arXiv:2304.14239v1 [math.CO] 27 Apr 2023

切割多面体的最佳方法

Marie-Charlotte Brandenburg、Jes´us A. De Loera 和 Chiara Meroni

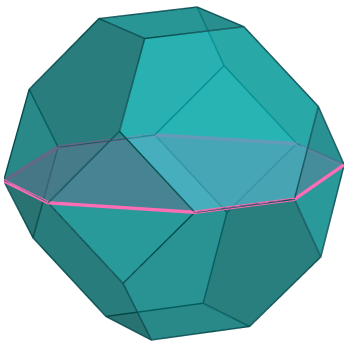
谨以此文献给 *G¨unter M. Ziegler*，以庆祝他的 60^{th} 生日。

摘要

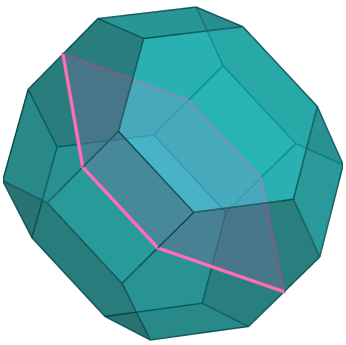
我们研究凸多面体的所有可能仿射超平面截面的集合结构。我们给出了由超平面排列诱导的该集合的两种不同胞腔分解。利用我们的分解，我们界定了截面可能具有的组合类型数量，并设计了根据各种组合和度量准则计算多面体最优截面的算法，包括使 k 维面数量最大化、使体积最大化以及使多项式积分最大化的截面。在固定维数下，我们的优化算法可在多项式时间内运行；但在其他情况下，同样的问题表现出计算困难性。我们的工具还可扩展到与半空间求交以及向超平面进行投影。最后，我们通过若干实验展示了我们的定理和算法在著名多面体上的应用。

1 引言

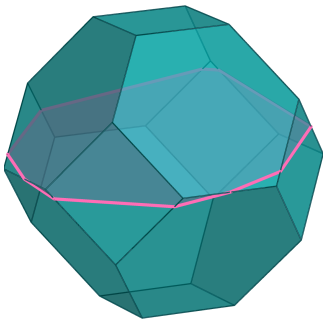
切分三维排列多面体的最佳方式是什么？ 图1 展示了众多可能的“最佳截面”中的三个。在本文中，我们给出任意多胞体的所有仿射超平面截面的有限描述，这些截面称为切片，并解释如何计算出最优截面。我们的方法同样适用于研究切片的组合类型数量。



(a) 最大体积仿射截面（在对称性意义下唯一）



(b) 最小体积中心截面（在对称性意义下唯一）



(c) 具有最大体积的仿射截面顶点数

图 1：置换多面体的三个最优截面，即 (1，2，3，4) 的置换的凸包，以粉色显示。参见 例 5.1。

MSC 分类：52B55、52C35、52A38、52A40、52B11、90C27、52C45、14P10。关键词：多胞体、超平面截面、超平面排列、最优切片、体积、多面体区域上的积分、多胞体的组合类型、多胞体上的极值问题。

凸体的截面或切片一直是许多研究者关注的重点。仅举几个亮点，数论中的各种问题都可以改述为关于凸体截面体积或投影的问题。例如，Siegel引理的精确版本等价于对单位立方体的中心截面（任意维度）的最小体积进行估计 [Kol05; Vaa79]。类似地，对立方体、交叉多胞体、单形及其他凸体的最大体积截面的探寻，源于泛函分析和概率中的应用 [Bal86; Bal89; K¨on21; MP88; Pou22; Web96]。此外，围绕著名的Busemann-Petty问题和Bourgain切片猜想展开的研究，将凸体的体积与其被穿过原点的超平面所截得的截面体积联系起来 [Gar06; GKZ23; KL22; Kla23; KM22; NT22]。切片在几何断层成像以及凸集的逆矩问题中也发挥着重要作用（见 [Gar06, 第8] 章以及 [GLPR12; KS21; Wal68]）。从离散的角度来看，对多胞体超平面截面的组合分析，特别是对多面体范数球的组合分析，在代数组合学和枚举组合学中具有应用 [ASVM21; CL91; FMGN97; Kho06; Law79; PP15]。

我们的贡献。 本文研究计算凸性中的一个基本问题：寻找多胞体的最优或极值超平面截面。现有大多数工作都集中于最大化中心超平面截面的体积，而对仿射截面的研究较少，且主要针对范数球 [K¨on21； LT20； MSZZ13； NT22； Pou22]。我们的结果适用于这两种情形，并旨在将研究拓展到更多多胞体。

我们的第一个主要贡献描述了参数化多胞体所有仿射超平面截面的两种不同方法。

定理 1.1。 给定一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，存在两种不同的参数分解，将 $\mathbb{R}^d$ 中所有仿射超平面的空间划分为有限个单元，这些单元称为切片室。每种分解都由一对 $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ 超平面排列组织而成（参见 表 *1*），其中 $\mathcal{R}$ 的每个区域定义了一个参数超平面排列 $\mathcal{C}$。以下结论对两种分解中的切片室均成立：

(i) 两个仿射超平面 H_1、H_2 属于同一个切片室，当且仅当 H_1、H_2 与 P 的同一边集相交。特别地，$P \cap H_1$ 与 $P \cap H_2$ 组合等价，并且它们具有相同的三角剖分。*(ii)* 对于固定维数 d，切片室的数量受 P 的顶点数量的多项式上界约束。*(iii)* 限制在一个固定切片室内，任意多项式的积分 $\int_{P \cap H} f(x)\, dx$ 是一个有理函数，它仅取决于 *(i)* 中所描述的组合信息。特别地，这对 $P \cap H$ 的体积也成立。

我们注意到，沿着定理 1.1方向的相关先前工作。表 1 中的中心超平面排列早在20世纪70年代就已出现在 [JP78], 中，其中给出了一种算法，用于找出包含位于单位球面上的点中数量最多者的半空间。在这里，半空间由包含原点的中心超平面界定。后来，在中心超平面的背景下，Filliman 将超平面的格拉斯曼流形分解为胞腔，并给出了适用于中心超平面截面体积的有理函数公式 [Fil92]。然而，他的公式并不适用于一般的多胞体仿射截面。最近， [BBMS22] 使用本文提出的分解之一来计算多胞体的交体。相比之下，我们的技术扩展了早期工作

	超平面排列	记号	证明所在位置	参考对象
↻	中心排列	$\mathcal{C}_{\circlearrowleft}$	第 2.1 小节	交体
	余回路排列	$\mathcal{R}_{\circlearrowleft}$	第 3.1 小节	定向拟阵
	平行排列	$\mathcal{C}^{\mathbf{u}}$	第 2.2 小节	纤维多胞体
	扫掠排列	$\mathcal{R}$	第 3.2 小节	扫掠多胞体

表 1：本文中两对超平面排列的概览。

，并且适用于所有仿射截面。利用定理 1.1的结构，我们得到关于超平面截面或半空间截面上多项式积分（以及由此得到的体积）的公式；这些公式在每个切片腔室中都是非奇异有理函数。我们的公式依赖于 [BBDL+11；LA01]。

切片室组织得井然有序。表 1 的每一行都指向解释如何构造它们的章节。我们的第一种切片室分解，是根据由所有由 $d-1$ 顶点集张成的超平面生成的余回路排列来组织的。对于余回路排列的每个区域，我们确定一个向量 t，用它来平移P；然后，对于平移后的多胞体 $P+\mathbf{t}$ 的每个顶点 $\mathbf{v}+\mathbf{t}$，我们得到一个新的中心超平面。这种第一种方法曾用于研究多胞体的交体[BM23]。第二种切片室分解的组织方式有所不同。这一次，我们考察扫掠排列的区域，该排列与扫掠多胞体 [PP21]对偶。扫掠排列中某个区域内的每个点 u 都确定一个方向。随后，在保持组合结构不变的同时，我们将 P 分解为由 $\mathbf{u}^{\perp}$的平移所定义的块。这些层片就是我们的第二类切片室。它们正是用于计算 P [BKS94], 的单调路径多胞体的相同部分，而后者是纤维多胞体 [BS92]的一个特殊实例。

有许多应用涉及定理 1.1。关于组合应用，我们可以利用切片室来界定切片的组合类型数量。这是一个有趣但困难的问题。例如，对于维数大于五的正则立方体，我们甚至还不知道其所有截面的组合类型 [FMGN97；Law79]。对于我们的两个超平面排列中的每个切片室，超平面截面的组合类型都是固定的。因此，作为第二项主要贡献，我们得到了多胞体 P 的仿射超平面截面的不同组合类型数量的一个上界。

定理 1.2。 对于具有 n 个顶点的 d 维多胞体，超平面截面的组合类型数量的上界为 $O(n^{2d+1}2^d)$ 。

我们强调，利用定理 1.1 ，我们不仅可以计算切片组合类型数量的精确上界，还可以获得一个算法，列出特定多胞体的这些组合类型。我们的第三项主要贡献再次依赖于定理 1.1，即一系列用于寻找多胞体的最优仿射超平面截面、半空间截面和投影的算法。

定理 1.3。 设 $P\subset\mathbb{R}^d$为一个多胞体， $f(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_d]$中的一个多项式。记$f_k(P)$ 为 P 的 k维面数，并设 w_{k+1} 为定义在 P的所有$(k+1)$维面 F上的权函数。设 H 为一个仿射超平面， H_0^+表示由中心超平面界定的半空间， π_H 表示 P沿垂直于 H的方向的投影。我们给出算法，以求解以下问题的最优解：

(i)（最大体积/积分截面）$\max_{H\subset\mathbb{R}^d}$体积$(P\cap H)$，$\max_{H\subset\mathbb{R}^d}\int_{P\cap H} f(x)\,dx$。*(ii)*（$k$维面的最优数量）$\max_{H\subset\mathbb{R}^d} f_k(P\cap H)$，$\max_{H_0^+\subset\mathbb{R}^d} f_k(P\cap H_0^+)$。*(iii)*（最优加权 k 维面）$\max_{H\subset\mathbb{R}^d}\sum_{F\subset P,\,F\cap H\neq\emptyset} w_{k+1}(F)$，$\min_{H\subset\mathbb{R}^d}\sum_{F\subset P,\,F\cap H\neq\emptyset} w_{k+1}(F)$。*(iv)*（积分最优的中心半空间）$\max_{H_0^+\subset\mathbb{R}^d}\int_{P\cap H_0^+} f(x)\,dx$，$\min_{H_0^+\subset\mathbb{R}^d}\int_{P\cap H_0^+} f(x)\,dx$。*(v)*（积分最优的投影）$\max_{H\subset\mathbb{R}^d}\int_{\pi_H(P)} f(x)\,dx$，$\min_{H\subset\mathbb{R}^d}\int_{\pi_H(P)} f(x)\,dx$。

如果 P 是一个有理多胞体且维数 d 固定，那么所有这些问题都可以在多项式时间内求解。

正如定理 1.3 中项目数量所表明的那样，定理 1.1有许多可能的应用，既涉及组合准则，也涉及度量准则。多胞体的最大组合截片在代数组合学和拓扑组合学的背景下具有重要意义。例如，多胞体的上界定理 的一种变体，是为多胞体的切片的f-向量寻找一个上界。Khovanskii 研究了这一问题，并提出比较多胞体被维数为 h的一般仿射平面截得的截面的 l -向量与h原多胞体的 [Kho06，第 7]节中的。由置换固定的置换多面体的特殊切片的体积在 [ASVM21], 中进行了分析，结果表明，在某些情况下，它与图 1b所描绘的切片一致。

在计算几何中，人们研究了最优组合半空间截面，以最大化球面上的顶点数 [JP78]。此外，关于超平面截面体积和积分（例如矩）的优化，还有一些有趣的应用 [GLPR12；KS21]。即便对于最基本的多胞体，要找到体积最大或最小（且经过给定点）的切片也十分困难。例如，对于 d维立方体[Bal86] 和交叉多胞体 [Kol05；MP88]，人们已确定其最大体积仿射超平面截面；而对于单纯形，类似的结果适用于经过形心的超平面 [Web96]。我们希望我们的算法能够带来新的发现。

我们的第四项主要贡献是实验性的。如定理 1.3所示，我们的算-法适用于许多最优性准则，既涉及组合性质，也涉及度量性质。我们应用定理 1.3 中的算法，计算了低维著名多面体的最优切片，例如柏拉图立体、置换多面体和交叉多胞体。这是一项有趣的成果，因为关于特定多胞体的最优切片或组合类型，人们所知甚少 [ASVM21；Bal86；CF86；Law79；NT22]。

概述： 我们首先在 第 2.1 小节 回顾中心超平面截面，并证明对所有此类截面上的多项式积分是分段有理函数。在第 2.2 小节 中，我们证明固定方向上的平行截面以及 第2.3小节中的正交投影也具有类似结果。我们在 第 3 节 中将这些结果推广到任意仿射超平面截面。 定理 1.1 和 1.2 的证明是 第 3 节的主要内容。

算法结果将在第4节中证明。定理 1.3 的证明见第 4.1 小节。虽然我们的算法对于有理多胞体和固定

维数下的多项式可在多项式时间内运行，但在非固定维数下这些问题很难（见第4.2小节）。最后，我们在第5节中给出实验结果。我们提供了所有柏拉图立体的最大体积截面，依据不同的最优性准则研究了三维排列多面体，并列出了维数为4和5的交叉多胞体的所有截面的组合类型。本文使用了多面体组合学和计算凸几何中的概念（见 [GK94a；GK94b；GK97；Gr¨u67；Zie95]）。

2 截面与投影

我们开始研究多胞体的超平面截面和投影。我们分析两类超平面截面：旋转截面和平移截面。所谓旋转切片或中心切片，是指经过同一个公共点的超平面，我们假设该点为原点。另一方面，平移切片或平行切片是具有公共法向量的平行仿射超平面截面。这两种观点分别对应凸几何中的两种标准构造，即交体和单调路径多胞体。在这两种情形下，超平面截面的组合类型 $P \cap H$ 由一个超平面排列 $\mathcal{C}$所决定，该排列要么是中心的，要么是平行的。在超平面排列的开室中，可以对切片进行参数化积分，并将结果表示为有理函数。这是本节的主要结果，具体表述于定理 2.5和2.12中。考察投影时也会出现类似的情形。我们利用与交的对偶性，描述相关的超平面排列，并在定理 2.18中证明关于投影积分的类似结果。请注意，我们的定理针对满维多胞体进行表述。对于低维多胞体，也可以将其置于自身的仿射包中，从而表述并证明类似的结果。

2.1 旋转切片

现在我们讨论固定多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的旋转切片，这些切片由经过原点且法向量为$\mathbf{u} \in S^{d-1}$的超平面得到。我们证明，给定一个多项式f，对这些截面上的 f进行积分，可得关于变量 $u_1, \ldots, u_d$ 的分段有理函数。更具体地说，本节考虑的超平面具有以下形式

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0\}, \text{ where } \mathbf{u} \in S^{d-1}.$$

理解中心超平面截面的体积，是构造 交体 P [Lut88]的关键一步。事实上，本节将运用[BBMS22], 中的结果，该文研究了多胞体的交体。一个关键论证是中心超平面排列的存在性，具体如下。

引理 2.1 ([BBMS22，引理2。4])。 设 P是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个满维多胞体，并考虑中心超平面排列

$$\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P) = \{\mathbf{v}^\perp \mid \mathbf{v} \textit{ is a vertex of } P \textit{ and not the origin}\},$$

其中 $\mathbf{v}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$ 表示法向量为 $\mathbf{v}$ 的中心超平面。 C 的极大开室 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P)$ 满足以下性质：对于所有 $\mathbf{x} \in C$，超平面 $\mathbf{x}^\perp$ 都会与 P 的一个固定边集相交。特别地，对于所有 $\mathbf{x} \in C$，多胞体 $Q = P \cap \mathbf{x}^\perp$具有相同的组合类型。

$\mathcal{C}_\circlearrowleft(P)$ 的一个（极大开室）切片腔室，或简称为 室，是 $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}_\circlearrowleft(P)$ 的一个连通分支。为简化记号，当 C 是超平面排列 $\mathcal{C}_\circlearrowleft(P)$ 的一个极大室时，我们记作 $C \subset \mathcal{C}_\circlearrowleft(P)$。我们通过一个二维示例来说明上述陈述。这将作为贯穿全文的示例，用于阐释主要概念和构造。

