arXiv:2304.14206v1 [math.CV] 27 Apr 2023

´奇异全纯叶状结构上的叶内庞加莱度量的正则性

SAHIL GEHLAWAT*、KAUSHAL VERMA

In Memoriam: Nessim Sibony

Abstract. 设 $\mathcal{F}$ 是 $M \setminus E$上的光滑黎曼曲面叶状结构，其中 M 是一个复流形，且奇异集 $E \subset M$ 是余维至少为二的解析集。在 M 上固定一个厄米度量，并假设 $\mathcal{F}$ 的所有叶都是双曲的。Verjovsky 的一致化模量 η 是定义在 $M \setminus E$ 上的正实函数，根据从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $\mathcal{F}$ 的叶中的全纯映射族来定义，并衡量此类映射中可能取得的最大导数。已有各种条件可以保证 η 在 $M \setminus E$ 上的连续性。本文讨论的主要问题是其在 E 各点处的连续性。为此，我们将 Whitney 的 C_4-切锥构造从解析集推广到叶状结构的情形，并用它定义 $\mathcal{F}$ 在 E各点处的切锥。由此得到在 E各点处具有 *transversal type* 的叶状结构的定义。我们证明，与这类叶状结构相关的映射 η在 E 处连续，前提是它在 $M \setminus E$ 上连续，且 $\mathcal{F}$具有横截类型。我们还讨论了 η的不连续点集。最后，对于一个域 $U \subset M$，我们考察 $\mathcal{F}_U$，即将 $\mathcal{F}$ 限制到 U 上，以及相应的正函数 η_U。利用横截性假设，我们得到 Lins Neto–Martins 关于 $U \mapsto \eta_U$变化结果的加强版本。

1. Introduction

设 $\mathcal{F}$ 是复流形 M 上的奇异全纯曲线叶状结构（shfc），其奇异集为 $E \subset M$。奇异集 $E \subset M$ 是一个复解析集，其余维至少为 2。对于 $p \in M \setminus E$，令 L_p 表示经过 p 的叶。在 p 处的 $\mathcal{F}$ 的切线，记作 $T_p\mathcal{F}$，由所有在 p 处与 L_p 相切的向量组成。所有这类切线的并

$$T\mathcal{F} := \bigcup_{p \in M \setminus E} T_p\mathcal{F}$$

在 $M \setminus E$ 上定义了一个全纯线丛。为统一记号，令 reg(A) 和 sng(A) 分别表示复解析集 A 的光滑轨迹和奇异轨迹。在 reg(A) 中各点处的切空间是良定义的；另一方面，根据 Whitney（见 [3], [12]），在 sng(A) 中各点处的切锥有六种不同的可能定义。将这些描述应用于 reg(A) 中的点时，它们都与（无歧义的）切空间一致。我们将关注所谓的 Whitney C_4- 切锥 [3]（另见 [12] ），首先回顾其应用于 E 时的定义。对于 $p \in$ sng(E)，令

$$C_pE = \{v \in T_pM \mid \text{there exists } \{q_n\}_{n\geq 1} \subset \text{reg}(E), v_n \in T_{q_n}E \text{ such that } (q_n, v_n) \to (p, v)\}\,.$$

在点 $p \in$ reg(E) 处， E 的切锥就是切空间 $T_pE \subset T_pM$。由此引出以下定义：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：32M25，32S65；次要分类：30F45。

Key words and phrases. 庞加莱度量，奇异黎曼曲面叶状结构，切锥。*作者获得 Labex CEMPI（ANR-11-LABX-0007-01）资助。

定义 1.1. 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 M 上具有奇异集 $E \subset M$ 的 shfc。设 $p \in E$。定义 $\mathcal{F}$ 在 p 处的切锥为

$$C_p\mathcal{F} = \{v \in T_pM \mid \text{there exists } \{p_n\}_{n\geq 1} \subset M \setminus E, v_n \in T_{p_n}\mathcal{F} \text{ such that } (p_n, v_n) \to (p, v)\}.$$

对于给定的 $v \in C_p\mathcal{F}$和 $\lambda \in \mathbb{C}$，令 $(p_n, v_n) \in (M \setminus E) \times T_{p_n}\mathcal{F}$收敛到 (p, v)。注意到$\lambda v_n \in T_{p_n}\mathcal{F}$对所有 n都成立，并且 $(p_n, \lambda v_n) \in (M \setminus E) \times T_{p_n}\mathcal{F}$收敛到 $(p, \lambda v)$。这表明$C_p\mathcal{F}$ 实际上是一个顶点位于 p的锥。

一个基本问题是理解给定叶状结构的叶如何聚积于其奇异集上。鉴于此，我们考虑：

定义 1.2. 设 $\mathcal{F}$是复流形 M 上的一个 shfc，其奇异集为 $E \subset M$。如果存在 $U_p \subset M$ 的一个邻域 p，使得对所有$q \in U_p \cap E$，则称$\mathcal{F}$ 在 $p \in E$ 处具有横截类型

$$\overline{C_q\mathcal{F}} \cap C_qE = \{0\}.$$

如果 $\mathcal{F}$在每个 $p \in E$处都具有横截类型，我们就称其具有横截类型。下面的例子将有助于说明这一概念。

例 1.3. 设 X 是定义在双圆盘 $M = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2$ 上的全纯向量场，其奇异集为 $E = X(0) = \{0\}$。设 λ_1、λ_2 是向量场 $X^{(1)}$ 的线性部分的特征值 X，并假设 $\alpha = \lambda_1/\lambda_2 \neq 0$ 是其指标。考虑原点附近 X 的以下局部标准形：

(1) 如果 $\alpha \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ 和 α、$\alpha^{-1} \notin \mathbb{N}$,

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(2) 如果 $\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$,

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y(1 + f(x, y))\frac{\partial}{\partial y},$$

其中 $f(x, y)$ 是定义在原点邻域内的全纯函数，并具有以下性质： x、 $y \mid f(x, y)$。

(3) 如果 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 或 $\alpha^{-1} = n \in \mathbb{N}$,

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + (ny + ax^n)\frac{\partial}{\partial y} \text{ or } X = (nx + ay^n)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

分别地，其中 $a \in \mathbb{C}$ 是常数。

现在我们来证明，在上述每种情况下， $C_0\mathcal{F}_X = \mathbb{C}^2$ 。

（1）设 $V = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$。定义 $z_m = (\frac{v_1}{m}, \frac{v_2}{\alpha m})$，其中 $m \geq 1$。那么 z_m收敛到原点，且 $V_m = mX(z_m) \in T_{z_m}\mathcal{F}_X$。但请注意，

$$mX(z_m) = m\Big(\frac{v_1}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{v_2}{\alpha m}\frac{\partial}{\partial y}\Big) = V$$

由此可得 $V \in C_0\mathcal{F}_X$。

（2）设 $V = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$。对于每个 $m \in \mathbb{N}$,

$$h_m(y) = y\Big(1 + f\Big(\frac{v_1}{m}, y\Big)\Big)$$

在 y 中是全纯的。由于 $f(0, 0) = 0$，令 $P(r) \subset U$为半径为 $r-$ 的双圆盘，使得$|f(x, y)| < 1/2$, 对于所有 $(x, y) \in P(r)$。对于足够大的 m 以及 $y \in D(0, r)$，注意到 $(\frac{v_1}{m}, y) \in P(r)$。因此，

$$|h_m(y)|^2 > |y|^2 \left(1 - |f\Big(\frac{v_1}{m}, y\Big)|^2\right) > \frac{1}{2}|y|^2.$$

这说明存在 $0 < r_1 < r$，使得对于所有足够大的 m，$D(0, r_1) \subset h_m(D(0, r))$。选取 $N \geq 1$，使得 $D(0, r_1) \subset h_m(D(0, r))$ 且 $\frac{v_2}{\alpha m} \in D(0, r_1)$ 对所有$m \geq N$成立。令 $y_m \in D(0, r)$ 满足 $h_m(y_m) = \frac{v_2}{\alpha m}$。注意到

$$0 \leq \frac{|y_m|^2}{2} < |h_m(y_m)|^2 = \Big(\frac{v_2}{\alpha m}\Big)^2 \to 0,$$

且 $y_m \neq 0$ 当 $v_2 \neq 0$时。因此 $y_m \to 0$。取 $z_m = (\frac{v_1}{m}, y_m) \in M \setminus \{0\}$ 且

$$V_m = mX(z_m) = m\Big(\frac{v_1}{m}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + m\alpha\, h_m(y_m)\frac{\partial}{\partial y} = (v_1, v_2) = V.$$

因此，$C_0\mathcal{F}_X = \mathbb{C}^2$。

(3) 假设 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 且 $V = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$。对于 $m \geq 1$，令

$$z_m = \Big(\frac{v_1}{m}, \frac{1}{mn}\Big(v_2 - \frac{av_1^n}{m^{n-1}}\Big)\Big)$$

