;-\; Diss^{\pi}(c,0,t) \tag{15}$$

(b)（耗散不等式）

$$\frac{d}{dt}H(c(t),t)) - \frac{\partial H}{\partial t}(c(t),t) \;\leq\; 0$$

对于任意满足 $c'(0) = c(0)$ 的曲线 $t \in [0,T] \mapsto c'(t)$，我们有

$$Diss^{\pi}(c',0,t) + H(c'(t),t) \;\geq Diss^{\pi}(c,0,t) + H(c(t),t) \tag{16}$$

证明。根据定理 3.2 (d)，曲线 $t \in [0,T] \mapsto (c(t)\ \eta(t))$ 是方程 3.1 的一个解，且初始条件为 $c(0) = z_0$，当且仅当 η 由 (13) 给出且 c 满足

$$b_{\omega}^{\pi}(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t),t)) - \omega(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t),t)) \;=\; 0$$

但与哈密顿动力学一节中的计算相同，我们得到

$$-\omega(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t),t)) \;=\; -\omega(XH(c(t),t), \dot{c}(t)) \;=\; \frac{d}{dt}H(c(t),t)) - \frac{\partial H}{\partial t}(c(t),t)$$

因此我们得到

$$\frac{d}{dt}H(c(t),t)) \;=\; \frac{\partial H}{\partial t}(c(t),t) - b_{\omega}^{\pi}(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t),t))$$

我们对 $[0,t]$ 积分该等式，得到能量平衡 (a)。

(b) 中的第一个耗散不等式源于辛双势的正性。为了从 (b) 中得到第二个不等式，我们为任意曲线 $t \in [0,T] \mapsto c(t)$ 引入信息内容差距泛函 $G(c,0,t)$:

$$G(c,0,t) \;=\; \int_0^t I(c(\tau), \dot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) - XH(c(\tau),\tau)))\; \mathrm{d}\tau$$

具体而言：

$$G(c,0,t) = \int_0^t I\left(c(\tau)\ \dot{c}(\tau)\ \dot{q}(\tau) - \frac{\partial H}{\partial p}(c(\tau)\ \tau) - \dot{p}(\tau) - \frac{\partial H}{\partial q}(c(\tau)\ \tau)\right) \mathrm{d}\tau \tag{17}$$

对于任意曲线，我们计算：

$$G(c,0,t) = \int_0^t \left[b_\omega^\pi(c(\tau),\dot{c}(\tau),\dot{c}(\tau) - XH(c(\tau),\tau))) - \omega(\dot{c}(\tau),\dot{c}(\tau) - XH(c(\tau),\tau))\right]\ \mathrm{d}\tau$$

$$G(c,0,t) = Diss^\pi(c,0,t) + H(c(t),t) - H(c(0),0)$$

对于 3.1 的解 $t \in [0,T] \mapsto c(t)$，以及任意满足条件 $c'(0) = c(0)$ 的曲线 $t \in [0,T] \mapsto c'(t)$，我们有：

$$G(c',0,t) \geq 0 = G(c,0,t)$$

因此，我们由曲线 c 揭示出一个最小信息内容原理：

$$G(c',0,t) \geq G(c,0,t) \tag{18}$$

先前的计算表明，(18) 等价于

$$Diss^\pi(c',0,t) + H(c'(t),t) - H(c'(0),0) \geq Diss^\pi(c,0,t) + H(c(t),t) - H(c(0),0)$$

但 $c'(0) = c(0)$，因此 $H(c'(0),0) = H(c(0),0)$。先前的不等式即为 (16)。□

不等式 (16) 可视为最小耗散原理。或者，如 [2]，所述，我们可以将其视为由偏离哈密顿演化所揭示的最小信息内容原理 (18)，这种偏离由信息内容差距泛函 (17) 测度。

4 应用

纯耗散演化。我们选取最小辛双势：

$$b_\omega^\pi(z,z',z") = b_\omega^{min}(z',z") = \max\left\{0,\omega(z',z")\right\}$$

见定义 2.7。于是，根据定理 3.2 (d)，3.1 的一个解是满足初始条件 $c(0) = z_0$ and 的 $t \in [0,T] \mapsto c(t)$

$$b_\omega^{min}(\dot{c}(t),\dot{c}(t) - XH(c(t),t)) = \omega(\dot{c}(t),\dot{c}(t) - XH(c(t),t))$$

这就是

$$\max\left\{0,\omega(\dot{c}(t),\dot{c}(t) - XH(c(t),t))\right\} = \omega(\dot{c}(t),\dot{c}(t) - XH(c(t),t))$$

这等价于

$$\omega(\dot{c}(t),\dot{c}(t) - XH(c(t),t)) \geq 0$$

回顾一下

$$\omega(\dot{c}(t), \dot{c}(t) - XH(c(t), t)) \;=\; -\frac{d}{dt}H(c(t), t)) + \frac{\partial H}{\partial t}(c(t), t)$$