例 2.2。 考虑五边形 $P = \mathrm{conv}((-1,\ -1)、(1,\ -1)、(1,\ 1)、(0,\ 2)、(-1,\ 1)) \subset \mathbb{R}^2$。任何经过原点的一般超平面都会与 P 中的一对边相交。有 6 个不同的此类边对，而与某一固定边对相交的所有超平面的法向量构成超平面排列的一个极大开区域

$$\mathcal{C}_\circlearrowleft(P) = (1,1)^\perp \cup (1,-1)^\perp \cup (0,2)^\perp,$$

如 图 2左图所示。该超平面排列仅包含三个不同的超平面，因为 $(-1,\ -1)^\perp = (1,\ 1)^\perp$ 以及 $(1,\ -1)^\perp = (-1,\ 1)^\perp$。例如，当 $P + \mathbf{t}$ 满足 $\mathbf{t} = -(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2})$ 时，在 图 2右图中可得到包含六个不同超平面的排列。 $\diamond$

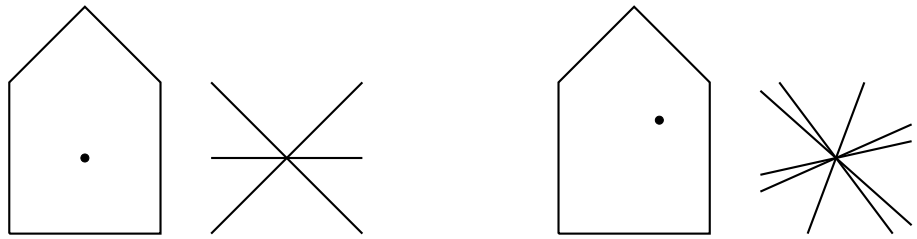


图 2：左：多胞体 P 和中心超平面排列 $\mathcal{C}_\circlearrowleft(P$，来自 例 2.2。右： $P + \mathbf{t}$ 和 $\mathcal{C}_\circlearrowleft(P + \mathbf{t})$，其中 $\mathbf{t} = -(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$。

我们关注在多胞体的超平面截面上对多项式进行积分。这是体积计算的推广，即对常函数 1 的积分。为此，我们需要下面的引理；该引理通过有理函数公式，为在单形上高效地对线性形式的幂进行积分提供了一种方法。

引理 2.3 ([LA01，定理 2.1],[BBDL+11，注 9])。 令 $\Delta = \mathrm{conv}(\mathbf{s}_1,\ \ldots,\ \mathbf{s}_n) \subset \mathbb{R}^d$为一个单纯形，令 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ 和 $D \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。记 $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^n k_j$，则有

$$\int_\Delta \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle^D \, \mathrm{d}\mathbf{x} = (n-1)! \, \mathrm{vol}(\Delta) \frac{D!}{(D+n-1)!} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \\ |\mathbf{k}| = D}} \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_1 \rangle^{k_1} \cdots \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_n \rangle^{k_n}.$$

此外，我们还将使用以下关于将多项式分解为线性形式幂之和的结果。引理 2.4 展示了将任意次数为 D 的多项式表示为 D次线性形式幂之和的一种方法。因此，如果我们知道如何对线性形式的幂进行积分，就知道如何对任意多项式进行积分。

引理 2.4 ([BBDL+11，公式 13])。任意单项式都可以写成同次数的线性形式幂之和，具体如下：

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} (p_1 x_1 + \cdots + p_d x_d)^{|\boldsymbol{\alpha}|},$$

其中 $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ 且 $\mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}$ 表示对于所有坐标 $i \in [d]$，$p_i \leq \alpha_i$ 。

我们注意到，[Las21]中介绍了另一种在单形上进行多项式积分的公式。然而，由于我们单形的顶点由中心超平面的法向量参数化，因此该公式不适用于我们的情况。

现在证明本节的主要结果。该结果的证明是将 [BBMS22，定理 2。6],中处理体积计算的证明改编为积分情形。

定理 2.5。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个满维多胞体，设 $f(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 为一个多项式，并设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 为由(P) 中的引理 *2.1*得到的中心超平面排列的一个极大开切片腔。限制在方向 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$上，积分 $\int_{P \cap \mathbf{u}^\perp} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$ 是变量 u_1，...， u_d的有理函数。

证明。设 $Q(\mathbf{u}) = P \cap \mathbf{u}^\perp$，其中某个 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$，并固定 $\mathcal{T}$的一个三角剖分，该三角剖分不含任何额外顶点。根据构造，与 $\mathbf{u}^\perp$ 相交的 P的边集由 C唯一确定，因此，对于所有满足 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$的 $\mathbf{u}$， $P \cap \mathbf{u}^\perp$ 的三角剖分均可选取为同一个。设 $\mathbf{v}_1(\mathbf{u})$ ...，$\mathbf{v}_n(\mathbf{u})$ 为 $Q(\mathbf{u})$ 的顶点，并设 $\mathrm{conv}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ 为 P中相应的边，使得 $\mathbf{v}_i(\mathbf{u}) \in \mathrm{conv}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$。给定一个 $\Delta \in \mathcal{T}$，其顶点为 $\mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u})$ ...，$\mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{u})$，其体积可计算为 $\mathrm{vol}(\Delta) = \frac{1}{(d-1)!} |\det M_\Delta(\mathbf{u})|$，其中

$$M_\Delta(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{j_2}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{v}_{j_2}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{u}) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_j(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{u} \rangle \mathbf{a}_j - \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u} \rangle \mathbf{b}_j}{\langle \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j, \mathbf{u} \rangle},$$

对于固定的区域 C，行列式 $M_\Delta(\mathbf{u})$ 的符号对于所有 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$ 都是恒定的。现在我们应用 引理 2.4 将多项式 f 重写为线性形式的幂的组合，以便随后应用 引理 2.3。对于任意$\mathbf{x}$，我们有：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\alpha}|!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} (p_1 x_1 + \cdots + p_d x_d)^{|\boldsymbol{\alpha}|}.$$

因此， f 关于 $Q(\mathbf{u})$ 的积分可以精确计算：

$$\begin{aligned} \int_{Q(\mathbf{u})} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\alpha}|!} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \int_{Q(\mathbf{u})} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle^{|\boldsymbol{\alpha}|}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (1) \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\alpha}|!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \int_\Delta \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle^{|\boldsymbol{\alpha}|}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{|\boldsymbol{\alpha}|!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} \Bigg[(d-1)! \operatorname{vol}(\Delta) \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{(|\boldsymbol{\alpha}| + d - 1)!} \\ &\qquad \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \\ |\mathbf{k}| = |\boldsymbol{\alpha}|}} \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u}) \rangle^{k_1} \cdots \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{u}) \rangle^{k_d} \Bigg] \end{aligned}$$

$$= \sum_{\Delta\in\mathcal{T}} |\det M_\Delta(\mathbf{u})| \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{(|\boldsymbol{\alpha}|+d-1)!} \sum_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}\\ \mathbf{p}\leq\boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|-|\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1}\cdots\binom{\alpha_d}{p_d}$$
$$\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0},\\ |\mathbf{k}|=|\boldsymbol{\alpha}|}} \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u})\rangle^{k_1}\cdots\langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{u})\rangle^{k_d},$$

它是变量 u_1、.....、u_d 的有理函数。 □

注 2.6。 对于本节及后续各节中遇到的所有超平面排列，我们都将室和区域定义为排列补集的连通分支，因此根据定义，室和区域都是开且满维的。所有关于多项式积分的陈述都仅针对这些开满维多面体。不过，由于有理函数在区域和室的边界上没有极点，我们可以将这些陈述推广到这些多面体的闭包上，从而在整个诱导的多面体复形上得到有理函数。因此，所有陈述也适用于这些低维面：积分是一个有理函数，而这些函数是定义在包含该面的极大多面体上的有理函数的特化。

例 2.7。承接例 2.2，我们来阐释定理 2.5 的陈述。我们计算例 2.2 中五边形 P 的所有中心截面的体积 $\int_{P\cap\mathbf{u}_\perp} 1\,\mathrm{dx}$、一阶矩之和 $\int_{P\cap\mathbf{u}_\perp} x_1+x_2\,\mathrm{dx}$ 以及二阶矩之和 $\int_{P\cap\mathbf{u}_\perp} x_1^2+x_1x_2+x_2\,\mathrm{dx}$。如图 3 所示，沿中心超平面排列 $\mathcal{C}_\heartsuit(P)$ 的每个室，这些积分都是关于 u_1, u_2 的有理函数。正如注 2.6 中所述，可以验证，相邻两个室中的函数在公共面上相等。我们注意到，体积是后两种积分的因子这一事实，是低维情形下的特殊现象；此时每个截面都是一维单纯形，因此不需要进一步三角剖分。⋄

2.2 平移切片

在本节中，我们分析多胞体 $P\subset\mathbb{R}^d$ 的平移切片，这些切片由具有固定法向量 $\mathbf{u}\in S^{d-1}$ 的超平面平移像得到。类似于 第 2.1 小节，我们将证明，对于固定的多项式 f，在这些仿射截面上的积分是一元多项式。具体而言，固定一个向量 $\mathbf{u}\in S^{d-1}$，并考虑仿射超平面族

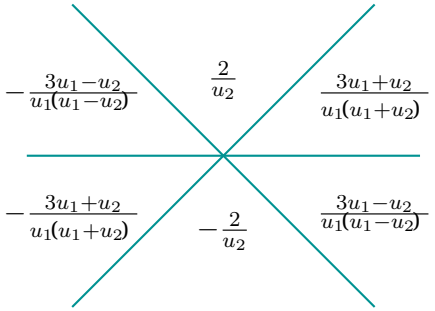
$$H(\beta)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d \mid \langle\mathbf{u},\mathbf{x}\rangle=\beta\}$$

与 $\mathbf{u}$ 正交，并由 $\beta\in\mathbb{R}$ 参数化。平行切片或平移切片自然出现在 单调路径多胞体 的背景下，它们是纤维多胞体 [BS92] 的特殊实例。在这种情况下，同样存在一个由平行超平面组成的超平面排列，它决定了平移切片的组合结构。

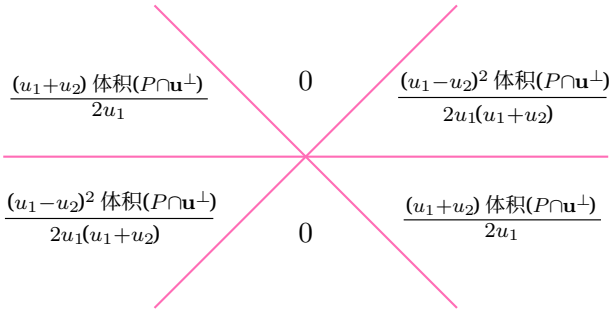
引理 2.8。 令 $P\subset\mathbb{R}^d$ 为一个多胞体，并固定一个方向 $\mathbf{u}\in S^{d-1}$。考虑由平行超平面构成的仿射超平面排列

$$\mathcal{C}^{\mathbf{u}}=\{H(\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) \mid \mathbf{v} \textit{ is a vertex of } P\}.$$

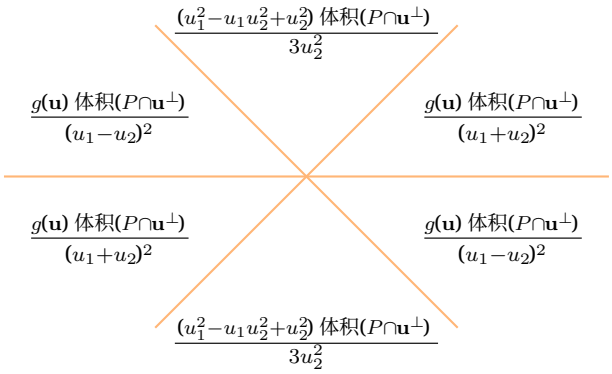
C 的极大开室 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 满足以下性质：对于所有 $H(\beta)\in C$，超平面 $H(\beta)$ 都与 P的一个固定边集相交。此外，多胞体 $Q(\beta)=P\cap H(\beta)$是法等价的，即它们具有相同的法扇。



$\int_{P\cap\mathbf{u}^\perp} 1\,\mathbf{dx} = \text{体积}(P\cap\mathbf{u}^\perp)$



$\int_{P\cap\mathbf{u}^\perp} x_1 + x_2\,\mathbf{dx}$



$\int_{P\cap\mathbf{u}^\perp} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\,\mathbf{dx}$

如例 2.7中所述，五边形各中心截面上矩的和的积分为 $g(\mathbf{u}) = (3u_1^2+u_2^2)(u_1^2-u_1u_2+u_2^2)\ 3u_1^2$ 。

证明。令 C 为 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}$ 的一个固定室，并令 $H(\beta) \in C$。超平面 $H(\beta)$与边 $\text{conv}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$的内部相交，当且仅当 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle < \beta < \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle$。因此，在每个室 C中，被 $H(\beta)$相交的边集都是固定的。由此，任意维度的被相交面集在开室 C内保持不变。因此，$Q(\beta)$的组合类型是固定的，其法扇的组合类型也一样。注意，$P \cap H(\beta)$的任意一个面 F 都是由 P 的一个面 G 与 $H(\beta)$相交而得，且 F 的法向量是 G 的法向量在 $H(\beta)$上的投影。由于投影在 $H(\beta)$的仿射平移下保持不变， C 内的所有仿射截面都是法等价的。

□

注记 2.9。我们注意到，超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上诱导出一个划分：

$$\{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \mid \mathbf{v} \text{ is a vertex of } P\}.$$

确实，这个划分与 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 是等价的，因为当法向量 $\mathbf{u}$ 固定时， β 可以由 $H(\beta)$ 唯一确定，反之亦然。在本文剩余部分中，对于平行排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 的一个室 C ，我们允许将 $\beta \in C$ 写成 $H(\beta)$， $\in C$ 因为我们在 引理 2.8 中采用的约定纯粹是出于美观方面的考虑。正如在旋转情形中已经指出的那样，对于极大室，我们将写作 $C \subset \mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$。

注 2.10。对于一般的 $\mathbf{u} \in S^{d-1}$，线性泛函 $\langle \mathbf{u}\ \cdot \rangle$ 在顶点 P 上诱导出一个排序 $\mathbf{v}_1$，……，$\mathbf{v}_n$，使得对于所有 $i = 1$，……，$n-1$，都有 $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}_i \rangle < \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}_{i+1} \rangle$。根据构造，$\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 的一个室恰好由那些与 $\mathbf{u}$ 正交且将 $\mathbf{v}_i$ 与 $\mathbf{v}_{i+1}$ 分隔开的平行超平面组成，其中 $i \in [n-1]$。

例 2.11。回忆一下例 2.2 中的五边形 P，其具有顶点

$$\mathbf{v}_1 = (-1,-1),\ \mathbf{v}_2 = (1,-1),\ \mathbf{v}_3 = (1,1),\ \mathbf{v}_4 = (0,2),\ \mathbf{v}_5 = (-1,1).$$

对于一般方向 $\mathbf{u}$，超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 诱导出六个切片室，其中四个与 P 有非空交集。图 4 展示了对 $\mathbf{u}$ 的非一般（左）和一般（右）选择所对应的排列，即 $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-1,-1)$ 以及 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ 的情形。五边形 P 与 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ 的平行超平面排列诱导出顶点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 的排序。$\diamond$

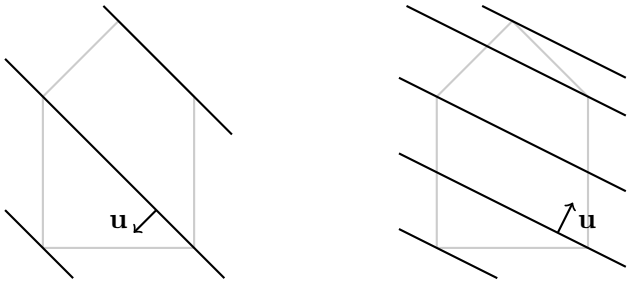


图 4：左侧为法向方向 $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-1,\ -1)$ 对应的平行排列，右侧为 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ 对应的平行排列。

现在我们证明定理 2.5关于平行仿射截面的类似结论。

定理 2.12。设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个满维多胞体，$f(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 是一个多项式，固定一个法向方向 $\mathbf{u} \in S^{d-1}$，并设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 是引理 *2.8* 中超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 的一个极大开区域。在取值 $\beta \in C$ 范围内，积分 $\int_{P \cap H(\beta)} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$ 是变量 β 的多项式。

证明。这个证明的结构与 定理 2.5 的证明相同。主要区别在于多胞体截面顶点的参数化方式。

设 $\beta \in C$ 和 $Q(\beta) = H(\beta) \cap P$。令 $\mathbf{v}_1(\beta) \ldots, \mathbf{v}_n(\beta)$ 表示 $Q(\beta)$ 的顶点，并令 $\mathrm{conv}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ 为 P 的边，使得 $\mathbf{v}_i(\beta) = \mathrm{conv}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) \cap H(\beta)$。由

$$\mathbf{v}_i(\beta) = \lambda \mathbf{a}_i + (1-\lambda)\mathbf{b}_i, \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i(\beta) \rangle = \beta,$$