并注意到，当 $m \to +\infty$时，$z_m \to 0$。此外，注意到

$$mX(z_m) = m\Big(\frac{v_1}{m}, n\frac{1}{mn}\Big(v_2 - \frac{av_1^n}{m^{n-1}}\Big) + a\Big(\frac{v_1}{m}\Big)^n\Big) = \Big(v_1, v_2 - \frac{av_1^n}{m^{n-1}} + am\Big(\frac{v_1}{m}\Big)^n\Big)$$

这表明，如果 $n \geq 1$，则 $mX(z_m) = (v_1, v_2) = V$，并且当 $m \to +\infty$时收敛到 V。由于 $V_m = mX(z_m) \in T_{z_m}\mathcal{F}_X$，可得 $V \in C_0\mathcal{F}_X$。因此，$C_0\mathcal{F}_X = \mathbb{C}^2$。情形 $\alpha^{-1} \in \mathbb{N}$ 类似。

例 1.4. 考虑全纯向量场

$$X(x, y, z) = x\frac{\partial}{\partial x} + h(z)y\frac{\partial}{\partial y}$$

定义在单位多圆盘 $M = \mathbb{D}^3 \subset \mathbb{C}^3$ 上；其中，h 是一个不消失全纯函数。在此情况下，$E = \{X = 0\} = \{(0, 0, z) \in M\}$。

我们将证明，对于每个 $p = (0, 0, c) \in E$, $C_p\mathcal{F}_X = \langle e_1, e_2\rangle$，其中 $\langle e_1, e_2\rangle \backsimeq \mathbb{C}^2$ 是由向量 $e_1 = (1, 0, 0)$ 和 $e_2 = (0, 1, 0)$ 张成的 $\mathbb{C}^3$ 的复子空间。为说明 $C_p\mathcal{F}_X \subset \langle e_1, e_2\rangle$，注意到，如果对于任意 $z \in M \setminus E$，$v = (v_1, v_2, v_3) \in T_z\mathcal{F}_X$，则 $v_3 = 0$。因此，如果 $V = (v_1, v_2, v_3) \in C_p\mathcal{F}_X$，那么 $v_3 = 0$，从而 $V \in \langle e_1, e_2\rangle$。

现在注意到，对于每个 $c \in \mathbb{D}$，$\Sigma_c = \{z = c\}$ 都是 $\mathcal{F}_X$–不变的。考虑向量场$X_c = X|_{\Sigma_c}$

$$X_c = x\frac{\partial}{\partial x} + h(c)y\frac{\partial}{\partial y}$$

定义在 $M_c = \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}^2$ 上，并满足 $E_c = \{X_c = 0\} = \{0\}$。由于 $h(c) \neq 0$，前面各例中的计算表明 $C_0\mathcal{F}_{X_c} = \mathbb{C}^2 = \langle e_1, e_2\rangle$。此外，显然 $C_0\mathcal{F}_{X_c} \subset C_p\mathcal{F}_X$。因此 $\langle e_1, e_2\rangle \subset C_p\mathcal{F}_X$。

最后，

$$C_pE \cap \overline{C_p\mathcal{F}_X} = \{0\}.$$

由于对于所有 $p \in E$ 都有 $C_pE = \langle e_3\rangle$，这表明 $\mathcal{F}_X$ 在每个 $p \in E$ 处都是横截类型。

例 1.5. 设 $\mathcal{F}_X$ 是由向量场诱导的全纯叶状结构 d

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + zy\frac{\partial}{\partial z}$$

在以原点为中心、多重半径为 $r =$ （r_1, r_2, r_3）的开多圆盘 $M \subset \mathbb{C}^3$ 上。$\mathcal{F}_X$ 的奇异集为 $E = \{(0, y, z) \in M : yz = 0\} = \{y - \text{轴}\} \cup \{z - \text{轴}\}$。

我们将证明，对每个 $p \in E$， $C_p\mathcal{F}_X = \langle (1,0,0)、(0,1,1)\rangle$，且 $\mathcal{F}_X$ 为横截类型。

对于 $p \in E$，注意到 $C_p\mathcal{F}_X \subset \langle (1,0,0)、(0,1,1)\rangle$。事实上，对于任意满足 $z \in M \setminus E$ 的 $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_z\mathcal{F}_X$，必有 $v_2 = v_3$。因此， $v \in \langle (1,0,0)、(0,1,1)\rangle$，所以若 $V \in C_p\mathcal{F}_X$，则 $V \in \langle (1,0,0)、(0,1,1)\rangle$。

现在假设 $V = (v_1, v_2, v_2) \in \langle (1,0,0)、(0,1,1)\rangle \setminus \{0\}$。需要考虑三种情况：

- 设 $p = (0, c, 0) \in E$，其中 $c \in D(0, r_2) \setminus \{0\}$。考虑点序列 $z_n = (\frac{v_1}{n}, c, \frac{v_2}{cn}) \in M \setminus E$，以及向量

$$V_n = nX(z_n) = n\Big(\frac{v_1}{n}, c\frac{v_2}{cn}, c\frac{v_2}{cn}\Big) = (v_1, v_2, v_2) = V.$$

由于 $V = V_n \in T_{z_n}\mathcal{F}_X$ 和 $z_n \to p$，可得 $V \in C_p\mathcal{F}_X$。因此，

$$\langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = C_p\mathcal{F}_X = \overline{C_p\mathcal{F}_X}.$$

此外，由于 $C_pE = \langle (0,1,0)\rangle$，可得

$$C_pE \cap \overline{C_p\mathcal{F}_X} = \langle (0,1,0)\rangle \cap \langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = \{0\}.$$

由于这对所有满足 $c \in D(0, r_2) \setminus \{0\}$ 的 $p = (0, c, 0)$ 都成立，取 U_p 的一个邻域 p，使得每个 $q \in U_p \cap E$ 都可表示为满足 $y \neq 0$ 的 $q = (0, y, 0)$。因此， $\mathcal{F}_X$ 在 $p \in E$ 处是横截类型。

- 设 $p = (0,0,c) \in E$，其中 $c \in D(0, r_3) \setminus \{0\}$。考虑点的序列 $z_n = (\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{cn}, c) \in M \setminus E$，以及向量

$$V_n = nX(z_n) = n\Big(\frac{v_1}{n}, c\frac{v_2}{cn}, c\frac{v_2}{cn}\Big) = (v_1, v_2, v_2) = V.$$

由于 $V = V_n \in T_{z_n}\mathcal{F}_X$ 和 $z_n \to p$，可得 $V \in C_p\mathcal{F}_X$。因此，

$$\langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = C_p\mathcal{F}_X = \overline{C_p\mathcal{F}_X}.$$

此外，由于 $C_pE = \langle (0,0,1)\rangle$，因此可得

$$C_pE \cap \overline{C_p\mathcal{F}_X} = \langle (0,0,1)\rangle \cap \langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = \{0\}.$$

由于这对所有满足 $c \in D(0, r_3) \setminus \{0\}$ 的 $p = (0,0,c)$ 都成立，取 p 的一个邻域 U_p，使得每个 $q \in U_p \cap E$ 都具有 $q = (0,0,z)$ 的形式，其中 $z \neq 0$。因此， $\mathcal{F}_X$ 在 $p \in E$ 处是横截类型。

- 令 $p = (0,0,0) \in E$。在这种情况下，考虑该序列

$$z_n = \Big(\frac{v_1}{n}, (\frac{v_2}{n})^{1/2}, (\frac{v_2}{n})^{1/2}\Big) \in M \setminus E$$

和向量

$$V_n = nX(z_n) = n\Big(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}, \frac{v_2}{n}\Big) = (v_1, v_2, v_2) = V.$$

由于 $V = V_n \in T_{z_n}\mathcal{F}_X$ 和 $z_n \to 0$，可得 $V \in C_0\mathcal{F}_X$。因此，

$$\langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = C_0\mathcal{F}_X = \overline{C_0\mathcal{F}_X}.$$

此外，由于 $C_0E = \langle (0,0,1)\rangle \cup \langle (0,1,0)\rangle$，可知

$$C_0E \cap \overline{C_0\mathcal{F}_X} = \big(\langle (0,0,1)\rangle \cup \langle (0,1,0)\rangle\big) \cap \langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = \{0\}.$$

令 $U_0 = M$。根据前面的观察，横截性条件对所有$p \in E$均成立，这意味着 $\mathcal{F}_X$ 在 $0 \in E$处是横截类型。

因此， $\mathcal{F}_X$ 是横截类型。

在下文中，我们假设 $\mathcal{F}$ 是双曲的。因此，每个叶 $L_p \subset \mathcal{F}$ 都是双曲黎曼曲面。固定 M 上的黎曼度量 g，并令 $|v|_g$ 表示切向量 v的长度。令 $\mathcal{O}(\mathbb{D},\mathcal{F})$表示从 $\mathbb{D}$ 映射到叶 $L \subset \mathcal{F}$中的全纯映射 f所构成的族。一致化模 $\eta\colon\ M \setminus E \to (0,\infty)$由下式给出

$$\eta(z) = \sup\{|f'(0)|_g : f \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathcal{F}), f(0) = z\}$$