因此，任何满足初始条件并具有以下性质的曲线 c

$$\frac{d}{dt}H(c(t), t)) - \frac{\partial H}{\partial t}(c(t), t) \;\leq\; 0$$

对于任意 $t \in [0, T]$ 都是 3.1 的解。

让我们计算间隙集： z" $\in Gap(z, t)$ 当且仅当

$$b^{\pi}_{\omega}(z" + XH(z, t), z") = \omega(z" + XH(z, t), z")$$

这就是

$$\omega(XH(z, t), z") \;\geq\; 0$$

Th定理 3.2 (c) 的表述，即带有哈密顿漂移的约束，变为

$$\dot{c}(t) \in XH(c(t), t) + \eta(c(t))\,,\; \omega(XH(c(t), t), \eta(c(t))) \;\geq\; 0$$

P纯粹的哈密顿演化。让我们将信息内容 (2.1) 取为 :

$$I(z, z', z") \;=\; \chi_0(z") = \begin{cases} 0 & \text{if } z" = 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

这对应于一个似然函数:

$$\pi(z, z', z") \;=\; \begin{cases} 1 & \text{if } z" = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对似然函数（5）进行最大化意味着间隙向量 $\eta = 0$，因此演化方程（4）化简为纯哈密顿演化方程（2）。

支配。一般而言，我们可以比较两个辛双势的解集

$$b^1_{\omega}(z, z', z") \;\geq\; b^2_{\omega}(z, z', z")$$

这对应于两个似然函数

$$\pi^1(z, z', z") \;\leq\; \pi^2(z, z', z")$$

于是很容易看出，对于似然函数 π^1 ， 3.1 的任意解也是同一问题对于似然函数 π^2 的解。我们称 π^2 支配 π^1。

根据定义 2.1 (c)，任何温和似然 π 都被 π_{max}支配，因此，对于似然 π ， 3.1 的任何解同时也是同一问题的解，但对应于似然 π_{max}；正如前一个例子所示，该解会发生耗散。

光滑耗散。我们考虑一个如定理 2.4 中所述的辛双势

$$b_\omega(z, z', z") \;=\; f(z') + f^{*R}_\omega(z")$$

其中 f 是光滑正凸函数。注意，我们必须选择 f，使得 b_ω 为非负！假设我们处于这种情形，下面来看看 3.1 中的方程在此情形下是什么。我们使用定理 3.2。动力包含 (a) 变为

$$\dot{c}(t) \in XH(c(t), t) + \partial^R_\omega f(\dot{c}(t))$$

但是，$z" \in \partial^R_\omega f(z')$ 当且仅当对于任意 $z \in Q \times P$，我们有

$$f(z') + \omega(z - z', z") \;\leq\; f(z)$$

这等价于

$$f(z') - \omega(z', z") \;\leq\; f(z) - \omega(z, z")$$

由于 f 是光滑的，这等价于

$$z" \;=\; Xf(z')$$

因此我们的方程变为

$$\dot{c}(t) \;=\; XH(c(t), t) + Xf(\dot{c}(t)) \tag{19}$$

为简单起见，假设 $f(z) = \phi(q)$。于是

$$Xf(\dot{c}(t)) \;=\; (0, -\frac{\partial \phi}{\partial q}(\dot{q}(t)))$$

在这种情况下，我们也来计算 $f^{*R}_\omega(z")$ $z" = (q"\ p")$:

$$f^{*R}_\omega(q", p") \;=\; \sup\{\langle q", p\rangle + \langle q, -p"\rangle - \phi(q) \;:\; z = (q, p) \in Q \times P\}$$

$$f^{*R}_\omega(q", p") \;=\; \chi_0(q") + \phi^*(-p")$$

其中，ϕ^* 是相对于 Q 和 P之间对偶性的通常的极函数。于是，辛双势为

$$b_\omega((q', p'), (q", p")) \;=\; \phi(q') + \phi^*(-p") + \chi_0(q")$$

并且，对于所有 z'，$z" \in Q \times P$，$b_\omega((q', p'),(q"\ p")) \;\geq\; 0$ 等价于

$$\phi(q) + \phi^*(p) \;\geq\; 0$$

对于所有 $q \in Q$、$p \in P$。在熟悉的情形下，Q 和 P 是赋范为 $\|\cdot\|$ 的同一个希尔伯特空间；如果我们取 $\phi(q) = \frac{a}{2}\|q\|^2$（对于某个 $a > 0$），那么 $\phi^*(-p) = \frac{1}{2a}\|p\|^2$，且辛双势是非负的。我们得到瑞利耗散:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q} & = & \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t) \\ \dot{p} & = & -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \;-\; \frac{\partial \phi}{\partial q}(\dot{q}) \end{array} \right.$$

关于不连续解。对于非光滑辛双势，我们可能需要重新表述 3.1，以便接受不连续解。事实上，例如在接触问题中（塑性或损伤问题中也是如此，如 [2], [3] 所示），解曲线 $c(t) = (q(t)\ p(t))$ 在位置变量 q 上可能是连续的，但在动量变量 p 上是不连续的；或者，一些变量是连续的，而另一些变量是不连续的。为了涵盖这些情形，我们必须采用（4）的弱形式，即分布意义下的形式。一个较好的选择似乎是将 c 取为 $[0,T]$ 上的有界变差函数，并将 η 取为相对于 $\mathrm{d}t$ 的一个测度，其奇异部分集中在 c 的跳跃集上。我们将这些技术细节留待另一篇论文讨论，尽管它们对于下一项应用中的情形十分重要。