我们得到

$$\mathbf{v}_i(\beta) = \frac{\beta}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \rangle}(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{b}_i}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \rangle},$$

它关于 β 呈线性依赖。令 $\mathcal{T}$ 为 $Q(\beta)$ 的一个三角剖分，该剖分仅使用 $Q(\beta)$ 的顶点。根据 C 的构造，对于每个 $\beta \in C$，都可以选取相同的三角剖分。令

$\mathbf{v}_{j_1}(\beta), \ldots, \mathbf{v}_{j_d}(\beta)$ 表示单纯形 $\Delta \in \mathcal{T}$ 的顶点，并令

$$M_\Delta(\beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{j_2}(\beta) - \mathbf{v}_{j_1}(\beta) \\ \mathbf{v}_{j_2}(\beta) - \mathbf{v}_{j_1}(\beta) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{j_d}(\beta) - \mathbf{v}_{j_1}(\beta) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

重复计算1定理 2.5（$\int_{P \cap H(\beta)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ 等于

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}} |\det M_\Delta(\beta)| \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{(|\boldsymbol{\alpha}| + d - 1)!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \\ |\mathbf{k}| = |\boldsymbol{\alpha}|}} \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_{j_1}(\beta) \rangle^{k_1} \cdots \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_{j_d}(\beta) \rangle^{k_d},$$

这是 β 的多项式，其中 $\beta \in C$。 □

例 2.13。我们继续例 2.2 和 2.11，计算五边形 P 的平行截面上矩之和的积分，其中法向方向 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$。对于排列中的每个室，分别描述函数 $\int_{P \cap H(\beta)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$（其中 $f(\mathbf{x}) = 1$、$f(\mathbf{x}) = \overline{x}_1 + x_2$ 和 $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$）的多项式显示于图 5 中。⋄

上述讨论有一个离散版本，其中我们不计算截面的体积或积分，而是计算其中的格点数。凸几何和 Brunn-Minkowski 理论中有若干著名连续不等式的离散变体 [FH22]。虽然我们无法对多胞体的离散截面进行优化，但可以得到以下部分结果。我们在注 2.15中给出证明的概要。

定理 2.14。 计数多胞体膨胀所得格点的 *Ehrhart* 函数 $Ehr(P \cap H(\beta))$ 是 β 中的分段有理函数。在固定维数下，对于有理多胞体P，这些公式可以在多项式时间内计算出来。

注 2.15。 定理 2.14 直接源于用有理函数对多面体中的格点进行编码的理论 [BP99]。每个格点都被视为一个单项式的指数向量，从而将 P 中的所有格点集合转化为一个 Laurent 多项式$g_P(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in P \cap \mathbb{Z}^d} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$.。这个单项式之和可以写成有理函数之和

$$g_P(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} E_i \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{u}_i}}{\prod_{j=1}^{d} (1 - \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ij}})},$$

其中 I 是一个索引集，$E_i \in \{1, -1\}$，且 $\mathbf{u}_i$，$\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{Z}^d$ 对所有 i 以及 j均成立。对于具有相同法扇的多胞体，上述公式相同；根据引理 3.7，在 (P) 的各个室内正是如此。此外，假设维数 d 固定，求和项数关于输入规模是多项式级的。

注记 2.16。 在旋转切片的情形下，计算截面 $P \cap H$ 中的格点数，是一个比平移情形困难得多的问题。这是因为多胞体 $P \cap \mathbf{u}_1^{\perp}$和 $P \cap \mathbf{u}_2^{\perp}$即使对于同一室中的$\mathbf{u}_i$，通常也不等价。

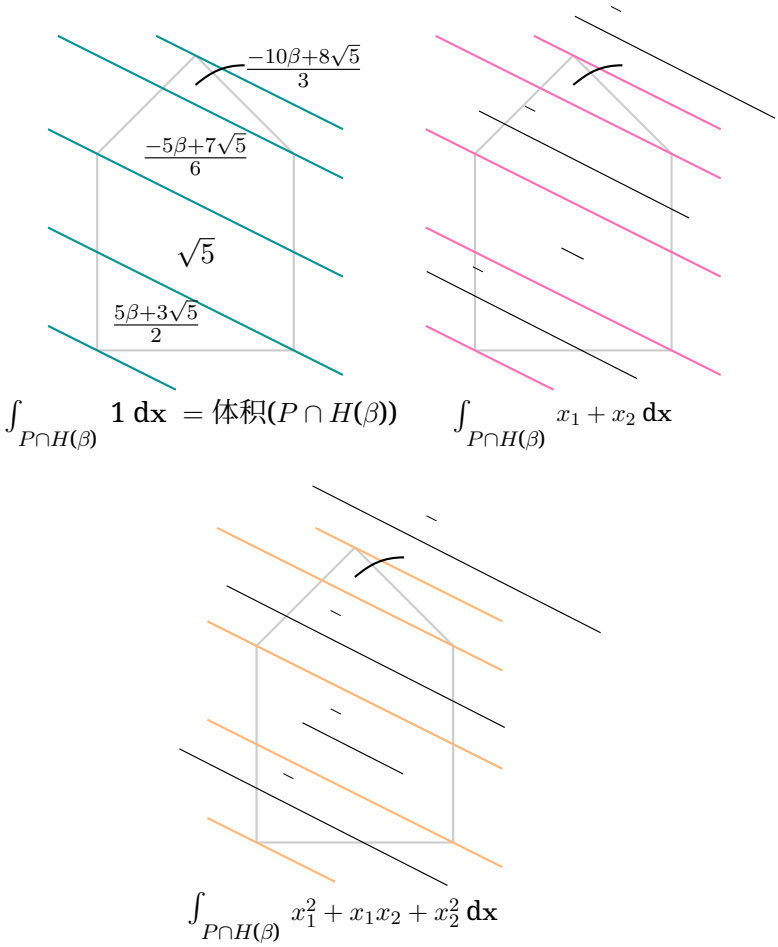


图 5：沿方向 $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ 对五边形的仿射截面上的矩的和进行积分，如例 2.13所述。

2.3 投影与极性

交的对偶版本由投影给出。因此，很自然会想知道前面各节的结果是否适用于这一情形。实际上确实适用，而且涉及我们已经遇到过的超平面排列。如果中心旋转截面与交体的构造相关，平行平移截面与单调路径多胞体相关，那么在这里我们应当牢记 投影体 [Gar06，第 4] 章。这也是一种源自凸几何的构造，并且它通过支撑函数编码了给定凸体的所有（$d-1$）维投影，位于 $\mathbb{R}^d$。在我们的设定中，我们将 P° 视为 P 的极体，并通过标准标量积将 $\mathbb{R}^d$ 与其对偶空间等同起来。

引理 2.17。 设 $P\subset\mathbb{R}^d$ 是一个内部包含原点的多胞体，并设 P° 是 P 的极体。考虑仿射超平面排列 $\mathcal{C}_\circlearrowleft(P^\circ)$。$\mathcal{C}_\circlearrowleft(P^\circ)$ 的极大开室 C 满足以下性质：对于所有 $\mathbf{u}\in C$，投影 $\pi_{\mathbf{u}}(P)$ 的顶点是 P 中某个固定顶点集的投影。特别地，多胞体 $\pi_{\mathbf{u}}(P)$ 是组合等价的。

证明。 设 C 是 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P^\circ)$ 的一个极大开室，并设 $\mathbf{u} \in C$。根据投影与交的对偶性，我们有

$$\pi_{\mathbf{u}}(P) = \left(P^\circ \cap \mathbf{u}^\perp\right)^\circ.$$

由于当 $\mathbf{u}^\perp \mathbf{u} \in C$ 时， $P^\circ \cap \mathbf{u}^\perp$ 的组合类型不会改变，因此 $\pi_{\mathbf{u}}(P)$ 的组合类型也不会改变。此外，$\pi_{\mathbf{u}}(P)$ 的顶点是 P 中那些顶点的投影；这些顶点所对应的面 F 是 P° 的一个面，并定义了 $P^\circ \cap \mathbf{u}^\perp$ 的一个面 $F \cap \mathbf{u}^\perp$。 □

采用与证明 定理 2.5和 2.12时相同的策略，我们得到一个关于多胞体投影的多项式积分的类似结果，这是证明定理 1.3 (v)的第一步。

定理 2.18。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个满维多胞体， $f(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} x^{\boldsymbol{\alpha}}$ 是一个多项式，且 $C \subset \mathbb{R}^d$ 是引理 *2.17* 中超平面排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P^\circ)$ 的一个极大开区域。限制在方向 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$ 上，积分 $\int_{\pi_{\mathbf{u}}(P)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 是变量 $u_1, \ldots, u_d$ 的多项式。

证明。 在这种情况下，证明也是 定理 2.5证明的直接推论，只需确定投影的顶点参数化即可。

对于某个 $\mathbf{u}$，有 $Q = \pi_{\mathbf{u}}(P)$。根据构造， P 中其投影为 $Q(\mathbf{u})$ 的顶点由 C 唯一确定，因此对于所有 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$，都可以选取 $\mathcal{T}$ 的 $\pi_{\mathbf{u}}(P)$ 三角剖分。设 $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1) \ldots, \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_n)$ 是 $Q(\mathbf{u})$ 的顶点，并令

$$M_\Delta(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_2}) - \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_1}) \\ \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_3}) - \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_1}) \\ \vdots \\ \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_d}) - \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_1}) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \qquad \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{u},$$

其中 $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_1}) \ldots, \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_d})$ 是 $\Delta \in \mathcal{T}$的顶点。重复计算式（1），可以精确计算 f 在 $Q(\mathbf{u})$ 上的积分，结果为

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}} |\det M_\Delta(\mathbf{u})| \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{(|\boldsymbol{\alpha}| + d - 1)!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \\ |\mathbf{k}| = |\boldsymbol{\alpha}|}} \langle \mathbf{p}, \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_1}) \rangle^{k_1} \cdots \langle \mathbf{p}, \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_{j_d}) \rangle^{k_d}$$

这是关于 $u_1, \ldots, u_d$ 的多项式，其中 $\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$。 □

注 2.19。 若 D 是 f的次数，则多项式 $\int_{Q(\mathbf{u})} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 的次数至多为 $2d(D+1)$。 -1当 f 为常数时，我们的函数就是一个分带多面体的支撑函数，即 P [Sch14 的投影体，见第 10 节。9], 因此它必然关于$\mathbf{u}$是线性的。

例 2.20。我们继续 例 2.2 和 2.13 ，并计算五边形 P 的所有投影的体积。描述 $\mathrm{vol}(\pi_{\mathbf{u}}(P))$ 的多项式，对于 $\mathbf{u} \in S^1$，在超平面排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P^\circ)$ 的每个室中，均见 图 6。 ⋄

此外还有另一种可能的方法，基于 [Law91，第 260-261] 页以及 [Fil92，定理 1], ，不过这种方法更为复杂。它再次涉及极性，但针对的是 P 的超平面截面。这种替代方法同样基于这样一个事实： $\pi_{\mathbf{u}}(P) = \left(P^\circ \cap \mathbf{u}^\perp\right)^\circ$,

并且存在一些公式，可以根据多胞体本身计算其极体的体积。Lawrence公式仅针对简单多面体，但借助 Brion定理和带符号锥分解方法 [Bar02] ，我们可以得到一个适用于任意多胞体的更一般公式。第二个公式适用于非退化多面体，因此要应用它，就应验证所有投影 $\pi_{\mathbf{u}}(P)$ 都具备这一性质。鉴于一般性的这些微妙条件，我们更倾向于采用上述直接对投影进行三角剖分的方法；这种方法本身已能保证相关优化问题的复杂度具有良好的上界。我们将在证明 第 4.1 小节 中讨论这一点，届时将证明 定理 1.3 (v) 的复杂度部分。

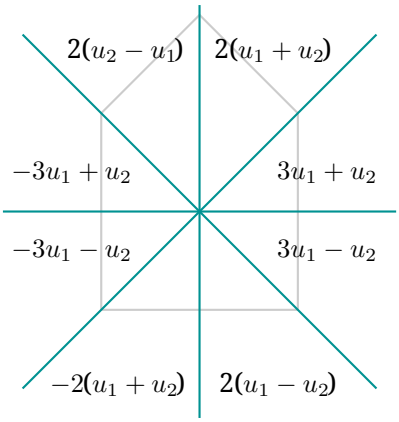


图 6：所有投影的体积 $\pi_{\mathbf{u}}(P)$，对于$\mathbf{u} \in S^1$，如P例 2.20中所述的五边形。

3 合并两种类型的截面

在第 2.1 小节和2.2 中，我们参数化计算了多项式积分 f 在多胞体的中心超平面截面和平行超平面截面上的值 P。本节基于以下观察，将结果推广到任意仿射截面。考虑所有超平面截面有两种自然的方式。可以先在 $\mathbb{R}^d$ 中选取一个点作为中心，然后考察经过该点的所有（旋转）超平面；也可以先固定一个方向，然后考察所有与其正交的仿射（平行）超平面。在第 3.1 小节中，我们采用第一种观点，将第 2.1 小节关于中心截面的方法推广开来。这将产生一个仿射超平面排列 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 位于 P的平移向量空间中。另一方面，按照第二种关于超平面截面的观点，将第 2.2 小节关于平行截面的方法推广后，将得到一个中心超平面排列$\mathcal{R}$（P）位于仿射超平面的法向量空间中，详见第 3.2 小节。

将中心超平面截面转化为仿射截面的另一种标准方法是使用齐次化。具体来说，将 d 维多胞体 P in $\mathbb{R}^{d+1}$ 嵌入超平面$x_{d+1} = 1$内。这样， P 的所有 $(d-1)$ 维截面都可以通过 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中经过原点的超平面得到。然而，由于在这种情况下，多胞体 P 不是满维的，截面的体积参数化计算将涉及求取参数化的标准正交基。这不适用于计算，因为我们更倾向于使用有理数据。基于这些原因，我们不再详细讨论这种方法。

3.1 变换旋转

在第 2.1 小节中，我们固定了一个多胞体 P，并考虑了法向量为$\mathbf{u} \in S^{d-1}$、从而构成中心超平面排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P$的过原点超平面。在该排列中，每个极大开区域都由满足以下条件的法向量$\mathbf{u}$ 构成：中心超平面$\mathbf{u}^{\perp}$与 P的某个固定边集相交。本节将扩展这一构造，通过考虑平移 $P+\mathbf{t}$来允许原点位置变化。

引理 3.1 （[BM23，引理 3.2，命题 3。4]）。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个满维多胞体，并设 R 为称作余回路排列的仿射超平面排列的一个极大区域

$$\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P) = \{\mathrm{aff}(-\mathbf{v}_1, \ldots, -\mathbf{v}_d) \,|\, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d \textit{ are affinely independent vertices of } P\},$$

则以下结论成立：

（i）对于所有 $\mathbf{t} \in R$，中心超平面排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 定义相同的可实现有向拟阵 χ。此外，定义 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 的一个室 $C(\mathbf{t})$ 的超平面由 t_1、……、t_d线性参数化。

（ii）设 $\mathbf{t}$、$\mathbf{t}' \in R$，并设 $C(\mathbf{t}) \subset \mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ $C(\mathbf{t}') \subset \mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t}')$ 为极大室，且 χ 中分别对应于 $C(\mathbf{t})$ $C(\mathbf{t}')$ 的拓扑（余回路）一致。于是，

$$\{e \textit{ edge of } P \,|\, (e+\mathbf{t}) \cap \mathbf{u}^{\perp} \neq \emptyset\} = \{e \textit{ edge of } P \,|\, (e+\mathbf{t}') \cap (\mathbf{u}')^{\perp} \neq \emptyset\}$$

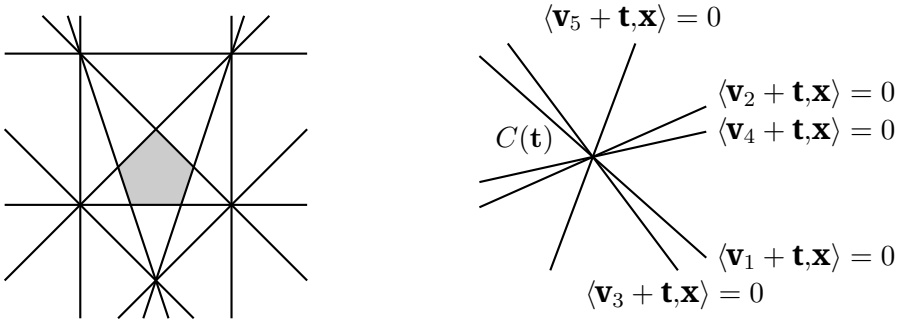
对于任意$\mathbf{u} \in C(\mathbf{t})$、$\mathbf{u}' \in C(\mathbf{t}')$，$\mathbf{u}^{\perp}$ 和$(\mathbf{u}')^{\perp}$ 分别与（ $P+\mathbf{t}$ 和 $P+\mathbf{t}'$的）同一边集相交。换言之，