由 Verjovsky [11] 定义；Lins Neto [8, 9], 、Lins Neto–Martins [10], 、Candel [2], 以及最近的 Dinh– Nguyen–Sibony [4, 5] 研究了在关于 E 的适当假设下其连续性性质。本文以 [7], 为基础，而后者受到了 [10] 的启发。回想一下，[10] 给出了若干等价的充分条件，用于保证当 E 是离散的情形下，η 在 $M \setminus E$ 上的连续性。

本文的目标有两个。首先，将 [10] 中的一些结果推广到不对 E 加以限制的双曲 shfc，并证明：如果 $\mathcal{F}$ 具有横截类型，且 η 在 $M \setminus E$ 上连续，那么 η 可连续延拓到整个 M。证明所用的技巧与 [10] 中的技巧类似。其次，设

$$D_{\mathcal{F}} = \{p \in M \setminus E : \eta \text{ is discontinuous at } p\}$$

是 η 的不连续点集。我们得到了 $D_{\mathcal{F}}$ 在 $M \setminus E$ 中相对位置的若干性质，其中一些观察强化了 Fornaess–Sibony [6] 先前得到的结果。

如在 [10], 中，一致化空间

$$\mathcal{U} = \{\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\mathcal{F}) \mid \alpha \text{ is a uniformization of a leaf of } \mathcal{F}\}$$

是需要考虑的本质对象；如果对于任意满足以下条件的族 $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}\colon\ \{\alpha(0) \mid \alpha \in \mathcal{H}\}$ 在 M 中相对紧，则族 $\mathcal{H}$ 是正规族，我们就称 $\mathcal{U}$ 具有 NCP（在紧部分上正规）性质。例如，当 M 是双曲满的时，这一性质成立。

在陈述主要结果之前，下面的引理描述了 $\mathcal{U}$ 的闭包，并将在后文反复使用。

引理 1.6. 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 M 上的双曲 shfc，其奇异集 $E \subset M$ 的维数为 $k \geq 0$。若 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的一个序列，并且在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛于 $\alpha\colon\ \mathbb{D} \to M$，则 $\alpha(\mathbb{D}) \subset L \cup E$，其中 $L = \emptyset$ 或 L 是 $\mathcal{F}$ 的一个叶。特别地，如果 $L = \emptyset$ 且 $q \in \alpha(\mathbb{D}) \subset E$，其中 $\mathcal{F}$ 是 $q \in E$ 处的横截类型，则 $\alpha \equiv q \in E$。

证明。考虑开集 $U = \{z \in \mathbb{D}\colon\ \alpha(z) \notin E\}$。对 $z_0 \in U$，定义集合 $U_{z_0} = \{z \in U : L_z = L_{z_0}\}$。利用 α 在 U 的各点处是局部浸入，且在 E 之外存在 $\mathcal{F}$ 的局部平凡化这一事实，可以看出 U_{z_0} 是 $\mathbb{D}$ 中的开集。

设 $F = \alpha^{-1}(E)$。只需证明，若 F 非空，则 F 是离散集，或者 $F = \mathbb{D}$。假设 F 不是离散的，且 $z \in D$ 是 F 的极限点。由于 F 是闭集，$z \in F$。考虑点 $\alpha(z) = p \in E$。由于 E 是 M 的解析子集，存在 E 在 p 附近的局部定义函数 $f_1, f_2, \ldots, f_m$；也就是说，存在 p 的一个邻域 $V \subset M$，使得 $V \cap E = \{f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0\}$。设 $r > 0$ 满足 $\alpha(D(z,r)) \subset V$。考虑定义在圆盘$D(z,r)$上的全纯函数 $f_1 \circ \alpha|_{D(z,r)}, f_2 \circ \alpha|_{D(z,r)}, \ldots, f_m \circ \alpha|_{D(z,r)}$。由于 z 是 $D(z,r)$ 中零点集 $\mathcal{Z}(f_i \circ \alpha|_{D(z,r)})$ 的聚点，因此对所有 $1 \leq i \leq m$，$f_i \circ \alpha|_{D(z,r)} \equiv 0$ 在 $D(z,r)$ 上成立。因此，$D(z,r) \subset F$，并且通过连通性论证可得 $F = \mathbb{D}$。

如果 $L = \emptyset$，那么 $\alpha(\mathbb{D}) \subset E$。设 $q \in \alpha(\mathbb{D}) \subset E$ 使得 $\mathcal{F}$ 在 q处具有横截类型。我们需要证明 α 是一个常值映射。假设并非如此。设 $z_0 \in \mathbb{D}$、$r > 0$ 使得 $\alpha(z_0) = q$且 $\alpha(D(z_0,r)) \subset U_q$。由于 $\alpha|_{D(z_0,r)}\colon\ D(z_0,r) \to U_q \cap E$是非常值的，令 $z_1 \in D(z_0,r)$ 使得 $\alpha'(z_1) \neq 0$；又由于 $\alpha_n'(z_1) \to \alpha'(z_1)$，因此 $\alpha'(z_1) \in C_{\alpha(z_1)}\mathcal{F}$。

此外，由于 $\alpha(\mathbb{D}) \subset E$，因此 $\alpha'(z_1) \in C_{\alpha(z_1)}E$，这与 $\mathcal{F}$ 在邻域 U_q 中的横截性相矛盾。因此，$\alpha \equiv q \in E$。□

通过将引理 1.6 与 [10] 中命题 3 的证明所采用的完全相同的一组思想结合起来，可得到关于 η 在$M \setminus E$上连续性的一组等价条件。细节略去。

定理 1.7. 设 $\mathcal{F}$是复流形 M上的双曲 SHFC，其奇异集为 $E \subset M$。此外，设 g 是定义在 M 上的给定厄米度量，η 是$\mathcal{F}$的一致化映射的模。假设 $\mathcal{U}$ 是 NCP。则以下条件等价：

(1) η 在 $M \setminus E$中连续。(2) 对于 $\mathcal{U}$中的任意序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$，若其在 $\mathbb{D}$ 的紧部分中收敛于某个$\alpha : \mathbb{D} \to M$，且 $p = \alpha(0) \notin E$，则 $\alpha(\mathbb{D}) \subset L_p$，其中 L_p 是经过 p的 $\mathcal{F}$ 的叶。(3) 对于 $\mathcal{U}$中的任意序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$，若其在 $\mathbb{D}$ 的紧部分中收敛于某个$\alpha : \mathbb{D} \to M$，且 $p = \alpha(0) \notin E$，则 α 是 L_p的一致化。(4) 对于 $\mathcal{U}$中的任意序列 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$，若其在 $\mathbb{D}$ 的紧部分中收敛于某个$\alpha : \mathbb{D} \to M$，且 $p = \alpha(0) \in E$，则 $\alpha(\mathbb{D}) \subset E$。

接下来的结果表明，横截条件足以使映射 η 连续延拓到奇异部分。

定理 1.8. 设 $\mathcal{F}$ 是复流形 M 上的双曲 shfc，其奇异集为 $E \subset M$。假设 $\mathcal{U}$ 满足 NCP，且 η 在 $M \setminus E$上连续。若 $\mathcal{F}$ 在某个 $p \in E$处具有横截类型，则 η 连续延拓到点 $p \in E$。事实上，若 $\mathcal{F}$ 在 E的每一点都具有横截类型，则 η 可连续延拓到整个 M。

证明。定义 $\tilde{\eta} : M \to [0, +\infty)$，使得对 $x \in M \setminus E$有 $\tilde{\eta}(x) = \eta(x)$，对 $x \in E$有 $\tilde{\eta}(x) = 0$。假设 $\tilde{\eta}$ 在 $p \in E$处不连续。则存在点的序列 $\{p_n\}_{n\geq 1}$，属于 $M \setminus E$，满足 $p_n \to p$，且对某个 $\epsilon > 0$ 及所有 $n \geq 1$，都有 $\eta(p_n) > \epsilon$。设 α_n 是叶 L_{p_n} 的一个一致化，且 $\alpha_n(0) = p_n$。由于 $\mathcal{U}$ 满足 NCP，存在一个子序列 $\{\alpha_{n_k}\}_{k\geq 1}$，它在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到映射 $\alpha : \mathbb{D} \to M$。由于 $\alpha(0) = p \in E$，定理 1.7 表明 $\alpha(\mathbb{D}) \subset E$。若 α 非常值，则如引理 1.6 所示，这将与 $\mathcal{F}$ 在 $p \in E$ 处的横截条件矛盾。因此 $\alpha \equiv p \in E$，并

$$0 = |\alpha'(0)|^2 = \lim_{k\to+\infty} |\alpha'_{n_k}(0)|^2 = \lim_{k\to+\infty} \eta(p_{n_k})$$

这与 $\eta(p_{n_k}) > \epsilon$ 对所有 $n \geq 1$均成立相矛盾。因此，η 连续延拓至 $p \in E$。如果 $\mathcal{F}$ 处处为横截类型，则上述论证表明，$\tilde{\eta}$ 在 M上连续。