与率无关过程的关系。我们证明，可以涵盖 Mielke 及其合作者提出的准静态率无关演化过程的一个动力学版本——Mielke、Theil [10], Mielke、Theil 和 Levitas [11], [9] 。这一点最早在 [3], 中实现，而在这里我们可以给出简短而实用的描述。

我们选取如下形式的辛双势：

$$b_\omega(z, z', z") \ = \ f(z') + f_d^{*R}(z")$$

与光滑耗散的例子一样，但现在 f 是凸的、正的且一次齐次：对任意正标量 $a > 0$

$$f(az') \ = \ af(z')$$

函数 f 不再光滑（因为至少在 0 处不可导）。对于对偶 1

$$f_\omega^{*R}(z") \ = \ \sup\{\omega(z, z") - f(z) \ : \ z \in Q \times P\}$$

注意，对任意 $a > 0$

$$f_\omega^{*R}(z") \ = \ \sup\{\omega(az, z") - f(az) \ : \ az \in Q \times P\} \ = \ af_d^{*R}(z")$$

因此 $f_\omega^{*R}(z") \in \{0, +\infty\}$，即它是集合 $C \in Q \times P \text{with} 0 \in C$ 的示性函数，更准确地说：

$$C \ = \ \{z" \in Q \times P : \omega(z, z") \ \leq \ f(z) \forall z \in Q \times P\} \tag{20}$$

因此

$$b_\omega(z, z', z") \ = \ f(z') + \chi_C(z")$$

而问题 3.1 的方程用间隙集表示为：

$$Gap(z,t) \ = \ \{z" \in C : f(z" + XH(z,t)) = \omega(XH(z,t), z")\} \tag{21}$$

$$\dot{c}(t) - XH(c(t),t) \in Gap(c(t),t) \tag{22}$$

f 是耗散势，耗散泛函 (14) 为

$$Diss^\pi(c, 0, T) \ = \ \int_0^T f(\dot{c}(t)) + \chi_C(\dot{c}(t) - XH(c(t),t))\ \mathrm{d}t$$

应用于本情形的定理 3.4 给出了能量平衡方程、耗散不等式以及最小耗散原理，从而使我们能够将 Mielke 等人关于率无关过程的表述扩展到动力学领域。

参考文献

[1]H. Brezis 和 I. Ekeland，《一种适用于某些抛物型方程的变分原理》。I. 与时间无关的情形，II. 与时间有关的情形。巴黎科学院院报 S ´辑 A-B，282，971-974，以及 1197-1198，1976。[2] M. Buliga，《论偏离哈密顿演化的差异的信息内容》（2019），arXiv:1902.04598v1。[3] M. Buliga，《具有凸耗散的哈密顿包含及其应用前景》，数学及其应用 1，2（2009），228-251，arXiv:0810.1419。[4] M. Buliga，G. de Saxc´e，《一个辛 Brezis-Ekeland-Nayroles 原理》，固体数学与力学 22，6（2017），arXiv:1408.3102[5] M. Buliga，《具有凸耗散的哈密顿包含的随机版本及刘维尔定理》，arXiv:1807.10480[6] M. Buliga，G. de Saxc´e，C. Vall´ee，《非单调多值算子的双势：基本结果与应用》，应用数学学报，110，2（2010），955-972，arXiv:0804.1863[7] M. Buliga，G. de Saxc´e，C. Vall´ee，《模糊极大循环单调集与双势》，分析与应用 8（2010），第 4 期，1-14，arXiv:0905.0068[8] Patrick Laborde，Yves Renard，《弹性静力摩擦接触问题的不动点策略》，应用科学中的数学方法，（2008），31，415-441[9] A. Mielke，《率无关系统中的演化》（第 6 章）。载于 C. Dafermos、E. Feireisl 编，《微分方程手册：演化方程》，第 2 卷，461-559，Elsevier B.V.，阿姆斯特丹，2005[10] A. Mielke，F. Theil，《具有滞后的率无关相变数学模型》。载于 H.-D. Alber、R. Balean 和 R. Farwig 编，《分析与工程中的连续介质力学模型研讨会论文集》，第 117-129 页。Shaker-Verlag，1999[11] A Mielke，F. Theil，V. Levitas，《使用极值原理的率无关相变的变分表述》，理性力学与分析档案，162（2002），2，137-177[12] J.-J. Moreau，《凸泛函》，S´éminaire Jean Leray，第 2 期（1966-1967），第 1-108 页[13] B. Nayroles，《某些耗散系统的两个极小值定理》，巴黎科学院院报 S ´辑 A-B，282，A1035-A1038，1976。[14] G. de Saxc´e，《Fenchel 不等式及其在本构律中的应用的一种推广》，巴黎科学院院报，S´辑 II 314（1992），125-129