我们将 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 称为 P 的余回路排列，而区域 R 是 $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 的一个开连通分支。与之前一样，为简化记号，我们将用$R \subset \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$表示该排列的一个区域。注意，我们同时处理两个不同的超平面排列： $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 和 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P)$。这些排列的名称对应于我们对其补集所采用的名称：如第 2.1 小节所定义，$\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P)$ 的连通分支称为室，而 $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 的连通分支称为区域。将这两个排列结合起来，我们可以参数化 $\mathbb{R}^d$ 中的所有超平面。区域 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 中的点 $\mathbf{t}$ 确定了 P 的一个平移，或者等价地说，它确定了原点相对于多胞体的位置。于是，$\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 的室参数化了经过所选原点的超平面。当我们改变 $\mathbf{t}$ 时，就能得到新的超平面截面。

例 3.2。 我们继续讨论 例 2.2 和 2.7。余回路排列 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 由 $\binom{5}{2} = 10$ 个超平面组成，将 $\mathbb{R}^2$ 划分为 11 个有界区域和 26 个无界区域，如 图 7a所示。令

$$R = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \binom{-3}{1}, \mathbf{t} \rangle > -2,\ \langle \binom{-1}{-1}, \mathbf{t} \rangle > 0,\ \langle \binom{3}{1}, \mathbf{t} \rangle > -2,\ \langle \binom{1}{-1}, \mathbf{t} \rangle > 0,\ \langle \binom{0}{1}, \mathbf{t} \rangle > -1\}$$

为 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 的五边形阴影区域。注意， R 包含来自例 2.2 的平移向量 $\mathbf{t} = -(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$。对于所有 $\mathbf{t}$， $\in R$中心排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 定义相同的定向拟阵。特别是，所有中心超平面排列都具有相同的组合结构，并且以 t_1, t_2 为参数，如图 7b 所示。改变 $\mathbf{t}$ 会引起由 $\langle \mathbf{v}_i + \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle = 0$ 定义的超平面旋转，其中 $\mathbf{v}_i$ 是 P 的顶点。请注意，定义 R 的（严格）不等式保证，在这些旋转过程中， $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 中不会有两个超平面重合。$\diamond$



（a） $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 余回路排列。区域 R 以灰色阴影表示。

（b）参数化的中心超平面排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$，其中 $\mathbf{t} \in R$。

图 7：来自例 3.2的超平面排列。

我们已利用超平面排列识别出不同的切片室。现在，我们希望运用 d 维欧几里得空间中超平面配置的经典性质来统计它们。关于超平面排列中面和胞腔的枚举理论，读者可参阅 [Sta07；Zas75]。正如我们将在第 4 节中看到的，这使我们能够在多项式时间内回答关于多胞体切片的任何纯组合问题。

命题 3.3。 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个具有 n 个顶点的多胞体。在余回路排列$\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 中，至多有 $\binom{n}{d}$ 个仿射超平面。至多有 $O(n^{d^2})$ d维多面体区域，并且相关余回路排列中的室总数（包括低维胞腔）由 $O(n^{d^2}2^d)$ 界定。因此，切割室的数量（对区域和室均计入低维胞腔）为 $O(n^{d^2+d}2^{2d})$ 。

证明。 记 f_k 为维数为 k的多面体面的数量。根据经典的 Zaslavsky 定理（见 [Zas75] 或 [Sta07，命题 2。4]），该超平面的顶维多面体区域数 $f_d(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P))$ 为

$$f_d(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)) \leq \sum_{i=1}^{d} \binom{\binom{n}{d}}{i} \sim O(n^{d^2}).$$

请注意，当已知相关拟阵时，可以写出精确公式（参见 [Sta07]），但一般情形会给出一个上界。此外，众所周知，可以通过以下不等式（参见 k-面在该超平面排列中的数量： [FSTT91]）：

$$f_k(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)) \leq \binom{d}{k} f_d(\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)), \quad 0 \leq k \leq d,$$

这意味着，所有多面体区域（无论是否为最高维）的所需上界为 $O(n^{d^2}2^d)$。对于每个这样的区域，我们都有一个相应的超平面排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 需要考虑，其中包含 n 个超平面，因此至多有 $\sum_{i=1}^{d}\binom{n}{i}$ 个满维切片室。因此，对于每个区域的选择，我们得到数量级为$O(n^d)$的切片室；如果同时计算其低维面，则数量级为 $O(n^d2^d)$。将这个数乘以 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 的单元数上界，即得到数量级为 $O(n^{d^2+d}2^{2d})$ 的上界。 □

由余回路排列与相应的顶点中心排列（在选定中心之后）构成的这些对，检测出其组合结构的所有变化

P的超平面截面。在固定维数 d下，这些区域的数量及其面数量关于 P的顶点数呈多项式关系，并且在这些胞腔中的每一个上，超平面截面 $P \cap H$ 都具有给定的组合类型。

我们可以扩展定理 2.5，使其在对 P的超平面截面上的多项式进行积分时，考虑平移。这是对 [BM23，定理 35], 的扩展，该定理给出了关于体积的类似结论。

定理 3.4. 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个满维多胞体，且 $f(x) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} x^{\boldsymbol{\alpha}}$ 是一个多项式。设 $R \subset \mathbb{R}^d$ 是余回路排列 $\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 的一个区域，并设 $C(t) \subset \mathbb{R}^d$ 是中心排列 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+t)$ 的一个室，其中 $t \in R$。当限制在 $t \in R$ 且 $u \in C(t) \cap S^{d-1}$ 时，积分 $\int_{(P+t)\cap u^{\perp}} f(x)\, dx$ 是变量 t_1、……、t_d、u_1、……、u_d 的有理函数。

证明。 根据 引理 3.1，室 $C(\mathbf{t})$ 关于 $\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$ 是关于 $\mathbf{t}$ 的线性相关函数，当$\mathbf{t} \in R$ 时。令 $\mathbf{u} \in C(\mathbf{t})$。如 定理 2.5 的证明中一样，我们对 $(P+\mathbf{t}) \cap \mathbf{u}^{\perp}$ 进行三角剖分，得到

$$M_{\Delta}(\mathbf{t},\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{j_2}(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{t},\mathbf{u}) \\ \mathbf{v}_{j_3}(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{t},\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{t},\mathbf{u}) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{t},\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j(\mathbf{t},\mathbf{u}) &= \frac{\langle \mathbf{b}_j + \mathbf{t}, \mathbf{u}\rangle(\mathbf{a}_j + \mathbf{t}) - \langle \mathbf{a}_j + \mathbf{t}, \mathbf{u}\rangle(\mathbf{b}_j + \mathbf{t})}{\langle \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j, \mathbf{u}\rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{b}_j + \mathbf{t}, \mathbf{u}\rangle \mathbf{a}_j - \langle \mathbf{a}_j + \mathbf{t}, \mathbf{u}\rangle \mathbf{b}_j}{\langle \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j, \mathbf{u}\rangle} + \mathbf{t}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v}j(\mathbf{t},\mathbf{u})$ 表示三角剖分 Δ 中的一个单纯形的顶点 $\mathcal{T}$，该顶点位于边 $\operatorname{conv}(\mathbf{a}_j + \mathbf{t}, \mathbf{b}_j + \mathbf{t})$ 的内部，该边属于 $P + \mathbf{t}$。重复 定理 2.5 证明中 (1) 的计算可得

$$\begin{aligned} \int_{(P+\mathbf{t})\cap \mathbf{u}^{\perp}} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}} |\det M_{\Delta}(\mathbf{t},\mathbf{u})| \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{(|\boldsymbol{\alpha}| + d - 1)!} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p} \leq \boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}| - |\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \cdot \\ \cdot \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \\ |\mathbf{k}| = |\boldsymbol{\alpha}|}} \langle\, p,\ \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{t},\mathbf{u})\, \rangle^{k_1} \cdots \langle\, p,\ \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{t},\mathbf{u})\, \rangle^{k_d}, \end{aligned}$$

这是关于 t_1，……，t_d、u_1，……，u_d 的有理函数。 □

该结果表明，$\int_{(P+\mathbf{t})\cap \mathbf{u}^{\perp}} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$ 是一个分段有理函数。其为有理函数的定义域在以下意义下是成对的多面体。每个区域 R都是 $\mathbb{R}^d$中的一个多面体，而每个室 $C(\mathbf{t})$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中由$\mathbf{t}$参数化的一个多面体。特别地，有理性的定义域是 $\mathbb{R}^{2d}$ 的一个半代数子集，其形状如下：

$$\{(\mathbf{t},\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{2d} \mid \mathbf{t} \in R, \mathbf{u} \in C(\mathbf{t})\} \cap \left(\mathbb{R}^d \times S^{d-1}\right),$$

对于某个区域 $R \subset \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 和室 $C(\mathbf{t}) \subset \mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P + \mathbf{t})$，其中 $\mathbf{t} \in R$。注意，条件 $\mathbf{u} \in C(\mathbf{t})$ 关于变量 $t_1, \ldots, t_d, u_1, \ldots, u_d$ 是二次的，参见 例 3.2。我们可以按照如下方式界定积分公式中出现的多项式的次数，而与它们所属的室和区域无关。

命题 3.5。 在每个切片室中，有理函数 $\int_{(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^\perp} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 满足以下次数界：

$$\deg \text{ numerator}\left(\int_{(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^\perp} f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right) \le \Big(f_1(P)-(d-1)\Big)(D+d-1)+d(D+1),$$

$$\deg \text{ denominator}\left(\int_{(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^\perp} f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right) \le \Big(f_1(P)-(d-1)\Big)(D+d-1).$$

此处 $f_k(P)$ 表示 P的 k维面以及 $D=$次数 f的数量。

证明。 我们希望研究分段有理函数 $\int_{(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^\perp} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$的分子和分母的次数。我们固定一个区域 $R\subset\mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$和一个室 $C(\mathbf{t})\subset\mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t})$，其中 $\mathbf{t}\in R$。根据上面的证明， f在超平面截面 $(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^\perp$ 上的积分，是对 $|$的所有单纯形 $\Delta\in\mathcal{T}$求和，将 $|\det M_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})|$分别乘以

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}}\frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{(|\boldsymbol{\alpha}|+d-1)!}\sum_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d_{\ge 0}\\ \mathbf{p}\le\boldsymbol{\alpha}}}(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|-|\mathbf{p}|}\binom{\alpha_1}{p_1}\cdots\binom{\alpha_d}{p_d}\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_{\ge 0},\\ |\mathbf{k}|=|\boldsymbol{\alpha}|}}\langle\ \mathbf{p},\ \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{t},\mathbf{u})\ \rangle^{k_1}\cdots\langle\ \mathbf{p},\ \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{t},\mathbf{u})\ \rangle^{k_d},\quad(2)$$

其中 $\mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{t},\mathbf{u})$……，$\mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{t},\mathbf{u})$是单纯形 Δ的顶点。由于 $\mathbf{v}_{j_i}(\mathbf{t},\mathbf{u})$的分母在向量的每个坐标中都相同，因此我们可以将其从与 $\mathbf{p}$的标量积中提出；此外，记 $D=$次数 f，我们有 $k_i\le D$对所有 $i=1$，……，d。因此，（2）变为

$$\frac{\varphi_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})}{\prod_i\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_i}-\mathbf{a}_{j_i}\rangle^D}$$

其中$\mathbf{v}_{j_i}$属于 P的一条边，其端点为$\mathbf{a}_{j_i}$、$\mathbf{b}_{j_i}$，而 φ_Δ 是一个多项式。

不难看出，如果我们将一组有理函数相加，且它们的分子次数与分母次数之差对所有被加项都相同，那么这些函数之和的分子次数与分母次数之差也会是同一个数。利用这一基本事实，并注意到（2）中的每个被加项的分子次数都是分母次数的两倍，我们可以推得 $\deg\varphi_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})=2\deg\left(\prod_i\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_i}-\mathbf{a}_{j_i}\rangle^D\right)=2\cdot d\cdot D$。

现在来描述有理函数 $|\det M_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})|$。矩阵中除最后一行外，各行的元素都是三次多项式与二次多项式之商，变量为 t_1、……、t_d、u_1、……、u_d。第$i-1$行各元素的分母对于所有$i=2$、……、d都是 $\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_i}-\mathbf{a}_{j_i}\rangle\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_1}-\mathbf{a}_{j_1}\rangle$。因此，行列式是一个$d-1$次多项式与另一个$d-1$次多项式之商。接下来，

$$|\det M_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})|\,\frac{\varphi_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})}{\prod_i\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_i}-\mathbf{a}_{j_i}\rangle^D}=\frac{\phi_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})}{\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_1}-\mathbf{a}_{j_1}\rangle^{D+d-1}\prod_{i\ne1}\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_i}-\mathbf{a}_{j_i}\rangle^{D+1}},$$

对于某个其他的次数为 $2dD+3(d-1)+1$的多项式 ϕ_Δ。注意，分子和分母的次数之差为 $d(D+1)$，与单纯形 Δ无关。

现在我们可以对三角剖分中的单形求和了。由于被加项的分母相似（可能存在一些冗余），我们得到 $\int_{(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^\perp} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 的如下表达式：

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{T}}\frac{\phi_\Delta(\mathbf{t},\mathbf{u})}{\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_{j_1}-\mathbf{a}_{j_1}\rangle^{D+d-1}\prod_{i\ne1}\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_j-\mathbf{a}_j\rangle^{D+1}}=\frac{\psi(\mathbf{t},\mathbf{u})}{\prod_j\langle\mathbf{u},\mathbf{b}_j-\mathbf{a}_j\rangle^{D+d-1}},\qquad(3)$$

其中，乘积现在遍历 $(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^{\perp}$ 的所有顶点。由于对于等式 (3) 左侧的所有被加项，我们都知道分子与分母的次数之差为 d，因此可推得 $\deg\psi(\mathbf{t},\mathbf{u}) = (f_0((P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^{\perp}))(D+d-1)+d(D+1)$。因此，利用 [BBMS22 定理 5.6] 对 $f_0((P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^{\perp})$ 的次数进行界定，可得陈述中所称的次数界；该结论对每个区域中的每个室均成立。 □

例 3.6。我们继续讨论 例 3.2。设 R 是余回路排列中的五边形阴影区域 $\mathcal{R}_{\heartsuit}(P)$，位于图 7a 中，并设

$$C(\mathbf{t}) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \langle\mathbf{v}_1+\mathbf{t},\mathbf{x}\rangle > 0, \langle\mathbf{v}_4+\mathbf{t},\mathbf{x}\rangle > 0\}.$$

常函数 1 在 $\mathbf{t}\in R$ 和 $\mathbf{u}\in C(\mathbf{t})$ 上的积分为

$$\mathrm{vol}((P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^{\perp}) = \int_{(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^{\perp}} 1\ \mathrm{d}\mathbf{x} = -\frac{t_1u_1+t_2u_2+3u_1-u_2}{u_1(u_1-u_2)}.$$

注意，对于 $\mathbf{t}=(0,0)$，这就特化为图 3 中相应室内的多项式，该图出自例 2.7，正如注 2.6中所述。在这种情况下，命题 3.5 给出的界分别是分子次数为 6、分母次数为 4，但二者都不是紧界。◇

3.2 旋转平移

本节将第 2.2 小节中发展的理论加以扩展。在那里，我们固定了一个多胞体P和一个单位方向 $\mathbf{u}\in S^{d-1}$，并研究了由平行仿射超平面$H(\beta)$对 P 所截出的截面，这些超平面的法向量为 $\mathbf{u}$。回顾注 2.10，$\mathbf{u}$ 在 P的顶点上诱导出一种排序。我们得到一个平行超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$；对于每个室，超平面 $H(\beta)$与 P 相交于一个固定的边集，并将由所诱导排序中相邻的两个顶点分隔开。现在，我们先改变方向 $\mathbf{u}\in S^{d-1}$，然后构造依赖于 $\mathbf{u}$ 的 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$。