□

注：如果双曲 shfc $\mathcal{F}$ 的奇异集 E 是离散的，则 $C_pE = \{0\}$ 对所有 $p \in E$均成立。因此，$\overline{C_p\mathcal{F}} \cap C_pE = \{0\}$ 对所有 $p \in E$ 均成立，这意味着这样的 $\mathcal{F}$始终具有横截类型。在这种情况下，如果已知 η 在 $M \setminus E$上连续，则它总能连续延拓至 E。考虑对应于 η的 不连续点集

$$D_{\mathcal{F}} = \{p \in M \setminus E : \eta \text{ is discontinuous at } p\}$$

对应于一个双曲 shfc $\mathcal{F}$。

定理 1.9。设 $(M, \mathcal{F}, E)$ 如上，并假设 $\mathcal{U}$是 NCP。则

(1) 对于 $\mathcal{F}$ 的每个 L，集合 $D_{\mathcal{F}} \cap L$ 要么为空，要么在 L 中是开集。(2) 如果 $\mathcal{F}$ 在 $p \in E$ 处是横截类型，并且 η 不连续延拓到 p，那么 $D_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$。事实上，存在一个序列 $p_n \in D_{\mathcal{F}}$，使得 $p_n \to p$。

证明。(1) 令 $p \in D_{\mathcal{F}}$。令 $\{p_n\}_{n\geq 1} \subset M \setminus E$ 满足 $p_n \to p$，但 $\eta(p_n) \not\to \eta(p)$。不妨设，取一个子序列后，$\eta(p_n) \to m \neq \eta(p)$。
对于每个 p_n，设 $\alpha_n : \mathbb{D} \to L_{p_n}$ 是相应的一致化映射，即 $\alpha_n(0) = p_n$，且 $\eta(p_n) = |\alpha_n'(0)|^2$。由于 $\mathcal{U}$ 是 NCP，且 $\alpha_n(0) = p_n \to p$，经过进一步抽取子序列后，我们可以假设 $\alpha_n \to \alpha : \mathbb{D} \to M$，其中 $\alpha(0) = p$，且 $|\alpha'(0)|^2 = m \neq 0$ （利用 η的下半连续性，$\eta(p_n) \to m \geq \eta(p) \neq 0$）。

利用叶片的局部结构，存在 $r > 0$ 使得 $\alpha : \Delta_r \to L_p$，其中 $\Delta_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| < r\}$。

设 $\beta : \mathbb{D} \to L_p$ 为一致化映射，使得 $\beta(0) = p$，且 $\eta(p) = |\beta'(0)|^2$。考虑由下式定义的$f_1, f_2 : \Delta_r \to \mathbb{R}$

$$f_1(z) = (1-|z|^2)^2|\alpha'(z)|^2 \text{ and } f_2(z) = (1-|z|^2)^2|\beta'(z)|^2$$

并注意，对于 $z \in \Delta_r$，有 $f_2(z) = \eta(\beta(z))$。由于 f_1, f_2 连续，且 $f_1(0) \neq f_2(0)$（因为$f_1(0) = |\alpha'(0)|^2 = m \neq \eta(p) = |\beta'(0)|^2 = f_2(0)$），存在 $0 < R < r$，使得

$$f_1(\Delta_R) \cap f_2(\Delta_R) = \emptyset. \tag{1.1}$$

断言：存在 $0 < r_1, r_2 < R$，使得

$$\beta(\Delta_{r_2}) \subset \alpha(\Delta_{r_1}). \tag{1.2}$$

设 $0 < \hat{r} < R$，使得 $\alpha|_{\Delta_{\hat{r}}}, \beta|_{\Delta_{\hat{r}}}$都是到其像上的双全纯映射。这是可能的，因为 $|\alpha'(0)|, |\beta'(0)| \neq 0$。注意，$U = \alpha(\Delta_{\hat{r}}) \cap \beta(\Delta_{\hat{r}})$ 是 L_p 中的开集，且包含p。现在选取 $r_1 < \hat{r}$，使得 $\alpha(\Delta_{r_1}) \subset U$；并且对于相应的 r_1，可以选取$r_2 < \hat{r}$，使得 $\beta(\Delta_{r_2}) \subset \alpha(\Delta_{r_1}) \subset U$。因此，断言得证。

考虑 $V = \beta(\Delta_{r_2})$，它是 L 中包含 p 的一个开集。令 $q \in V$，并假设对于某个 $z \in \Delta_{r_2}$，有 $q = \beta(z)$。根据 (1.2)，存在一个 $\tilde{z} \in \Delta_{r_1}$，使得 $q = \beta(z) = \alpha(\tilde{z})$。现在考虑序列 $q_n := \alpha_n(\tilde{z}) \in M \setminus E$。由于 $\alpha_n \to \alpha$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛，$q_n \to q$，因为 $q_n = \alpha_n(\tilde{z}) \to \alpha(\tilde{z}) = \beta(z) = q$。此外，$|\alpha_n'(\tilde{z})| \to |\alpha'(\tilde{z})|$，这进而给出

$$(1-|\tilde{z}|^2)^2|\alpha_n'(\tilde{z})|^2 \to (1-|\tilde{z}|^2)^2|\alpha'(\tilde{z})|^2. \tag{1.3}$$

由于 $\eta(q_n) = (1-|\tilde{z}|^2)^2|\alpha_n'(\tilde{z})|^2$，上面的 (1.3) 表明

$$\eta(q_n) \to f_1(\tilde{z})$$

其中 $\tilde{z} \in \Delta_{r_1} \subset \Delta_R$。现在利用 (1.1) 以及 $f_2(z) = \eta(q)$ 这一事实，我们得到

$$f_1(\tilde{z}) \neq f_2(z) = \eta(q).$$

因此，$\eta(q_n) \not\to \eta(q)$，尽管 $q_n \to q$。由此可得，$q \in D_{\mathcal{F}} \cap L$；由于 $q \in V$ 任意，$V \subset D_{\mathcal{F}} \cap L$。

(2) 由于 η 不能连续延拓到 $p \in E$，因此存在一个序列 $q_n \in M \setminus E$，使得 $q_n \to p \in E$，且 $\lim_{n\to+\infty} \eta(q_n) = k \neq 0$。令 $\alpha_n : \mathbb{D} \to L_{q_n}$ 为叶 L_{q_n} 的一致化映射，使得 $\alpha_n(0) = q_n$。取一个子序列后，我们可以假设 $\alpha_n \to \alpha$，其中 $\alpha : \mathbb{D} \to L \cup E$，对于某个 $\mathcal{F}$ 中的叶 L，使得 $\alpha(0) = p$ 且 $|\alpha'(0)|^2 = k$。$p \in E$ 处的横截条件与 $|\alpha'(0)|^2 = k \neq 0$ 这一事实共同推出存在一个 $r > 0$，使得$\alpha(D(0,r) \setminus \{0\}) \subset L \subset M \setminus E$。

现在沿着叶 L，映射 $\eta(q)$ 是光滑的，并且当 $q \to p$ 时趋于 0。因此，对于 $\epsilon > 0$，我们可以选择足够小的 $r > 0$，使得

$$|\eta(q)|^2 < \epsilon.$$

对所有 $q \in \alpha(D(0,r) \setminus \{0\})$。对于 $q = \alpha(z_0) \in \alpha(D(0,r)^*)$，取 $\tilde{q}_n = \alpha_n(z_0)$。显然，$\tilde{q}_n \to q$。但是

$$\eta(\tilde{q}_n) = \eta(\alpha_n(z_0)) = |\alpha_n'(z_0)|^2(1-|z_0|^2)^2 \to |\alpha'(z_0)|^2(1-|z_0|^2)^2.$$

我们可以将 $r > 0$ （带有 $\epsilon < k$）取得足够小，使得 $|\alpha'(z_0)|^2(1-|z_0|^2)^2 > 2\epsilon$。因此，

$$\eta(\tilde{q}_n) \to |\alpha'(z_0)|^2(1-|z_0|^2)^2 > 2\epsilon > \eta(q)$$

这表明 $q \in D_{\mathcal{F}}$，由于 $q \in \alpha(D(0,r)^*)$ 是任意的，因此可得 $\alpha(D(0,r)\setminus\{0\}) \subset D_{\mathcal{F}} \subset M \setminus E$。现在我们可以取 $p_n \in \alpha(D(0,r)\setminus\{0\})$，使得 $p_n \to p$，由此证明完毕。

□

注：定理 1.9 还表明 $D_{\mathcal{F}}$ 中不存在孤立点。

命题 1.10. 设 $(M,\mathcal{F},E)$ 如前所述，并假设 $\mathcal{U}$ 是 NCP。若 $\mathcal{F}$ 的叶 $L \subset M$ 在任意奇点 $q \in E$ 处都不是局部分离曲线，则 η 在每个 $p \in L$ 处都是连续的。