引理 3.7。设 $P\subset\mathbb{R}^d$ 是一个满维多胞体，且 R 是中心超平面排列的一个区域

$$\mathcal{R}(P) = \{(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j)^{\perp} \mid \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j \textit{ are distinct vertices of } P\}.$$

则以下结论成立：对于所有 $\mathbf{u}\in R$，线性泛函 $\langle\mathbf{u}\ \cdot\rangle$ 都会对 P 的顶点诱导出相同的排序 $\mathbf{v}_1$、……、$\mathbf{v}_n$。

中心超平面排列 $\mathcal{R}(P)$ 被称为扫描排列或队列排列 [PP21]。上述引理得出以下结论：设 $\mathbf{u}$、$\mathbf{u}'\in R, i\in[n-1]$，并设$C(\mathbf{u})\subset\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$、$C(\mathbf{u}')\subset\mathcal{C}^{\mathbf{u}'}(P)$，使得 $C(\mathbf{u})$ 和 $C(\mathbf{u}')$ 中的所有超平面都将 $\mathbf{v}_i$ 与 $\mathbf{v}_{i+1}$ 分隔开。那么，任意两个超平面 $H(\mathbf{u}\ \beta)\in C(\mathbf{u})$、$H(\mathbf{u}',\beta')\in C(\mathbf{u}')$ 在 P 中相交于同一个边集。然而，多胞体 $P\cap H(\mathbf{u}\ \beta)$ 和 $H(\mathbf{u}',\beta')$ 并不通常等价。

例 3.8。我们继续讨论例 2.11 和2.13。其 P 的扫描排列如图 8所示。它由 6 个不同的超平面组成，将 $\mathbb{R}^2$ 细分为 12 个区域。每个区域都对应于由线性泛函诱导的 P 顶点的一种可能排序。阴影区域

$$R = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \langle\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2,\mathbf{x}\rangle<0,\ \langle\mathbf{v}_5-\mathbf{v}_3,\mathbf{x}\rangle<0,\ \langle\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_5,\mathbf{x}\rangle<0,\ \langle\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4,\mathbf{x}\rangle<0\}$$

对应于排序 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_5$,$\mathbf{v}_3$,$\mathbf{v}_4$ 来自 例 2.11。 ◇

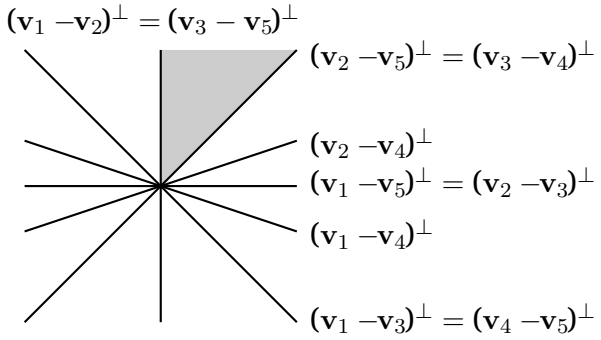


图 8：多胞体 P 的例 3.8中的扫描排列。区域 R 以灰色阴影表示。

每个区域 $R \subset \mathcal{R}(P)$ 都对应于 P的顶点的相同排序，即平行排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 对所有 $\mathbf{u} \in R \cap S^{d-1}$都具有相同的组合结构。在这种情况下，我们同样得到有限数量的区域，其中每个区域定义有限数量的室。下面给出了 命题 3.3 的类似结论，用于计算平行切片室的总数，其中还包括排列的低维胞腔。这也将给出定理 1.2的证明。

命题 3.9。 假设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 具有 n 个顶点，则扫描排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 至多有 $\binom{n}{2}$ 个仿射超平面。在 $\mathcal{R}(P)$ 中，至多有 $O(n^{2d})$ d维多面体区域，且扫描排列中的区域总数（包括低维胞腔）由 $O(n^{2d}2^d)$ 界定。对于 $\mathcal{R}(P)$ 中的每个区域，我们都有一个平行超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$，因此切片室的最终数量（甚至包括低维的切片室）为 $O(n^{2d+1}2^d)$。

证明。 多胞体的扫描排列中的每个超平面 P 都由一对顶点确定：它们的差向量就是该超平面的法向量。如同命题 3.3中所述，根据 Zaslavsky 定理（参见 [Zas75] 或 [Sta07，命题 2.4]），可以证明扫描排列的最高维多面体区域数 $f_d(\mathcal{R}(P))$ 为

$$f_d(\mathcal{R}(P)) \leq \sum_{i=1}^{d} \binom{\binom{n}{2}}{i} \sim O(n^{2d}).$$

再次，我们可以通过不等式 (s 对排列中的 k-面数量给出上界 ee [FSTT91])：

$$f_k(\mathcal{R}(P)) \leq \binom{d}{k} f_d(\mathcal{R}(P)), \quad 0 \leq k \leq d,$$

这意味着扫描排列中 $O(n^{2d}2^d)$ 的所有多面体区域（所有维数）的所需上界。

对于扫描排列中的每个此类区域，我们都有一个对应的平行超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}$。对于每种平移方向 $\mathbf{u}$，室的数量为 $O(n)$ 量级。事实上，该排列中的室要简单得多：在最坏情况下，它们由 n 个平行超平面定义，每个顶点 P 对应一个；每个室恰好由两个平行超平面围成。因此， d 维室的总数为

$O(n^{2d}n)$，而当我们考虑所有低维区域及其对应的室时，切片室的最终总数上界为 $O(n^{2d+1}2^d)$。 □

定理 *1.2* 的证明。给定一个多胞体 P，命题 3.3 和命题 3.9 都给出了 P的超平面截面组合类型数量的上界。两个上界中，较小的是 $O(n^{2d+1}2^d)$，结论得证。 □

回顾一下我们的记号 $H(\mathbf{u}\ \beta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{u},\ \mathbf{x}\rangle = \beta\}$。再一次，我们可以扩展定理 2.12：先选取方向$\mathbf{u}$，然后考虑所有法向量为$\mathbf{u}$的平行截面。这是对所有仿射超平面截面进行参数化的第二种方式，以下结果是定理 3.4的对应结果。

定理 *3.10.* 设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个满维多胞体，且 $f(x) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} c_{\boldsymbol{\alpha}} x^{\boldsymbol{\alpha}}$ 是一个多项式。设 $R \subset \mathbb{R}^d$ 是扫描排列 $\mathcal{R}\ (P)$ 的一个区域，且 $C(u) \subset \mathbb{R}$ 是平行排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 的一个室，其中 $u \in R$。限制在 $u \in R \cap S^{d-1}$ 和 $\beta \in C(u)$ 上，积分 $\int_{P\cap H(u\ \beta)} f(x)\, dx$ 是变量 $u_1, \ldots, u_d$, β 的有理函数。

证明。 根据 引理 3.7 室 $C(\mathbf{u})$ 属于 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 关于 $\mathbf{u}$ 线性相关，若将其限制到 $\mathbf{u} \in R \cap S^{d-1}$。设 $\beta \in C(\mathbf{u})$。如同 定理 3.4的证明中那样，我们对$P \cap H(\mathbf{u}\ \beta)$ 作三角剖分，得到矩阵

$$M_\Delta(\mathbf{u},\beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{j_2}(\mathbf{u},\beta) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u},\beta) \\ \mathbf{v}_{j_2}(\mathbf{u},\beta) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u},\beta) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{u},\beta) - \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u},\beta) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{u},\beta) = \frac{\beta}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\rangle}(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i\rangle \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i\rangle \mathbf{b}_i}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\rangle},$$

其中 $\mathbf{v}j(\mathbf{u}\ \beta)$ 表示三角剖分 $\mathcal{T}$中单纯形 Δ 的顶点，它位于边 $\mathrm{conv}(\mathbf{a}_j + \mathbf{t}, \mathbf{b}_j + \mathbf{t})$ 的内部，该边属于 P。重复 定理 2.5的证明中对 (1) 的计算，可得

$$\int_{P\cap H(\mathbf{u},\beta)} f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{\Delta\in\mathcal{T}} |\det M_\Delta(\mathbf{u},\beta)| \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{c_{\boldsymbol{\alpha}}}{(|\boldsymbol{\alpha}| + d - 1)!} \sum_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ \mathbf{p}\leq\boldsymbol{\alpha}}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|-|\mathbf{p}|} \binom{\alpha_1}{p_1} \cdots \binom{\alpha_d}{p_d} \cdot$$
$$\cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}, \\ |\mathbf{k}|=|\boldsymbol{\alpha}|}} \langle\ \mathbf{p},\ \mathbf{v}_{j_1}(\mathbf{u},\beta)\ \rangle^{k_1} \cdots \langle\ \mathbf{p},\ \mathbf{v}_{j_d}(\mathbf{u},\beta)\ \rangle^{k_d},$$

这是关于 u_1、……、u_d、β 的有理函数。 □

这一结果意味着 $\int_{P\cap H(\mathbf{u}\ \beta)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$是一个分段有理函数。其有理表达式所定义的区域现在是多面体，这与 第 3.1 小节不同；不过需限制在球面上，而且这些区域位于 $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$\{(\mathbf{u},\beta) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \mathbf{u} \in R, \beta \in C(\mathbf{u})\} \cap \left(S^{d-1} \times \mathbb{R}\right),$$

对于某个区域 $R \subset \mathcal{R}\ (P)$ 和室 $C(\mathbf{u}) \subset \mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$，其中 $\mathbf{u} \in R \cap S^{d-1}$。在这种平移情形下，室 $C(\mathbf{u})$ 的形状为 $\langle \mathbf{v}_i,\ \mathbf{u}\rangle \leq \beta \leq \langle \mathbf{v}i+1,\ \mathbf{u}\rangle$，因此它

在 $\mathbb{R}^{d+1}$中定义了一个多面体。每个区域的每个室都对应唯一这样的多面体，因而也对应唯一这样的有理函数。以下是在平移情形下与命题 3.5对应的表述。

命题 3.11。 在每个切片室中，有理函数 $\int_{P\cap H(\mathbf{u},\beta)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 满足以下次数界：

$$\begin{aligned}\deg \text{ numerator}\left(\int_{P\cap H(\mathbf{u},\beta)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right) &\le \Big(f_1(P)-(d-1)\Big)(D+d-1)+1,\\ \deg \text{ denominator}\left(\int_{P\cap H(\mathbf{u},\beta)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right) &\le \Big(f_1(P)-(d-1)\Big)(D+d-1).\end{aligned} \tag{4}$$

这里 $f_i(P)$ 表示 P 的 i 维面的数量，而 $D=$次数 f。

证明。 我们可以完全重复命题 命题 3.5证明中的计算。唯一的区别在于，在此框架下，有理函数 $|\det M_\Delta(\mathbf{u}\ \beta)|$ 中。矩阵的最后一行之外的所有行，其元素都是两个二次多项式之商。第 i 行每个元素的分母对于所有 $i=2,\ldots\ldots,\ d$ 都是 $\langle\mathbf{u},\ \mathbf{b}_{j_i}-\mathbf{a}_{j_i}\rangle\langle\mathbf{u},\ \mathbf{b}_{j_1}-\mathbf{a}_{j_1}\rangle$。因此，行列式是一个次数为 $2(d-1)+1$ 的多项式与另一个次数为 $2(d-1)$ 的多项式之商。因此，最终，$\int_{P\cap H(\mathbf{u}\,\beta)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ d 的分子和分母次数仅相差 1。

□

例 3.12。我们继续讨论例 3.8、2.11 和2.13。令 R 表示由 P 定义的扫描排列的区域，该排列见例 3.8，并在图 8中以阴影圆锥表示。图 9展示了 $P\cap H(\mathbf{u}\ \beta)$ 的体积，即常函数 1 的积分，针对方向$\mathbf{u}\in R\cap S^{d-1}$ 和 $\beta\in\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$ 以参数形式给出。注意，根据注 2.6，所显示的有理函数在图 5中取$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1、2)$ 时，会专门化为图中的函数。⋄

—

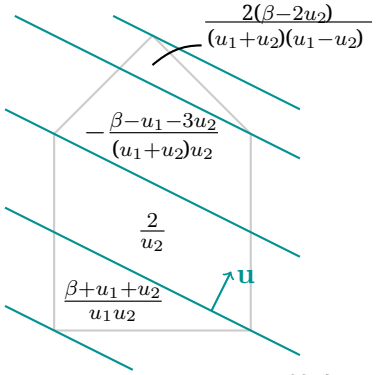


图 9：函数$\int_{P\cap H(\mathbf{u}\,\beta)}1\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\mathrm{vol}(P\cap H(\mathbf{u}\ \beta))$，其中$\mathbf{u}\in R\cap S^{d-1}$，定义见例 3.12。

最后，我们指出，本节介绍了两种不同的胞腔分解，分别受到旋转方法和平移方法的启发。每种分解都由一对超平面排列的选择给出，即余回路排列与中心排列，或扫描排列与平行排列。其结构总结于引言中所呈现的表 1中。

4 寻找最优切片的计算复杂性

本节旨在利用定理 1.1的结果（详见第 3 节），从而得到定理 1.3。我们利用前几节中超平面排列对的结构来进行优化。 定理 3.4 和3.10的证明表明，存在能够找到一个切片的算法，使得多项式积分在该切片上取得最大值。特别地，我们可以找到体积最大的切片。同样地，我们也可以找到具有最大（或最小） P 组合性质的切片。

涉及半空间和投影的相关优化问题，只需对我们的算法进行细微调整即可求解。此外，我们可以结合 定理 1.3 中的优化标准，以寻找例如具有固定组合类型的最大体积截面。所有这些成果都同时与组合优化和凸几何中的问题有关。我们将证明，从复杂性理论的角度来看，其中一些问题通常是困难的，但我们的算法在固定维数下具有多项式复杂度。在以下各节中，我们始终假设算法的输入是有理的。因此，除非另有说明，多胞体 P 将是有理的，而多项式f 将具有有理系数。

4.1 固定维数下的多项式时间复杂度

我们的超平面排列及其相关的室分解可能最重要的特征是，在每个室内，一个仿射超平面与多-胞体 P 相交于一个固定的边集。因此，它们包含了多胞体的超平面截面的所有组合类型。这使我们能够处理有关多胞体切片组合方面的优化问题，从而证明定理 1.3 (ii)的第一部分。

命题 4.1。 我们有一种算法，其输入为一个多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，输出 $f_k(P \cap H)$ 在所有超平面 H上的最大化点和最大值，其中 $f_k(K)$ 是 k维面的数量。对于 d 固定的情形，该算法在多项式时间内运行。

证明。 证明是初等的，可直接由我们对超平面排列的构造得到。我们将使用扫描排列和平行切片来证明，但在旋转情形下也可以得到类似的证明。固定一个区域$R \subset \mathcal{R}$ （P）和一个室 C（$\mathbf{u}$）$\subset C^{\mathbf{u}}$（P），其中$\mathbf{u} \in R \cap S^{d-1}$。那么，对于每个$\mathbf{u}$ 位于其相对内部的$R \cap S^{d-1}$，以及对于每个 β位于 C（$\mathbf{u}$）内部的，超平面截面 $P \cap H$（$\mathbf{u}$ β）具有相同的组合类型。根据命题 3.9，在固定维数 d下，我们需要检查的情形数量是多项式级的。

□

对命题 4.1 证明的直接推广，给出了定理 1.3(iii)中所述优化问题加权版本的证明。事实上，只需分别计算每个区域中每个室的加权计数，再将它们进行比较即可。定理 1.3 (ii) 的第二部分也可由命题 4.1推出，因为给定切片腔室中的超平面分隔的是同一组 k维面 P。

基于我们的超平面排列和此前的结果，我们还可以解决一些度量优化问题。对于每个区域的每个室，在截面上对 P进行多项式积分（或特别地，计算体积）的函数，根据定理 3.4 和3.10是分段有理函数。更准确地说，设 R 是 $\mathcal{R}$（P）的一个区域，其中 ⟳ 或 。设 C

对于给定区域 R中的点， $\mathcal{C}$ 是一个切片腔室。于是，存在两个多项式p_C， q_C使得，对于给定的多项式 f以及来自该切片腔室的超平面 H， $\int_{P\cap H} f\ (\mathbf{x})\ \mathbf{dx} = \frac{p_C}{q_C}$。我们可以通过在各自的室中最大化单个有理函数，然后在这份有限的数值列表中取最大值，来寻找使 $\int_{P\cap H} f\ (\mathbf{x})\ \mathbf{dx}$达到最大值的超平面截面。从复杂度的角度来看，这两类超平面排列的表现相似但又有所不同：

$$\begin{aligned} \max\ & \frac{p_C(\mathbf{t},\mathbf{u})}{q_C(\mathbf{t},\mathbf{u})} \\ \text{s.t. } & \mathbf{t}\in R\subset \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P), \\ & \mathbf{u}\in C(\mathbf{t})\subset \mathcal{C}_{\circlearrowleft}(P+\mathbf{t}), \\ & \mathbf{u}\in S^{d-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \max\ & \frac{p_C(\mathbf{u},\beta)}{q_C(\mathbf{u})} \\ \text{s.t. } & \mathbf{u}\in R\subset \mathcal{R}\ (P), \\ & \mathbf{u}\in S^{d-1}, \\ & \beta\in C(\mathbf{u})\subset \mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P). \end{aligned} \tag{6}$$

对于这些优化问题中的任意一个，我们都能为每个区域的每个室得到（至少）一个解。比较所有结果后，可以在所有超平面截面中得到一个最大值。

例 4.2。继续展示五边形，我们给出一个示例，说明如何在固定区域内分别对径向情形和平移情形下常数多项式 $f = 1$ 的积分进行最大化。换言之，在本例中，我们要寻找最大体积的切片。我们从径向情形开始。五边形区域 $R_{\circlearrowleft}\subset \mathcal{R}_{\circlearrowleft}(P)$ 来自 例 3.2，其为

$$R_{\circlearrowleft} = \{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^2 \mid -3t_1+t_2\geq -2,\ -t_1-t_2\geq 0,\ 3t_1+t_2\geq -2t_1-t_2\geq 0,\ t_2\geq -1\},$$

且如图 7a 所示（回顾注 2.6 ，我们可以取区域和室的闭包）。我们在例 3.6 中已经看到，当限制$\mathbf{t}\in R_{\circlearrowleft}$时，中心排列中的一个切片室为

$$C_{\circlearrowleft}(\mathbf{t}) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid (t_1-1)x_1+(t_2-1)x_2\geq 0,\ t_1x_1+(t_2+2)x_2\geq 0\},$$

and，限制在该区域和室内， $P\cap H(\mathbf{t},\mathbf{u})$ 的体积由下式给出

$$\frac{p(\mathbf{t},\mathbf{u})}{q(\mathbf{t},\mathbf{u})} = \frac{-(t_1u_1+t_2u_2+3u_1-u_2)}{(u_1-u_2)u_1},$$

其中 $\mathbf{u}\in C_{\circlearrowleft}(\mathbf{t})\cap S^{d-1}$。在满足 $\mathbf{t}\in R$,$\mathbf{u}\in C_{\circlearrowleft}(\mathbf{t})\cap S^{d-1}$ 的条件下最大化该函数，可得到$\sqrt{10}$，最大化点为 $\mathbf{t} = (\frac{5}{12},-\frac{3}{4})\in R$以及 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)\in C_{\circlearrowleft}(\mathbf{t})\cap S^{d-1}$。事实上，对于这组参数，$(P+\mathbf{t})\cap\mathbf{u}^{\perp}$得到线段 $\mathrm{conv}((-\frac{7}{12},-\frac{7}{4}),(\frac{5}{12},\frac{5}{4}))$，该线段在其仿射包中的欧几里得体积为$\sqrt{10}$。

对于平移情形，我们在例 3.8中已经看到，扫描排列中的某个区域 $\mathcal{R}\ (P)$ 是

$$R\ = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 0, x_1-x_2\leq 0\}.$$

根据例 3.12，当限制在室 $C\ (\mathbf{u})\ = \{\beta\in\mathbb{R} \mid \langle\mathbf{u},\ \mathbf{v}_5\rangle\leq\beta\leq\langle\mathbf{u},\ \mathbf{v}_3\rangle\}$时，对于$\mathbf{u}\in R\cap S^{d-1}$，体积为

$$\frac{p_C(\mathbf{u},\beta)}{q_C(\mathbf{u})} = \frac{-(\beta-u_1-3u_2)}{(u_1+u_2)u_2}.$$

在 $\mathbf{u} \in R \cap S^{d-1}$, $\beta \in C$ (u) 约束下，该$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}$函数的最大值为 $2\sqrt{2}$，并在$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}$(1, 1) $\in R \cap S^{d-1}$ 和 $\beta = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_5 \rangle = 0$处取得，这小于我们在旋转情形中找到的最大值。事实上，可以验证最大值 $\sqrt{10}$ 在该区域（以及其他区域）中取得

$$R' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 3x_2 \leq 0, x_1 - x_2 \geq 0\},$$

其中包含单位向量 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1) \in R'$。 ◇

两个优化问题（5）和（6）有何比较? 这两个问题都必须针对有限个（事实上是多项式个）区域求解，每个区域都包含有限个切片室。对于旋转版本，即（5），命题 3.3 给出了切片室总数的上界，而命题 3.9 则给出了平移版本（6）的总数上界。这两个上界都是关于顶点数的多项式，适用于固定维数P d。然而，从复杂度的角度来看，这两个问题截然不同。最大化问题的复杂度分析基于 [BPR06，算法 14。9], 我们在下面的引理中对其进行概述。

引理 4.3 ([BPR06，算法 14。9])。 设 D 是包含于某个实闭域（例如 $D = \mathbb{Z}$ 或 $D = \mathbb{Q}$）中的有序域。设 $\mathcal{P} \subset D[x_1, \ldots, x_k]$ 为有限集，且 S 为由仅涉及 $\mathcal{P}$中的多项式的多项式不等式定义的半代数集。考虑 $F \in D[x_1, \ldots, x_k]$。记 s 的元素个数为 $\mathcal{P}$，记 δ 的元素次数的一个上界为 $\mathcal{P}$，并记 F。那么，计算F 在 S上的下确界，以及在最小化点存在时求得该点，其复杂度为 $s^{2k+1}\delta^{O(k)}$。

现在我们将 引理 4.3 应用于由切片室产生的优化问题这一具体情形。回顾一下，我们假设多胞体 P 和多项式 f 定义在 $\mathbb{Q}$上。

命题 4.4。 设 P 是固定维数 d中的一个多胞体。对于旋转情形或平移情形中的每个区域 R 和每个室 C，都存在一个多项式时间算法，可以计算有理函数 $\int_{P \cap H} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$的最大值和最大化点。

证明。 我们在平移情形下证明该结果。正如下文的 注记 4.5中所述，在旋转情形下也可以得到类似的估计。固定一个区域 $R \subset \mathcal{R}$ (P) 和一个切片室 $C \subset \mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$，其中 $\mathbf{u} \in R$。则 R 和 C 分别具有如下形式

$$A\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \qquad \ell_1(\mathbf{u}) \leq \beta \leq \ell_2(\mathbf{u}),$$

其中 A 是一个矩阵，而 $\ell_i(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \rangle$ 对于某些顶点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 属于 P。限制在超平面$H(\mathbf{u}\ \beta)$, $\mathbf{u} \in R$, $\beta \in C$上，积分是有理函数 $\int_{P \cap H(\mathbf{u}\ \beta)} f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} = {}^{p_C(\mathbf{u}\ \beta)}\!/_{q_C(\mathbf{u})}$。我们引入一个辅助变量 $z \in \mathbb{R}$并定义如下集合:

$$S_C = \{(\mathbf{u}, \beta, z) \in \mathbb{R}^{d+2} \mid q_C(\mathbf{u})\, z - p_C(\mathbf{u}, \beta) = 0,\ A\mathbf{u} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{d} u_i^2 = 1,\ \ell_1(\mathbf{u}) \leq \beta \leq \ell_2(\mathbf{u})\}.$$

求（5）的最大值等价于在满足 $(\mathbf{u}\ \beta, z) \in S_C$ 的条件下求 z 的最大值。我们可以使用 [BPR06, 算法 14.9] 求得这样的最优值。令 δ 为 $q_C(\mathbf{u}\ \beta)\ z - p_C(\mathbf{u}\ \beta)$ 的次数，根据（4），该次数有上界 $\big(f_1(P)\ -(d-1)\big)(D+d-1)\ +1$,

其中 $f_1(P)$ 表示 P 的边数。将 A 的行数限制为 $\mathcal{R}$ (P 中超平面的数量，可得定义 S_C 的多项式数量至多为$s = 1 + \binom{n}{2} + 1 + 2$。因此，根据 引理 4.3，求解本问题最优值的复杂度至多为

$$s^{2d+5}\delta^{O(d)} = \left(\binom{n}{2} + 4\right)^{2d+5} \Big((f_1(P) - (d-1))(D+d-1) + 1\Big)^{O(d)},$$

其中 $n = f_0(P)$ 是 P的顶点数。对于固定的 d，运行时间是多项式的。 □

备注 4.5。 注意，通过应用 [BPR06，算法 14，我们可以完全类似地求解优化问题（6）9]。比较这两个问题的复杂度，归结为比较室的总数以及定义每个室所需的超平面数量。由于无论在哪种情况下，这两个数量都仅关于 P的顶点数（当维数 d 固定时）呈多项式增长，因此我们的算法在两种变体中的复杂度都是多项式的。如第 3.1 和 3.2小节所述，目标函数为有理函数的定义域，在平移情形下是多胞体，在旋转情形下是由二次曲面定义的半代数集。总体而言，平移情形的计算成本更低。

根据 命题 3.3 和 3.9 ，我们只需应用引理 4.3 多项式次。综合上述结果，我们可以证明关于在多胞体切片上优化积分和体积的主要结果。该结果此前表述为 定理 1.3 (i)。我们在表 2 中总结了旋转和平移情形下的算法分析。

定理 4.6。 我们有一种算法，其输入为一个有理凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 和一个次数为 D 且具有有理系数的多项式 f ，输出在所有仿射超平面截面上使 $\int_{P\cap H} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$达到最大值的最大化点和最大值。对于固定的 d，该算法在多项式时间内运行。

证明。在第 3.1 和 3.2 小节中，我们分别给出了所有可能的 P 的仿射超平面截面空间的两种不同分解。为了计算使 $\int_{P\cap H} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 达到最大值的截面，我们需要分别对每个区域和室求解问题（5）或（6），因此总共需要求解 (#regions)(#chambers) 个优化问题。为了建立每个优化问题，我们确定被超平面相交的 P 的边，从而获得切片 $P \cap H$ 所需的组合信息。这样，我们便能计算 $P \cap H$ 的三角剖分，并按照定理 3.4 和 3.10 的证明将目标函数写出。根据构造，该三角剖分中的单形数量关于 $P \cap H$ 的顶点数量呈多项式有界。更准确地说，对于一个具有 m 个顶点的 k 维多胞体，三角剖分中顶维单形的最大数量由 $O(m^{\lceil (k+1)/2 \rceil})$ [DLRS10，命题 2.6.5] 多项式有界。

在我们的情形中， $k + 1 = d$是一个常数，而 m切片 $P \cap H$的顶点数 P由 P的边数和顶点数多项式有界。该数量是变量数以及 P的面不等式数量的多项式，并且在固定维数下可在多项式时间内计算。因此，数学规划可以在关于 P的输入规模的多项式时间内进行编码。最后，命题 4.4 和注记 4.5 表明，问题（5）和问题（6）都可以在多项式时间内求解。我们对每个切片腔室重复这一过程，这意味着根据命题 3.3 和3.9，我们需要进行多项式次。综合起来，计算总复杂度关于输入规模是多项式的。

□

	区域	上界 区域数量	室	上界 室的数量 每个区域	成本 优化 一个腔室
↻	$\mathcal{R}_{↻}$	$\sum_{i=1}^{d} \binom{n}{d}_i$	$\mathcal{C}_{↻}$	$\sum_{i=1}^{d} \binom{n}{i}$	$s^{2d+5}\delta^{O(d)}$ 如注 4.5
	$\mathcal{R}$	$\sum_{i=1}^{d} \binom{n}{2}_i$	$\mathcal{C}^{\mathbf{u}}$	$n-1$	$s^{2d+5}\delta^{O(d)}$ 如命题 4.4

表 2：两种切片分类方法中的复杂度分析详情。在每种情况下， s， δ 分别表示方程的数量以及方程次数的上界。对于两种分解方法，它们有所不同。

需要注意的是，只需稍加努力，我们用于证明定理 1.3 (i) 的方法就可以扩展，从而证明条目(iv) 和(v) 中关于投影和半空间交的其他计算结果。后者与最稠密半球问题有关：给定单位球面 K 上的 n 个点 S^d 位于 d维欧几里得空间中， S^d 的一个半球若包含 K的最大子集，则称其为最稠密半球。已知当维数 d 固定时，该问题可以在多项式时间内求解 [JP78]。

我们的算法在投影和半空间截面情况下的复杂度证明，与前面的讨论完全类似。因此，我们只在下面的证明中概述缺失的关键细节。

证明 定理 *1.3* （*iv*）、（*v*）。 对于 （iv），只需注意，我们之前使用的中心排列的相同切片室 $\mathcal{C}_{↻}(P)$ 会保持对应半空间 H_0^+ 的顶点不变，并且 $P \cap H_0^+$ 的组合类型不会发生变化。类似地，我们用于截面 $P \cap H_0$ 的三角剖分可以很容易地扩展为 $P \cap H_0^+$的三角剖分。因此，定理 2.5 可以推广，从而证明在每个室中，半空间交集的积分是一个有理函数。随后，定理 4.6 的类似版本蕴含了最大值或最小值的多项式性。

定理 1.3 (v) 基于第2.3小节中证明的结果。我们可以在固定维数下用多项式时间计算多胞体的极体 P° 及其对应的超平面排列 $\mathcal{C}_{↻}(P^\circ)$，而且 $\mathcal{C}_{↻}(P^\circ)$ 具有多项式数量的极大开室。由于投影无法区分中心超平面与仿射超平面，因此在此框架下无需使用区域。在每个室中，函数 $\int_{\pi_{\mathbf{u}}(P)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ 是关于$\mathbf{u} \in C \cap S^{d-1}$的多项式，其次数至多为 $2d(D+1)-1$。因此，当维数 引理 4.3 固定时，我们可以用多项式时间计算该多项式在所有投影上的最大值或最小值 d 。

□

4.2 非固定维数下的困难性

在第 4.1 小节中，我们证明了对于固定维数，若干优化问题可以在多项式时间内求解。本节旨在说明，当维数不固定时，这一结论并不成立。我们首先证明寻找最大体积截面的困难性。为此，我们使用下面的引理，其证明由 Francisco Criado Gallart 慷慨提供给我们。

引理 4.7。设 $K \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_d = 0\}$ 是一个$(d-1)$维凸体。存在一个棱锥 $C \subset \mathbb{R}^d$，其底面为 K，使得

$$\max_{H \text{ aff. hyperplane}} \operatorname{vol}(C \cap H) = \operatorname{vol}(K)$$

其中 $K = C \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_d = 0\}$ 且最大值仅在该超平面处取得。

证明。考虑内部中的一点 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{d-1})$，令 $h > 0$ 并将以 K 为底的棱锥定义为

$$C = \operatorname{conv}\left(K, \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ h \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^d.$$

我们要证明，存在 $h > 0$ 使得 C 的最大超平面截面是底面K。证明分为两个步骤。第一步要证明存在$h > 0$使得 C的宽度仅在 $(0, \ldots, 0, 1)$ 方向上取得。回顾一下，C 的宽度定义为 [GK94a]

$$\omega(C) = \min_{\mathbf{u} \in S^{d-1}} \left(\max_{\mathbf{x} \in C} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - \min_{\mathbf{x} \in C} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \right).$$

由于 $\mathbf{p}$ 位于 K 的内部，因此存在 $r > 0$，使得以 $\mathbf{p}$ 为球心、半径为 r 的（$d-1$）维球 $B_{\mathbf{p},r}$ 严格包含于 K 中。因此，取 $h = \frac{r}{2}$ 后，圆锥 $\widetilde{C} = \operatorname{conv}\left(B_{\mathbf{p},r}, \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ h \end{pmatrix}\right)$ 包含于 C 中。利用一些初等几何知识，可以证明 $\widetilde{\omega}(C) = \frac{r}{2}$，且该值仅在 $(0, \ldots, 0, 1)$ 方向上取得。由于 $C \subset C$，C 的宽度 $\widetilde{}$ 至少为 $\frac{r}{2}$。根据构造，除 $(0, \ldots, 0, 1)$ 方向外，C 在所有方向上的宽度都严格大于 C 的宽度；在该方向上，两者相等。因此，$\omega(C) = h$。