证明。设 $p \in L \cap D_{\mathcal{F}}$。那么存在一个序列 $\{p_n\}_{n\geq 1} \subset M \setminus E$，使得 $p_n \to p$，但 $\eta(p_n) \not\to \eta(p)$。不妨经过取子序列，设 $\eta(p_n) \to m \neq \eta(p)$。设 α_n 为叶 L_{p_n} 的一致化映射，满足 $\alpha_n(0) = p_n$。由于 $\mathcal{U}$ 是 NCP，且 $\alpha_n(0) \to p$，经过进一步取子序列，存在 $\alpha : \mathbb{D} \to M$，使得 $\alpha_n \to \alpha$ 在 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛。由引理 1.6，存在一条叶 $\tilde{L}$，使得 $\alpha(\mathbb{D}) \subset \tilde{L} \cup E$，其中 $\alpha^{-1}(E)$ 要么是离散的（可能为空），要么就是整个 $\mathbb{D}$。现在，由于 $\alpha(0) = p \in M \setminus E$，因此 $\tilde{L} = L_p = L$，且 $\alpha^{-1}(E)$ 是离散的。若 $\alpha^{-1}(E) \neq \emptyset$，即存在一个 $z_0 \in \alpha^{-1}(E)$，那么 L 将是 $q = \alpha(z_0) \in E$ 附近的一条局部分离曲线，这就产生了矛盾。因此 $\alpha^{-1}(E) = \emptyset$，且 $\alpha(\mathbb{D}) \subset L$，进而得到

$$\eta(p_n) = |\alpha_n'(0)|^2 \to |\alpha'(0)|^2 \leq \eta(p),$$

也就是说 $m \leq \eta(p)$。但根据 η的下半连续性， $m \geq \eta(p)$。因此， $m = \eta(p)$，这就产生了矛盾。故 $L \cap D_{\mathcal{F}} = \emptyset$。

□

定理 1.11. 设 $(M,\mathcal{F},E)$ 是一个双曲 shfc，且 $\mathcal{U}$是 NCP。假设对每个$q \in E$，都存在一个邻域 U_q，以及一个局部 $\mathcal{F}$–不变超曲面 $\Sigma_q = \{f_q = 0\}$，使得

$$q \in \Sigma_q \subset U_q.$$

那么 η 在 $M \setminus \bigcup_{p\in(\cup_{q\in E}\Sigma_q)} L_p$上连续。

证明。设 $\tilde{p} \in (M \setminus \bigcup_{p\in(\cup_{q\in E}\Sigma_q)} L_p) \cap D_{\mathcal{F}}$。设 $\{p_n\}_{n\geq 1} \subset M \setminus E$是一个序列，使得 $p_n \to \tilde{p}$，且 $\eta(p_n) \not\to \eta(\tilde{p})$。不妨取一个子序列，使得 $\eta(p_n) \to m \neq \eta(\tilde{p})$。设 α_n 是叶 L_{p_n} 的一个一致化映射，满足 $\alpha_n(0) = p_n$。由于 $\mathcal{U}$ 是 NCP 且 $\alpha_n(0) \to \tilde{p}$，不妨进一步取一个子序列，使得存在 $\alpha : \mathbb{D} \to M$，令 $\alpha_n \to \alpha$ 在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛。由引理 1.6，存在一片叶 $\tilde{L}$，使得 $\alpha(\mathbb{D}) \subset \tilde{L} \cup E$，其中 $\alpha^{-1}(E)$ 或为离散的˜（可能为空），或为整个 $\mathbb{D}$。由于 $\tilde{p} = \alpha(0) \in M \setminus \bigcup_{p\in(\cup_{q\in E}\Sigma_q)} L_p \subset M \setminus E$，因此 $L = L_{\tilde{p}}$且 $\alpha^{-1}(E)$ 是离散的。

现在，如果 $\alpha^{-1}(E) \neq \emptyset$，固定 $z \in \alpha^{-1}(E)$（其中 $\alpha(z) = q \in E$），并令 $r > 0$ 使得 $D(z,r)\setminus\{z\} \subset \mathbb{D}\setminus\alpha^{-1}(E)$ 且 $\alpha(D(z,r)) \subset U_q$。根据对 $\tilde{p}$ 的选取以及 $\alpha(D(z,r))\cap U_q \cap E = \{q\}$ 这一事实，我们可以将 $r > 0$ 选得足够小，使得 $\alpha(D(z,r)) \cap \Sigma_q = \{q\}$。由于每个 $\alpha_n(D(z,r))$ 都包含于叶 L_{p_n} 中，根据 Σ_q 的 $\mathcal{F}$– 不变性以及 $\alpha_n|_{D(z,r)}$一致收敛于 $\alpha|_{D(z,r)}$ 这一事实，我们得到 $f_q \neq 0$ 在 $\alpha_n(D(z,r))$ 上成立。但是， $f_q \circ \alpha_n(z) \to 0$。因此，根据赫尔维茨定理，$f_q \circ \alpha|_{D(z,r)} \equiv 0$，这就产生了矛盾。于是， $\alpha^{-1}(E) = \emptyset$，且 $\alpha(\mathbb{D}) \subset L_{\tilde{p}}$。这给出 $m = \eta(\tilde{p})$，再次与 $m \neq \eta(\tilde{p})$ 的假设矛盾。因此， η 在 $M \setminus \bigcup_{p\in(\cup_{q\in E}\Sigma_q)} L_p$ 上是连续的。

□

反复应用定理 1.11，可得到以下两个推论。细节从略。

推论 1.12. 设 $(M,\mathcal{F},E)$ 是一个双曲 shfc，且 $\mathcal{U}$ 是 NCP。假设对于每个$q\in E$，都存在一个邻域 U_q，以及 k_q 个局部 $\mathcal{F}$–不变超曲面 $\Sigma_{q,\ 1}$，$\Sigma_{q,\ 2}$，$\ldots$，$\Sigma_{q,\ k_q}$，满足 $k_q\geq 1$，使得

$$q\in\cap_{i=1}^{k_q}\Sigma_{q,i}\subset U_q.$$

那么 η 在 $M\setminus\bigcup_{p\in(\cup_{q\in E}(\cap_{i=1}^{k_q}\Sigma_{q,\ i}))}L_p$ 上连续。

推论 1.13. 设 $(M,\mathcal{F},E)$ 是一个双曲 shfc，且 $\mathcal{U}$ 是 NCP。假设对于每个 $q\in E$，都存在一个邻域 U_q，以及 $m-k$ 个局部 $\mathcal{F}$–不变超曲面$\Sigma_{q,\ 1}$，$\Sigma_{q,\ 2}$，$\ldots$，$\Sigma_{q,\ m-k}$，使得

$$q\in\cap_{i=1}^{m-k}\Sigma_{q,i}\subset U_q\cap E.$$

那么 η 在 $M\setminus E$上是连续的。

注：推论 1.13加强了 Fornaess–Sibony 的一个结果（ [6]中的定理 20）。他们证明了紧致厄米流形 M 上具有离散奇异集的奇异黎曼曲面层状结构满足该结果，并且还要求满足一个附加假设：在奇异集之外，$\mathbb{C}$ 的任何像都不局部包含于叶中。不难看出，如果假设M 为紧致厄米流形，并将 $\mathcal{U}$ 为 NCP 的条件替换为 [6] 中所采用的条件，即在奇异集之外，$\mathbb{C}$ 的任何像都不局部包含于叶中，那么定理 1.11仍然成立。

例 1.14。考虑单位多圆盘 $M=\mathbb{D}^3\subset\mathbb{C}^3$ 上的双曲 shfc $\mathcal{F}_X$，它由以下向量场诱导

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+e^z y\frac{\partial}{\partial y}.$$

$\mathcal{F}_X$的奇异集由 $E=\{(0,0,z)\in M\}$给出。设 $p=(0,0,z)\in E$是 E中的任意点。根据例 1.4，$\mathcal{F}_X$ 具有横截类型。

现在注意到，$\Sigma_1=\{x=0\}$、$\Sigma_2=\{y=0\}$ 都是 $\mathcal{F}_X$–不变的。由于 $\mathcal{U}$是 NCP 且$E=\Sigma_1\cap\Sigma_2$，推论 1.13 表明，一致化映射 η 的模在$M\setminus E$上连续。现在，定理 1.8 告诉我们，映射 η 可连续延拓到整个 M。

例 1.15。考虑 $M=\mathbb{D}^3\subset\mathbb{C}^3$ 上的向量场

$$X=z\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+xy\frac{\partial}{\partial z}.$$

记 $\mathcal{F}_X$为由 X在 M上诱导的相应 shfc，其奇异集为 $E=\{(0,y,0):\ y\in\mathbb{D}\}\cup\{(x,0,0):\ x\in\mathbb{D}\}$。显然，$\mathcal{F}_X$是双曲叶状结构。另请注意，$\mathcal{F}_X$是一个非横截类型的全纯叶状结构的例子，因为 $(1,0,0)\in\overline{T_0\mathcal{F}_X}\cap T_0E$。

可以验证，平面 $H=\{y=0\}$ 是 $\mathcal{F}_X-$不变的，因为在平面 H 上，向量场由 $X=z\frac{\partial}{\partial x}$给出。经过点 $p=(0,0,z)\in H$ 且满足 $z\neq 0$ 的叶由 $L_p=\{(\xi,0,z):\ \xi\in\mathbb{D}\}$ 给出。考虑映射 α_p：由 $\mathbb{D}\to L_p$ 给出的 $\alpha_p(\xi)=(\xi,0,z)$。容易看出，α_p 是叶 L_p 的一致化，且满足 $\alpha_p(0)=p$，因此

$$\eta(p)=|\alpha'(0)|^2=1.$$

现在考虑序列 $p_n=(0,0,\frac{1}{n})\in H\setminus E$，并令 α_n为叶 L_{p_n}的相应一致化映射，该叶的基点 p_n 由 $\alpha_n(\xi)=(\xi,0,\frac{1}{n})$ 给出。显然，$\alpha_n\to\alpha$在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛，其中 $\alpha:\ \mathbb{D}\to M$由 $\alpha(\xi)=(\xi,0,0)\in E$给出，即 $\alpha(\mathbb{D})\subset E$。现在$p_n\to 0\in E$，且对于所有 $n\geq 1$，$\eta(p_n)=1$。

考虑映射 $g\colon\ \mathbb{D}\to M$，其由 $g(w)=(w,\frac{w^2}{2},\frac{w^2}{2})$ 给出。注意到 g 是单射，且$g(\mathbb{D})\cap E=\{0\}$。此外，对于所有 $w\in\mathbb{D}\setminus\{0\}=\mathbb{D}^*$，$g'(w)=(1,w,w)\in T_{g(w)}\mathcal{F}_X$。因此，$g(\mathbb{D}^*)$ 应包含在 $\mathcal{F}_X$ 的某个叶中，并且由于当 $w\to\partial\mathbb{D}$ 时 $g(w)\to\partial M$，我们得到 $g(\mathbb{D}^*)$ 是 $\mathcal{F}_X$ 的一个叶 L，其与 $\mathbb{D}^*$双全纯同构。因此，我们可以取任意序列 $q_n\in L$，使得$q_n\to 0$ 且 $\eta(q_n)\to 0$（因为 $\mathbb{D}^*$ 上的庞加莱度量在原点处是完备的）。

因此，存在两个序列 $\{p_n\}_{n\geq 1}$、$\{q_n\}_{n\geq 1}$，其中 $M\backslash E$，使得 p_n、$q_n\to 0$，但 $\eta(p_n)\to 1$，且 $\eta(q_n)\to 0$。因此，η 无法连续延拓至 $0\in E$。

例1.16. 设 $\mathcal{F}_X$ 为由向量场诱导的 shfc

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+zy\frac{\partial}{\partial y}$$

定义在半径为 $r=(r_1,r_2,r_3)$ 的开多圆盘上，记为 $M=P(0,r)$。$\mathcal{F}_X$ 的奇异集为 $E=\{(0,y,z)\in M:\ yz=0\}=\{y-\text{轴}\}\cup\{z-\text{轴}\}$（此处 $\dim(E)=1$）。由于 M 是 Kobayashi双曲的，$\mathcal{F}_X$ 是双曲叶状结构，且 $\mathcal{U}$ 是 NCP。

可以验证，$\Sigma_1=\{x=0\}$、$\Sigma_2=\{y=0\}$ 和 $\Sigma_3=\{z=0\}$ 都是 $\mathcal{F}_X$–不变的。对于 $p=(0,y,0)\in E$，取 $U_p=M$，并注意到 $p\in\Sigma_1\cap\Sigma_3=\{y-\text{轴}\}\subset E$。类似地，对于 $q=(0,0,z)\in E$，取 $U_q=M$，并注意到 $q\in\Sigma_1\cap\Sigma_2=\{z-\text{轴}\}\subset E$。推论 1.13 现给出了 η 在 $M\setminus E$ 上的连续性。

注意到 $X(0,y,z)=zy\frac{\partial}{\partial y}$，这意味着对于所有 $y,z\neq 0$，$(0,1,0)\in T_{(0,y,z)}\mathcal{F}_X$。取$p=(0,y,0)\in E$，由于 $C_pE=\{y-\text{轴}\}$，可得 $(0,1,0)\in C_pE$。取 $p_n=(0,y,\frac{1}{n})\in M\backslash E$，并注意到 $p_n\to p$，且对于所有 n，$(0,1,0)\in T_{p_n}\mathcal{F}_X$。因此，$(0,1,0)\in C_p\mathcal{F}_X\cap C_pE$。由此，$\mathcal{F}_X$ 在每个 $p\in\{y-\text{轴}\}\subset E$处都不是横截类型。

设 $p=(0,y,0)\in E$是这样一点。再次考虑 $p_n=(0,y,\frac{1}{n})\in M\backslash E$。在 $\Sigma_1=\{x=0\}$ 上，向量场化简为 $X=zy\frac{\partial}{\partial y}$，我们可以验证，经过 p_n 的叶由 $L_{p_n}=\{(0,\xi,\frac{1}{n}):\ \xi\in D(0,r_2)^*\}\cong\mathbb{D}^*$ 给出。因此，对于所有 $n,m\in\mathbb{N}$，$\eta(p_n)=\eta(p_m)\neq 0$。

现在，超曲面 Σ_3 上的叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 由向量场 $X=x\frac{\partial}{\partial x}$ 诱导。可以看出，经过点 $(x,y,0)\in M\setminus E$ 的叶由 $L=\{(\xi,y,0):\ \xi\in D(0,r_1)^*\}\cong\mathbb{D}^*$ 给出。注意到 $L\cup\{p\}\cong\mathbb{D}$，也就是说 L 是一条分离曲线。因此，若取 $q_n\in L$ 使得 $q_n\to p$，则 $\eta(q_n)\to 0$。

因此，我们得到两个序列 $\{p_n\}_{n\geq 1}$、$\{q_n\}_{n\geq 1}\subset M\setminus E$，使得 $p_n\to p$、$q_n\to p$，但 $\eta(p_n)\to k\neq 0$ 且 $\eta(q_n)\to 0$。所以，η 不具有连续延拓到任意 $p\in E_1=\{(0,y,0):\ y\in D(0,r_2)\}\subset E$ 的性质。

现在令 $p=(0,0,z)\in E$，其中 $z\neq 0$。由例 1.4 可知，$\mathcal{F}_X$在 p处是横截类型，而相应地，$\mathcal{F}_X$在每个 $p\in E_2=\{(0,0,z):\ z\in D(0,r_3)^*\}\subset E$ 处都是横截类型。根据定理 1.8，映射 η 可连续延拓到集合 $M\cup E_2$。

例 1.17. 令 $\mathcal{F}_X$ 为由向量场诱导的双曲 shfc

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+zy\frac{\partial}{\partial y}+zy\frac{\partial}{\partial z}$$

在半径为 $r=(r_1,r_2,r_3)$ 的开多圆盘 $M=P(0,r)\subset\mathbb{C}^3$ 上。$\mathcal{F}_X$ 的奇异集为 $E=\{(0,y,z)\in M:\ yz=0\}=\{y-\text{轴}\}\cup\{z-\text{轴}\}$，其维数为一。同样，可以验证 $\mathcal{U}$ 是 NCP，并且 $\Sigma_1=\{x=0\}$、$\Sigma_2=\{y=0\}$ 和 $\Sigma_3=\{z=0\}$ 都是不变的。与之前一样，我们可以在此使用推论 1.13，得出 η 在 $M\setminus E$ 上连续。例 1.5 表明 $\mathcal{F}_X$ 是横截类型。因此，η 可以连续延拓到整个 M。

示例 1.18。令 $\mathcal{F}_X$ 为由向量场诱导的双曲 shfc

$$X = xy\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + zx\frac{\partial}{\partial z}$$

在半径为 $r = (r_1, r_2, r_3)$ 的开多圆盘上，如前一个例子所示。$\mathcal{F}_X$ 的奇异集由 $E = \{(x, y, z) \in M$ 给出：$xy = yz = zx = 0\} = \{x - 轴\} \cup \{y - 轴\} \cup \{z - 轴\}$，其维数为一。可以验证，$\mathcal{U}$ 是 NCP，并且 $\Sigma_1 = \{x = 0\}$、$\Sigma_2 = \{y = 0\}$ 和 $\Sigma_3 = \{z = 0\}$ 都是 $\mathcal{F}_X$–不变的。令

$$E_1 = \{x - \text{axis}\} = \Sigma_2 \cap \Sigma_3,\ E_2 = \{y - \text{axis}\} = \Sigma_1 \cap \Sigma_3\ \&\ E_3 = \{z - \text{axis}\} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2.$$

根据推论 1.13，η 在 $M \setminus E$上是连续的。

取 $p = (x, 0, 0) \in E$作为 $x \neq 0$。注意到 $C_pE = \langle e_1 \rangle$，因此 $(1, 0, 0) = e_1 \in C_pE$。考虑序列 $p_n = (x, \frac{1}{n}, 0) \in M \setminus E$，并注意到对所有 n都有 $e_1 \in T_{p_n}\mathcal{F}_X$。因此，$e_1 \in \overline{C_p\mathcal{F}_X}$，从而 $\mathcal{F}_X$ 在 p处不是横截类型。由于 p 是任意的，$\mathcal{F}_X$ 在 $\{(x, 0, 0)$ 的任意点处都不是横截类型：$x \in D(0, r_1)^*\} \subset E$。