证明的第二步是说明，通过选择 h 使得 C 的宽度由最后一个坐标向量实现，C 的底面是体积最大的超平面截面。注意，根据构造，不与底面 K 相交的截面的体积总是小于 K 本身的体积。因此，假设体积最大的截面不是底面，而是由超平面 H 定义的，其中 $H \cap K \neq \emptyset$，并令 $\mathbf{u}$ 为 H的一个法向量。令 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in C$ 分别为 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$ 在 C上的最大化点和最小化点。那么 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_2 \rangle > \omega(C) = h$，且双棱锥 $\operatorname{conv}\left((H \cap C), \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\right)$包含于 C中。因此，我们得到以下一连串的（不）等式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \operatorname{vol} K \cdot h = \operatorname{vol} C &> \operatorname{vol}\left(\operatorname{conv}\left((H \cap C), \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\right)\right) \\ &= \frac{1}{d} \operatorname{vol}(H \cap C) \cdot \left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_2 \rangle\right) \\ &> \frac{1}{d} \operatorname{vol} K \cdot \left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_2 \rangle\right) \end{aligned}$$

这意味着 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_2 \rangle < h$，由此产生矛盾，因为我们选择 h 作为 C 的宽度。

□

众所周知，P当以面或顶点描述给出时，在任意维数下计算多胞体的体积是 [BW91; DF88; Kha93; Law91]。因此，我们可以将这些经典结果与引理 4.7结合起来，从而得到：寻找多胞体的最大体积切片是困难的。

命题 4.8。 设 P 为任意维度的有理多胞体。计算具有最大体积的 $P \cap H$ 超平面截面的体积是#P-困难的。

证明。 反设可以 P高效地计算任意多胞体的最大超平面截面的体积。现在考虑棱锥 $P = \mathrm{conv}(Q,\ (\mathbf{p}_h))$，其中$\mathbf{p} \in Q$，$h > 0$ 且 Q 是分带多面体或序多胞体，或者是任何已知其体积计算为 #P-困难的多胞体（详情参见 [BW91； DF88； DGH98]）。根据引理 4.7，我们可以恰当地选择 $h > 0$，使得 P的最大体积截面实际上是 Q。根据我们的假设，这意味着我们也可以高效地计算 Q 的体积，从而得到矛盾。

□

命题 4.8 表明，给定一个多胞体族，计算其最大体积的超平面截面通常是一项困难的任务。然而，根据定理 1.3(i)，利用我们的超平面排列，当该多胞体族中的多胞体维数固定时，可以在多项式时间内完成计算。类似地，根据 定理 1.3(ii) 和 (iv) ，我们可以检测具有最大顶点数的切片。下面的命题表明，该任务的加权类比是 NP-困难的。此外，我们还表明，对于最大化包含在 P与一个中心半空间的交集中的顶点数，同样的结论也成立。

命题 4.9. 设 P 是一个任意维度的多胞体，其边带有权重。计算使其相交边的权重总和最大的超平面截面是 NP-困难的。类似地，给定一个顶点位于以$\mathbf{o}$为中心的球面上的任意多胞体，求一个由经过$\mathbf{o}$的超平面确定、且使半空间内顶点数量最多的半空间截面，在任意维度下都是 NP-困难的。

证明. 困难性证明将通过归约得到。众所周知，最大割问题是 NP-困难的（它位列 [GJ79]中最初列出的著名 NP-困难问题之列）。注意，任意一个具有 G 个 N 节点的图都是完全图 K_N 的子图，而该完全图是一个（$N-1$维单纯形 Δ_N 的图。我们给 G 的边赋予权重 1，其余边赋予权重 0。现在注意，只要不属于 Δ_N 的边权重为 0（它们不会计入加权割），任意顶点子集都可以由一个超平面分隔。因此，在原图 G 上求最大割，等价于完成单纯形中顶点所对应的定理 1.3(iii) 任务 Δ_N。我们已经证明，即使对于边权重仅为 0 和 1 的单纯形，该问题也已是困难的，因此命题中更强结论的困难性也随之成立。

对于该陈述的第二部分，请注意，最密半球问题（已在第 4.1 小节中提到）是定理 1.3 (iv)的特殊情形，其中多胞体的顶点取在球面上。因此，该问题的困难性直接意味着我们所述问题的困难性。随后，在一篇如今已成为经典的计算几何论文中，Johnson 和 Preparata 证明了，当 d 固定时，存在一种多项式时间算法，可以在多项式时间内解决该问题 [JP78]。但他们还证明了，当维数 NP为任意值时，最密半球问题是 d -困难的，这意味着我们的陈述在任意维度下都是困难的。

□

最后，我们猜想，即使不考虑权重，且更一般地，对所有面维数而言，这仍然是 NP-难问题。我们还猜想，计算最优投影是 #P-难问题。这一猜想的依据是，计算平行*otope*的体积很困难，因为这意味着计算多胞体投影的体积也很困难 [DGH98]。

猜想。设 P 是一个多胞体。那么，

(i) 找到一个能够使 $P \cap H$ 的 i 维面的数量最大化的超平面 H 是 NP-困难的。(ii) 找到一个能够使 P 到 H 的正交投影体积最大化的超平面 H 是 $\#P$-困难的。(iii) 找到一个能够使半空间截面 $P \cap H_0^+$ 的体积最大化的中心超平面 H_0 是 NP-困难的。

5 实验结果

在最后一节中，我们介绍使用定理2.5、2.12、3.4 和 3.10的证明中所用算法进行的一些具体计算。我们介绍所有五种柏拉图立体的最大体积切片、针对各种最优性准则的三维排列多面体的最优切片，并介绍维数为 4 和 5 的交叉多胞体作为仿射超平面截面时可能出现的不同多胞体组合类型。

考虑到 第 4 节中的复杂度分析，我们选择采用 第 3.2 小节 中的方法来计算一般的仿射超平面截面。由于中心对称多胞体的最大体积切片始终是中心截面，我们采用 第 2.1 小节 中的方法来寻找中心对称柏拉图立体的最大体积切片。我们在SageMath（版本9.2） [Sag21] 中实现了所有方法，该程序分别计算相应的超平面排列和有理函数，或组合性质的代表元。所有算法的实现均可应要求提供。最大化依赖于 `Maximize`命令，该命令属于 Mathematica（版本13.2） [Wol22]。

我们强调，所有计算均在普通笔记本电脑上完成，并且我们的实现仍有很大的优化空间。例如，每个区域的计算彼此独立，因此，在完成各区域的计算后，该过程可以并行化。

例 5.1 （置换多面体）。 令 $P \subset \mathbb{R}^4$ 为由 (1，2，3，4) 的所有置换的凸包定义的三维排列多面体。这是包含在超平面 $\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10\} \subset \mathbb{R}^4$ 中的一个三维多胞体，其欧几里得体积为 32。具有最大体积的超平面截面之一是以下各点的凸包

$$(1,2,3,4), (1,3,2,4), (2,4,1,3), (3,4,1,2), (4,3,2,1), (4,2,3,1), (3,1,4,2), (2,1,4,3).$$

其他这样的切片可通过对称性得到。在 P 的仿射包中产生该截面的超平面方程为

$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10\} \cap \{x_1 + x_4 = 5\},$$

an且截面的体积为 14。这在引言中的图1a 中进行了可视化 n.

另一方面，经过原点的 P 的最小体积切片由 P 与.....的交集给出

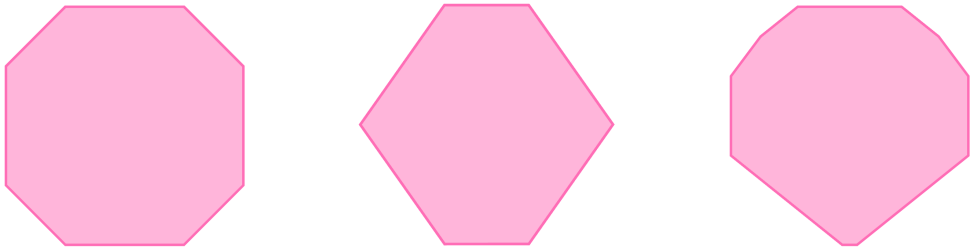
$$\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10\} \cap \{x_1 - x_2 = 0\},$$

这个多边形的体积为 $8\sqrt{2}$。它是以下各点的凸包

$$(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},3,4),(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},4,3),(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2},1,4),(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2},4,1),(\tfrac{7}{2},\tfrac{7}{2},1,2),(\tfrac{7}{2},\tfrac{7}{2},2,1),$$

显示于图 1b。请注意，这是由置换 $\sigma = (12)$ 所固定的置换多面体截面，[ASVM21]所关注的对象。

从纯粹的组合观点来看，置换多面体有八种不同类型的截面。这些截面是具有 3、4、...、10 个顶点的多边形。具有 10 个顶点的截面如图 1c所示。图 10展示了本例中讨论的三个最优切片，它们被投影到各自的仿射包上。◇



（a）最大体积的切片。（b）包含原点的最小体积切片。（c）具有最多顶点的切片。

图 10：针对不同最优性准则的三维置换多面体最优切片。

例5.2（柏拉图立体和最大体积）。利用我们的算法，我们可以找到柏拉图立体的最大体积切片。由于它们具有对称性，这样的超平面并不唯一。这里给出一种可能答案的描述。其他答案可以利用多胞体的对称性得到。我们在表 3中总结了我们的发现，并在图 11中将其可视化。我们特别指出十二面体这一令人惊讶的情形：其最大体积切片不包含十二面体的任何顶点。◇

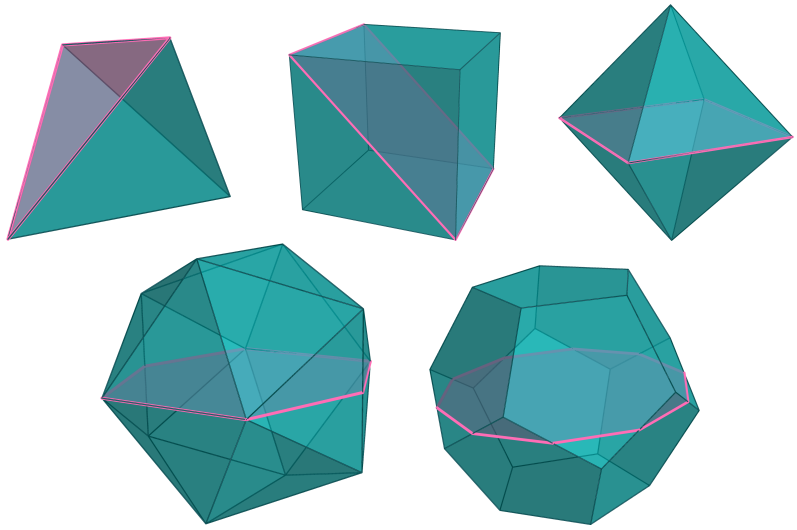


图 11：柏拉图立体及其粉色超平面截面（在对称性意义下唯一），该截面具有最大体积。

P	顶点 P	体积 P	超平面 H	体积$(P \cap H)$
四面体	$(\pm 1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, \pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$2x + 1 = \sqrt{2}z$	$\sqrt{3}$
cube	$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$	8	$x + y = 0$	$4\sqrt{2}$
八面体	$(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$	$\frac{4}{3}$	$z = 0$	2
二十面体	$(0, \pm\frac{1}{2}, \pm(\frac{\sqrt{5}+1}{4}))$, $(\pm(\frac{\sqrt{5}+1}{4}), 0, \pm\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm(\frac{\sqrt{5}+1}{4}), 0)$	$\frac{5(\sqrt{5}+3)}{12}$	$z = 0$	$\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+3)}{8} \sim 2.12$
十二面体	$(0, \pm(\sqrt{5}-1), \pm(2\sqrt{5}-4))$ $(\pm(2\sqrt{5}-4), 0, \pm(\sqrt{5}-1))$ $(\pm(\sqrt{5}-1), \pm(2\sqrt{5}-4), 0)$ $(\pm(\sqrt{5}-3), \pm(3-\sqrt{5}), \pm(3-\sqrt{5}))$	$400 - 176\sqrt{5}$	$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}z$	$\frac{320(15127\sqrt{5}-33825)}{(3\sqrt{5}-7)^4(\sqrt{5}-1)\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}$ ~ 4.49

表 3：柏拉图立体的最大体积截面。

例5.3（交叉多胞体和组合类型）。当 $P \cap H$ 是一个交叉多胞体时，可能出现多少种仿射超平面截面的组合类型？利用我们的算法，我们得到：如果 P 是三维交叉多胞体，则其二维超平面截面可以有四种组合类型：三角形、四边形、五边形或六边形。我们注意到，只有当定义超平面包含交叉多胞体的一个顶点时，才能得到五边形。

若 P 是四维交叉多胞体，则我们得到九种不同的组合类型，汇总于表4。我们首先计算扫描排列$\mathcal{R}(P)$，它由 384 个极大区域组成，然后为$\mathbf{u} \in R$ 中的 1696 个维数至少为 1 的圆锥各选取一个方向 $\mathcal{R}(P$。接着，我们构造平行超平面的超平面排列 $\mathcal{C}^{\mathbf{u}}(P)$，并为该排列的每个单元存储一个超平面截面的组合类型。

五维交叉多胞体的扫描排列有 24482 个正维数圆锥，其中 3840 个维数为 5。运行我们的算法后，我们只得到 14 种不同的超平面截面组合类型。这些类型汇总于表5。值得指出的是，无论在维数为 4 还是 5 的情况下，交叉多胞体的截面中恰好有两种组合类型，其 f-向量相同。这两种类型都使各个 k维面的数量达到最大值。 k。

最后，我们注意到交与投影之间的对偶性，详见 第 2.3 小节。由于交叉多胞体是立方体的极体，这种对偶性也适用于它们的截面与投影。因此，我们推得，3、4、5 维立方体投影到超平面所得的组合类型分别有 5、9、14 种。 ◇

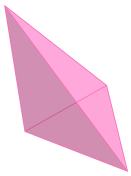
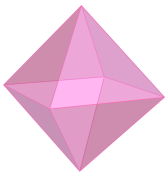
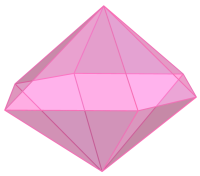
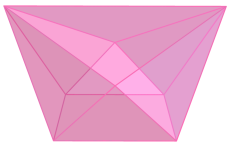
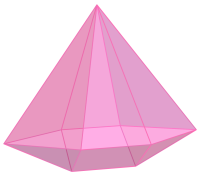
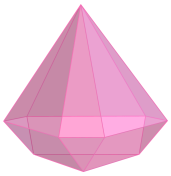
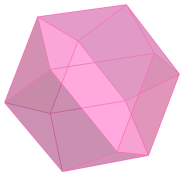
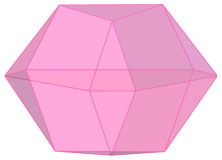
$P \cap H$			
f维向量	(4, 6, 4)	(6、12、8)	(8, 18,12)
H	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$	$2x_1 = 1$	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$P \cap H$			
f维向量	(8、17、11)	(9,19, 12)	(10, 20,12)
H	$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$	$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$	$2x_1 + 2x_2 = 1$
$P \cap H$			
f向量	(10,21, 13)	(12、24、14)	(12, 24,14)
H	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$

表4：九个粉色多胞体涵盖了四维交叉多胞体超平面截面的所有可能组合类型。

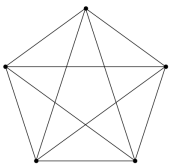
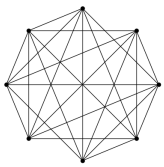
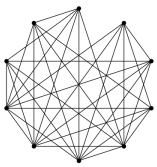
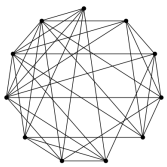
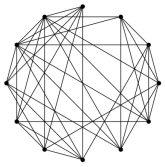
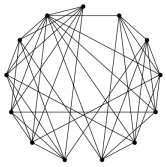
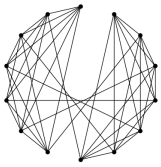
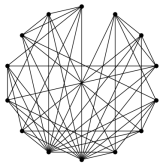
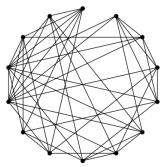
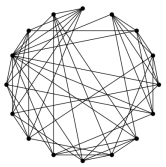
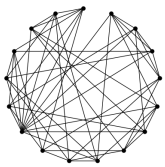
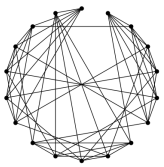
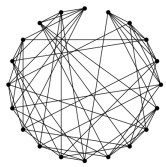
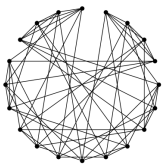
$P \cap H$				
f向量	(5, 10, 10, 5)	(8, 24, 32, 16)	(10, 34, 48, 24)	(11, 36, 48, 23)
H	$x_1 + x_2 + x_3$ $+x_4 + x_5 = 1$	$2x_1 = 1$	$x_1 + x_2$ $+x_3 = 0$	$2x_1 + 2x_2 + x_3$ $+x_4 + x_5 = 1$
$P \cap H$				
f向量	(12,39,51,24)	(13,41,52,24)	(14, 42, 52, 24)	(14,48,62,28)
H	$2x_1 + 2x_2$ $+x_3 + x_4 = 1$	$2x_1 + 2x_2$ $+x_3 = 1$	$2x_1 + 2x_2 = 1$	$x_1 + x_2$ $+x_3 + x_4 = 0$
$P \cap H$				
f-向量	(14,46,59,27)	(16,51,63,28)	(17, 54, 66, 29)	(18, 54, 64, 28)
H	$2x_1+2x_2+2x_3$ $+x_4 + x_5 = 1$	$2x_1 + 2x_2$ $+2x_3 + x_4 = 1$	$2x_1+2x_2+2x_3$ $+2x_4 + x_5 = 1$	$2x_1 + 2x_2$ $+2x_3 = 1$
$P \cap H$				
f 向量	(20, 60, 70, 30)	(20,60,70,30)		
H	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$		