现在在 $\Sigma_3 = \{z = 0\}$ 上，叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 由 $X = xy\frac{\partial}{\partial x}$给出。可以验证，经过 p_n的 $\mathcal{F}_X$的叶由 $L_{p_n} = \{(\xi, \frac{1}{n}, 0) : \xi \in D(0, r_1)^*\} \cong \mathbb{D}^*$给出，对所有 n均成立。因此，对所有 n，$\eta(p_n) = \eta(p_m) \neq 0$ 均成立。

在 $\Sigma_2 = \{y = 0\}$ 上，叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 由 $X = xz\frac{\partial}{\partial z}$给出。这里，经过点 $\tilde{p} = (x, 0, z)$ 的 $\mathcal{F}_X$ 的叶由 $L = \{(x, 0, \xi) : \xi \in D(0, r_3)^*\} \cong \mathbb{D}^*$给出。注意，$L \cup \{p\} \cong \mathbb{D}$，即 L是经过 p的分离曲线。对于满足 $q_n \to p$ 的任意序列 $\{q_n\}_{n\geq 1} \subset L$，我们得到 $\eta(q_n) \to 0$。

因此，我们得到两个序列 p_n、$q_n \to p$，但 $\eta(p_n) \to k \neq 0$，且 $\eta(q_n) \to 0$。因此，η 无法连续延拓到 p。

˜我们可以使用类似的论证来验证，对于每个 $p \in E = E \setminus \{0\}$，$\mathcal{F}_X$ 在 p 处不是横截类型（事实上，对于任意 $p \in E$，$\mathcal{F}_X$ 都不是横截类型）。再次通过考察不变超平面 Σ_i's 中叶的结构，我们可以得出结论：η 不会连续地延拓˜到任何点 $p \in E$。

2. η AS A DOMAIN FUNCTIONAL

对于一个域 $U \subset M$，令 $\mathcal{F}_U$ 表示叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 U 上的限制。对于一个 $p \in M \setminus E$，令 $L_{p,\ U}$ 为包含 p 的 $L_P \cap U$ 连通分支。若它非空，则 $L_{p,\ U}$ 是包含 p 的 $\mathcal{F}_U$ 叶。令 $\eta_U : U \to (0, \infty)$ 为与$\mathcal{F}_U$关联的一致化模。注意，η_U 是利用族 $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathcal{F}_U)$ 定义的。研究变化 $U \mapsto \eta_U$颇有意义。[10], 中的结果主要处理了随着 U 单调增加的 η_U；而 [7] 中的结果进一步强化了这一结论，其中允许域 U's 在豪斯多夫意义下变化。

为明确这一点，设 d 是由 g 诱导的 M 上的距离；对于 $S \subset M$ 和 $\epsilon > 0$，设 S_ϵ 是 S 的 ϵ-加厚，其中距离使用 d 进行测量。回忆一下，紧集 A、$B \subset M$ 之间的豪斯多夫距离 $\mathcal{H}(A, B)$ 是所有满足 $A \subset B_\epsilon$ 和 $B \subset A_\epsilon$ 的 $\epsilon > 0$ 的下确界。对于有界域 U、$V \subset M$，规定 $\rho(U, V) = \mathcal{H}(\overline{U}, \overline{V}) + \mathcal{H}(\partial U, \partial V)$ 在 X 的所有有界开子集的集合上定义了一个度量（见 [1]），并且具有如下性质：如果 $\rho(U, U_n) \to 0$，那么 U 的每个紧子集最终都包含于 U_n 中，而$\overline{U}$ 的每个邻域最终都包含所有的 U_n。

在适当条件下，[7] 中的定理 1.1 表明，如果 $\{U_n\}_{n\geq 1}$ 是 M 中的一个有界域序列，并且该序列按如下意义收敛到 U：$\rho(U, U_n) \to 0$，那么 $\eta_{U_n} \to \eta_U$ 在 $U \setminus E$的紧子集上一致收敛。尚待解决的问题是，在 E附近会发生什么?

定理 2.1. 设 $(M, E, \mathcal{F})$ 是一个双曲 shfc。设 $\{U_n\}, U$是 M中的有界域。假设 $\rho(U, U_n) \to 0$, U是双曲满的，并且存在一个包含$\overline{U}$的正规域 V，且 η_U连续。如果 $\mathcal{F}_U$ 属于横截类型，那么 $\eta_{U_n} \to \eta_U$ 在 U的紧子集上一致收敛（在集合 E上定义 $\eta_{U_n} = \eta_U \equiv 0$ ）。

证明的主要步骤与 [7] 中定理 1.1 的证明完全相同。区别在于，需要利用引理 1.6（更确切地说，是其证明中的思想）以及横截条件，来理解 $\mathcal{F}_{U_n}$ 的叶的一致化序列在 E 附近的极限行为。

证明。为简要介绍核心思想，设 $p_n \in U \setminus E$ 是一个收敛到 $p \in U \setminus E$ 的序列。设 $\alpha_n : \mathbb{D} \to L_{p_n,\, U_n} \subset U_n$ 是一个一致化映射，且 $\alpha_n(0) = p_n$。由于 $\rho(U, U_n) \to 0$, V 最终包含所有的 U_n，因此族 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 是正规族。取一个子序列，设 $\tilde{\alpha} : \mathbb{D} \to \overline{V}$ 是一个全纯极限，且 $\tilde{\alpha}(0) = p$。结合引理 1.6 与 [7] 中定理 1.1 的证明可知，$\tilde{\alpha} : \mathbb{D} \to L_{p,\, U}$ 是一个一致化映射。

要证明该收敛在 U 的紧子集上一致，只需证明对于 $p \in E$ 和满足 $p_n \to p$ 的 $p_n \in U \setminus E$，

$$\eta_{U_n}(p_n) \to \eta_U(p) = 0.$$

否则，$|\eta_{U_n}(p_n)| > \epsilon$。考虑叶 L_{p_n} 的一致化映射 α_n，U_n 满足 $\alpha_n(0) = p_n$。因此，取一个子序列后，我们看到 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ 局部一致地收敛到 $\tilde{\alpha} : \mathbb{D} \to U$，且 $\tilde{\alpha}(0) = p \in E$。若 $\tilde{\alpha} \equiv p$，则当 n 充分大时，$|\eta_{U_n}(p_n)| < \epsilon$，这就产生了矛盾。因此，$\tilde{\alpha}$ 是一个非常值映射。由于 $\mathcal{F}_U$ 属于横截类型，存在 $z_0 \in \mathbb{D}$ 使得 $q = \tilde{\alpha}(z_0) \in U \setminus E$。现在取 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，使得 $\phi(0) = z_0$。注意，$\alpha_n \circ \phi$ 是叶 L_{p_n} 的一致化，U_n 满足 $\alpha_n \circ \phi(0) = q_n \in U \setminus E$，并且它局部一致地收敛到 $\hat{\alpha} : \mathbb{D} \to U$，其中 $\hat{\alpha}(0) = q \in U \setminus E$。根据上述推理，$\hat{\alpha}$ 应当是叶 L_q 的一致化，U。但是 $\hat{\alpha} \equiv \tilde{\alpha} \circ \phi$，这就产生了矛盾，因为 $\tilde{\alpha} \circ \phi(\mathbb{D})$ 与 E 相交。因此，η_{U_n} 在 U 的紧子集上一致收敛到 η_U。

□

3. Local regularity of η

设 $\mathcal{F}$ 是复流形 M 上奇异集为 $E \subset M$ 的双曲 shfc。沿用 [10]，对于 $p \in E$ 的做法，我们称：

(1) 若存在 p 的一个邻域 $U \subset M$，使得 $\mathcal{F}|_U$ 的一致化映射 η_U 的模在 $U \setminus E$ 上连续，则称 $\mathcal{F}$ 满足 $(P.1)$。(2) 若存在 p 的一个邻域 $\tilde{U} \subset M$，使得度量 $\frac{4g}{\eta_{\tilde{U}}}$ 在 $U \setminus E$ 中的每个 $q \in U \cap E$ 处都 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ 完备，则称 $\mathcal{F}$ 满足 $(P.2)$。

当 E 是离散的时，[10] 中已证明 $(P.2)$ 蕴含 $(P.1)$。事实上，这对一般情形也成立。

定理 3.1。设 $\mathcal{F}$ 是域 $W \subset \mathbb{C}^n$ 上奇异集为 $E \subset \mathbb{C}^n$ 的双曲 shfc。取 $p \in E$。若 $\mathcal{F}$ 在 p 附近满足 $(P.2)$，则 $\mathcal{F}$ 在 p 附近满足 $(P.1)$。

证明。设 $U \subset W \subset \mathbb{C}^n$ 是一个域，使得 $p \in U$ 和 $\frac{4g}{\eta_U}$ 在 E 中的 $U \setminus E$ 上是完备的。令 $B = B_r = \{|z - p| < r\} \subset U$，以及 $\Lambda_B = \frac{4g}{\eta_B}$。由于 $\eta_B \leq \eta_U$，因此 $\Lambda_B \geq \Lambda_U$，这进而表明 Λ_B 在 $B \setminus E$ 中的 E 上是完备的。

由于 B 是双曲满的，$\mathcal{U}_B$ 是 NCP。因此，根据定理 1.7，只需证明：如果$\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{U}_B$ 在 $\mathbb{D}$ 上局部一致地收敛到某个 $\alpha : \mathbb{D} \to B$，其中 $q = \alpha(0) \in E \cap B$，那么 $\alpha(\mathbb{D}) \subset E \cap B$。

设 $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{U}_B$ 使得 $\alpha_n(0)\to q\in E\cap B$。固定 $p_0\in B\setminus E$，并令

$$\overline{D_r}=\{p\in B\setminus E: d_P(p,p_0)\leq r\}$$

其中，d_P 表示由度量 Λ_B 在 B上诱导的距离。

由于 Λ_B 在 E 上的 $B\setminus E$是完备的，因此我们有 $\cup_{r>0}\overline{D_r}=B\setminus E$。设 E_q 为包含 q 的 $E\cap B$ 的连通分支，设 W_r 为包含 E_q的 $B\setminus\overline{D_r}$ 的分支。显然，当 $r_1\geq r_2$时，$W_{r_1}\subset W_{r_2}$。此外，由于$\cap_{r>0}B\setminus\overline{D_r}=E\cap B$，因此 $\cap_{r>0}W_r=E_q$。断言：给定 $0<\rho<1$和 $r>0$，存在 $n_0\geq 1$，使得当 $n\geq n_0$ 时，$\alpha_n(\overline{\Delta_\rho})\subset W_r$，其中 $\overline{\Delta_\rho}=\{z\in\mathbb{D}:\ |z|\leq\rho\}$。

令 $\{\alpha_{n_j}\}_{j\geq 1}$ 为一个收敛子序列，该子序列在 $\mathbb{D}$ 上局部一致地收敛于 $\alpha:\ \mathbb{D}\to B$，且满足 $\alpha(0)=q\in E\cap B$。假设上述断言成立，则对于所有 $\rho\in(0,1)$，我们得到 $\alpha(\overline{\Delta_\rho})\subset E_q$。因此，$\alpha(\mathbb{D})\subset E_q\subset E\cap B$。

断言的证明：令 d_L 表示由 d_p 在叶 L 上诱导的距离，令 d_Δ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 Poincar´e 距离。对于 $\beta\in\mathcal{U}_B$ 和 z_1，$z_2\in\mathbb{D}$

$$|\beta(z_2),\beta(z_1)|\leq d_P(\beta(z_2),\beta(z_1))\leq d_L(\beta(z_2),\beta(z_1))\leq d_\Delta(z_2,z_1).$$

固定 $\rho\in(0,1)$ 和 $r>0$。令 $c=d_\Delta(0,\rho)$，并令 $r_1=c+r$。由于 $\alpha_n(0)\to q$，存在 $n_0\geq 1$，使得对于 $n\geq n_0$，$\alpha_n(0)\in W_{r_1}$。因此，对于 $z\in\overline{\Delta_\rho}$ 和 $n\geq n_0$，

$$d_P(\alpha_n(z),p_0)\geq d_P(\alpha_n(0),p_0)-d(\alpha_n(0),\alpha_n(z))>r_1-d_\Delta(0,z)\geq r_1-c=r.$$

由于 $\alpha_n(\overline{\Delta_\rho})$ 是连通的，并且对于所有 $n\geq n_0$，$\alpha_n(0)\in W_r$，因此对于所有$n\geq n_0$，$\alpha_n(\overline{\Delta_\rho})\subset W_r$。

□

下一个例子受 [10] 中的命题 5 启发。

例 3.2。考虑在 $\mathbb{C}^3$ 中定义的全纯向量场

$$X(z)=(X^1+\text{higher terms},X^2+\text{higher terms},0)$$

其中 X^1、X^2 是关于变量 z_1、z_2 的 k 次齐次多项式（将变量 z_3 视为参数）。通过限制 X 的域，假设对于每个固定的 z_3，$0\in\mathbb{C}^2$ 是（X^1、X^2）的一个孤立奇点。令 $U=B_\rho\times\Delta_\rho$ 为 X 满足这些条件的域；此处 $B_\rho=\{z\in\mathbb{C}^2:\ |z|<\rho\}$，且 $\Delta_\rho=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<\rho\}$。考虑定义在 U 上的厄米度量 h，其表示为

$$h(z)=\frac{|\pi(z)|^{2k-2}}{|X(z)|^2\log^2\frac{|\pi(z)|}{r}}|dz|^2,$$

其中 $r>\rho$，且 $\pi(z_1,z_2,z_3)=(z_1,z_2)$。设 $\mathcal{F}_U$ 为由 X 在U上诱导的全纯叶状结构，其奇异集为 $E=\{z\in U:\ z_1=z_2=0\}$。由于叶状结构 $\mathcal{F}_U$的叶包含在水平集 $\{z_3=c\}$中，因此可见 $\mathcal{F}_U$ 属于横截类型。

由于对于每个 $z_3\in\Delta_\rho$，(X^1,X^2) 在 (0,0) 处有孤立奇点，因此我们可以将$\rho>0$ 取得足够小，使得存在一个常数 $C>0$ 满足

$$C^{-1}|\pi(z)|^k\leq|X(z)|\leq C|\pi(z)|^k$$

在 [10] 中的计算表明，存在常数 $K>0$ 使得

$$\Lambda_U\geq\frac{K}{|\pi(z)|^2\log^2\frac{|\pi(z)|}{r}}|dz|^2,$$

其中，Λ_U表示 $\mathcal{F}_U$的叶向庞加莱度量。由于度量 $\frac{K}{|\pi(z)|^2\log^2\frac{|\pi(z)|}{r}}|dz|^2$ 在 $E=\{\pi(z)=0\}$ 中于 U处是完备的，因此 Λ_U在 U中于 E处也完备。因此，$\mathcal{F}_U$满足

(*P*.2)在 $0 \in U$附近。因此，上述结果表明，存在 $0 \in \mathbb{C}^3$的一个邻域 V，使得 Λ_V 在 V上连续。

致谢：作者感谢 Viˆet-Anh Nguyˆen 提出了关于映射 η 在奇异集 E 附近行为的问题。

References

[1] Boas, Harold P.: *The Lu Qi-Keng conjecture fails generically* **124** 1996 7, . Proc. Amer. 2021 2027 Math. Soc. ( ), no. – .[2] Candel, A.: *Uniformization of surface laminations*, Annales scientifiques de l' ´Ecole Normale Sup´erieure 26 no. 4 (1993), 489–516. [3] Chirka, E.M.: *Complex analytic sets*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 46, 1989 (由 R. A. M. Hoksbergen 从俄文译出)。[4] Dinh, T.-C.; Nguyˆen, V.-A.; Sibony, N.: *Entropy for hyperbolic Riemann surface laminations I*. Frontiers in complex dynamics, 569–592, Princeton Math. Ser., 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014. [5] Dinh, T.-C.; Nguyˆen, V.-A.; Sibony, N.: *Entropy for hyperbolic Riemann surface laminations II*. Frontiers in complex dynamics, 593–621, Princeton Math. Ser., 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014. [6] Fornaess, J.E.; Sibony, N.: *Riemann surface laminations with singularities*. J. Geom. Anal. 18 (2008), no. 2, 400–442. [7] Gehlawat, S.; Verma, K.: *Two remarks on the Poincaré metric on a singular Riemann surface foliation*. Complex Var. Elliptic Equ. 67 (2022), no. 11, 2589–2601. [8] Lins Neto, A.: *Uniformization and the Poincaré metric on the leaves of a foliation by curves*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 31 (2000), no. 3, 351–366. [9] Lins Neto, A.: *Simultaneous uniformization for the leaves of projective foliations by curves*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25 (1994), no. 2, 181–206. [10] Lins Neto, A.; Canille Martins, J. C.: *Hermitian metrics inducing the Poincaré metric in the leaves of a singular holomorphic foliation by curves* **356** 2004 7, 2963 2988 . Trans. A mer. Math. Soc. ( ), no. – .[11] Verjovsky, A.: *A uniformization theorem for holomorphic foliations*. The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), 233–253, Contemp. Math., 58, III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. [12] Whitney, H.: *Local properties of analytic varieties*. Diff. and Combinator. Topology, Princeton Univ. Press, 1965, 205–244.

SG: Université de Lille Laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé 59655 , , Villeneuve d'Ascq Cedex France.
CNRS U.M.R. 8524, , *Email address*: sahil.gehlawat@univ-lille.fr

KV: Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore 560 012, India
Email address: kverma@iisc.ac.in