表5：5维交叉多胞体的各截面组合类型的边图。仅凭图即可区分组合类型。

致谢。 本研究始于我们访问莱比锡的马克斯·普朗克研究所期间，随后在布朗大学计算与实验研究数学研究所（一个由美国国家科学基金会根据第 DMS-1929284 号拨款支持的美国国家科学基金会研究所）举办的“离散优化：数学、算法与计算”学期项目期间得以完整开展。Marie-Charlotte Brandenburg 得到了德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）的资助，项目为 SPP 2298。感谢 Francisco Criado Gallart 提出 引理 4.7的证明并允许我们将其纳入本文。感谢 Amitabh Basu、Saugata Basu、Peter B¨urgisser、Daniel Dadush、Jim Lawrence、Michael Roysdon、Martin Skutella、L´aszl´oV´egh、Stefan Weltge 以及其他参与者提出的建议和意见。

参考文献

[ASVM21] Federico Ardila、Anna Schindler 和 Andr´és R. Vindas-Mel´endez。“置换多面体的等变体积”。载于：《离散计算几何》65.3（2021），第 618–635 页。ISSN：0179-5376。 DOI：10.1007/s00454-019-00146-2。[Bal86] Keith Ball。“立方体截面 in $\mathbb{R}^n$”。载于：《美国数学会会刊》97.3（1986），第 465–473 页。ISSN：0002-9939。 DOI：10.2307/2046239。[Bal89] Keith Ball。“立方体的截面体积及相关问题”。载于：《泛函分析的几何方面》（1987–88）。第 1376 卷。《数学讲义》。Springer，柏林，1989 年，第 251–260 页。 DOI：10.1007/BFb0090058。[Bar02] Alexander Barvinok。《凸性课程》。第 54 卷。《数学研究生教程》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002 年，第 x+366 页。 ISBN：0-8218-2968-8。DOI：10.1090/gsm/054。[BBDL+11] Velleda Baldoni、Nicole Berline、Jesus A. De Loera、Matthias K¨oppe 和 Michele Vergne。“如何在单纯形上对多项式积分”。载于：《数学计算》80.273（2011），第 297–325 页。 ISSN：0025-5718。 DOI：10.1090/S0025-5718-2010-02378-6。[BBMS22] Katalin Berlow、Marie-Charlotte Brandenburg、Chiara Meroni 和 Isabelle Shankar。“多胞体的交体”。载于：《代数与几何通报》。代数与几何论文集 63.2（2022），第 419–439 页。¨：0138-4821。 ISSN：10. 1007/s13366-022-00621-7。 DOIBKS[Louis J. Billera、Mikhail. M. Kapranov 和 Bernd Sturmfels。“多胞体上的胞腔串”。载于：《美国数学会会刊》122.2（1994），第 549–555 页。94] ：0002-9939。 ISSN：10.2307/2161048。DOIBM[Marie-Charlotte Brandenburg 和 Chiara Meroni。“多胞体的交体：平移与凸性”。2023 年。arXiv：2302.11764。23] BP[Alexander Barvinok 和 James E. Pommersheim。“多面体中格点的算法理论”。载于：《代数组合学的新视角》（美国加利福尼亚州伯克利，1996–97）。第 38 卷。数学科学研究所出版物。剑桥大学出版社，剑桥，1999 年，第 91–147 页。99] BPR[Saugata Basu、Richard Pollack 和 Marie-Fran06] çoise Roy。《实代数几何中的算法》。第二版。第 10 卷。《数学中的算法与计算》。Springer-Verlag，柏林，2006 年，第 x、页。+662：978-3-540-33098-1。 ISBN：10 . 1007 / 3 - 540 - 33099-2。 DOI BS[Louis J. Billera 和 Bernd Sturmfels。“纤维多胞体”。载于：《数学年刊》（第 2 辑）135.3（1992），第 527–549 页。92] ：0003-486X。 ISSN：10.2307/2946575。 DOIBW[Graham Brightwell 和 Peter Winkler。“计算线性扩张”。载于：《序》8.3（1991），第 225–242 页。91] ：0167-8094。 ISSN：10.1007/BF00383444。 DOICF[G. Don Chakerian 和 Paul Filliman。“立方体投影的测度”。载于：《匈牙利数学科学研究》21.1-2（1986），第 103–110 页。86] ：0081-6906。 ISSNCL[G. Don Chakerian 和 Dave Logothetti。“立方体截面、图示三角形与概率”。载于：《数学杂志》64.4（1991），第 219–241 页。91] ：0025-570X。 ISSN：10.2307/2690829。 DOIDF[Martin E. Dyer 和 A. M. Frieze。“计算多面体体积的复杂度”。载于：《SIAM 计算学报》17.5（1988），第 967–974 页。88] ：0097-5397。 ISSN：10.1137/0217060。 DOIDGH[Martin E. Dyer、Peter Gritzmann 和 Alexander Hufnagel。“计算混合体积的复杂度”。载于：《SIAM 计算学报》27.2（1998），第 356–400 页。98] ：0097- 5397。 ISSN：10.1137/S0097539794278384。

[DLRS10] Jes´us A. De Loera、J¨org Rambau 和 Francisco Santos。《三角剖分》。第 25 卷。《数学中的算法与计算》。算法与应用的结构。Springer-Verlag，柏林，2010年，第 xiv+535 页。 ISBN：978-3-642-12970-4。 DOI：10.1007/ 978-3-642-12971-1。[FH22] Ansgar Freyer 和 Martin Henk。“通过切片与投影得到的格点计数函数界”。载于：《离散计算几何》67.3（2022年），第 895–918 页。 ISSN：0179-5376。DOI：10.1007/s00454-021-00310-7。[Fil92] Paul Filliman。“多胞体的对偶体与截面的体积”。载于：Mathematika 39.1（1992年），第 67–80 页。 ISSN：0025-5793。 DOI：10.1112/S0025579300006860。[FMGN97] Hiroshi Fukuda、Nobuaki Muto、Kikuko Goto 和 Gisaku Nakamura。“五维超立方体的截面”。载于：Forma 12.1（1997年），第 15–33 页。 ISSN：0911-6036。[FSTT91] Komei Fukuda、Shigemasa Saito、Akihisa Tamura 和 Takeshi Tokuyama。“超平面配置中 k-面的数量上界”。载于：《离散应用数学》31.2（1991年）。第一届加拿大计算几何会议（蒙特利尔，魁北克省，1989年），第 151–165 页。 ISSN：0166-218 X。 DOI：10.1016/0166-218X(91)90067-7。[Gar06] Richard J. Gardner。《几何断层成像》。第二版。第 58 卷。《数学百科全书及其应用》。剑桥大学出版社，纽约，2006年，第 xxii+492 页。 ISBN：9781107341029。 DOI：10.1017/CBO9781107341029。[GJ79] Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性》。数学科学丛书。NP 完全性理论指南。W. H. Freeman and Co.，旧金山，加利福尼亚州，1979年，第 x+338 页。 ISBN：0-7167-1045-5。[GK94a] Peter Gritzmann 和 Victor Klee。“计算凸性中若干基本问题的复杂度。一：包含问题”。载于：《离散数学》136.1-3（1994年）。《离散数学趋势》，第 129–174 页。 ISSN：0012-365X。 DOI：10.1016/0012- 365X(94)00111-U。[GK94b] Peter Gritzmann 和 Victor Klee。“计算凸性中若干基本问题的复杂度。二：体积与混合体积”。载于：《多胞体：抽象、凸与计算》（斯卡伯勒，安大略省，1993年）。第 440 卷。北约高级研究所系列 C：数学与物理科学。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1994年，第 373–466 页。 DOI：10.1007/ 978-94-011-0924-6_17。[GK97] Peter Gritzmann 和 Victor Klee。“计算凸性”。载于：《离散与计算几何手册》。CRC Press 离散数学应用系列。CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，1997年，第 491–515 页。[GKZ23] Apostolos Giannopoulos、Alexander Koldobsky 和 Artem Zvavitch。“凸体截面与投影的不等式”。2023年。arXiv：2302.04347。[GLPR12] Nick Gravin、Jean B. Lasserre、Dmitrii V. Pasechnik 和 Sinai Robins。“凸多胞体的逆矩问题”。载于：《离散计算几何》48.3（2012年），第 596–621 页。 ISSN：0179-5376。 DOI：10.1007/s00454-012-9426-4。[Gr¨u67] Branko Gr¨unbaum。《凸多胞体》。《纯粹与应用数学》，第 16 卷。在 Victor Klee、M. A. Perles 和 G. C. Shephard 的协助下完成。Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1967年，第 xiv+456 页。[JP78] David S. Johnson 和 Franco P. Preparata。“最密半球问题”。载于：《理论计算机科学》6.1（1978年），第 93–107 页。 ISSN：0304-3975。 DOI：10.1016/0304- 3975(78)90006-3。[Kha93] Leonid Khachiyan。“多胞体体积计算的复杂度”。载于：《离散与计算几何新趋势》。第 10 卷。《算法与组合学》。Springer，柏林，1993年，第 91–101 页。 DOI：10.1007/978-3-642-58043-7_5。

[Kho06] Askold Khovanskii。“罗巴切夫斯基空间中的多胞体截面组合学与考克斯特群”。载于：《考克斯特遗产》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006年，第 129–157 页。[KL22] Bo’az Klartag 和 Joseph Lehec。“Bourgain 切片问题与 KLS 等周问题的多对数界”。载于：《几何与泛函分析》32.5（2022年），第 1134–1159 页。 ISSN：1016-443X。DOI：10.1007/s00039-022-00612-9。[Kla23] Bo’az Klartag。“等周问题与凸集切片的对数界”。2023年。arXiv：2303.14938。[KM22] Bo’az Klartag 和 Vitali Milman。“Bourgain 切片问题”。载于：《广义分析：献给 Jean Bourgain 的一生与工作》。Artur Avila、Michael Th. Rassias 和 Yakov Sinai 编。Cham：Springer International Publishing，2022年，第 203– 231 页。 ISBN：978-3-031-05331-3。 DOI：10.1007/978-3-031-05331-3_9。[Kol05] Alexander Koldobsky。《凸几何中的傅里叶分析》。第 116 卷。《数学综述与专著》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005年，第 vi+1 页

70.

ISBN：0-8218-3787-7。 DOI：10.1090/surv/116。[K¨on21] Hermann K¨onig。《单纯形、交叉多胞体和立方体的非中心截面》。载于：Adv. Math. 376（2021），论文编号107458，35页。 ISSN：0001-8708。 DOI：10. 1016/j.aim.2020.107458。[KS21] Astrid Kousholt和Julia Schulte。《从矩重构凸体》。载于：Discrete Comput. Geom. 65.1（2021），第1–42页。 ISSN：0179-5376。 DOI：10.1007/ s00454-020-00225-9。[LA01] Jean B. Lasserre和Konstantin E. Avrachenkov。《多维版本的$\int_a^b x^p dx$》。载于：Amer. Math. Monthly 108.2（2001），第151–154页。 ISSN：0002-9890。 DOI：10.2307/2695528。[Las21] Jean B. Lasserre。《在单纯形上进行多项式积分的简单公式》。载于：BIT 61.2（2021），第523–533页。 ISSN：0006-3835。 DOI：10.1007/s10543-020-00828-x。 URL：https://doi.org/10.1007/s10543-020-00828-x。[Law79] Jim Lawrence。《切割 d-立方体》。载于：J. Res. Nat. Bur. Standards 84.1（1979），第51–53页（1978）。 ISSN：0022-4340。 DOI：10.6028/jres.084.004。[Law91] Jim Lawrence。《多胞体体积计算》。载于：Math. Comp. 57.195（1991），第259–271页。 ISSN：0025-5718。 DOI：10.2307/2938672。[LT20] Ruoyuan Liu和Tomasz Tkocz。《关于交叉多胞体极值非中心截面的注记》。载于：Adv. in Appl. Math. 118（2020），第102031页，共17页。 ISSN：0196-8858。DOI：10.1016/j.aam.2020.102031。[Lut88] Erwin Lutwak。《交体与对偶混合体积》。载于：Adv. in Math. 71.2（1988），第232–261页。 ISSN：0001-8708。 DOI：10.1016/0001-8708(88)90077-1。[MP88] Mathieu Meyer和Alain Pajor。《 L_p^n单位球的截面》。载于：J. Funct. Anal. 80.1（1988），第109–123页。 ISSN：0022-1236。 DOI：10.1016/0022-1236(88)90068-7。[MSZZ13] James Moody、Corey Stone、David Zach和Artem Zvavitch。《关于单位立方体极值非中心截面的注记》。载于：渐近几何分析。第68卷。Fields Inst. Commun. Springer，纽约，2013年，第211–228页。 DOI：10.1007/978-1-4614-6406-8_9。[NT22] Piotr Nayar和Tomasz Tkocz。《某些凸体的极值截面与投影：综述》。2022年。arXiv：2210.00885。[Pou22] Lionel Pournin。《超立方体的浅截面》。载于：Israel Journal of Mathematics（2022年11月）。 DOI：10.1007/s11856-022-2400-9。

[PP15] Arnau Padrol和Julian Pfeifle。《多边形作为高维多胞体的截面》。载于：电子组合学杂志22.1（2015），论文1.24，共16页。 DOI：10.37236/4315。[PP21] Arnau Padrol和Eva Philippe。《扫描、多胞体、定向拟阵和排列的可容许图》。2021年。arXiv：2102.06134。[Sag21] Sage开发者。SageMath，Sage数学软件系统（版本9.2）。2021年。 URL：https://www.sagemath.org。[Sch14] Rolf Schneider。《凸体：Brunn-Minkowski理论》。扩展版。第151卷。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，剑桥，2014年，第xxii+736页。 ISBN：978-1-107-60101-7。[Sta07] Richard P. Stanley。《超平面排列导论》。载于：几何组合学。第13卷。IAS/Park City Math. Ser. 美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年，第389–496页。 DOI：10.1090/pcms/013/08。[Vaa79] Jeffrey D. Vaaler。《一个应用于线性形式的几何不等式》。载于：Pacific J. Math. 83.2（1979），第543–553页。 ISSN：0030-8730。 URL：http://projecteuclid.org/ euclid.pjm/1102784529。[Wal68] David W. Walkup。《一个具有大截面的单纯形》。载于：Amer. Math. Monthly 75（1968），第34–36页。 ISSN：0002-9890。 DOI：10.2307/2315102。[Web96] Simon Webb。《正单纯形的中心切片》。载于：Geom. Dedicata 61.1（1996），第19–28页。 ISSN：0046-5755。 DOI：10.1007/BF00149416。[Wol22] Wolfram Research 公司。Mathematica（版本13.2）。Champaign，伊利诺伊州。2022年。 URL：https: // www.wolfram.com/mathematica。[Zas75] Thomas Zaslavsky。《面对配置：由超平面划分空间的面数公式》。载于：Mem. Amer. Math. Soc. 1.issue 1，154（1975），第vii+102页。ISSN：0065-9266。 DOI：10.1090/memo/0154。[Zie95] G¨unter M. Ziegler。《多胞体讲义》。第152卷。数学研究生教材。Springer-Verlag，纽约，1995年，第x+370页。 ISBN：0-387-94365-X。 DOI：10.1007/978- 1-4613-8431-1。

Marie-Charlotte Brandenburg
Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences
Inselstrasse 22, 04103 Leipzig, Germany
marie.brandenburg@mis.mpg.de

Jesús A. De Loera
Department of Mathematics
One Shields Avenue, Davis CA 95616,
USAdeloera@math.ucdavis.edu

Chiara Meroni
Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics
121 South Main Street, Providence 02903, RI, USAchiara_meroni@brown.edu